REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de mathématiques et informatique

Thèse de Doctorat en Sciences

Spécialité: mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présentée par

M^{me} **Berrighi Nacera**

THEME

Quelques propriétés des solutions de certaines équations différentielles linéaires dans le domaine complexe

Soutenue le 29/09/2016 **devant le Jury**

Mr BELAIDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**U. Mostaganem**
Mr SENOUSSAOUI Abderrahmane	**Examinateur**	**Pr**	**U. Oran**
Mr BENMERIEM Khaled	**Examinateur**	**MCA**	**U. Mascara**
Mr SEGRES Abdelkader	**Examinateur**	**MCA**	**U. Mascara**
Mme HAMANI Karima	**Examinatrice**	**Pr**	**U. Mostaganem**
Mr HAMOUDA Saâda	**Encadreur**	**Pr**	**U. Mostaganem**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes vifs remerciements pour mon directeur de thèse Monsieur HAMOUDA Saâda pour avoir accepté d'encadrer cette thèse, ainsi que pour son soutien, ses remarques pertinentes et son encouragement.

Je tiens à remercier les membres de mon jury pour avoir accepté de participer à la soutenance de cette thèse en commençant par Monsieur BELAIDI Benharrat pour avoir accepté de présider le jury.

Je remercie vivement Madame HAMANI Karima, Monsieur SNOUSSAOUI Abderrahmane, Monsieur BENMERIEM Khaled et Monsieur SEGRES Abdelkader, pour avoir consacré du temps à la lecture de ce document en tant que examinateurs de ce travail.

Je remercie toute ma famille pour son soutien tout le long de cette thèse notamment dans les moments les plus difficiles.

Table des Matières

Introduction

L'importance de l'étude de la relation entre la fonction et ses dérivées est explicite dans plusieurs problèmes physiques et d'autres; et à partir de là, la notion des équations différentielles est apparu. Historiquement, les équations différentielles sont apparues tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie; et depuis, la théorie des équations différentielles joue un rôle essentiel aussi bien dans les divers domaines des mathématiques que dans les autres sciences. Si, dans les premières investigations, l'on s'attachait surtout à en calculer les solutions d'une manière explicite au moyen de fonctions déjà connues, très vite ce point de vue s'affirma trop étroit. Il y a une autre approche concernant l'étude de l'existence et l'unicité des solutions qui vérifient certaines conditions. Puis cette notion et d'autres ont été étendu aux fonctions complexe de la variable complexe depuis l'apparition des nombres complexe.

En 1925, la naissance de la théorie de R. Nevanlinna de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe a donné des outils trés efficaces pour l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires et non linéaires dans le plan complexe. En 1968, Whitich (voir [38]) a montré que: toutes les solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_0(z) f = 0$$

sont d'ordre fini, si et seulement si, les coefficients $A_0, ..., A_{k-1}$ sont des polynômes. Frei [16] a prouvé que si p est le plus grand indice tel que A_p est une fonction entière transcendante, alors il existe au plus p solutions linéairement independantes d'ordre fini. En 1982, La théorie de l'oscillation complexe des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe $\mathbb{C}$ a été introduite la première fois par Bank et Laine [2]; ils ont étudié l'oscillation des équations différentielles de la forme $f'' + Af = 0$ où A est une fonction entière; puis en 1983, ils ont étudié les zéros des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires de second ordre.

Dans ce travail, on s'intéresse à étudier la croissance, la distribution des zéros et les point fixes des solutions de certaines classes d'équations différentielles linéaires dans le plan complexe et dans le disque unité.

Cette thèse est composée de quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à quelques définitions, notions et notations de la théorie de R. Nevanlinna et la théorie de Wiman-Valiron qui sont nécessaire pour notre travail. Le deuxième chapitre qui est la première partie de notre travail consiste à étudier la croissance des solutions des équations différentielles linéaires sous la forme

$$f^{(k)}+\left(A_{k-1}\left(z\right)e^{P_{k-1}(z)}e^{\lambda z^m}+B_{k-1}\left(z\right)\right)f^{(k-1)}+....+\left(A_0\left(z\right)e^{P_0(z)}e^{\lambda z^m}+B_0\left(z\right)\right)f=0,$$

où les coefficients sont des fonctions entières de même ordre et de même type. Dans le troisième chapitre, on étudit la croissance des solutions des équations nonhomogènes sous la forme

$$f^{(k)}+B_{k-1}\left(z\right)e^{P_{k-1}(z)}e^{\lambda z^m}f^{(k-1)}+...+B_0\left(z\right)e^{P_0(z)}e^{\lambda z^m}f=H\left(z\right),$$

où $H\left(z\right)\not\equiv 0$ est une fonction entière. Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la croissance et la distribution des zéros des solutions et leurs dérivées de certaines classes d'équations différentielles linéaires dans le disque unité. Pour cela, on utilise la version de la théorie de Nevanlinna dans le disque unité.

Ce travail a fait l'objet de trois publications [5, 6, 7].

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.1 *[24, 31, 40] Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z)=a$, situées dans le disque $|z|\leq t$, chaque racines étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$. Posons*

$$\begin{aligned} N(r,a,f) &= N(r,\frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt + n(0,a,f)\log r, \quad (1.1)\\ \text{tel que } a &\neq \infty \end{aligned}$$

et

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt + n(0,\infty,f)\log r. \quad (1.2)$$

$N(r,a,f)$ est appelée la fonction $a-$points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$. Elle caractérise la densité des zéros de l'équation $f\ (z) = a$ dans le disque $|z| \leq r$.

$$m(r,a,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, \qquad a \neq \infty, \tag{1.3}$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta; \tag{1.4}$$

où

$$\log^+ x = \max\left(\ln x, 0\right) = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

pour tout $x > 0$ réel. $m(r,a,f)$ est la fonction de proximité de la fonction f au point a. Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction f au point a.

On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f). \tag{1.6}$$

Exemple 1:

1. Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a

$$\begin{cases} m\left(r,f\right) = \frac{r}{\pi}, \\ N\left(r,f\right) = 0 \end{cases} \implies T\left(r,f\right) = m(r,f) + N(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

2. Pour la fonction $f(z) = e^{3z^4}$, on a

$$\begin{cases} m(r,f) = 3\frac{r^4}{\pi}, \\ N(r,f) = 0 \end{cases} \implies T(r,f) = 3\frac{r^4}{\pi}.$$

La proposition suivante contient quelques propriétés de $\log^+$.

Proposition 1.1.1 *Soient $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha_i > 0$. On a les propriétés suivantes.*

(a) $\quad \log \alpha \leq \log^+ \alpha$,

(b) $\quad \log^+ \alpha \leq \log^+ \beta$ *pour* $\alpha \leq \beta$,

(c) $\quad \log \alpha = \log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha}$,

(d) $\quad |\log \alpha| = \log^+ \alpha + \log^+ \frac{1}{\alpha}$,

(e) $\quad \log^+ \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ \alpha_i$,

(f) $\quad \log^+ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ \alpha_i + \log n$,

Preuve 1.1.1 *On va démontrer seulement* (e) *et* (f) *.*

(e) *Si* $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1$, *alors l'inégalité est trivial Si* $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i > 1$, *alors* $\ln^+ \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right) = \ln \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} \ln^+ \alpha_i$.

(f). *De* (e) *on a*

$$\begin{aligned} \ln^+ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) &\leq \ln^+ \left(n \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \right) \leq \ln n + \ln^+ \left(n \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \right) \\ &\leq \ln n + \sum_{i=1}^{n} \ln^+ \alpha_i. \end{aligned}$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 *[31, 24] Soient f une fonction méromorphe non constante et $a \in \mathbb{C}$. Soit le développement de Laurent de $f(z) - a$ autour du point d'origine*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Alors

$$T(r, a, f) = T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) - \ln |c_m| + \varphi(r, a), \tag{1.8}$$

où
$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2. \tag{1.9}$$

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin des résultats suivants.

Proposition 1.2.1 *[24, 31, 40] Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent*
$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.10}$$
Alors
$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right). \tag{1.11}$$

1.3 Théorème de Jensen

Théorème 1.3.1 *[31, 24] Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$. Soient $a_1, ..., a_n$ les zéros et $b_1, b_2, ..., b_n$ les pôles de f, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*
$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \sum_{0<|b_j|\leq r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{0<|a_j|\leq r} \ln\frac{r}{|a_j|}. \tag{1.12}$$

Proposition 1.3.1 *Soit f une fonction méromorphe avec $a-$point $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ dans le disque $|z| \leq r$, tel que $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < ... \leq \alpha_n \leq r$ étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*
$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t}dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t}dt = \sum_{0<|\alpha_j|\leq r} \ln\frac{r}{|\alpha_j|} \tag{1.13}$$

Preuve:

On considère la fonction $h(z) = f(z)z^{-m}$. Il est clair que $h(0) \neq 0$, et
$$m = n(0,0,f) - n(0,\infty,f).$$

En fait, si $m > 0$ alors

$$n(0,0,f) = m \text{ et } n(0,\infty,f) = 0.$$

Si $m < 0$ alors

$$n(0,0,f) = 0 \text{ et } n(0,\infty,f) = -m.$$

Si $m = 0$ alors

$$n(0,0,f) = n(0,\infty,f) = 0.$$

Donc, les fonctions f et h ont les même zéros et même pôles dans $0 < |z| \leq r$. Du théorème de Jensen et la proposition 1.2.1 on a

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \ln|h(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right) r^{-m}\right| d\theta + \sum_{0<|b_j|\leq r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{0<|a_j|\leq r} \ln\frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - m\ln r + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt \\
&\quad - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - [n(0,0,f) - n(0,\infty,f)]\ln r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt + n(0,\infty,f)\ln r \\
&\quad - \left[\int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt + n(0,0,f)\ln r\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 1.2.1.

1) Montrons le théorème pour $a = 0$. D'après la proposition 1.2.1, on a

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right),$$

D'après les propriétés de $\left(\ln^+\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|} d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) \\
&= T(r,f) - T\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right) = T(r,f) - \ln|c_m|,$$

avec $\varphi(r,0) = 0$

2) Montrons le théorème pour $a \neq 0$. Posons $h = f - a$, alors

$$\begin{aligned}
N\left(r,\frac{1}{h}\right) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right), \\
N(r,h) &= N(r,f-a) = N(r,f), \\
m\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right),
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\ln^+|h| &= \ln^+|f-a| \leq \ln^+|f| + \ln^+|a| + \ln 2. \\
\ln^+|f| &= \ln^+|f-a+a| = \ln^+|h+a| \\
&\leq \ln^+|h| + \ln^+|a| + \ln 2.
\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de 0 à 2π, on trouve

$$\begin{aligned} m(r,h) &\leq m(r,f)+\ln^{+}|a|+\ln 2. \\ m(r,f) &\leq m(r,h)+\ln^{+}|a|+\ln 2. \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(r,a)=m(r,h)-m(r,f).$$

Alors

$$\varphi\,|(r,a)|\leq \ln^{+}|a|+\ln 2.$$

D'après le $1^{er} cas$, on a

$$\begin{aligned} T\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{h}\right)+N\left(r,\frac{1}{h}\right) \\ &= T(r,h)-\ln|c_m| \\ &= m(r,h)+N(r,h)-\ln|c_m| \\ &= m(r,f)+\varphi(r,a)+N(r,f)-\ln|c_m| \\ &= T(r,f)-\ln|c_m|+\varphi(r,a). \end{aligned}$$

Ainsi

$$T(r,a,f)=T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)-\ln|c_m|+\varphi(r,a),$$

où

$$|\varphi(r,a)|\leq \ln^{+}|a|+\ln 2.$$

Remarque 1.3.1 *[24, 31, 34] Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit*

$$m(r,a,f)+N(r,a,f)=T(r,f)+\epsilon(r,a),$$

pour tout nombre complexe $a\in\mathbb{C}$, *où* $\epsilon(r,a)=O(1)$ *quand* $r\to+\infty$.

1.4 Propriétés de la fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Proposition 1.4.1 *Soient f_i $(i = 1, ..., n)$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes tels que $ad - bc \neq 0$. Alors*

1)

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i), \quad n \geq 1. \tag{1.14}$$

2)

$$T(r, f^n) = nT(r, f), \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.15}$$

3)

$$T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n. \tag{1.16}$$

4)

$$T(r, \frac{af + b}{cf + d}) = T(r, f) + O(1), \quad f \not\equiv \frac{-d}{c}. \tag{1.17}$$

Preuve:

1)

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) = m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right),$$

$$\begin{aligned} m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} m\left(r, f_i\right), \end{aligned}$$

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N\left(r, f_i\right).$$

Donc

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i).$$

2) On a

a) $|f|^n \leq 1 \iff |f| \leq 1.$

b) Si $|f| \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, f^n\right) &= m\left(r, f^n\right) + N\left(r, f^n\right) \\ &= N\left(r, f^n\right) = nN\left(r, f\right). \end{aligned}$$

c) Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, f^n\right) &= m\left(r, f^n\right) + N\left(r, f^n\right) \\ &= nm\left(r, f\right) + nN\left(r, f\right) \\ &= nT\left(r, f\right). \end{aligned}$$

3) On a

$$T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) = m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right),$$

$$\begin{aligned} m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\left(f_i\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| d\theta + \ln n \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} m\left(r, f_i\right) + \ln n. \end{aligned}$$

$$N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N\left(r, f_i\right).$$

Donc

$$T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n.$$

4) Pour $c \neq 0$. Soit

$$\begin{aligned} g &= \frac{af+b}{cf+d} = \frac{a\left(f+\frac{b}{a}\right)}{c\left(f+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}\left(\frac{f+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &= \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{bc-ad}{ac}}{f+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\left(1+\frac{bc-ad}{ac}\left(\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(r,g) &= T\left(r, \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\left(\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)\right) \\ &= T\left(r, \frac{bc-ad}{c^2}\left(\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)\right) + O(1) \\ &= T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O(1) \\ &= T(r,f) + O(1). \end{aligned}$$

1.5 Ordre et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe et entière

Définition 1.5.1 *[31, 24] Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors l'ordre de la croissance de f est défini par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r\longrightarrow+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

On dit que la fonction f est d'ordre infini si

$$\limsup_{r\longrightarrow+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty. \tag{1.18}$$

Définition 1.5.2 *[31, 24] Soit f une fonction entière non constante; alors l'ordre* *de f est défini par*

$$\sigma(f)=\limsup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\limsup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r},\tag{1.19}$$

où

$$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|.\tag{1.20}$$

Dans le cas où l'ordre d'une fonction méromorphe est infini, on introduit une autre notion qui donne plus de précision sur la croissance qui est appelé l'hyper-ordre et est définie comme suivant.

$$\sigma_2(f)=\limsup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r};$$

et pour une fonction entière, on a

$$\sigma_2(f)=\limsup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}=\limsup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

Proposition 1.5.1 *[31, 24] Soit f et g deux fonctions méromorphes. Alors*

$$\sigma(f+g)\leq\max\{\sigma(f),\sigma(g)\},\tag{1.21}$$

et

$$\sigma(fg)\leq\max\{\sigma(f),\sigma(g)\}.\tag{1.22}$$

Si $\sigma(g)<\sigma(f)$, alors

$$\sigma(f+g)=\sigma(fg)=\sigma(f).\tag{1.23}$$

Exemple 2:

1. La fonction $f(z)=e^z$, alors $\sigma(e^z)=1$.
2. La fonction $f(z)=e^{P(z)}$, où $p(z)=a_pz^p+a_{p-1}z^{p-1}+...+a_0$, $T(r,f)\sim\dfrac{|a_p|\,r^p}{\pi}$, alors $\sigma(f)=p$.

3. La fonction $f(z)=e^{e^z}$, alors $\sigma\left(e^{e^z}\right)=\infty$ et $\sigma_2(f)=1$.

4. Soit $f\left(z\right)=z^4+z+\dfrac{e^z}{z^3-1}$, alors $\sigma\left(f\right)=\sigma\left(\dfrac{e^z}{z^3-1}\right)=\sigma\left(e^z\right)=1$.

1.6 Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.6.1 *On définit la mesure linéaire d'un ensemble* $E\subset[0,+\infty)$ *par*

$$m(E)=\int_0^{+\infty}\chi_E(t)dt, \tag{1.24}$$

où $\chi_E(t)$ *est la fonction caractéristique de l'ensemble* E.

Définition 1.6.2 *La mesure logarithmique d'un ensemble* $F\subset[1,+\infty)$ *est donnée par*

$$lm(F)=\int_1^{+\infty}\frac{\chi_F(t)}{t}dt. \tag{1.25}$$

Exemple 3:

1. $E=[a,b]\subset[1,+\infty[;\quad m(E)=b-a,\ lm(E)=\ln b-\ln a.$

2. $F=[e,e^5]\subset[1,+\infty[;\quad m(F)=\int_1^{+\infty}\chi_E(t)dt=\int_e^{e^5}dt=e^5-e,$

$lm(F)=\int_1^{+\infty}\chi_E(t)\dfrac{dt}{t}=\int_e^{e^5}\dfrac{dt}{t}=4.$

1.7 Terme maximal et Indice central

Définition 1.7.1 *[25, 31] Soit* $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ *une fonction entière. Il est clair que si pour tout* $r>0$, *la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ *converge, alors pour tout* $r>0$ *donné:*

$$\lim\left|a_n\right|r^n=0,$$

et le terme maximal

$$\mu\left(r\right)=\mu\left(r,f\right)=\max_{n\geq0}\left|a_n\right|r^n \tag{1.26}$$

est bien défini.

Définition 1.7.2 *[25, 31] On définit l'indice central par*

$$V(r) = V(r,f) = \max_{m\geq 0} \{m : |a_m| r^m = \mu(r,f)\}. \tag{1.27}$$

Exemple 4:

1. Soit le polynôme $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$, $a_n \neq 0$. Pour r assez grand, on a

$$\mu(r,p) = |a_n| r^n,$$

et

$$V(r,p) = n.$$

2. Soit $f(z) = e^z$. On a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Posons $a_n = \frac{1}{n!}$. On a

$$\mu(r,f) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n = \max_{n\geq 0} \frac{1}{n!} r^n.$$

Posons $U_n = |a_n| r^n = \frac{1}{n!} r^n$. Étudiant la monotonie de la suite U_n. On a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{r}{n+1}.$$

Donc U_n est décroissante si $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$, c'est à dire $n > [r] - 1$, où le crochet $[.]$ désigne la partie entière. La suite (U_n) est croissante si $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, c'est à dire $n < [r] - 1$, d'où

$$\mu(r,f) = \frac{1}{[r]!} r^{[r]},$$

et par suite

$$V(r,f) = [r].$$

1.8 Théorème de Wiman-Valiron

Théorème 1.8.1 *[25, 31] Pour toute fonction entière* $f \not\equiv 0$*, il existe un ensemble* $E_0 \subset [1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie telle que pour tout* $q = 1, 2, ..., n$ *on a*

$$\frac{f^{(q)}(z_r)}{f(z_r)} = (1 + o(1)) \left(\frac{V(r)}{z_r} \right)^q, \tag{1.28}$$

quand $r \longrightarrow +\infty$*,* $|z| = r \notin E_0$*, où* z_r *est un point sur le cercle* $|z| = r$ *qui satisfait*

$$|f(z_r)| = M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 < r < \infty. \tag{1.29}$$

1.9 Lemmes des dérivées logarithmiques

Parmi les résultats remarquables des dérivées logarithmiques les résultats suivants.

Lemme 1.9.1 *[24] Soient* f *une fonction méromorphe transcendante et* $k \geq 1$ *un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log\left(rT\left(r, f\right)\right)\right)$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E *de mesure linéaire finie.*
Si f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

Lemme 1.9.2 *[26] Soient* f *une fonction méromorphe dans le disque unité et* $k \geq 1$ *un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log^+ T\left(r, f\right) + \log \frac{1}{1-r}\right),$$

où $r \notin E \subset (0, 1)$ *de mesure logarithmique finie,* $\int_E \frac{dr}{1-r} < \infty$*.*

Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right).$$

Chapitre 2

Croissance des solutions des équations différentielles homogènes à coefficients fonctions entières de même ordre et même type

2.1 Introduction et résultats

Plusieurs auteurs ont étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle

$$f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0, \tag{2.1}$$

où $Q(z)$ est une fonction entière (voir [1, 16, 19, 33]). Dans [19], Gundersen a prouvé que si $\deg Q(z) \neq 1$, alors toute solution non constante de l'équation (2.1) est d'ordre infini. Chen a consideré le cas $Q(z) = h(z) e^{bz}$, où $h(z)$ est un polynôme non nul et $b \neq -1$, voir [11]; plus précisément, il a prouvé que toute solution non triviale f de l'équation (2.1) satisfait $\sigma_2(f) = 1$. L'article [11] contient une discussion plus générale de l'équation sous la forme :

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = 0, \tag{2.2}$$

où $A_1 \not\equiv 0$ et $A_0 \not\equiv 0$, sont des fonctions entières d'ordre inférieur à 1, et a, b des nombres complexes constants. Il a prouvé que si $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$, alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation(2.2) est d'ordre infini. Il a aussi prouvé le résultat suivant:

Théorème 2.1.1 *[11] Soient* $A_j(z)\ (\not\equiv 0),\ D_j(z)\ (j = 0, 1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(A_j) < 1,\ \sigma(D_j) < 1\ (j = 0, 1),\ a, b$ *des constantes complexes telles que* $ab \neq 0$ *et* $\arg a \neq \arg b$ *ou* $a = cb\ (0 < c < 1)$. *Alors toute solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation différentielle*

$$f'' + (A_1(z)e^{az} + D_1)f' + \left(A_0(z)e^{bz} + D_0\right)f = 0,$$

est d'ordre infini.

Dans un autre travail, Chen a prouvé le résultat suivant.

Théorème 2.1.2 *[12] Soient* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *et* $Q(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i$ *des polynômes non constants où* $a_i, b_i\ (i = 0, 1, ..., n)$ *des constantes complexes,* $a_n b_n \neq 0$. *Soient* $A_1(z) \not\equiv 0$ *et* $A_0(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières . Supposons que l'une des deux conditions suivantes est satisfait :*

(i) $\arg a_n \neq \arg b_n$ *ou* $a_n = cb_n\ (0 < c < 1)\,;\ \sigma(A_j) < n\ (j = 0, 1)$

(ii) $a_n = cb_n\ (c > 1)$ *et* $\deg(P - cQ) = m \geq 1,\ \sigma(A_j) < m\ (j = 0, 1)$.

Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation différentielle*

$$f'' + A_1(z)e^{P(z)}f' + A_0(z)e^{Q(z)}f = 0,$$

est d'ordre infini avec $\sigma_2(f) = n$.

Dans [22], Hamouda et Belaidi ont étudié l'équation différentielle suivante:

$$w^{(n)} + e^{az^m} w' + Q(z) w = 0$$

avec d'autres extensions y liées.

Dans ce chapitre, on va étudier les équations différentielles sous la forme:

$$f^k + \left(A_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} e^{\lambda z^m} + B_{k-1}(z)\right) f^{k-1} + ... + \left(A_0(z) e^{P_0(z)} e^{\lambda z^m} + B_0(z)\right) f = 0 \tag{2.3}$$

où $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $m \geq 2$ un entier tel que $\max_{j=0,\dots,k-1} \{\deg P_j(z)\} < m$.

Notation:

Pour $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$, $(a_n = \alpha + i\beta \neq 0)$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$ *et* $z = re^{i\theta}$, on pose $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$.

Théorème 2.1.3 *[5] Soient* $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $m \geq 2$ *un entier et* $P_0(z), ..., P_{k-1}(z)$ *des polynômes non constants tel que* $\max_{j=0,\dots,k-1} \{\deg P_j(z)\} < m$; $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$, $B_j(z)$, $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières telles que* $\sigma(A_j) < \deg P_j(z)$, $\sigma(B_j) < m$ $(j = 0, ..., k-1)$. *Supposons qu'il existe* $\theta_1 < \theta_2$ *tels que* $\delta(\lambda z^m, \theta) > 0$, $\delta(P_0, \theta) > 0$ *et* $\delta(P_j, \theta) < 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ *pour tout* $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. *Alors toute solution* f *de l'équation différentielle (2.3) est d'ordre infini et* $n \leq \sigma_2(f) \leq m$, *où* $n = \deg P_0(z)$.

Corollaire 2.1.1 *[5] Soient* $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des polynômes non constants où* $a_{i,j}$ *des constantes complexes telles que* $a_{n,j} \neq 0$ $(j = 0, ..., k-1)$, $\arg a_{n,j} = \arg a_{n,1}$ $(j = 2, ..., k-1)$ *et* $\arg a_{n,1} \neq \arg a_{n,0}$; $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$, $B_j(z)$, $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières telles que* $\sigma(A_j) < n$, $\sigma(B_j) < m$ $(j = 0, ..., k-1)$. *Alors toute solution non triviale* f *de l'équation différentielle (2.3) est d'ordre infini avec* $n \leq \sigma_2(f) \leq m$.

Exemple 1: Considérons l'équation différentielle

$$f''' + \left(A_2(z) e^{z^3} e^{z^4} + B_2(z)\right) f'' + \left(A_1(z) e^{z^2} e^{z^4} + B_1(z)\right) f' +$$

$$\left(A_0(z)\,e^{z}e^{z^4}+B_0(z)\right)f=0,$$

avec $A_j(z)\ (\not\equiv 0)\,,\ B_j(z)\,,\ (j=0,1,2)$ des fonctions entières telles que $\sigma(A_j)<\deg P_j(z)\,,\ \sigma(B_j)<4.$

$P_0(z)=z\quad,\ P_1(z)=z^2,\ P_2(z)=z^3$ avec $\delta(P_0,\theta)=\cos\theta\quad,\delta(P_1,\theta)=\cos 2\theta$ $,\delta(P_2,\theta)=\cos 3\theta$ et $\delta(z^4,\theta)=\cos 4\theta$

En prenant $(\theta_1,\theta_2)\subset\left(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right)$, on obtient $\delta(z^4,\theta)>0,\ \delta(P_0,\theta)>0\ ,\delta(P_1,\theta)<0$ et $\delta(P_2,\theta)<0.$

D'après le Théorème (2.1.3), toute solution f de cette équation différentielle est d'ordre infini et $1\leq\sigma_2(f)\leq 4.$

Example 2: Considérons l'équation différentielle:

$$f'''+\left(A_2(z)\,e^{z}e^{z^3}+B_2(z)\right)f''+\left(A_1(z)\,e^{-iz^2}e^{z^3}+B_1(z)\right)f'+$$

$$\left(A_0(z)\,e^{z^2}e^{z^3}+B_0(z)\right)f=0.$$

On prend $(\theta_1,\theta_2)\subset\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$. Du Théorème (2.1.3), toute solution f de cette équation différentielle est d'ordre infini et $2\leq\sigma_2(f)\leq 3.$

Théorème 2.1.4 *[5] Soient* $P_j(z)=\sum_{i=0}^{n}a_{i,j}z^i\ \ (j=0,...,k-1)$ *des polynômes non constants où* $a_{i,j}$ *des constantes complexes tels que* $a_{n,0}\neq 0$ *et* $a_{n,j}=c_ja_{n,0}\ \ (0<c_j<1)$ $(j=1,...,k-1)\,;\,A_j(z)\ (\not\equiv 0)\,,\ B_j(z)\,,\ (j=0,...,k-1)$ *des fonctions entières telles que* $\sigma(A_j)<n,\ \sigma(B_j)<m\ \ (j=0,...,k-1)$. *Alors toute solution non triviale* f *de l'équation différentielle (2.3) est d'ordre infini et* $n\leq\sigma_2(f)\leq m.$

Du Corollaire(2.1.1) et Théorème(2.1.4), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.2 *[5] Soient* $P_j(z)=\sum_{i=0}^{n}a_{i,j}z^i\ \ (j=0,...,k-1)$ *des polynômes non constants où* $a_{i,j}$ *des constantes complexes tel que* $a_{n,0}\neq 0$. *Supposons qu'il existe* $s\in\{1,...,k-1\}$ *tel que* $\arg a_{n,s}\neq\arg a_{n,0}$ *et pour tout* $j\neq 0,s,\ a_{n,j}$ *satisfait* $a_{n,j}=$

$c_j a_{n,0}$ $(0 < c_j < 1)$ *ou bien* $\arg a_{n,j} = \arg a_{n,s}$; $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$, $B_j(z)$, $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières telles que* $\sigma(A_j) < n$, $\sigma(B_j) < m$ $(j = 0, ..., k-1)$. *Alors toute solution non triviale* f *de l'équation différentielle (2.3) est d'ordre infini et* $n \leq \sigma_2(f) \leq m$.

Maintenant, on s'intéresse au cas où $a_{n,j}$ ont des arguments différents ou bien $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(c_j > 1)$ comme suivants.

Théorème 2.1.5 *[5] Soient* $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des polynômes non constants où* $a_{i,j}$ *sont des constantes complexes tel que* $a_{n,0} \neq 0$. *Supposons qu'il existe* $s \in \{1, ..., k-1\}$ *tel que*

$$\arg(a_{n,j} - a_{n,s}) = \varphi \neq \arg(a_{n,0} - a_{n,s}) \quad \textit{pout tous } j \neq 0, s. \tag{2.4}$$

Alors toute solution non triviale f *de l'équation différentielle (2.3) est d'ordre infini et* $n \leq \sigma_2(f) \leq m$.

Example : Considérons l'équation différentielle:

$$f^{(5)} + A_4(z) e^{(i+4)z^2} e^{\lambda z^m} f^{(4)} + A_4(z) e^{iz^2} e^{\lambda z^m} f''' + A_4(z) e^{(i+2)z^2} e^{\lambda z^m} f'' + A_4(z) e^{(i+1)z^2} e^{\lambda z^m} f' +$$

$$A_4(z) e^{z^2} e^{\lambda z^m} f = 0.$$

Théorème 2.1.6 *[5] Soient* $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des polynômes non constants où* $a_{i,j}$ *sont des constantes complexes tels que* $a_{n,0} \neq 0$. *Supposons qu'il existe* $s \in \{1, ..., k-1\}$ *tel que*

$$a_{n,j} - a_{n,s} = c_j(a_{n,0} - a_{n,s}) \ (0 < c_j < 1) \tag{2.5}$$

pour tout $j \neq 0, s$. *Alors toute solution non triviale* f *de l'équation différentielle (2.3) est d'ordre infini et* $n \leq \sigma_2(f) \leq m$.

Du Théorème (2.1.5) et Théorème (2.1.6), on obtient le Corollaire suivant.

Corollaire 2.1.3 *[5] Soient* $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des polynômes non constants où* $a_{i,j}$ *sont des constantes complexes telles que* $a_{n,0} \neq 0$. *Supposons qu'il existe* $s \in \{1, ..., k-1\}$ *et* $J \subset \{1, ..., k-1\} - \{s\}$ *tels que pour* $j \in J$ *on a la condition (2.4) et pour* $j \notin J$ *on a la condition (2.5). Alors toute solution non triviale* f *de l'équation diférentielle (2.3) est d'ordre infini avec* $n \leq \sigma_2(f) \leq m$.

Théorème 2.1.7 *[5] Soient* $P_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des polynômes non constants,* $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières. Supposons que* $P_j(z)$ *et* $A_j(z)$ *vérifient les conditions de l'un des Théorèmes (2.1.3)-(2.1.4)-(2.1.5)-(2.1.6) ou Corollaires (2.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3). Alors toute solution non triviale* f *de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{n-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} e^{\lambda z^m} f^{(k-1)} + ... + A_0(z) e^{P_0(z)} e^{\lambda z^m} f = 0, \tag{2.6}$$

est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = n$ *ou* $\sigma_2(f) = m$.

Les démonstrations de ces théorèmes nécessitent les lemmes suivants.

2.2 Lemmes pour les démonstrations des théorèmes

Lemme 2.2.1 *[18] Soient* f *une fonction méromorphe transcendante et* $\alpha > 1$. *Alors il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle et une constante* $M > 0$ *depend de* α *tel que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E$ *, il existe une constante* $R_0 = R_0(\theta) > 1$ *tel que, pour tout* z *vérifiant* $\arg z = \theta$ *and* $|z| = r > R_0$, *on ait*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq M \left[T(\alpha r, f) \frac{(\log^\alpha r)}{r} \log T(\alpha r, f) \right]^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Lemme 2.2.2 *[18] Soient* f *une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini* σ, *et* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que pour tout* $z = re^{i\theta}$ *avec* $|z|$ *suffisament grand et*

$\theta \in [0, 2\pi) - E$, *et pour tout* k, j, $0 \leq j \leq k$, *on ait*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}.$$

Lemme 2.2.3 *[14] Soient* $A_j \ \ (j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions méromorphes (non toutes constantes) dans* $\mathbb{C}$ *et* f *une solution méromorphe de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_1 f' + A_0 f = 0. \tag{2.7}$$

Posons $T(R) := \sum_{j=0}^{k-1} T(R, A_j)$. *Alors, on a*

$$\log m(R, f) < T(R) \{\log R \log T(R)\}^{\gamma},$$

où $\gamma > 1$ *est une constante réelle.*

En utilisant Lemme(2.2.3), on peut façillement prouver le lemme suivant.

Lemme 2.2.4 *Soient* $A_j(z) \ \ (\not\equiv 0) \ \ (j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entière d'ordre finis. Si* f *est une solution de l'équation (2.7), alors* $\sigma_2(f) \leq \max\limits_{j=0,\ldots,k-1} \{\sigma(Aj)\}$.

Lemme 2.2.5 *[11] Soient* $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$, $(a_n = \alpha + i\beta \neq 0)$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$ *et* $A(z) \ (\not\equiv 0)$ *une fonction entière avec* $\sigma(A) < n$. *Posons* $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. *Alors pour une certaine constante donnée* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $H \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que pour un certain* $\theta \in [0, 2\pi) \backslash H$, *où* $H = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$ *est un ensemble fini, il existe* $R > 0$ *tel que pour* $|z| = r > R$, *on a*

(i) *Si* $\delta(P, \theta) > 0$, *alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P, \theta) r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P, \theta) r^n\}, \tag{2.8}$$

(ii) *Si* $\delta(P, \theta) < 0$, *alors*

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^{n}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^{n}\right\}. \tag{2.9}$$

Lemme 2.2.6 *[12] Soit f une fonction entière avec $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = \alpha < +\infty$, un ensemble $E_2 \subset [1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie. Alors il existe une suite infinie de points $\left\{z_p = r_p e^{i\theta_p}\right\}$ tel que $|f(z_p)| = M(r_p, f)$, $\theta_p \in [0,2\pi)$, $\lim\limits_{p\to\infty}\theta_p = \theta_0 \in [0,2\pi)$, $r_p \notin E_2$, et pour $\epsilon > 0$, et $r_p \to \infty$, on a*

$$\exp\left\{r_p^{\alpha-\epsilon}\right\} \leq \nu(r_p) \leq \exp\left\{r_p^{\alpha+\epsilon}\right\},$$

où $\nu(r)$ est l'indice central de f.

2.3 Preuve du Théorème 2.1.3

De l'équation différentielle (2.3), on a

$$\left|A_0(z)\,e^{P_0(z)} + B_0(z)\,e^{-\lambda z^m}\right| \leq \left|e^{-\lambda z^m}\right| \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \tag{2.10}$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \left|A_j(z)\,e^{P_j(z)} + B_j(z)\,e^{-\lambda z^m}\right| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|.$$

On suppose qu'il existe un secteur $\theta \in (\theta_1,\theta_2)$ tels que $\delta(\lambda z^m,\theta) > 0$, $\delta(P_0,\theta) > 0$ et $\delta(P_j,\theta) < 0$ $(j = 1,...,k-1)$. D'après le Lemme (2.2.5), il existe $R_0(\theta) > 0$ tel que pour $|z| = r > R_0$, on a

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\,r^{n}\right\} \leq \left|A_0(z)\,e^{P_0(z)} + B_0(z)\,e^{-\lambda z^m}\right|, \tag{2.11}$$

$$\left|A_j(z)\,e^{P_j(z)} + B_j(z)\,e^{-\lambda z^m}\right| \leq C_1 \quad (j = 1,...,k-1). \tag{2.12}$$

où C_1 est une constante. Et d'après le Lemme (2.2.1), il existe un ensemble $E \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle et une constante $M > 0$ tel que, pour tout $\theta \in [0,2\pi)\setminus E$ il existe $R_1 = R_1(\theta) > 1$ tel que pour z vérifiant $\arg z = \theta$ et

$|z| = r > R_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right| \leq C_2 \left[T\left(2r, f\right)\right]^{2k} \quad (j = 1, ..., k). \tag{2.13}$$

En utilisant (2.11) ,(2.12) et 2.13) dans (2.10), on obtient pour $r > \max\{R_0, R_1\}$,

$$\exp\{(1-\varepsilon)\,\delta\,(P_0, \theta)\,r^n\} \leq C_3 \left[T\left(2r, f\right)\right]^{2k}$$

quand $r \to \infty$. Ce qui implique que

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log\log T(r, f)}{\log r} \geq n$$

D'autre part, d'après le lemme (2.2.4), on obtient

$$\sigma_2(f) \leq m. \tag{2.14}$$

Finalement

$$n \leq \sigma_2(f) \leq m.$$

2.4 Preuve du Corollaire 2.1.1

Soient $P_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, ..., k-1)$ des polynômes non constants où $a_{i,j}$ des constantes complexes telles que $a_{n,j} \neq 0$ $(j = 0, ..., k-1)$, $\arg a_{n,j} = \arg a_{n,1}$ $(j = 2, ..., k-1)$ et $\arg a_{n,1} \neq \arg a_{n,0}$ d'après ces conditions il existe $\theta_1 < \theta_2$ tels que pour tout $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $\delta(\lambda z^m, \theta) > 0$, $\delta(P_0, \theta) > 0$ et $\delta(P_j, \theta) < 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ et en appliquant le Théorème (2.1.3), on obtient le résultat demandé.

2.5 Preuve du Théorème 2.1.4

Soit $m > n$ et $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(0 < c_j < 1)$ $(j = 1, ..., k-1)$, il existe un secteur S : $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ tel que $\delta(\lambda z^m, \theta) > 0$ et $\delta(P_j, \theta) = c_j \delta(P_0, \theta) > 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ sur tout rayon $\arg z = \theta \in S$.

D'après le Lemme(2.2.5), on a pour $|z| = r$ suffisamment grand,

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n\} \leq \left|A_0(z)e^{P_0(z)} + B_0(z)e^{-\lambda z^m}\right|, \tag{2.15}$$

$$\left|A_j(z)e^{P_j(z)} + B_j(z)e^{-\lambda z^m}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)c\delta(P_0,\theta)r^n\}, \tag{2.16}$$

où $c = \max\{c_j\}$.

En utilisant (2.15), (2.16) et (2.13) dans (2.10), pour r assez grand, on obtient:

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n\} \leq C_2[T(2r,f)]^{2k}[1+\exp\{(1+\varepsilon)c\delta(P_0,\theta)r^n\}]$$

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n\} \leq C_4\exp\{(1+\varepsilon)c\delta(P_0,\theta)r^n\}[T(2r,f)]^{2k}, \tag{2.17}$$

et donc

$$\exp\{(1-\varepsilon-(1+\varepsilon)c)\delta(P_0,\theta)r^n\} \leq C_4[T(2r,f)]^{2k}. \tag{2.18}$$

En prenant dans (2.18) ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1-c}{1+c}$, et du lemme (2.2.4), on obtient l'estimation

$$n \leq \sigma_2(f) \leq m.$$

2.6 Preuve du Corollaire 2.1.2

Dans ce cas, il existe aussi $\theta_1 < \theta_2$ tels que $\delta(\lambda z^m, \theta) > 0$, $\delta(P_0, \theta) > 0$ et $\delta(P_s, \theta) < 0$ pour tout $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. On a

$$\left|A_s(z)e^{P_s(z)} + B_s(z)e^{-\lambda z^m}\right| \leq C_5 \tag{2.19}$$

On va traiter deux cas.

Le premier cas.

Pour tout j, $\arg a_{n,j} = \arg a_{n,s}$. On a

$$\left|A_j(z) e^{P_j(z)} + B_j(z) e^{-\lambda z^m}\right| \leq C_6. \tag{2.20}$$

En utilisant (2.15), (2.20) , (2.19) et 2.13) dans (2.10), pour r suffisamment grand, on obtient

$$\exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\, r^n\} \leq C_7 \left[T(2r,f)\right]^{2k}$$

Le deuxième cas.

$a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(0 < c_j < 1)$, $\delta(P_j,\theta) = c_j \delta(P_0,\theta) > 0$ $(j = 1, ..., k-1)$, on a (2.16).

En combinant (2.16), (2.19) avec (2.10), on obtient

$$\exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\, r^n\} \leq C \left[T(2r,f)\right]^{2k};$$

d'où

$$n \leq \sigma_2(f),$$

Et d'après le Lemme (2.2.4), on obtient

$$n \leq \sigma_2(f) \leq m.$$

2.7 Preuve du Théorème 2.1.5

Il existe $\theta_1 < \theta_2$ tels que $\delta(\lambda z^m,\theta) > 0$, $\delta(P_0 - P_s,\theta) > 0$ et $\delta(P_j - P_s,\theta) < 0$ pour tout $\theta \in (\theta_1,\theta_2)$. Donc pour r suffisamment grand, on a

$$\exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0 - P_s,\theta)\, r^n\} \leq \left|A_0(z) e^{P_0(z)-P_s(z)} + B_0(z) e^{-\lambda z^m - P_s(z)}\right|, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\left|A_s(z)+B_s(z)\,e^{-\lambda z^m-P_s(z)}\right| &\leq |A_s(z)|+\left|B_s(z)\,e^{-\lambda z^m-P_s(z)}\right| \\
&\leq \exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}+\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(-\lambda z^m,\theta)\,r^n\right\} \\
&\leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(-\lambda z^m,\theta)\,r^n\right\}\exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \\
&\leq \exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\right\}
\end{aligned}$$

et

$$\left|A_j(z)\,e^{P_j(z)-P_s(z)}+B_j(z)\,e^{-\lambda z^m-P_s(z)}\right|\leq C_7. \tag{2.22}$$

De l'équation (2.3), on obtient

$$\left|A_0(z)\,e^{P_0(z)-P_s(z)}+B_0(z)\,e^{-\lambda z^m-P_s(z)}\right|\leq\left|e^{-\lambda z^m-P_s(z)}\right|\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|+ \tag{2.23}$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}\left|A_j(z)\,e^{P_j(z)-P_s(z)}+B_j(z)\,e^{-\lambda z^m-P_s(z)}\right|\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|.$$

En substituant (2.21)-(2.22) et (2.13) dans (2.23), on obtient

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0-P_s,\theta)\,r^n\right\}\leq C_8\exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\right\}[T(2r,f)]^{2k}.$$

ce que implique

$$n\leq\sigma_2(f),$$

et aussi d'après le Lemme(2.2.4), on trouve

$$n\leq\sigma_2(f)\leq m.$$

2.8 Preuve du Théorème 2.1.6

Il existe $\theta_1<\theta_2$ tels que $\delta(\lambda z^m,\theta)>0$ et $\delta(P_0-P_s,\theta)>0$ $(j=0,...,k-1)$ pour tout $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$. Dans ce cas, d'aprés Lemme (2.2.5), pour r suffisamment grand, on a

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta\,(P_0-P_s,\theta)\,r^n\right\} \leq \left|A_0\,(z)\,e^{P_0(z)-P_s(z)}+B_0\,(z)\,e^{-\lambda z^m-P_s(z)}\right|, \quad (2.24)$$

$$\left|A_s\,(z)+B_s\,(z)\,e^{-\lambda z^m-P_s(z)}\right| \leq \exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\right\}. \quad (2.25)$$

Et pour $j \neq 0, s$

$$\left|A_j\,(z)\,e^{P_j(z)-P_s(z)}+B_j\,(z)\,e^{-\lambda z^m-P_s(z)}\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\,c\delta\,(P_0-P_s,\theta)\,r^n\right\}, \quad (2.26)$$

où $c=\max\{c_j\}$.

En utilisant (2.24)-(2.26) et (2.13) dans (2.23), on obtient pour r assez grand,

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta\,(P_0-P_s,\theta)\,r^n\right\} \leq$$

$$C_9\exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\right\}\exp\left\{(1+\varepsilon)\,c\delta\,(P_0-P_s,\theta)\,r^n\right\}\left[T\,(2r,f)\right]^{2k},$$

et donc

$$\exp\left\{(1-\varepsilon-(1+\varepsilon)\,c)\,\delta\,(P_0-P_s,\theta)\,r^n\right\} \leq C_9\exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\right\}\left[T\,(2r,f)\right]^{2k}. \quad (2.27)$$

En prenant dans (2.27) ε tel que $0<\varepsilon<\frac{1-c}{1+c}$ et du Lemme (2.2.4), on trouve

$$n \leq \sigma_2\,(f) \leq m.$$

2.9 Preuve du Théorème 2.1.7

En prenant $B_j\,(z) \equiv 0$ $(j=0,...,k-1)$ dans les Théorèmes (2.1.3), (2.1.4),(2.1.5) et (2.1.6), on obtient que toute solution $f\,(z) \not\equiv 0$ de l'équation (2.6) est d'ordre infini avec $n \leq \sigma_2\,(f) \leq m$. Il nous reste seulement à démontrer que $\sigma_2\,(f)=m$ ou $\sigma_2\,(f)=n$. Pour cela , supposons le contraire i.e. $n<\sigma_2\,(f)<m$ et nous prouvons que cela mène à une contradiction.

D'après le théorème de Wiman-Valiron [36], il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$ et $|f(z)| = M(r, f)$ on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)) \quad (j = 1, ..., k-1), \tag{2.28}$$

où $\nu(r)$ est l'indice central de $f(z)$.

Soit $\sigma_2(f) = \gamma$. Du Lemme (2.2.6), il existe une suite de points $\{z_p = r_p e^{i\theta_p}\}$ telle que $|f(z_p)| = M(r.f), = M(r_p, f), \theta_p \in [0, 2\pi), \lim_{p\to\infty} \theta_p = \theta_0 \in [0, 2\pi), r_p \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2$, (E_2 est définie comme dans Lemme (2.2.6) $r_p \to +\infty$ et pour $\varepsilon > 0$ et r_p suffisamment grand, on a

$$\exp\left\{r_p^{\gamma-\epsilon}\right\} \leq \nu(r_p) \leq \exp\left\{r_p^{\gamma+\epsilon}\right\}. \tag{2.29}$$

On peut écrire l'équation (2.6) sous la forme:

$$-\frac{f^{(k)}}{f} = \left(A_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} \frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_0(z) e^{P_0(z)}\right) e^{\lambda z^m}. \tag{2.30}$$

En remplaçant (2.28) dans (2.30), on obtient:

$$-\nu^k(r_p)(1 + o(1)) = \left(z_p A_{k-1} e^{P_{k-1}} \nu^{k-1}(r_p)(1 + o(1)) + ... \right. \tag{2.31}$$

$$\left. + z_p^{k-1} A_1 e^{P_1} \nu(r_p)(1 + o(1)) + z_p^k A_0 e^{P_0}\right) e^{\lambda z_p^m}.$$

Maintenant on va étudier trois cas séparemment:

Case 1. $\delta(\lambda z^m, \theta_0) =: \delta > 0$. Pour p suffisamment grand et de (2.29), on a

$$\left|-\nu^k(r_p)(1 + o(1))\right| \leq 2\exp\left\{k r_p^{\gamma+\epsilon}\right\}. \tag{2.32}$$

Du lemme (2.2.5) et en tenant en compte que $\gamma + \epsilon < m$, on a, pour tout p assez grand,

$$\exp\left\{(1-\epsilon)\delta r_p^m\right\} \leq \left|\left(z_p A_{k-1} e^{P_{k-1}} \nu^{k-1}(r_p)(1 + o(1)) + ...\right|\right. \tag{2.33}$$

$$\left| + z_p^{k-1} A_1 e^{P_1} \nu\left(r_p\right)\left(1 + o\left(1\right)\right) + z_p^k A_0 e^{P_0}\right) e^{\lambda z_p^m} \right| .$$

Combinons (2.32) et (2.33) avec (2.31), on trouve

$$\exp\left\{\left(1-\epsilon\right)\delta r_p^m\right\} \leq \exp\left\{k r_p^{\gamma+\epsilon}\right\},$$

une contradiction.

Case 2. $\delta\left(\lambda z^m, \theta_0\right) =: \delta < 0$. Du (2.29), pour p assez grand, on a

$$\frac{1}{2}\exp\left\{k r_p^{\gamma-\epsilon}\right\} \leq \left|-\nu^k\left(r_p\right)\left(1+o\left(1\right)\right)\right|, \tag{2.34}$$

et du Lemme (2.2.5), on obtient

$$\left|\left(z_p A_{k-1} e^{P_{k-1}} \nu^{k-1}\left(r_p\right)\left(1+o\left(1\right)\right) + \ldots\right|\right. \tag{2.35}$$

$$\left| + z_p^{k-1} A_1 e^{P_1} \nu\left(r_p\right)\left(1+o\left(1\right)\right) + z_p^k A_0 e^{P_0}\right) e^{\lambda z_p^m}\right| \leq \exp\left\{\left(1-\epsilon\right)\delta r_p^m\right\}.$$

La combinaison de (2.34) et (2.35) avec (2.31) donne l'inégalité suivante

$$\frac{1}{2}\exp\left\{k r_p^{\gamma-\epsilon}\right\} \leq \exp\left\{\left(1-\epsilon\right)\delta r_p^m\right\}$$

quand $r \to +\infty$; Ce qui est impossible .

Case 3. $\delta\left(\lambda z^m, \theta_0\right) = 0$. Comme $\lim\limits_{p\to\infty}\theta_p = \theta_0$, alors pour p assez grand, on a

$$\frac{1}{e} \leq \left|e^{\lambda z_p^m}\right| \leq e.$$

D'après le lemme (2.2.5), il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$\left(z_p A_{k-1} e^{P_{k-1}} \nu^{k-1}\left(r_p\right)\left(1+o\left(1\right)\right) + \ldots\right.$$

$$\left. + z_p^{k-1} A_1 e^{P_1} \nu\left(r_p\right)\left(1+o\left(1\right)\right) + z_p^k A_0 e^{P_0}\right) e^{\lambda z_p^m} \leq \exp\left\{\alpha r_p^n\right\} \nu^{k-1}\left(r_p\right).$$

La combinaison avec (2.31), donne l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{2}\left|\nu\left(r_p\right)\right| \leq \exp\left\{\alpha r_p^n\right\};$$

et avec

$$\exp\left\{r_p^{\gamma-\epsilon}\right\} \leq \left|\nu\left(r_p\right)\right|,$$

quand $r \rightarrow +\infty$ et en tenant en compte que $n < \gamma - \epsilon$, à condition que ϵ assez petit, on trouve une contradiction.

Chapitre 3

Croissance des solutions des équations différentielles non homogènes à coefficients fonctions entières de même ordre et même type

3.1 Introduction et résultats

Pour $k \geq 2$, on considère l'équation différentielle linéaire sous forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + ... + A_0(z)f = H(z), \tag{3.1}$$

telles que $A_0 \not\equiv 0, ..., A_{k-1}, H \not\equiv 0$ sont des des fonctions entières.

Il est bien connu que toute solution de l'équation (3.1) est une fonction entière aussi. Le cas où les coefficients sont des polynômes a été étudié par Gundersen, Steinbart et Wang dans [21] et si p est le plus grand entier tel que A_p est transcendante , Frei dans [17] a prouvé qu'il existe au plus p solutions linéairement indépendante d'ordre fini de l'équation

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+...+A_0(z)f=0. \tag{3.2}$$

Plusieurs auteurs ont étudié le cas où les coefficients ont le même ordre. Dans [35] Tu et Yi ont étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle homogène (3.2) quand la plupart des coefficients ont le même ordre. Ensuite, Wang et Laine on étendu ces résultats à l'équation différentielle non homogène (3.1) en prouvant le résultat suivant.

Théorème 3.1.1 *[37] Supposons que* $A_j(z) = h_j(z)\,e^{P_j(z)}$ $(j=0,...,k-1)$, *où* $P_j(z) = a_{nj}z^n + ... + a_{0j}$ *des polynômes de degré* $n \geq 1$, $h_j(z)$ *des fonctions entières d'ordre inférieur de* n, *non toutes nulles, et* $H(z) \not\equiv 0$ *est une fonction entière d'ordre inférieur de* n. *Si* a_{nj} $(j=0,...,k-1)$ *des constantes complexes distinctes , alors toute solution de l'équation différentielle* (3.1) *est d'ordre infini.*

Huang et Sun ont prouvé le résultat suivant:

Théorème 3.1.2 *[30] Soit* $A_j(z) = B_j(z)\,e^{P_j(z)}$ $(j=0,...,k-1)$ *,où* $B_j(z)$ *des fonctions entières,* $P_j(z)$ *des polynômes non constants avec* $\deg(P_j(z)-P_i(z)) \geq 1$ *et* $\max\{\sigma(B_j),\sigma(B_i)\} < \deg(P_j(z)-P_i(z))$ $(i \neq j)$. *Alors toute solution transcendante* f *de* (3.2) *satisfait* $\sigma(f)=\infty$.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires homogènes à cœfficients entières de même ordre et de même type

$$f^{(k)}+\left(A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}e^{\lambda z^m}+B_{k-1}(z)\right)f^{(k-1)}+...+\left(A_0(z)e^{P_0(z)}e^{\lambda z^m}+B_0(z)\right)f=0,$$

où $\lambda \in \mathbb{C}-\{0\}$, $m \geq 2$ un nombre entier et $\max_{j=0,...,k-1}\{\deg P_j(z)\} < m$, A_j, B_j $(j=0,...,k-1)$ des fonctions entières d'ordre inférieur de m.

Dans ce chapitre, on essaye d'étendre l'étude aux équations différentielles linéaires non homogènes sous la forme

$$f^{(k)}+B_{k-1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)}e^{\lambda z^m}f^{(k-1)}+...+B_0(z)\,e^{P_0(z)}e^{\lambda z^m}f=H(z)$$

et on va étudier la croissance des solutions où a_{jn} $(j=0,...,k-1)$ sont égaux avec $P_j(z)=a_{jn}z^n+.....+a_{j0}$ des polynômes *de degré* $n\geq 1$ et $H(z)\not\equiv 0$ est une fonction entière. En effet, on a établit les résultats suivants.

Théorème 3.1.3 *[6] On considère l'équation différentielle linéaire*

$$f^{(k)}+B_{k-1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)}e^{\lambda z^m}f^{(k-1)}+...+B_0(z)\,e^{P_0(z)}e^{\lambda z^m}f=H(z)\,, \tag{3.3}$$

où $\lambda\neq 0$ *un nombre complexe,* $m\geq 2$ *un nombre entier,* $P_j(z)=a_{nj}z^n+...+a_{0j}$ $(j=0,...,k-1)$ *des polynômes non constants tels que* $n<m$; $B_0\not\equiv 0,...,B_{k-1},H\not\equiv 0$ *sont des fonctions entières d'ordre inférieur de* n. *Si l'une des conditions suivantes*

(1) a_{nj} $(j=0,...,k-1)$ *des nombres complexes distinctes.*

(2) Il existent $s,t\in\{0,1,...,k-1\}$ *tels que* $\arg a_{ns}\neq\arg a_{nt}$ *et pour tout* $j\neq s,t$ $a_{nj}=c_ja_{ns}$ *ou* $a_{nj}=c_ja_{nt}$ *avec* $0<c_j<1$, $B_sB_t\not\equiv 0$;

est vérifiée, alors toute solution de l'équation différentielle (3.3) *est d'ordre infini.*

Corollaire 3.1.1 *[6] On considère l'équation différentielle linéaire*

$$f^{(k)}+B_{k-1}(z)\,e^{\lambda z^3+a_{k-1}z^2+b_{k-1}z}f^{(k-1)}+...+B_0(z)\,e^{\lambda z^3+a_0z^2+b_0z}f=H(z)$$

où $\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}$, a_j *des nombres complexes distinctes (ou satisfait la condition (2) de Théorème (3.1.3) et* $B_0\not\equiv 0,...,B_{k-1},H\not\equiv 0$ *des fonctions entières d'ordre inférieur à* 2 *. Alors toute solution* f *de cette équation différentielle est d'ordre infini.*

Théorème 3.1.4 *[6] Soient* $A_j(z)=B_j(z)\,e^{P_j(z)}$ $(j=0,...,k-1)$, *où* $B_j(z)$ *des fonctions entières,* $P_j(z)$ *des polynômes non constants avec* $\deg(P_j(z)-P_i(z))\geq 1$

et $\max\{\sigma(B_j), \sigma(B_i)\} < \deg(P_j(z) - P_i(z))$ $(i \neq j)$, *et soit* $H(z) \not\equiv 0$ *une fonction entière d'ordre inférieur de* 1. *Alors toute solution* f *de l' équation différentielle* (3.1) *est d'ordre infini.*

Exemple 3.1.1 *On considère l'équation différentielle linéaire*

$$f^{(4)} + B_3(z) e^{z^2+z} f^{(3)} + B_2(z) e^{2z^2+z} f^{(2)} + B_1(z) e^{2z^2+iz} f' + B_0(z) e^{z^2+iz} f = H(z)$$

où $B_0 \not\equiv 0, B_1, B_2, H \not\equiv 0$ *des fonctions entières d'ordre inférieur* 1 . *Alors par le théorème (3.1.4) toute solution* f *de cette équation différentielle est d'ordre infini.*

Théorème 3.1.5 *[6] Soient* $A_j(z) = B_j(z) P_j\left(e^{R(z)}\right) + G_j(z) Q_j(e^{-R(z)})$ *pour* $j = 0, 1, ..., k-1$ *où* $P_j(z)$, $Q_j(z)$ *et* $R(z) = c_d z^d + ... + c_1 z + c_0$ $(d \geq 1)$ *sont des polynômes et soient* $B_j(z)$, $G_j(z)$, $H(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières d'ordre inférieur de* d. *Supposons que* $B_0(z) P_0(z) + G_0(z) Q_0(z) \not\equiv 0$ *et il existe* s $(0 \leq s \leq k-1)$ *tel que pour tout* $j \neq s$, $\deg P_s > \deg P_j$ *et* $\deg Q_s > \deg Q_j$. *Alors toute solution* f *de l'équation différentielle* (3.1) *est d'ordre infini.*

Exemple 3.1.2 *D'après Théorème (3.1.5), toute solution* f *de l'équation*

$$f'' + \sin\left(2z^2\right) f' + \cos\left(z^2\right) f = \sin(z)$$

est d'ordre infini.

Remarque 3.1.1 *Belaidi et Habib ont établi dans [4] des résultats similaires mais sous d'autres conditions.*

3.2 Lemmes pour les démonstrations des théorèmes

Pour la démonstration on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.2.1 *[19] Soient* f *une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini* σ, *et* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi)$ *de* *mesure linéaire nulle, tel que pour tout* $z = re^{i\theta}$ *avec* $|z|$ *suffisament grand et* $\theta \in [0, 2\pi) - E$, *et pour tout* k, j, $0 \leq j \leq k$, *on ait*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma - 1 + \varepsilon)}.$$

Lemme 3.2.2 *[13] Soient* $P(z) = a_n z^n + \ldots$, $(a_n = \alpha + i\beta \neq 0)$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$ *et* $A(z)$ $(\not\equiv 0)$ *une fonction entière avec* $\sigma(A) < n$. *Posons* $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. *Alors pour une certaine constante donnée* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $H \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que pour un certain* $\theta \in [0, 2\pi) \setminus H$, *où* $H = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$ *est un ensemble fini, il existe* $R > 0$ *tel que pour* $|z| = r > R$, *on a*
(i) Si $\delta(P, \theta) > 0$, *alors*

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\, \delta(P, \theta)\, r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\, \delta(P, \theta)\, r^n\},$$

(ii) Si $\delta(P, \theta) < 0$, *alors*

$$\exp\{(1 + \varepsilon)\, \delta(P, \theta)\, r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\, \delta(P, \theta)\, r^n\}.$$

Lemme 3.2.3 *[30] Soient* $n \geq 2$ *et* $A_j(z) = B_j(z) e^{P_j(z)}$ $(1 \leq j \leq n)$, *où* $B_j(z)$ *une fonction entière et* $P_j(z)$ *un polynôme non constant. Supposons que* $\deg(P_j(z) - P_i(z)) \geq 1$, $\max\{\sigma(B_j), \sigma(B_i)\} < \deg(P_j(z) - P_i(z))$ *pour tout* $i \neq j$. *Alors il existe un ensemble* $H_1 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que pour toute constante donnée* $M > 0$ *et* $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi) - (H_1 \cup H_2)$, *On ait pour tout* $j \neq s$,

$$\frac{\left|A_j\left(re^{i\theta}\right)\right| |z|^M}{\left|A_s\left(re^{i\theta}\right)\right|} \to 0, \quad \textit{quand } r \to \infty,$$

où $H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j, \theta) = 0 \text{ ou } \delta(P_i - P_j, \theta) = 0,\ i \neq j\}$ *un ensemble fini.*

Lemme 3.2.4 *[37] Soit* $f(z)$ *une fonction entière et supposons que* $G(z) = \dfrac{log^+ \left|f^{(k)}(z)\right|}{|z|^\rho}$ *nonbornée sur un rayon* $arg z = \theta$ *avec la constante* $\rho > 0$. *Alors il existe une suite* *infinie de points* $z_n = r_n e^{i\theta}\,(n = 1, 2, ...)$, *où* $r_n \to \infty$, *tel que* $G(z_n) \to \infty$ *et*

$$\frac{\left|f^{(j)}(z_n)\right|}{\left|f^{(k)}(z_n)\right|} \leq \frac{1}{(k-j)!}\,(1 + o(1))\, r_n^{k-j}, \quad j = 0, 1, ..., k-1,$$

quand $n \to \infty$.

Lemme 3.2.5 *[37] Soit* $f(z)$ *une fonction entière d'ordre fini* $\rho(f)$. *Supposons qu'il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que* $\log^{+}|f(re^{i\theta})| \leq Mr^{\sigma}$ *pour tous rayon* $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E$, *où* M *est une constante positive depend de* θ, *et* σ *une constante positive indépendente de* θ. *Alors* $\rho(f) \leq \sigma$.

Lemme 3.2.6 *[41] Supposons que* $f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)$ $(n \geq 2)$ *sont des fonctions méromorphes linéairement indépendantes et* $g_1(z), g_2(z), ..., g_n(z)$ *des fonctions entières vérifiant les conditions suivantes:*
(i) $\sum_{j=1}^{n} f_j(z)\, e^{g_j(z)} \equiv 0$.
(ii) $g_j(z) - g_k(z)$ *non constant pour* $1 \leq j < k \leq n$.
(iii) Pour $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j < k \leq n$,

$$T(r, f_j) = o\left\{T\left(r, e^{g_j(z) - g_k(z)}\right)\right\}, \quad (r \to \infty,\ r \notin E)$$

où E *un ensemble de mesure linéaire fini .*
Alors $f_j \equiv 0,\ 1 \leq j \leq n$.

3.3 Preuve du Théorème 3.1.3

Supposons le contraire c'est à dire que l'équation (3.3) admet une solution f d'ordre $\sigma(f)$ fini $(\sigma(f) = \sigma < \infty)$.

1. Montrons que $\sigma \geq n$:

   Supposons le contraire $\sigma < n$ et montrons une contadiction.

On peut écrire l'équation (3.3) sous forme

$$\left(B_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + B_0(z)\, e^{P_0(z)} f\right) e^{\lambda z^m} = H(z) - f^k. \qquad (3.4)$$

- Montrons d'abord que $B_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + B_0(z)\, e^{P_0(z)} f \neq 0$

Maintenant de la condition (1) du théorème et l'application de Lemma (3.2.6), si $B_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + B_0(z)\, e^{P_0(z)} f \equiv 0$, on obtient que $B_0(z) f \equiv 0$ et comme $B_0(z) \not\equiv 0$, alors $f \equiv 0$, ce qui implique que $H(z) \equiv 0$, c'est une contradiction.

- Comme $B_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + B_0(z)\, e^{P_0(z)} f \not\equiv 0$.

Alors l'ordre de $\left(B_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + B_0(z)\, e^{P_0(z)} f\right) e^{\lambda z^m}$ égale m et l'ordre $\left(H(z) - f^k\right)$ inférieur de n, ceci contredit le fait que $n < m$.

On obtient finalement

$$\sigma(f) = \sigma \geq n$$

- Et pour la condition (2), par l'appliquation du lemme (3.2.6) nous avons au moins deux termes linéairement independants:

$$B_s(z)\, f^{(s)} e^{P_s(z)} + B_t(z)\, f^{(t)} e^{P_t(z)} + \sum_{u=1}^{p} G_u e^{c_{j_u} P_s(z)} + \sum_{v=1}^{q} L_v e^{c_{i_v} P_t(z)} \equiv 0$$

Du lemme (3.2.6), $B_s(z)\, f^{(s)} \equiv 0$, et comme $B_s(z) \not\equiv 0$, alors $f^{(s)} \equiv 0$ et $f^{(k)} \equiv 0$, ce qui implique que $H(z) \equiv 0$, une contradiction.

Donc

$$B_s(z)\, f^{(s)} e^{P_s(z)} + B_t(z)\, f^{(t)} e^{P_t(z)} + \sum_{u=1}^{p} G_u e^{c_{j_u} P_s(z)} + \sum_{v=1}^{q} L_v e^{c_{i_v} P_t(z)} \not\equiv 0.$$

Par le même raisonnement on obtient $\sigma(f) = \sigma \geq n$.

D'après le Lemme (3.2.1), il existe, pour une constante donnée ε $(0<\varepsilon<1)$, un ensemble $E_1 \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0,2\pi) \setminus E_1$,alors

$$\frac{\left|f^{(j)}(z)\right|}{\left|f^{(i)}(z)\right|} \leq |z|^{k\sigma}, \qquad 0 \leq i < j \leq k \tag{3.5}$$

quand $z \to \infty$ le long $\arg z = \psi$.

Notons $E_2 = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P_j,\theta)=0,\ 0 \leq j \leq k\} \cup$

$\{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P_j - P_i,\theta)=0,\ 0 \leq i < j \leq k\} \cup \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(\lambda z^m,\theta)=0\}$, comme E_2 un ensemble fini. Supposons que $H_j \subset [0,2\pi)$ est l'ensemble exceptionnel du lemme(3.2.2) à $A_j(z) = B_j(z)\, e^{\lambda z^m + P_j(z)}$ $(j=0,...,k-1)$. Alors $E_3 = \cup_{j=0}^{k-1} H_j$ de mesure linéaire nulle. Soit l'ensemble $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Prenant $\arg z = \psi \in [0,2\pi) - E$.

On a deux cas à traiter :

Case (i): $\delta = \delta(\lambda z^m, \psi) < 0$.

D'après le lemme (3.2.2), pour une constante donnée ε $(0<\varepsilon<1)$ on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta r^m\}. \tag{3.6}$$

Maintenant, on prouve que $\dfrac{\log^+\left|f^{(k)}(z)\right|}{|z|^{\sigma(H)+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg z = \psi_0$. Supposons le contraire. D'après le lemma (3.2.4), il existe une suite infinie de points $z_i = r_i e^{i\theta}$ $(i=1,2,...)$, tel que $r_i \to \infty$ quand $i \to \infty$, on a

$$\frac{\log^+\left|f^{(k)}(z_i)\right|}{|z_i|^{\sigma(H)+\varepsilon}} \to \infty \tag{3.7}$$

et

$$\frac{\left|f^{(j)}(z_i)\right|}{\left|f^{(k)}(z_i)\right|} \leq (1+o(1))\, r_i^{k-j}, \qquad j=0,1,...,k-1. \tag{3.8}$$

De (3.7) et en vertu de la définition d'ordre $\sigma(H)$, il est facile d'obtenir

$$\left|\frac{H(z_i)}{f^{(k)}(z_i)}\right| \to 0 \tag{3.9}$$

quand $z_i \to \infty$. De l'équation (3.3), on obtient

$$1 \leq |A_{k-1}(z_i)| \left| \frac{f^{(k-1)}(z_i)}{f^{(k)}(z_i)} \right| + ... + |A_0(z_i)| \left| \frac{f(z_i)}{f^{(k)}(z_i)} \right| + \left| \frac{H(z_i)}{f^{(k)}(z_i)} \right|. \qquad (3.10)$$

Utilisons (3.6)-(3.9) dans (3.10), on obtient

$$1 \leq r_i^k \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta r_i^m\}.$$

Ce qui est impossible comme $\delta < 0$. Par conséquent $\frac{log^+|f^{(k)}(z_i)|}{|z_i|^{\sigma(H)+\varepsilon}}$ est borné sur le rayon $\arg z = \psi$. Supposons que $\frac{log^+|f^{(k)}(z_i)|}{|z_i|^{\sigma(H)+\varepsilon}} \leq M_1$ (M_1 une constante) et donc

$$|f^{(k)}(z)| \leq M_1 \exp\{r^{\sigma(H)+\varepsilon}\}. \qquad (3.11)$$

Utilisons l'inégalité triangulaire et sachons l'égalité

$$f(z) = f(0) + f'(0)\,z + ... + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(0)\,z^{k-1} + \int_0^z ... \int_0^{\xi_1} f^{(k)}(\xi)\,d\xi d\xi_1 ... d\xi_{k-1},$$

et (3.11), on obtient

$$|f(z)| \leq (1+o(1))\,r^k |f^{(k)}(z)| \leq (1+o(1))\,M_1 r^k \exp\{r^{\sigma(H)+\varepsilon}\} \leq \exp\{r^{\sigma(H)+2\varepsilon}\}, \qquad (3.12)$$

pour tout rayon $\arg z = \psi \in [0, 2\pi) - E$.

Case (ii) : $\delta = \delta(\lambda z^m, \psi) > 0$.

Passons au cas $\delta_j = \delta(P_j, \psi)$.

1. Pour la condition (1), comme a_{nj} $(j = 0, ..., k-1)$ sont des nombres complexes distinctes, il existe $s \in \{0, 1, 2..., k-1\}$ tel que $\delta_s > \delta_j$ pour tous $j \neq s$.

2. Pour la condition (2), soit $\delta' = \max\{\delta_s, \delta_t\}$ et on peut supposer que $\delta' = \delta_s$.

Dans les deux cas, nous avons

$$\left|\frac{A_j\left(z\right)}{A_s\left(z\right)}\right|\left|z\right|^M \to 0, \quad \text{et} \quad \frac{\left|z\right|^M}{\left|A_s\left(z\right)\right|} \to 0, \tag{3.13}$$

quand $|z| \to \infty$, pour tous $M > 0$. Supposons que $\dfrac{\log^+\left|f^{(s)}\left(z\right)\right|}{\left|z\right|^{\sigma(H)+\varepsilon}}$ est non borné pour le rayon $\arg z = \psi$. Alors du lemme (3.2.4), il existe une suite infinie de points $z_i = r_i e^{i\psi}$, tels que $r_i \to \infty$, et

$$\frac{\log^+\left|f^{(s)}\left(z_i\right)\right|}{\left|z_m\right|^{\sigma(H)+\varepsilon}} \to \infty, \tag{3.14}$$

et

$$\frac{\left|f^{(j)}\left(z_i\right)\right|}{\left|f^{(s)}\left(z_i\right)\right|} \leq \left(1+o\left(1\right)\right) r_i^{s-j}, \qquad j = 0, 1, ..., s-1. \tag{3.15}$$

Du (3.14) et en vertu de la définition d'ordre de $\sigma\left(H\right)$, il est facile d'obtenir

$$\left|\frac{H\left(z_i\right)}{f^{(s)}\left(z_i\right)}\right| \to 0 \tag{3.16}$$

quand $r_i \to \infty$.

On peut réécrire (3.3) de la forme:

$$\begin{aligned} 1 \leq & \frac{1}{\left|A_s\left(z_i\right)\right|}\left|\frac{f^{(k)}\left(z_i\right)}{f^{(s)}\left(z_i\right)}\right| + \left|\frac{f^{(k-1)}\left(z_i\right)}{f^{(s)}\left(z_i\right)}\right| \frac{\left|A_{k-1}\left(z_i\right)\right|}{\left|A_s\left(z_i\right)\right|} + ... \\ & + \left|\frac{f^{(s+1)}\left(z_i\right)}{f^{(s)}\left(z_i\right)}\right| \frac{\left|A_{s+1}\left(z_i\right)\right|}{\left|A_s\left(z_i\right)\right|} + \left|\frac{f^{(s-1)}\left(z_i\right)}{f^{(s)}\left(z_i\right)}\right| \frac{\left|A_{s-1}\left(z_i\right)\right|}{\left|A_s\left(z_i\right)\right|} + ... \\ & + \left|\frac{f\left(z_i\right)}{f^{(s)}\left(z_i\right)}\right| \frac{\left|A_0\left(z_i\right)\right|}{\left|A_s\left(z_i\right)\right|} + \frac{1}{\left|A_s\left(z_i\right)\right|}\left|\frac{H\left(z_i\right)}{f^{(s)}\left(z_i\right)}\right|; \end{aligned} \tag{3.17}$$

et l'utilisation de (3.5), (3.13), (3.15) et (3.16) dans (3.17) une contradiction suit quand $z_i \to \infty$. Alors $\dfrac{log^+|f^{(s)}\left(z_i\right)|}{\left|z_i\right|^{\sigma(H)+\varepsilon}}$ est borné et nous avons :

$|f^{(s)}\left(z\right)| \leq M_2 \exp\{r^{\sigma(H)+\varepsilon}\}$ sur le rayon $\arg z = \psi$. Cela implique, comme dans le Cas (i), que

$$\left|f\left(z\right)\right| \leq \exp\{r^{\sigma(H)+2\varepsilon}\}.$$

Nous concluons que dans tous les cas nous avons

$$|f(z)| \leq \exp\{r^{\sigma(H)+2\varepsilon}\}$$

sur tout rayon $\arg z = \psi \in [0, 2\pi) - E$, à condition que r assez grand. Alors du Lemme (3.2.5), $\sigma(f) \leq \sigma(H) + 2\varepsilon < n$ $(0 < 2\varepsilon < n - \sigma(H))$, ce qui est impossible D'où, toute solution de (3.3) est d'ordre infini.

3.4 Preuve du Théorème 3.1.4

Nous supposons contrairement à l'assertion que f une solution de (3.1) d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma < \infty$.

Premièrement nous prouvons que $\sigma \geq 1$. En effet, si $\sigma < 1$ alors nous aurons la contradiction suivante.

De l'équation (3.1), On peut écrire

$$B_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + B_0(z) e^{P_0(z)} f = H(z) - f^{(k)}. \tag{3.18}$$

Par le même raisonnement de la preuve du Theorème (3.1.3), nous obtenons que l'ordre du premier membre $\left(B_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + B_0(z) e^{P_0(z)} f\right)$ est supérieur ou égale à 1 et l'ordre du second membre $\left(H(z) - f^{(k)}\right)$ est inférieur à 1, une contradiction. Par conséquent $\sigma \geq 1$.

En prenant $\arg z = \psi \in [0, 2\pi) - E$ où E de mesure linéaire nulle et $\delta_j = \delta(P_j, \psi)$ $(j = 0, ..., k-1)$. D'après Lemme (3.2.3), il existe $s \in \{0, 1, 2..., k-1\}$ tels que pour $j \neq s$, $M > 0$, nous avons

$$\left|\frac{A_j(z)}{A_s(z)}\right| |z|^M \to 0, \quad \text{quand } z \to \infty. \tag{3.19}$$

On va traiter deux cas:

Case (i): $\delta_s > 0$. Dans ce cas nous avons aussi

$$\frac{1}{|A_s(z)|}|z|^M \to 0, \quad \text{quand } z \to \infty. \tag{3.20}$$

Montrons que $\dfrac{\log^+ \left|f^{(s)}(z)\right|}{|z|^{\sigma(H)+\varepsilon}}$est bornée sur le rayon $\arg z = \psi$. Supposez que ce n'est pas le cas. Alors par lemme (3.2.4), il existe une suite infinie de points $z_i = r_i e^{i\psi_0}$, tels que $r_i \to \infty$, et par (3.14), (3.15), (3.16) . Comme dans la preuve du Théorème (3.1.3), en utilisant, (3.17) nous obtenons une contradiction. Par conséquent , $\dfrac{\log^+ \left|f^{(s)}(z)\right|}{|z|^{\sigma(H)+\varepsilon}}$ est bornée et donc nous concluons que

$$|f(z)| \leq \exp\{r^{\sigma(H)+2\varepsilon}\}. \tag{3.21}$$

Case (ii): $\delta_s < 0$. On remarque dans ce cas $\delta_j < 0$ pour tous j et on a :

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_j r^{d_j}\right\},$$

où $d_j = \deg(P_j)$; ce qui implique

$$|A_j(z)|\,|z|^M \to 0, \quad \text{quand } z \to \infty.$$

Nous utilisons le même raisonnement comme au cas (i) dans la preuve du Théorème (3.1.3), nous prouvons que $\dfrac{\log^+ \left|f^{(s)}(z)\right|}{|z|^{\sigma(H)+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg z = \psi$ et nous concluons que

$$|f(z)| \leq \exp\{r^{\sigma(H)+2\varepsilon}\}.$$

Alors d'après le lemme (3.2.5), $\sigma(f) \leq \sigma(H) + 2\varepsilon < 1$ $(0 < 2\varepsilon < 1 - \sigma(H))$, une contradiction. Donc, chaque solution de l'équation (3.1) est d'ordre infini.

3.5 Preuve du Théorème 3.1.5

Supposons que f une solution de (3.1) est d'ordre $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Par le même raisonnement du Théorème (3.1.4) et prenons en compte la supposition $B_0(z)P_0(z) + G_0(z)Q_0(z) \not\equiv 0$ et l'existenc de s $(0 \leq s \leq k-1)$ tels que pour $j \neq s$, $\deg P_s > \deg P_j$ et $\deg Q_s > \deg Q_j$, nous prouvons que $\sigma \geq d$.

Posons $\delta(R,\theta) = \operatorname{Re}\left(c_d e^{id\theta}\right)$ et

$$P_j\left(e^{R(z)}\right) = a_{jm_j}e^{m_jR(z)} + a_{j(m_j-1)}e^{(m_j-1)R(z)} + ... + a_{j1}e^{R(z)} + a_{j0},$$

$$Q_j\left(e^{-R(z)}\right) = b_{jn_j}e^{-n_jR(z)} + b_{j(n_j-1)}e^{-(n_j-1)R(z)} + ... + b_{j1}e^{-R(z)} + b_{j0}.$$

D'après le lemme (3.2.2), c'est facile d'obtenir :

(i) Si $\delta(R,\theta) > 0$, Alors

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)m_j\delta(R,\theta)r^d\right\} \leq |A_j(z)| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)m_j\delta(R,\theta)r^d\right\}, \qquad (3.22)$$

(ii) Si $\delta(R,\theta) < 0$, Alors

$$\exp\left\{-(1-\varepsilon)n_j\delta(R,\theta)r^d\right\} \leq |A_j(z)| \leq \exp\left\{-(1+\varepsilon)n_j\delta(R,\theta)r^d\right\}. \qquad (3.23)$$

En prenant $\arg z = \psi \in [0,2\pi) - E$ où E de mesure linéaire nulle. Nous prouvons que $\dfrac{\log^+\left|f^{(s)}(z)\right|}{|z|^{\sigma(H)+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg z = \psi$. Supposons le contraire. Alors d'après le lemme (3.2.4), il existe une suite infinie de points $z_i = r_ie^{i\psi_0}$, tels que $r_i \to \infty$, et (3.14), (3.15), (3.16).

De l'équation (3.1) on peut écrire

$$\begin{aligned} |A_s(z_i)| \leq & \left|\frac{f^{(k)}(z_i)}{f^{(s)}(z_i)}\right| + |A_{k-1}(z_i)| \left|\frac{f^{(k-1)}(z_i)}{f^{(s)}(z_i)}\right| + ... \\ & + |A_{s+1}(z_i)| \left|\frac{f^{(s+1)}(z_i)}{f^{(s)}(z_i)}\right| + |A_{s-1}(z_i)| \left|\frac{f^{(s-1)}(z_i)}{f^{(s)}(z_i)}\right| + ... \\ & + |A_0(z_m)| \left|\frac{f(z_i)}{f^{(s)}(z_i)}\right| + \left|\frac{H(z_i)}{f^{(s)}(z_i)}\right|. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Si $\delta(R,\theta) > 0$, alors en utilisant (3.14), (3.15), (3.16) et (3.22) dans (3.24), on obtient

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\, m_s \delta(R,\theta)\, r_i^d\right\} \leq r_i^M \exp\left\{(1+\varepsilon)(m_s-1)\,\delta(R,\theta)\, r_i^d\right\},$$

où $M > 0$ une constante. Une contradiction suit en prenant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2m_s-1}$.
Si $\delta(R,\theta) < 0$, en utilisant (3.23) au lieu de (3.22) dans (3.24), on obtient

$$\exp\left\{-(1-\varepsilon)\, n_s \delta(R,\theta)\, r^d\right\} \leq r_i^M \exp\left\{-(1+\varepsilon)(n_s-1)\,\delta(R,\theta)\, r_i^d\right\},$$

on trouve une contradiction en prenant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2n_s-1}$. Par conséquent $\dfrac{\log^+\left|f^{(s)}(z)\right|}{|z|^{\sigma(H)+\varepsilon}}$ est bornée sur tous rayon $\arg z = \psi \in [0,2\pi) - E$ et nous concluons que:

$$|f(z)| \leq \exp\{r^{\sigma(H)+2\varepsilon}\}.$$

Alors d'après le lemme (3.2.5), $\sigma(f) \leq \sigma(H) + 2\varepsilon < d \;(0 < 2\varepsilon < d - \sigma(H))$, une contradiction. Donc, toute solution de (3.1) est d'ordre infini.

Chapitre 4

Exposant de convergence de $f^{(i)} - \varphi$ concernant les équations différentielles linéaires dans le disque unité

4.1 Introduction

Considérons l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{4.1}$$

où $A_j(z)$ des fonctions entières ou méromorphes dans le plan complexe.

Récemment Xu, Tu et Zheng ont étudié la croissance et la distribution des zeros de $f^{(i)} - \varphi$ où $f \not\equiv 0$ est une solution de l'equation (4.1) et φ est une fonction négligeable devant f au voisinage de ∞.

Théorème 4.1.1 *[39] Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions entières d'ordre fini avec l'une des deux conditions suivantes:*

(i) $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0) < \infty$*;*

(ii) $0 < \sigma(A_{k-1}) = ...\sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$ *et* $\max\{\tau(A_j) : j = 1,2,...,k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau$,

Alors toute solution $f \not\equiv 0$ *de l'equation (4.1) et pour toute fonction entière* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *satisfaisant* $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, *on a*

$$\overline{\lambda_2}(f-\varphi) = \overline{\lambda_2}(f'-\varphi) = \overline{\lambda_2}(f''-\varphi) = \overline{\lambda_2}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Théorème 4.1.2 *[39] Soient* $A_j(z)$ $(j = 1,2,...,k-1)$ *des polynomes,* $A_0(z)$ *une fonction entière transcendante, alors pour toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (4.1) et pour toute fonction entière* $\varphi(z)$ *d'ordre fini, on a*

(i) $\overline{\lambda}(f-\varphi) = \lambda(f-\varphi) = \sigma(f) = \infty$;

(ii) $\overline{\lambda}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \infty \quad (i \geq 1, i \in \mathbb{N}).$

Théorème 4.1.3 *[39] Soient* $A_j(z)$ $(j = 0,1,...,k-1)$ *des fonctions méromorphes satisfaisant* $\max\{\sigma(A_j) : j = 1,2,...,k-1\} < \sigma(A_0)$ *et* $\delta(\infty, A_0) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{m(r,A_0)}{T(r,A_0)} > 0$. *Alors, pour toute solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (4.1) et pour toute fonction méromorphe* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *satisfaisant* $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, *on a*

$$\overline{\lambda_2}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)}-\varphi\right) \geq \sigma(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}),\ \text{où } f^{(0)} = f.$$

Dans [8], Bouabdelli et Belaidi ont obtenus le résultat suivant:

Théorème 4.1.4 *[8] Soient* $A_j(z)$ $(j = 0,1,...,k-1)$ *des fonctions entières d'ordre p-itératif finis avec* $i(A_0) = p\,(0 < p < \infty)$ *et l'une des deux conditions suivantes:*

(i) $\max\{\sigma_p(A_j) : j = 1,2,...,k-1\} < \sigma_p(A_0)$

(ii)$\max\{\sigma_p(A_j) : j = 1,2,...,k-1\} < \sigma_p(A_0) = \sigma$ $(0 < \sigma < \infty)$ *et*
$\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_0)\} < \tau_p(A_0) = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$,

Alors toute solution $f \not\equiv 0$ *de l'equation (4.1) et pour toute fonction entière* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *satisfaisant* $\sigma_{p+1}(\varphi) < \sigma_p(A_0)$, *on a*

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à cette investigation mais dans le dique unité. Avant d'énoncer nos résultats; nous donnons quelques définitions et notations.

4.2 Quelques définitions et Notations

4.2.1 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe et analytique dans le disque unité

Définition 4.2.1 *[26] Soit f une fonction analytique non constante dans le dique unité $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\sigma_M(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log^+ \log^+ M(r, f)}{-\log(1-r)},$$

$$\sigma_{M,2}(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log^+ \log^+ \log^+ M(r, f)}{-\log(1-r)},$$

où $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Si f est une fonction méromorphe sur D. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log^+ T(r, f)}{-\log(1-r)},$$

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log^+ \log^+ T(r, f)}{-\log(1-r)},$$

où $T(r, f)$ est la fonction charactéristique de R. Nevanlinna de la fonction f.

Tsuji a montré que si f est une fonction analytique sur D. Alors on a l'inégalité

$$\sigma(f) \leq \sigma_M(f) \leq \sigma(f) + 1.$$

Par exemple, la fonction $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{(1-z)^\mu}\right\}, (\mu \geq 1)$, satisfait $\sigma(f) = \mu - 1$ et $\sigma_M(f) = \mu$.

Évidemment, nous avons

$$\sigma(f) < \infty \text{ si et seulement si } \sigma_M(f) < \infty.$$

Remarque: Si f est analytique dans D, alors d'après la [31, Proposition 2.2.2]. on a $\sigma_{M,2}(f) = \sigma_2(f)$.

4.2.2 Espace de Hardy H_q^∞

Définition 4.2.2 *[27] Soit f une fonction analytique dans le disque unité D et soit $q \in [0, \infty)$. On dit que f est de l'espace de Hardy H_q^∞ si*

$$\sup_{z\in D} \left(1 - |z|^2\right)^q |f(z)| < \infty;$$

et on dit que f est de $\mathcal{H}$-fonction si $f \in H_q^\infty$ pour certain $q \in [0, \infty)$.

Définition 4.2.3 *[27] Une fonction méromorphe f dans le disque unité est dite* ***admissible*** *si*

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{T(r,f)}{-\log(1-r)} = \infty$$

et ***non admissible*** *si*

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{T(r,f)}{-\log(1-r)} < \infty.$$

4.2.3 Exposant de convergence d'une fonction méromorphe dans le disque unité

Lemme 4.2.1 *[29] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité . On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt + n(r, \frac{1}{f}) \log r$$

tel que $n(t, \frac{1}{f})$ *désigne le nombre des zéros de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq r$.

Lemme 4.2.2 *[29] Soit* f *une fonction méromorphe dans le disque unité . On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* f *respectivement par*

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

$$\overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \frac{1}{f}) - \overline{n}(0, \frac{1}{f})}{t} dt + \overline{n}(r, \frac{1}{f}) \log r$$

tel que $\overline{n}(t, \frac{1}{f})$ *désigne le nombre des zéros distincts de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq r$.

4.2.4 Le Type d'une fonction méromorphe et analytique dans le disque unité

Définition 4.2.4 *[26, 32] Soit* f *une fonction méromorphe dans le disque unité d'ordre* $\sigma(f) = \sigma\,(0 < \sigma < \infty)$. *On définit le type de* f *par*

$$\tau(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{T(r, f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}} = \overline{\lim_{r\to 1^-}} (1-r)^{\sigma} T(r, f).$$

Définition 4.2.5 *[32] Soit* f *une fonction analytique dans le disque unité d'ordre*

$\sigma_M(f) = \sigma_M$ $(0 < \sigma_M < \infty)$. *On définit le type de* f *par*

$$\tau_M(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{T(r,f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma_M}}.$$

4.3 Résultats

Pour l'étude de la croissance et la distribution des zéros de $f^{(i)} - \varphi$ où $f \not\equiv 0$ est une solution de l'equation (4.1) avec des coefficients analytiques et méromorphes dans le disque unité, on établit les résultats suivants:

Théorème 4.3.1 *[7] Soient* $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions analytiques d'ordre fini dans le disque unité* D. *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*
(1) $\max\{\sigma_M(A_j) : j = 1, ..., k-1\} < \sigma_M(A_0) < \infty$*;*
(2) $0 < \sigma_M(A_{k-1}) = ... = \sigma_M(A_1) = \sigma_M(A_0) < \infty$ *et* $\max\{\tau_M(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \tau_1 < \tau_M(A_0) = \tau$,
alors toute solution $f \not\equiv 0$ *de l'équation (4.1) et pour toute fonction analytique* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *dans le disque unité* D *satisfait* $\sigma_{M,2}(\varphi) < \sigma_M(A_0)$, *on obtient*

$$\overline{\lambda}_2(f-\varphi) = \overline{\lambda}_2\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_{M,2}(f) = \sigma_M(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (4.2)$$

Remarque 4.3.1 *Nous obtenons le même résultat du théorème (4.3.1) si quelques coefficients* $A_j(z)$ $j = 1, 2, ..., k-1$, *satisfaisant la condition (1) et d'autre satisfaisant la condition (2), i.e. il existe* $J \subset \{1, ..., k-1\}$ *tels que* $\sigma_M(A_j) < \sigma_M(A_0)$ *pour* $j \in J$ *et* $\max\{\tau_M(A_j) : \sigma_M(A_j) = \sigma_M(A_0)\} < \tau_M(A_0)$.

Si nous remplacons $\sigma_M(A_j)$ et $\tau_M(A_j)$ par $\sigma(A_j)$ et $\tau(A_j)$ dans le Théorème (4.3.1), nous ne pouvons pas obtenir le même résultat. En effet, nous pouvons faire la comparaison entre [23, Theorem 3] et le résultat suivant.

Théorème 4.3.2 *[7] Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions analytiques d'ordre fini dans le disque unité D telles que $0 < \sigma(A_0) < \infty$, $\sigma(A_j) = \sigma(A_0)$ pour $j \in J \subset \{1, ..., k-1\}$ et $\sum_{j \in J} \tau(A_j) < \tau(A_0)$, et $\sigma(A_j) < \sigma(A_0)$ pour $j \notin J$. alors, toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (4.1) satisfait $\sigma(A_0) \leq \sigma_2(f) \leq \alpha_M = \max_{0 \leq j \leq k-1} \{\sigma_M(A_j)\}$.*

Si on remplace dans le théorème (4.3.2), la condition $\sum_{j \in J} \tau(A_j) < \tau(A_0)$ par $\max\{\tau(A_j) : \sigma(A_j) = \sigma(A_0)\} < \tau(A_0)$, on ne peut pas obtenir le même résultat, excepté, bien evidemment, les équations differentielles du seconde ordre.

Corollaire 4.3.1 *[7] Soient $A_j(z)$ $j = 0, 1$ des fonctions analytiques d'ordre fini dans le disque unité D satisfaisant $\sigma(A_1) < \sigma(A_0) < \infty$ ou $0 < \sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$ et $\tau(A_1) < \tau(A_0)$. Alors , toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation differentielle*

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0,$$

satisfait $\sigma(A_0) \leq \sigma_2(f) \leq \max\{\sigma_M(A_0), \sigma_M(A_1)\}$.

Dans le théorème (4.3.1), pour $k = 2$, Si on remplace $\sigma_M(A_j)$ et $\tau_M(A_j)$ par $\sigma(A_j)$ et $\tau(A_j)$, on peut obtenir le résultat suivant:

$$\sigma(A_0) \leq \overline{\lambda_2}(f - \varphi) = \overline{\lambda_2}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f) \leq \max\{\sigma_M(A_0), \sigma_M(A_1)\} \quad (4.3)$$

mais pour $k \geq 3$, le théorème (4.3.1) reste valide seulement pour la condition (1).

Théorème 4.3.3 *[7] Soient $A_j(z)$ $j = 1, 2, ..., k-1$ des $\mathcal{H}$-fonctions et $A_0(z)$ une fonction analytique non $\mathcal{H}$-fonction. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (4.1) et pour toute fonction analytique $\varphi(z) \not\equiv 0$ d'ordre fini, on a*

(1) $\overline{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \sigma(f) = \infty$;

(2) $\overline{\lambda}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \infty \quad (i \geq 1, i \in \mathbb{N})$.

Théorème 4.3.4 *[7] Soient* $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ *des fonctions méromorphes dans le disque unité* D *satisfaisant* $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0)$ *et* $\delta(\infty, A_0) = \liminf\limits_{r \to 1^-} \frac{m(r,A_0)}{T(r,A_0)} > 0$*. Alors, pour toute solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *de (4.1) et pour toute fonction méromorphe* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *dans le disque unité* D *satisfaisant* $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$*, on a*

$$\overline{\lambda_2}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f) \geq \sigma(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{4.4}$$

où $f^{(0)} = f$*.*

Remarque 4.3.2 *En prenant* $\varphi(z) = z$ *dans nos résultats, on déduit la distribution des points fixes de* $f^{(i)}$*.*

4.4 Lemmes pour les démonstrations des théorèmes

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes qui ne sont pas les mêmes dans tous les cas:

$E \subset (0,1)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie, qui est $\int\limits_E \frac{dr}{1-r} < \infty$.

$F \subset (0,1)$ est un ensemble de mesure logarithmique infinie, qui est $\int\limits_F \frac{dr}{1-r} = \infty$.

$c > 0,\ \varepsilon > 0,\ \sigma \geq 0,\ \sigma_1 \geq 0,\ \tau \geq 0,\ \tau_1 \geq 0$, des constantes reals.

Lemme 4.4.1 *[39] Supposons que* $f \not\equiv 0$ *est une solution de l'équation (4.1). Posons* $g = f - \varphi$*; alors* g *satisfait l'équation*

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + ... + A_0 g = -\left[\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi\right]. \tag{4.5}$$

Lemme 4.4.2 *[39] Supposons que* $f \not\equiv 0$ *est une solution de l'équation (4.1). Posons* $g_i = f^{(i)} - \varphi,\ (i \in \mathbb{N} - \{0\})$*; alors* g_i *satisfait l'équation:*

$$g_i^{(k)} + U_{k-1}^i g_i^{(k-1)} + ... + U_0^i g_i = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^i\varphi^{(k-1)} + ... + U_0^i\varphi\right], \tag{4.6}$$

où

$$U_j^i = \left(U_{j+1}^{i-1}\right)' + U_j^{i-1} - \frac{\left(U_0^{i-1}\right)'}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1}, \tag{4.7}$$

$j = 0, 1, ..., k-1,\ U_j^0 = A_j$ *et* $U_k^i \equiv 1$.

Le lemme suivant est une conséquence de [15, Theorem 3.1].

Lemme 4.4.3 *Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité D telle que $f^{(j)}$ n'est pas identiquement nulle. Soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée; k et j des entiers satisfaisant $k > j \geq 0$ et $d \in (0,1)$. Alors, on obtient*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \left(\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(2+\varepsilon)} \max\left\{\log\frac{1}{1-|z|}, T\left(s\left(|z|\right), f\right)\right\}\right)^{k-j}, \quad |z| \notin E,$$

où $s(|z|) = 1 - d(1-|z|)$. Comme un cas particulier, si $\sigma_1(f) < \infty$, alors

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(k-j)(\sigma_1+2+\varepsilon)}, \quad |z| \notin E. \tag{4.8}$$

Lemme 4.4.4 *[23] Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le disque unité D avec $\sigma_M(f) = \sigma$, $\tau_M(f) = \tau$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \tau < \infty$, alors pour tous $0 < \beta < \tau$, il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infini tel que pour tout $r \in F$; on a*

$$\log^+ M(r,f) > \frac{\beta}{(1-r)^{\sigma}}.$$

Lemme 4.4.5 *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le disque unité D avec $\sigma_M(f) = \sigma$, $0 < \sigma < \infty$, Alors pour tout $\beta : 0 < \beta < \sigma$, il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infini tel que pour tout $r \in F$, on a*

$$\log^+ M(r,f) > \frac{1}{(1-r)^{\beta}}.$$

Preuve : D'après la définition de $\sigma_M(f) = \sigma$, il existe une suite croissante

$\{r_m\} \to 1^-$ satisfaisant $1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m) < r_{m+1}$ et

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r_m, f)}{-\log(1 - r_m)} = \sigma.$$

Alors, il existe m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$ et pour un ε donné, nous avons

$$\log^+ M(r_m, f) > \frac{1}{(1 - r_m)^{\sigma-\varepsilon}}. \tag{4.9}$$

Pour tout ε tel que $0 < \beta < \sigma - \varepsilon$, il existe m_1 tel que pour tout $m \geq m_1$

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\sigma-\varepsilon} > (1 - r)^{\sigma-\varepsilon-\beta}. \tag{4.10}$$

De (4.9) et (4.10), pour $m \geq \max\{m_0, m_1\}$ et pour tout $r \in \left[r_m, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(1 - r_m)\right]$, on a

$$\begin{aligned} \log^+ M(r, f) &> \log^+ M(r_m, f) > \frac{1}{(1 - r_m)^{\sigma-\varepsilon}} > \frac{1}{(1 - r)^{\sigma-\varepsilon}}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\sigma-\varepsilon} \\ &> \frac{1}{(1 - r)^{\beta}}. \end{aligned}$$

Posons $F = \bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty} I_m$. On a

$$m_l(F) = \sum_{m=m_0}^{\infty} \int_{I_m} \frac{dr}{1 - r} = \sum_{m=m_2}^{\infty} \log\left(\frac{m}{m-1}\right) = \infty.$$

Lemme 4.4.6 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le disque unité D avec $\sigma(f) = \sigma$, $\tau(f) = \tau$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \tau < \infty$, pour tout $\beta : 0 < \beta < \tau$, il existe un ensemble $F \subset (0, 1)$ de mesure logarithmique infini tel que pour tout $r \in F$, on a*

$$T(r, f) > \frac{\beta}{(1 - r)^{\sigma}}.$$

Preuve : D'après la définition de $\tau(f) = \tau$, il existe une suite croissante $\{r_m\} \to$

1^{-}satisfaisant $1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)<r_{m+1}$ et

$$\lim_{m\to\infty}(1-r_m)^{\sigma}T(r_m,f)=\tau.$$

Alors, il existe m_0 tel que pour tout $m\geq m_0$ et pour un ε donné, on a

$$T(r_m,f)>\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r_m)^{\sigma}}. \tag{4.11}$$

Pour tout ε tel que $(0<\beta<\tau-\varepsilon)$, il existe m_1 tel que pour tout $m\geq m_1$, on a

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\sigma}>\frac{\beta}{\tau-\varepsilon}. \tag{4.12}$$

Du (4.11) et (4.12), pour tout $m\geq\max(m_0,m_1)$ et pour $r\in\left[r_m,1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)\right]$, on a

$$\begin{aligned}T(r,f) &> T(r_m,f)>\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r_m)^{\sigma}}\geq\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\sigma}\\ &> \frac{\beta}{(1-r)^{\sigma}}.\end{aligned}$$

Posons $F=\bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty}I_m$. On a

$$m_l(F)=\sum_{m=m_2}^{\infty}\int\limits_{I_m}\frac{dr}{1-r}=\sum_{m=m_2}^{\infty}\log\left(\frac{m}{m-1}\right)=\infty.$$

Lemme 4.4.7 *Soient $A_j(z)$ $j=0,1,...,k-1$ des fonctions analytiques d'ordre fini dans le disque unité D satisfaisant $0<\sigma_M(A_j)\leq\sigma_M(A_0)=\sigma$ pour tout $j=1,...,k-1,$ et $\max\{\tau_M(A_j):j\neq0\}=\tau_1<\tau_M(A_0)=\tau$. Soient U_j^i $(j=0,1,...,k)$ $(i\in\mathbb{N})$ définis dans **(4.7)**. Alors, pour tout $\varepsilon:(0<2\varepsilon<\tau-\tau_1)$, il existe un ensemble F de mesure logarithmique infini tel que pour tout $r\in F$, on a*

$$\left|U_0^i\right|\geq\exp\left\{\frac{\tau-\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\}\quad et\quad\left|U_j^i\right|\leq\exp\left\{\frac{\tau_1+\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}\right\}, \tag{4.13}$$

où $j = 1, 2, ..., k-1.$

Preuve : Si nous voulons prouver (4.13) pour $i = m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, nous commençons par

$$|A_0| \geq \exp\left\{\frac{\tau - \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma}\right\} \quad \text{et} \quad |A_j| \leq \exp\left\{\frac{\tau_1 + \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma}\right\}.$$

on a $U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0}A_{j+1} = A_j + A_{j+1}\left(\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} - \frac{A'_0}{A_0}\right)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et $A_k \equiv 1$. Donc

$$\left|U_0^1\right| \geq |A_0| - |A_1|\left(\left|\frac{A'_1}{A_1}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right|\right) \tag{4.14}$$

et

$$\left|U_j^1\right| \leq |A_j| + |A_{j+1}|\left(\left|\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right|\right). \tag{4.15}$$

D'après Lemme (4.4.3), Lemme 4.4.4 et (4.14)-(4.15), il existe un ensemble F de mesure logarithmique infini tels que

$$\begin{aligned} \left|U_0^1\right| &\geq \exp\left\{\frac{\tau - \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma}\right\} - 2\exp\left\{\frac{\tau_1 + \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma}\right\}\frac{1}{(1-r)^c} \\ &\geq \exp\left\{\frac{\tau - \varepsilon/2^{m-1}}{(1-r)^\sigma}\right\}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

et

$$\begin{aligned} \left|U_j^1\right| &\leq \exp\left\{\frac{\tau_1 + \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma}\right\} + 2\exp\left\{\frac{\tau_1 + \varepsilon/2^m}{(1-r)^\sigma}\right\}\frac{1}{(1-r)^c} \\ &\leq \exp\left\{\frac{\tau_1 + \varepsilon/2^{m-1}}{(1-r)^\sigma}\right\}, \quad j \neq 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

où $c > 0$ est une constante.

Maintenant pour $i = 2$ dans (4.7), on a

$$\left|U_0^2\right| \geq \left|U_0^1\right| - \left|U_1^1\right|\left(\left|\frac{(U_1^1)'}{U_1^1}\right| + \left|\frac{(U_0^1)'}{U_0^1}\right|\right) \tag{4.18}$$

$$\left|U_j^2\right| \leq \left|U_j^2\right| + \left|U_{j+1}^2\right| \left(\left| \frac{\left(U_{j+1}^2\right)'}{U_{j+1}^2} \right| + \left| \frac{\left(U_0^2\right)'}{U_0^2} \right| \right), \quad j \neq 0. \tag{4.19}$$

de (4.16)-(4.19), on trouve

$$\left|U_0^2\right| \geq \exp\left\{ \frac{\tau - \varepsilon/2^{m-2}}{(1-r)^\sigma} \right\} \quad \text{et} \quad \left|U_j^2\right| \leq \exp\left\{ \frac{\tau_1 + \varepsilon/2^{m-2}}{(1-r)^\sigma} \right\}. \tag{4.20}$$

Par (4.20) et pour $i = 3$ dans (4.7), on obtient

$$\left|U_0^3\right| \geq \exp\left\{ \frac{\tau - \varepsilon/2^{m-3}}{(1-r)^\sigma} \right\} \quad \text{et} \quad \left|U_j^3\right| \leq \exp\left\{ \frac{\tau_1 + \varepsilon/2^{m-3}}{(1-r)^\sigma} \right\}.$$

Par la même méthode jusqu'à $i = m$, on trouve

$$\left|U_0^i\right| \geq \exp\left\{ \frac{\tau - \varepsilon}{(1-r)^\sigma} \right\} \quad \text{et} \quad \left|U_j^i\right| \leq \exp\left\{ \frac{\tau_1 + \varepsilon}{(1-r)^\sigma} \right\}.$$

Donc, la preuve du lemme est achevée.

Lemme 4.4.8 *Soient $H_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes d'ordre fini dans le disque unité D satisfaisant* $\max\{|H_j(z)|,\ j = 1, ..., k-1\} \leq \exp\left\{\frac{\beta_1}{(1-r)^\sigma}\right\}$ *et $|H_0(z)| \geq \exp\left\{\frac{\beta}{(1-r)^\sigma}\right\}$ où $0 < \beta_1 < \beta,\ \sigma > 0$ et $|z| = r \in F \subset (0,1)$ avec F de mesure logarithmique infini. Alors toute solution méromorphe f de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + H_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + H_1(z) f' + H_0(z) f = 0 \tag{4.21}$$

satisfait $\sigma_2(f) \geq \sigma$.

Preuve: Soit $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe de l'équation (4.21) d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma < \infty$. De l'équation (4.21), on obtient

$$|H_0(z)| \leq \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| + \sum_{j=1}^{k-1} |H_j(z)| \left| \frac{f^{(j)}}{f} \right|. \tag{4.22}$$

D'après le Lemme 4.4.3, pour tout ε donné ($\varepsilon > 0$) il existe un ensemble $E \subset [0,1)$ de mesure logarithmique fini tel que pour tout $z \in D$ satisfaisant $|z| \notin E$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{(1-|z|)^{j(\sigma+2+\varepsilon)}}, \quad (j=1,...,k). \tag{4.23}$$

D'après (4.22)-(4.23) et les hypothèses du Lemme 4.4.8, on obtient

$$\exp\left\{\frac{\beta}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \leq \frac{c}{(1-r)^{k(\sigma+2+\varepsilon)}} \exp\left\{\frac{\beta_1}{(1-r)^{\sigma}}\right\}, \tag{4.24}$$

où $c > 0$ est une constante. Comme $\beta_1 < \beta$, alors une contradiction suit de (4.24) quand $r \to 1^-$. Donc, $\sigma(f) = \infty$; et d'après Lemme 4.4.3, on obtient

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{(1-r)^{j(2+\varepsilon)}} \left(T(s(r), f)\right)^j, \ r \notin E. \tag{4.25}$$

D'après (4.22), (4.25) et les hypothèses du Lemme 4.4.8, on trouve

$$\exp\left\{\frac{\beta}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \leq \frac{c}{(1-r)^{k(2+\varepsilon)}} \left(T(s(r), f)\right)^k \exp\left\{\frac{\beta_1}{(1-r)^{\sigma}}\right\}. \tag{4.26}$$

Posons $s(r) = R$. On a $1 - r = \frac{1}{d}(1-R)$ et donc (4.26) devient

$$\left(\frac{1-R}{d}\right)^{k(2+\varepsilon)} \exp\left\{\frac{(\beta-\beta_1)\, d^{\sigma}}{(1-R)^{\sigma}}\right\} \leq M\left(T(R,f)\right)^k, \quad R \notin E. \tag{4.27}$$

D'après (4.27), on conclut que

$$\sigma_2(f) \geq \sigma.$$

Lemme 4.4.9 *Soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions analytiques d'ordre fini dans le disque unité D satisfaisant* $\max\{\sigma_M(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma_M(A_0) = \sigma < \infty$. *Soient $\left(U_j^i\right)$ $(j = 0, 1, ..., k)$ $(i \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions satisfaisant (4.7). Alors, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma - \sigma_1)$, il existe un ensemble F de mesure* *logarithmique infini tel que pour tout $r \in F$, on ait*

$$\left|U_0^i\right| \geq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon}}\right\} \;\; et \;\; \left|U_j^i\right| \leq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1+\varepsilon}}\right\}. \tag{4.28}$$

Preuve: Si nous voulons prouver (4.28) pour $i = m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, nous commençons par

$$|A_0| \geq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon/2^m}}\right\} \quad \text{et} \quad |A_j| \leq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1+\varepsilon/2^m}}\right\}.$$

on a $U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0}A_{j+1} = A_j + A_{j+1}\left(\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}} - \frac{A'_0}{A_0}\right)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et $A_k \equiv 1$. Donc

$$\left|U_0^1\right| \geq |A_0| - |A_1|\left(\left|\frac{A'_1}{A_1}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right|\right) \tag{4.29}$$

et

$$\left|U_j^1\right| \leq |A_j| + |A_{j+1}|\left(\left|\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right|\right). \tag{4.30}$$

D'après Lemme (4.4.3), Lemme 4.4.5 et (4.29)-(4.30), il existe un ensemble F de mesure logarithmique infini tels que

$$\begin{aligned} \left|U_0^1\right| &\geq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon/2^m}}\right\} - 2\exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1-\varepsilon/2^m}}\right\}\frac{1}{(1-r)^c} \\ &\geq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon/2^{m-1}}}\right\}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

et

$$\begin{aligned} \left|U_j^1\right| &\leq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1+\varepsilon/2^m}}\right\} + 2\exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1+\varepsilon/2^m}}\right\}\frac{1}{(1-r)^c} \\ &\leq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1+\varepsilon/2^{m-1}}}\right\}, \quad j \neq 0, \end{aligned} \tag{4.32}$$

où $c > 0$ est une constante.

Maintenant pour $i=2$ dans (4.7), on a

$$\left|U_0^2\right| \geq \left|U_0^1\right| - \left|U_1^1\right| \left(\left| \frac{(U_1^1)'}{U_1^1} \right| + \left| \frac{(U_0^1)'}{U_0^1} \right| \right) \tag{4.33}$$

$$\left|U_j^2\right| \leq \left|U_j^2\right| + \left|U_{j+1}^2\right| \left(\left| \frac{(U_{j+1}^2)'}{U_{j+1}^2} \right| + \left| \frac{(U_0^2)'}{U_0^2} \right| \right), \quad j \neq 0. \tag{4.34}$$

de (4.31)-(4.34), on trouve

$$\left|U_0^2\right| \geq \exp\left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon/2^{m-2}}} \right\} \quad \text{et} \quad \left|U_j^2\right| \leq \exp\left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma_1-\varepsilon/2^{m-2}}} \right\}. \tag{4.35}$$

Par (4.35) et pour $i=3$ dans (4.7), on obtient

$$\left|U_0^3\right| \geq \exp\left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon/2^{m-3}}} \right\} \quad \text{et} \quad \left|U_j^3\right| \leq \exp\left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma_1+\varepsilon/2^{m-3}}} \right\}.$$

Par la même méthode jusqu'à $i=m$, on trouve

$$\left|U_0^i\right| \geq \exp\left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon}} \right\} \quad \text{et} \quad \left|U_j^i\right| \leq \exp\left\{ \frac{1}{(1-r)^{\sigma_1+\varepsilon}} \right\}.$$

Lemme 4.4.10 *Soient $H_j(z)$ $j=0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphes d'ordre fini dans le disque unité D satisfaisant* $\max\{|H_j(z)|,\ j=1,...,k-1\} \leq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1}}\right\}$ *et* $|H_0(z)| \geq \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma}}\right\}$ *où $0<\sigma_1<\sigma$ et $|z|=r \in F \subset (0,1)$ avec F de mesure logarithmique infini. Alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (4.21) satisfait $\sigma_2(f) \geq \sigma$.*

Preuve: Soit $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe de l'équation (4.21) d'ordre fini $\sigma(f)=\sigma<\infty$. De l'équation (4.21), on obtient

$$|H_0(z)| \leq \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| + \sum_{j=1}^{k-1} |H_j(z)| \left| \frac{f^{(j)}}{f} \right|. \tag{4.36}$$

D'après le Lemme (4.4.3), pour tout ε donné ($\varepsilon>0$) il existe un ensemble $E \subset$

$[0,1)$ de mesure logarithmique fini tel que pour tout $z \in D$ satisfaisant $|z| \notin E$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{(1-|z|)^{j(\sigma+2+\varepsilon)}}, \quad (j=1,...,k). \tag{4.37}$$

D'après (4.36)-(4.37) et les hypothèses du Lemme 4.4.10, on obtient

$$\exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \leq \frac{c}{(1-r)^{k(\sigma+2+\varepsilon)}} \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1}}\right\}, \tag{4.38}$$

où $c>0$ est une constante. Comme $\sigma_1 < \sigma$, alors une contradiction suit de (4.38) quand $r \to 1^-$. Donc, $\sigma(f) = \infty$; et d'après Lemme (4.4.3), on obtient

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{(1-r)^{j(2+\varepsilon)}} \left(T(s(r), f)\right)^j, \ r \notin E. \tag{4.39}$$

D'après (4.22), (4.25) et les hypothèses du Lemme 4.4.8, on trouve

$$\exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma}}\right\} \leq \frac{c}{(1-r)^{k(2+\varepsilon)}} \left(T(s(r), f)\right)^k \exp\left\{\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1}}\right\}. \tag{4.40}$$

Posons $s(r) = R$. On a $1-r = \frac{1}{d}(1-R)$ et donc (4.40) devient

$$\left(\frac{1-R}{d}\right)^{k(2+\varepsilon)} \exp\left\{\frac{d^{\sigma}}{(1-R)^{\sigma}}\left(1 - \frac{d^{\sigma_1-\sigma}}{(1-R)^{\sigma-\sigma_1}}\right)\right\} \leq M\left(T(R,f)\right)^k, \quad R \notin E. \tag{4.41}$$

D'après (4.41), et $\sigma_1 < \sigma$ on conclut que

$$\sigma_2(f) \geq \sigma.$$

Lemme 4.4.11 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe admissible dans le disque unité D avec $\sigma(f) = \sigma \geq 0$, Alors il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infni tel que pour tout $r \in F$, on a*

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\log T(r,f)}{-\log(1-r)} = \sigma.$$

Preuve : D'après la définition de $\sigma(f)$, il existe une suite croissante $\{r_m\} \to 1^-$ satisfaisant $1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m) < r_{m+1}$ et

$$\lim_{r_m \to 1^-} \frac{\log T(r_m, f)}{-\log(1-r_m)} = \sigma.$$

Alors, il existe m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$ et $r \in I_m = \left[r_m, 1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)\right]$, on a

$$\frac{\log T(r_m, f)}{-\log\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m)\right]} \leq \frac{\log T(r, f)}{-\log(1-r)} \leq \frac{\log T\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)(1-r_m), f\right)}{-\log(1-r_m)}. \tag{4.42}$$

La limite des deux membres de (4.42), quand $r_m \to 1^-$, est égal à σ; donc pour $r \in I_m$, on a

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\log T(r, f)}{-\log(1-r)} = \sigma.$$

Posons $F = \bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty} I_m$. On a

$$m_l(F) = \sum_{m=m_2}^{\infty} \int_{I_m} \frac{dr}{1-r} = \sum_{m=m_2}^{\infty} \log\left(\frac{m}{m-1}\right) = \infty.$$

Lemme 4.4.12 *Soient* $H_j(z)$ $j=0,1,...,k-1$ *des fonctions méromorphe dans le disque unité* D *avec* $\max\{\sigma(H_j), \ j=1,...,k-1\} = \sigma_1 < \sigma(H_0) = \sigma$ *et* $\delta(\infty, H_0) > 0$. *Alors, toute solution méromorphe* f *de l'équation (4.21) satisfait* $\sigma_2(f) \geq \sigma$.

Preuve : Soit f une solution méromorphede (4.21). D'après (4.21) et le lemme de dérivée logarithmique, on a

$$\begin{aligned} m(r, H_0) &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k-1)}}{f}\right) + ... + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \\ &\quad \sum_{j=1}^{k-1} m(r, H_j) + \log(k+1) \\ &\leq c\left(\log^+ T(r, f) + \log\frac{1}{1-r}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, H_j), \ r \notin E, \end{aligned} \tag{4.43}$$

où $E \subset (0,1)$ est de mesure logarithmique fini et $c > 0$. D'après le lemme (4.4.11), il existe un ensemble F de mesure logarithmique infini tel que pour tout $r \in F$, on a

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\log T(r,H_0)}{-\log(1-r)} = \sigma. \tag{4.44}$$

Comme $\delta(\infty, H_0) = \liminf\limits_{r\to 1} \frac{m(r,H_0)}{T(r,H_0)} > 0$, alors du (4.44), pour ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma - \sigma_1)$ et pour tout $r \in F$, on a

$$m(r,H_0) \geq \frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon}}.$$

D'après (4.43) et (4.44), pour $r \in F - E$, on a

$$\frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon}} \leq c\left(\log^+ T(r,f) + \log\frac{1}{1-r}\right) + (k-1)\frac{1}{(1-r)^{\sigma_1+\varepsilon}}; \tag{4.45}$$

et de (4.45), on obtient $\sigma_2(f) \geq \sigma$.

Par le même raisonnement de la preuve du Lemme 4.4.7 et en utilisant le Lemme 4.4.5, on peut obtenir le lemme suivant.

Lemme 4.4.13 *Soient $A_j(z)$ $j = 0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphe dans le disque unité D satisfaisant $\max\{\sigma(A_j) : j = 1,2,...,k-1\} = \sigma_1 < \sigma(A_0) = \sigma$ et $\delta(\infty, A_0) > 0$ et soit U_j^i $(j = 0,1,...,k)$ $(i \in \mathbb{N})$ la suite définie dans (4.7). Alors, pour ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma - \sigma_1)$, on a*

$$m\left(r, U_j^i\right) \leq \frac{1}{(1-r)^{\sigma_1+\varepsilon}},\ (j = 1,2,...,k-1),\ r \notin E$$

et

$$m\left(r, U_0^i\right) \geq \frac{1}{(1-r)^{\sigma-\varepsilon}},\ r \in F.$$

Lemme 4.4.14 *Soient $G \not\equiv 0, H_j(z)$ $j = 0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphe dans le disque unité D. Si f est une solution méromorphe de l'équation differentielle*

$$f^{(k)} + H_{k-1}(z)f^{(k-1)} + ... + H_1(z)f' + H_0(z)f = G(z), \tag{4.46}$$

satisfaisant $\max\{\sigma_n(G), \sigma_n(H_j);\ j=0,1,...,k-1\} < \sigma_n(f) = \sigma_n$, *Alors* $\overline{\lambda_n}(f) = \lambda_n(f) = \sigma_n(f),\ (n \in \mathbb{N} - \{0\})$.

Preuve : Le même raisonnement de la preuve du lemme (3.5) dans [9] où $G \not\equiv 0, H_j(z)\ \ j=0,1,...,k-1$ des fonctions analytiques dans le disque unité D.

Lemme 4.4.15 *[23, Theorem 3] Soit* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. *Si les coefficients* $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ *sont analytiques dans* D *telles que* $\sigma_{M,n}(A_j) \leq \sigma_{M,n}(A_0)$ *pour tout* $j = 1, ..., k-1$, *et*

$$\max\{\tau_{M,n}(A_j) : \sigma_{M,n}(A_j) = \sigma_{M,n}(A_0)\} < \tau_{M,n}(A_0).$$

Alors toute solution $f \not\equiv 0$ *de l'équation (4.1) satisfait* $\sigma_{M,n+1}(f) = \sigma_{M,n}(A_0)$.

4.5 Preuve du Théorème 4.2.1

Cas (1). $\max\{\sigma_M(A_j) : j = 1, ..., k-1\} < \sigma_M(A_0) < \infty$. Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (4.1) et $\varphi(z) \not\equiv 0$ est une fonction analytique dans le disque unité D satisfaisant $\sigma_{M,2}(\varphi) < \sigma_M(A_0)$. Commençons par (4.2) pour $i = 0$, i.e. $\overline{\lambda_2}(f-\varphi) = \lambda_2(f-\varphi) = \sigma_{M,2}(f) = \sigma_M(A_0)$. De [10], on a $\sigma_{M,2}(f) = \sigma_M(A_0)$. Posons $g = f - \varphi$. Comme $\sigma_{M,2}(\varphi) < \sigma(A_0)$, alors $\sigma_{M,2}(g) = \sigma_{M,2}(f)$. Du Lemme(4.4.1), g satisfait (4.5). Posons $G(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0\varphi$. Si $G \equiv 0$, alors d'après [10] , on obtient $\sigma_{M,2}(\varphi) = \sigma_M(A_0)$, une contradiction; d'où $G \not\equiv 0$. Maintenant, comme $\sigma_{M,2}(g) = \sigma_2(f) = \sigma_M(A_0) > \max\{\sigma_2(G), \sigma_2(A_j)\}$, alors la condition du Lemme (4.4.14) est satisfait pour $n = 2$, ce qui implique que $\overline{\lambda_2}(g) = \lambda_2(g) = \sigma_2(g)$. Alors, on conclue que $\overline{\lambda_2}(f-\varphi) = \lambda_2(f-\varphi) = \sigma_2(f) = \sigma_M(A_0)$. Maintenant, démontrons (4.2) pour $i \geq 1$. Posons $g_i = f^{(i)} - \varphi$. Comme $\sigma_2\left(f^{(i)}\right) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$ et $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, alors, on a $\sigma_2(g_i) = \sigma_2(f) = \sigma_M(A_0)$. Du Lemme (4.4.2), g_i satisfait (4.6). Posons $G_i = \varphi^{(k)} + U_{k-1}^i\varphi^{(k-1)} + ... + U_0^i\varphi$. Si $G_i \equiv 0$, Des Lemme (4.4.9) et Lemme (4.4.10), on obtient $\sigma_2(\varphi) \geq \sigma_M(A_0)$, une contradiction avec $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$; alors $G_i \not\equiv 0$. Maintenant, du Lemme (4.4.14), pour $n = 2$, on obtient $\overline{\lambda_2}(g_i) = \lambda_2(g_i) = \sigma_2(g_i)$

i.e. $\overline{\lambda_2}\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\lambda_2\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\sigma_2(f)=\sigma_M(A_0)$.

Cas (2). $0<\sigma_M(A_0)<\infty$, $\sigma_M(A_j)=\sigma_M(A_0)$ pour tout $j\in\{1,...,k-1\}$ et $\max\{\tau_{M,n}(A_j):j\neq 0\}<\tau_{M,n}(A_0)$, Soit $f\not\equiv 0$ une solution de (4.1) et $\varphi(z)\not\equiv 0$ est une fonction analytique dans le disque unité D satisfaisant $\sigma_2(\varphi)<\sigma_M(A_0)$. Comme précédemment, on commence par (4.2) pour $i=0$, i.e. $\overline{\lambda_2}(f-\varphi)=\lambda_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma_M(A_0)$. Du Lemme (4.4.15), on a $\sigma_2(f)=\sigma_M(A_0)$. Posons $g=f-\varphi$. On a $\sigma_2(g)=\sigma_2(f)$. Comme précédemment, g satisfait (4.5).Si $G\equiv 0$, alors du Lemme (4.4.15) on a $\sigma_2(\varphi)=\sigma_M(A_0)$, une contradiction; alors $G\not\equiv 0$. Maintenant du Lemme (4.4.14), on obtient $\overline{\lambda_2}(g)=\lambda_2(g)=\sigma_2(g)$. Alors, on conclue que $\overline{\lambda_2}(f-\varphi)=\lambda_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma_M(A_0)$. Maintenant on démontre que (4.2) pour $i\geq 1$. Set $g_i=f^{(i)}-\varphi$. On a $\sigma_2(g_i)=\sigma_2(f)$, et g_i satisfait (4.6). Si $G_i\equiv 0$, d'après les Lemme (4.4.7) et Lemme (4.4.8), on obtient $\sigma_2(\varphi)\geq\sigma_M(A_0)$, une contradiction avec $\sigma_2(\varphi)<\sigma_M(A_0)$; alors $G_i\not\equiv 0$. Comme précédemment, du Lemme (4.4.14), pour $n=2$, on obtient $\overline{\lambda_2}(g_i)=\lambda_2(g_i)=\sigma_2(g_i)$ i.e. $\overline{\lambda_2}\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\lambda_2\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\sigma_2(f)=\sigma_M(A_0)$.

4.6 Preuve du Théorème 4.2.2

L'inégalité $\sigma_2(f)\leq\alpha_M$ découle de [28, Theorem 5.1]. D'aprés l'équation (4.1) et le lemme de dérivée logarithmique on obtient;

$$m(r,A_0)\leq m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)+...+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,A_j)+\log(k+1),$$

et donc

$$m(r,A_0)\leq c\left(\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,A_j),\ r\notin E. \tag{4.47}$$

Posons $\sum_{j\in J}\tau(A_j)=\tau^*$, $\max\{\sigma(A_j):j\in J'\}=\sigma^*$, $\tau(A_0)=\tau$ et $\sigma(A_0)=\sigma$. D'aprés (4.47), les conditions du Théorème 4.3.2 et Lemme (4.4.4), il existe un ensemble $F \subset (0,1)$ de mesure logarithmique infini telle que pour tout $r \in F - E$, on a

$$\frac{\tau - \varepsilon}{(1-r)^{\sigma}} \leq c\left(\log^{+} T(r,f) + \log \frac{1}{1-r}\right) + \frac{k-1}{(1-r)^{\sigma^{*}+\varepsilon}} + \frac{\tau^{*}+\varepsilon}{(1-r)^{\sigma}}, \tag{4.48}$$

où $0 < 2\varepsilon < \min(\tau - \tau^{*}, \sigma - \sigma^{*})$. De (4.48), on obtient que $\sigma(A_0) \leq \sigma_2(f)$.

4.7 Preuve du Théorème 4.2.3

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (4.1) et $\varphi(z) \not\equiv 0$ est une fonction analytique dans le disque unité D d'ordre fini. Du [27], on a $\sigma(f) = \infty$. Si $G \equiv 0$, alors du [27] on a $\sigma(\varphi) = \infty$, une contradiction; d'où $G \not\equiv 0$; et du Lemme (4.4.14), on obtient le resultat (1). Maintenant pour $i \geq 1$, si $G_i \equiv 0$, alors en prenant en compte que $A_j(z)$ $j = 1, 2, ..., k-1$ sont des $\mathcal{H}$- fonctions et $A_0(z)$ n'est pas $\mathcal{H}$- fonction alors U_j^i $(j = 1, ..., k)$ sont non admissible et U_0^i est admissible, $(i \in \mathbb{N})$; alors on obtient que $\sigma(\varphi) = \infty$, une contradiction; d'où $G_i \not\equiv 0$; et du Lemme(4.4.14) on obtient le résultat (2).

4.8 Preuve du Théorème 4.2.4

Soit $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe de (4.1) $\varphi(z) \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe dans le disque D satisfaisant $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$. Du Lemme (4.4.12), on obtient $\sigma_2(f) \geq \sigma(A_0)$. Si $G \equiv 0$, alors du Lemme (4.4.12), on a $\sigma_2(\varphi) \geq \sigma(A_0)$, une contradiction; d'où $G \not\equiv 0$; et du Lemme (4.4.14), on obtient le réultat (4.4) pour $i = 0$. Maintenant pour $i \geq 1$, si $G_i \equiv 0$, alors d'après les Lemmes (4.4.12) et (4.4.13) on obtient $\sigma_2(\varphi) \geq \sigma(A_0)$, contradiction; donc $G_i \not\equiv 0$; et du Lemme (4.4.14), on obtient le résultat (4.4).

Conclusion

Pour étudier la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe $\mathbb{C}$ ou dans le disque unité, en générale, on se base sur la domination d'un coefficient, souvent le coefficient de f, par rapport aux autres et donc plus les croissances des coefficients se rapprochent plus l'étude devient plus difficile, excepté le cas où les coefficients sont des polynômes qui a été étudié par Gundersen, Steinbart et Wang dans [20] où ils ont donné toutes les valeures possibles de l'ordre de la croissance des solutions. La plupart des cas étudiés est le cas où les coefficients sont de même ordre; dans ce sens, on a pensé à étudier le cas où les coefficients sont de même ordre et de même type pour certaines classes d'équations linéaires mais le problème dans sa généralité reste ouvert.

Dans cette dernière décennie, il y a une recherche active dans le disque unité concernant cette étude. Plusieurs chercheurs essayent d'étendre certains résultats du plan complexe au disque unité. Il est constaté qu'il y a une grande ressemblance entre les deux cas pour certaines propriétés. Dans ce sens, nous avons étudié, dans le quatrième chapitre, la croissance et l'oscillation des solutions et leurs dérivées de certaines classes d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont analytiques ou méromorphes dans le disque unité et une comparaison a été faite entre le plan complexe et disque unité. Parmi les difficultés qu'on trouve dans le disque unité, contrairement en plan complexe, c'est le cas où un coefficient autre que ce de f domine les autres et en plus le théorème de Wiman-Valiron n'est pas applicable dans le disque unité.

Bibliographie

[1] I. Amemiya and M. Ozawa; *Non-existence of finite order solutions of* $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$, Hokkaido Math. J., **10** (1981), 1-17.

[2] S. Bank and I. Laine, *On the oscilation theory of* $f'' + A(z)f = 0$ *wehre* $A(z)$ *is entire,* Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 95-98.

[3] B. Belaïdi, *Growth and oscillation related to a second order linear differential equation,* Math. Commun. 18(2013), 1-14.

[4] B. Belaïdi , H. Habib, *On the growth of solutions to Nonhomogeneous linear differential equations with entire coefficients having the same order,* Facta Universitatis (NI S) Ser .Math. Inform.28, N^o 1 (2013), 17–26

[5] N. Berrighi and S. Hamouda, *Linear differential equations with entire coefficients having the same order and type*, Electron. J. Differential. Equ.; Vol. 2011 (2011), No. 157, pp. 1-8.

[6] N. Berrighi and S. Hamouda, *Nonhomogeneous linear differential equations with entire coefficients having the same order and type,* Acta. Univ. Spatientiae Mathematica, No 7, 1 (2015) 15-26.

[7] N. Berrighi and S. Hamouda, *Exponent of convergence of solutions to linear differential equations in the unit disc,* Electron. J. Differential Equ. Vol. 2015 (2015) No 283, pp 1-11.

[8] R. Bouabdelli , B. Belaïdi, *On the Iterated Exponent of Convergence of Solutions of Linear Differential Equations with Entire and Meromorphic Coefficients,* Journal of Mathematics, Volume 2013, Article ID 429083, 9 pages

[9] T-B. Cao, *The growth, oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc,* J. Math. Anal. Appl. 352 (2009) 739-748.

[10] T-B. Cao and H-X. Yi, *The growth of solutions of linear complex differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc,* J. Math. Anal. Appl. 319 (2006) 278-294.

[11] Z.X. Chen; *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0$, *where the order* $(Q) = 1$, Sci, China Ser. A, **45** (2002), 290-300.

[12] Z.X. Chen and K. H. Shon, *On the growth of solutions of a class of hgher order linear differential equations*, Acta. Mathematica Scientia, **24** B (1) (2004), 52-60.

[13] Z.X. Chen and K. H. Shon, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations,* Acta. Mathematica Scientia, **24** B

[14] Y.-M. Chiang and W.K. Hayman, *Estimates on the growth of meromorphic solutions of linear differential equations,* Comment. math. helv. 79 (2004) 451-470.

[15] I. Chyzhykov, G. Gundersen and J. Heittokangas, *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*, Proc. London Math. Soc., 86 (2003), 735-754.

[16] M. Frei; *Über die Subnormalen Lösungen der Differentialgleichung* $w'' + e^{-z} w' + (Konst.)\, w = 0$, Comment. Math. Helv. **36** (1962), 1-8.

[17] M. Frei, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[18] G. Gundersen; *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc., (2) **37** (1988), 88-104.

[19] G. Gundersen, *On the question of whether* $f'' + e^{-z} f' + B(z) f = 0$ *can admit a solution* $f \not\equiv 0$ *of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **102A** (1986), 9-17.

[20] G. G. Gundersen, M. Steinbart and S. Wang, *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 1225-1247.

[21] G. G. Gundersen, M. Steinbart and S. Wang, *Growth and oscillation theory of non-homogegeous linear differential equations*, Proceedings of the Edinburgh Math. Society, 43 (2000), 343-359.

[22] S. Hamouda and B. Belaïdi, *On the growth of solutions of* $w^{(n)} + e^{az^m} w' + Q(z) w = 0$ *and some related extensions*, Hokkaido Math. J., Vol. **35** (2006), p. 573-586.

[23] S. Hamouda, *Iterated order of solutions of linear differential equations in the unit disc,* Comput. Methods Funct. Theory, 13 (2013) No. 4, 545-555.

[24] W.K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[25] W. K. Hayman, *The local growth of power series: A survey of the Wiman-Valiron method,* Canad. Math. Bull. 17 (1974), 317-358.

[26] J. Heittokangas, *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122 (2000) 1-54.

[27] J. Heittokangas, *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122 (2000) 1-14.

[28] J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä, *Growth estimates for solutions of linear complex differential equations.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 29 (2004), No. 1, 233-246.

[29] J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä, *Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc,* Result. Math. 49 (2006), 265-278.

[30] Z. G. Huang and G. R. Sun, *Oscillation of higher-order linear differential equations with entire coefficients,* Elec. J. Differ. Equ.Vol. 2010(2010), No.81, pp. 1-11.

[31] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations,* W. de Gruyter, Berlin, 1993.

[32] I. Laine, C*omplex differential equations,Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations*,4(2008) , 269-363;

[33] J.K. Langley, *On complex oscillation and a problem of Ozawa*, Kodai Math. J. **9** (1986), 430-439.

[34] M. Tsuji, *Differential theory in modern function theory*, Chelsea, New York, 1975, reprint of the 1959 edition.

[35] J. Tu and C.-F. Yi, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with entire coefficients having the same order,* J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 487-497.

[36] G. Valiron; *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, New York: Chelsea, 1949.

[37] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations,* Abstr. Appl. Anal. Vol. 2009 (2009), ID 363927, 11 pages.

[38] H. Wittich, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.

[39] H. Y. Xu, J. Tu, and X. M. Zheng, *On the hyper exponent of convergence of zeros of* $f^{(i)} - \varphi$ *of higher order linear differential equations,* Advances in Difference Equations, Vol. 2012 (2012), No. 114, 1-16.

[40] L. Yang, *Value distribution theory,* Springer-Verlag Science Press, Berlin-Beijing. 1993.

[41] H.X. Yi and C.C. Yang; *The uniqueness theory of meromorphic functions*, Science Press, Beijing, 1995.