MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation
Présenté par :

Bouabdellah Kaddour bey

THEME :

Existence et unicité de la solution d'un problème fractionnaire

Soutenue : 11/06/2025
Devant le jury composé de :

Mr. Zakaria BEKKOUCHE	**MCB**	**Université de Mostaganem**	**Président**
Mme. Horiya DIALA	**MAA**	**Université de Mostaganem**	**Examinateur**
Mr. Mohammed KAID	**MCA**	**Université de Mostaganem**	**Encadreur**

Table des matières

0.1 Résumé : 4
0.2 Introduction : 5

1 Rappels **6**
1.1 Fonction Gamma 6
1.2 Fonction Béta 7
1.3 Intégration-Riemann-Liouville 7
1.4 Dérivation-Riemann-Liouville 9
1.5 Dérivée-Caputo 12
1.6 Intégration fractionnaire au sens de Hadamard : 13
1.6.1 Quelques propriétés : 14
1.7 Dérivation fractionnaire au sens d'Hadamard : 16
1.8 Lien entre la dérivée fractionnire au sens de Caputo et celle au sens de Hadamard 17
1.9 Théorèmes des Points Fixes 17
1.9.1 Concepts Essentiels 17
1.9.2 Principe de Contraction de Banach 18
1.9.3 Théorème du point fixe de Schaefer 18
1.9.4 Théorème du point fixe de Schauder 18
1.9.5 Théorème du point fixe d'Arzela-Ascoli 18
1.9.6 Théorème du point fixe Krasnoselskii 18
1.9.7 Théorème d'Oregan 18

2 Solution des équations différentielles fractionnaires au sens de Hadamard **20**

2.1 Introduction 20
2.2 Position de problème : 20
2.3 Solution intégrale : 20
2.4 Transformation de problème : 22
2.5 Les hypothèses : 22
2.6 Résultats Principaux : 22

3 Exemples d'application **27**
3.1 Conclusion 30

Bibliographie **31**

Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volenté pour achever ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à mon encadreur de ce travail, monsieur *Mohammed KAID*, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail de master, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche.

Je remercie également monsieur Zakaria BEKKOUCHE, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Mes vifs remerciements vont également à madame Horiya DIALA, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'évaluer ce travail.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin

Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation ce travail.

0.1 Résumé :

L'objectif de ce travail est de contribuer au développement de la théorie d'existence et d'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les techniques du point fixe.

0.2 Introduction :

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans de nombreux domaines scientifiques, tels que la médecine et l'électrochimie, voir [13]. Par ailleurs, la théorie des EDFs représente l'un des principaux champs d'application du calcul fractionnaire. Les problèmes aux limites associés à ces équations se posent également en mathématiques appliquées, voir [1],[5],[10],[11]. De plus, il est parfois préférable d'imposer des conditions non locales, c'est-à-dire des conditions dépendant de l'ensemble du domaine et non seulement de points spécifiques, car les mesures nécessaires à une condition non locale peuvent être plus précises que celles obtenues à partir d'une condition locale, voir [17]

Ces dernières années, plusieurs chercheurs ont étudié les équations différentielles fractionnaires d'ordre 6, car elles sont très utiles pour décrire des phénomènes compliqués. Ces équations permettent de modéliser des situations où l'histoire du système (la mémoire) joue un rôle important. Elles sont utilisées dans différents domaines comme la physique, l'ingénierie, et la mécanique. Aujourd'hui encore, beaucoup de chercheurs continuent de travailler sur ces équations pour mieux les comprendre et trouver de nouvelles méthodes pour les résoudre.

Par exemple, Kaid et al. étudient le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\delta}u(t) = k_1F_1(t,u^{(4)}(t)) + k_2F_2(t,u^{(2)}(t)) + k_3F_3(t,u(t)), \quad t \in [0,1]\,, \\ u(0) = a_0, \quad u(1) = b_0, \qquad a_0,\ b_0 \in \mathbb{R}, \\ u'(0) = a_1, \quad u'(1) = b_1, \qquad a_1,\ b_1 \in \mathbb{R}, \\ u''(0) = a_2, \quad u''(1) = b_2, \quad a_2,\ b_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où D^{δ} est dérivée fractionnaires d'ordre δ tel que : $5 < \delta \leq 6$, and $u^{(\xi)}(t)$, $\xi \in \{0,2,4\}$ sont des dérivées classiques.

Ce mémoire comprend trois chapitres :

Le premier chapitre :

Contient les principales définitions et notations nécessaires à la compréhension du contenu de ce travail. On rappelera les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire. Quelques théorèmes du point fixe seront présentés.

Dans le **chapitre deux** :

On considère le problème d'ordre fractionnaire au sens d'Hadamard suivant

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t)), \quad t_0 \in \,]1,e]\,, \quad 5 < \alpha \leq 6, \\ u(t_0) = \int_1^e u(s)ds, \quad u(e) = b_0, \\ u'(t_0) = a_1,\ u'(e) = b_1, \\ u''(t_0) = a_2, \quad u''(e) = b_2, \end{cases}$$

tel que ${}^{H}D^{\alpha}$ dériveé farctionnire d'ordre α au sens d'Hdamard et $(a_i)_{i=1,2}$ et $(b_k)_{k=\overline{0,2}}$ sont des constantes réels.

Pour le **chapitre Trois** :

On donne quelques exemples pour illustrer les résultats obtenus et ce mémoire s'achève par une conclusion.

Chapitre 1

Rappels

La première et la deuxième section rassemblent les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire, voir [2]-[4],[6]-[9],[12],[15],[16].

Définition 1.1 *On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continus sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue sommables ie :*

$$f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b]),$$

telle que

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Définition 1.2 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $AC^n([a,b])$ l'espace des fonctions à valeurs complexex $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continus sur $[a,b]$ telle que $f^{(n-1)}(x) \in AC([a,b])$, c'est -à-dire :*

$$AC^n([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \quad et \quad f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b] \right\}.$$

En prticulier on a $AC^n([a,b]) = AC([a,b])$.

Définition 1.3 *L'espace noté $AC_\delta^n([a,b])$ défini par :*

$$AC_\delta^n([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \quad et\ \delta^{n-1} f(x) \in AC[a,b], \delta = x\frac{d}{dx} \right\},$$

est appelé espace des fonctions absolument continues avec un point qui égale 1.

1.1 Fonction Gamma

Définition 1.4 *On appelle la fonction Gamma notée Γ, la fonction définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

Remarque 1.1 *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2...\}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

1. $$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$
2. $$\Gamma(\alpha+n) = \alpha(\alpha+1)....(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha),$$
3. $$\Gamma(n+1) = n!.$$

1.2 Fonction Béta

Définition 1.5 *La fonction Bêta est donnée par :*

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \quad \mathrm{Re}(\beta) > 0.$$

Proposition 1.1 *Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation suivante :*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0; \quad Re(\beta) > 0.$$

1.3 Intégration-Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par :

$$I^n[f(t)] = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau; \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 1.6 *L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \geq 0$*, pour une fonction continue* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est défini par :*

$$\begin{cases} I_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau\,; \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \\ I\ {}_a^{\,0}\ [f(t)] = f(t). \end{cases}$$

Exemple 1.1 *Calculons l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction suivante :*

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \quad \beta > -1.$$

On a

$$I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}d\tau.$$

En effectuant le chengement de variable

$$\tau = a + x(t-a),$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}B(\alpha,\beta+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta+\alpha} \end{aligned}$$

donc

$$I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}.$$

Par exemple pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, il vient

$$\begin{aligned} I_a^{1}\left[(t-a)\right] &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3)}(t-a)^{2} \\ &= \frac{1}{2}(t-a)^{2}. \end{aligned}$$

Et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta+1\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Lemme 1.1 *Soit $f[a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $\alpha > 0$; $\beta > 0$ on a :*

1.

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = I_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right],$$

2.

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right].$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} I_a^{\beta}\left[f(\tau)\right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \left[(t-\tau)^{\alpha-1}\int_a^{\tau}(\tau-x)^{\beta-1} f(x)dx\right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(x)\int_x^t \left[(t-\tau)^{\alpha-1}\ (\tau-x)^{\beta-1}\ d\tau\right] dx \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\tau = t + (x-t)p$ et en utilisant la fonction Béta, on obtient :

$$\begin{aligned} & I_a^{\alpha}\ \left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(x)\left[\int_0^1 \left((t-x)\,p\right)^{\alpha-1}\left((t-x)\,(1-p)\right)^{\beta-1}(t-x)\,dp\right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \left[(t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x)\int_0^1 (1-p)^{\beta-1}p^{\alpha-1}dp\right] dx \\ &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x)dx \\ &= I_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right]. \end{aligned}$$

Exemple 1.2 *Si on prend*

$$f(x) = t-a, \qquad \alpha = \beta = \frac{1}{2},$$

il vient

$$I_a^{\alpha}\ \left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = I_a^{\alpha}\ \left[I_a^{\beta}\left[(t-a)\right]\right] = I_a^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\beta+2)}(t-a)^{\beta+1}\right] = \frac{1}{2}(t-a)^2.$$

D'autre part, on a :

$$I_a^{\alpha+\beta}\ \left[f(t)\right] = I_a^{\alpha+\beta}\left[(t-a)\right] = \int_a^x (t-a)dt = \frac{1}{2}(t-a)^2.$$

■

1.4 Dérivation-Riemann-Liouville

Définition 1.7 *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \frac{d^n}{dt^n}(I_a^{n-\alpha}\left[f(t)\right]) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^{t\prime}(t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau; \qquad n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^*.
\end{aligned}
$$

Exemple 1.3 *Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre au sens de Riemann-Liouville de la fonction*

$$f(t) = (t-a)^{\beta}\ , \qquad \beta > -1.$$

On a

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{-\alpha}(\tau-a)^{\beta}d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}(t-a)^{1-\alpha+\beta}\right) \\
&= \frac{(\beta-\alpha+1)\,\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, il vient

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_a^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)^{\beta}d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}\,(t-a)^{\beta-\frac{1}{2}}\,. \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}\,(t-a)^{\beta-\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Pour

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 1,$$

or

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)d\tau\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)\right]\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right)\\
&= \frac{3}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}.\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Remarque 1.2 *La dérivée fractionnaire d'une fonction constant au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle. On a*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}[c] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}d\tau\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}[c]\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{1-\alpha}d\tau\right)\\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Pour $c=1$, on a :

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.
$$

Proposition 1.2 *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires existent. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

1. $$
{}^{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\, {}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu\, {}^{RL}D_a^{\alpha}[g(t)].
$$

2. $$
{}^{RL}D_a^{\alpha}[{}^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]] \neq {}^{RL}\ D_a^{\alpha+\beta}[f(t)].
$$

3. $$
{}^{RL}D_a^{\alpha}[{}^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]] \neq {}^{RL}\ D_a^{\beta}\left[{}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)]\right].
$$

Lemme 1.2 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ vérifant ${}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = 0$, $\alpha \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$
f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-n+i+1)}(t-a)^{\alpha-n+i}, n = [\alpha]+1,\ b_i \in \mathbb{R}.
$$

1.5 Dérivée-Caputo

Définition 1.8 *Soit $f \in C^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$, on définit la dérivée fractionnaire au sens de caputo d'ordre $\alpha \geqslant 0$ de la fonction f comme suit :*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= I_a^{n-\alpha} \left[f^{(n)}(t) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Exemple 1.4 *Soit*

$$f(t) = (t-a)^\beta, \quad \beta > -1,$$

pour $\alpha > 0$, on a :

$$D_a^\alpha [f(t)] = I_a^{n-\alpha} \left[f^{(n)}(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

comme

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n},$$

alors

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= I_a^{n-\alpha} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau. \end{aligned}$$

En effctuant le changement de variable

$$\tau = a + x(t-a),$$

or

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (t-a-x(t-a))^{n-\alpha-1} (x(\tau-a))^{\beta-n} (t-a) dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{n-\alpha-1} x^{\beta-n} dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Pour

$$\beta = 1, \qquad \alpha = \frac{1}{2},$$

d'où

$$D_a^\alpha [f(t)] = I_a^{n-\alpha} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = I_a^{\frac{1}{2}} \left[\frac{d}{dt} (t-a) \right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (t-a)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.3 *Si $f = c$, alors*

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}[f] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t ((t-\tau)^{n-\alpha-1} \times 0) d\tau \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 1.3 *1. Pour tout $\alpha > 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,on a :*

$$D_a^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu D_a^{\alpha}[g(t)].$$

2. Pour tout $\alpha > 0, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$D_a^{\alpha}\ I_a^{\alpha}\ [f(t)] = f.$$

3.

$$D_a^{\alpha}[f(t)] = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i.$$

4.

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha}[f(t)] = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i.$$

Lemme 1.3 *Soit*

$$\beta > \alpha > 0, \qquad f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors

$$D_a^{\alpha} I_a^{\beta}[f(t)] = I^{\beta-\alpha}[f(t)], t \in [a,b].$$

1.6 Intégration fractionnaire au sens de Hadamard :

Définition 1.9 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0 < \ a < b < \infty$ et $\alpha > 0$. Alors, l'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard de f définie par :*

$$J_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt; \qquad a < x < b,$$

où Γ est une fonction Gamma d'Euler.

1.6.1 Quelques propriétés :

Proposition 1.4 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha > 0$ on a :*

$$J_a^\alpha(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 J_a^\alpha f(x) + \lambda_2 J_a^\alpha g(x).$$

Proposition 1.5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\log \frac{x}{t})$ une fonctions continues, $f \in L^P([a,b])$. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$J_a^\alpha J_a^\beta fx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t},$$

telle que $a \leq t \leq x; a \leq s \leq t$.

Proposition 1.6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $f \in L^p([a,b])$. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$\begin{aligned} J_a^\alpha J_a^\beta f(x) &= J^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= J_\alpha^\beta J_a^\alpha f(x). \end{aligned}$$

Preuve. Nous avons

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}.$$

Puisque $a \leq t \leq x$ et $a \leq s \leq t$ ce qui implique $s \leq t \leq x$.donc

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_s^x (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \right] \frac{ds}{s}.$$

Posons

$$y = \frac{\log(t/s)}{\log(x/s)},$$

il vient

$$\begin{aligned} & \int_s^x (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \\ = & \int_0^1 \left[\log x - y \log \frac{x}{s} - \log s \right]^{\alpha-1} \left[y \log \frac{x}{s} \right]^{\beta-1} \log \left(\frac{x}{s} \right) dy \\ = & \int_0^1 \left((1-y) \log \frac{x}{s} \right)^{\alpha-1} \left(y \log \frac{x}{s} \right)^{\beta-1} \log(\frac{x}{s}) \; dy \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_a^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} &= \int_0^1 \left((1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} \right) \left(\log \frac{x}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} dy \\ &= B(\alpha,\beta) (\log \frac{x}{s})^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\log \frac{x}{s})^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} J_a^\alpha J_a^\beta f(x) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (\log(\frac{x}{s}))^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (\log(\frac{x}{s}))^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\ &= J_a^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

En utilise les memes techniques, on obtient

$$J_a^\beta J_a^\alpha f(x) = J_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

■

Exemple 1.5 *Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et*

$$f(t) = \left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1}.$$

On montre que

$$J_a^\alpha \left[\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1}\right] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\alpha+\beta-1}.$$

On a

$$J_a^\alpha \left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} (\log \frac{s}{a})^{\beta-1} \frac{ds}{s}.$$

Soit le changement de variable suivant :

$$u = \frac{(\log s/a)}{(\log t/a)},$$

on trouve

$$\begin{aligned} J_a^\alpha (\log(\frac{t}{a}))^{\beta-1} &= \frac{(\log \frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} \\ &= \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (\log \frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\log \frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Remarque 1.4 *En particulier, si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$. Alors, on a*

$$J_a^\alpha (1)(t) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\log(\frac{t}{a})\right)^\alpha.$$

1.7 Dérivation fractionnaire au sens d'Hadamard :

Définition 1.10 *La dérivée fractionnaire au sens Hadamard de la fonction f est définie par*

$$\begin{aligned} {}^{H}D_a^{\alpha} f(x) &= \delta^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= .(x\frac{d}{dx})^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= .\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(x\frac{d}{dx})^n \int_a^x (\log\frac{x}{t})^{n-\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

où $n-1<\alpha<n$, $n=[\alpha]+1$.

Proposition 1.7 *Pour $\alpha>0$ et $f\in C[a,b]$, on a :*

$${}^{H}D_a^{\alpha} J^{\alpha} f(t) = f(t),$$

mais

$$J^{\alpha H}D_a^{\alpha} f(t) \neq f(t).$$

Exemple 1.6 *Soient f une fonction définie comme suite :*

$$f(t) = (\log\frac{t}{a})^{\beta-1} \qquad avec \quad \beta>0.$$

Alors

$${}^{H}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ \log\frac{t}{a})^{\beta-\alpha-1} \quad avec \quad \alpha>0 \quad et \quad \beta>0.$$

On a

$${}^{H}D_a^{\alpha} f(t) = \delta^n(J_a^{n-\alpha}(\log\frac{t}{a})^{\beta-1}),$$

D'autre part, on a

$$J_a^{n-\alpha}(\log\frac{t}{a})^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(\log\frac{t}{a})^{n-\alpha+\beta-1},$$

donc

$${}^{H}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ \log\frac{t}{a})^{\beta-\alpha-1},$$

d'où le résultat.

Remarque 1.5 *En particulier, si $\beta=1$ et $\alpha>0$.Alors la dérivée fractionnaire de Hadamard d'une fonction constante est en général non nulle, c'est-à-dire*

$${}^{H}D_a^{\alpha} c = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(\log\frac{t}{a})^{-\alpha}.$$

Remarque 1.6 *soint $n-1<\alpha\leq n$ et f une function vérifant*

$${}^{H}D_{a^+}^{\alpha}\ f\ (t) = 0.$$

Si et seulement si

$$f(t) = \sum_{j=1}^{j=n} t_j \left(\log(\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

On a la formule suivant :

$$\left({}^{H}D_{a^+}^{\alpha} \circ {}^{H}D_{a^+}^{\alpha}\right)\ f(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{j=n} c_j\ \left(\log(\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

oú $c_j, t_j \in \mathbb{R}$, *pour tout* $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

1.8 Lien entre la dérivée fractionnire au sens de Caputo et celle au sens de Hadamard

Lemme 1.4 *Pour tout* $y \in AC_{\delta}^{n}([a, b])$, *Nous avons :*

$${}^{c}D_{a}^{\alpha} y(x) = D_{a}^{\alpha} \left\{ y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i y(a)}{i!} (\log \frac{x}{a}) \right\},$$

où $n = [\alpha] + 1$.

1.9 Théorèmes des Points Fixes

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode de point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du oint fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés.

1.9.1 Concepts Essentiels

Définition 1.11 *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé ; une application linéaire* A *de* E *dans lui-même est appellé un opérateur linéaire dans* X. *On appelle domaine de* A *et on désigne par* D_A *tel que*

$$D_A = \{x \in E : Ax \in E\}.$$

Définition 1.12 *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble* $\Omega \subset X$ *est dite borné s'il existe* $M > 0$ *telle que pour tout* $x \in \Omega$ *on a :*

$$\|x\| \leq M.$$

Définition 1.13 *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé et* φ *une application d'un élement de* X *dans lui même. On appelle point fixe de* φ *tout point* $x \in X$ *tel que :*

$$\varphi x = x.$$

1.9.2 Principe de Contraction de Banach

Définition 1.14 *Soit X un espace de Banch et $f : X \longrightarrow X$ une contraction. Alors, f admet un point fixe unique.*

Définition 1.15 *Soient X et Y deux espaces de Banach. L'opérateur continue $\phi : X \longrightarrow Y$ est complètement continu s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte dans Y.*

1.9.3 Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 1.1 *Soit X un espace de Banach et $T : X \longrightarrow X$ on opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\Omega = \{x \in X : x = \mu Tx, \quad 0 < \mu < 1\},$$

est borné, alors T possède au moins un poit fixe.

1.9.4 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.2 *Soit X un espace de Banach. U un fermé, convexe et non vide de X tel que l'application $T : U \longrightarrow U$ est relativement compact dans X. Alors, T possède au moins un poit fixe dans U.*

1.9.5 Théorème du point fixe d'Arzela-Ascoli

Théorème 1.3 *Soit $\Omega \subset X$. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Ω uniformément borné.*
2. *Ω est équicontinu.*

1.9.6 Théorème du point fixe Krasnoselskii

Théorème 1.4 *Soient X un espace de Banach, Ω un sous-ensemble fermé, borné et convexe de X. On suppose que les opérateurs S et T vérifient :*

1. *$Tx + Sy \in \Omega, \quad \forall x, y \in \Omega$.*
2. *S est continu et compact.*
3. *T est contractant.*

Alors, il exsite au moins un élément $z \in \Omega$ tel que $Sz + Tz = z$.

1.9.7 Théorème d'Oregan

Théorème 1.5 *Soient X un espace de Banach, $C \subset X$ est un convexe fermé, ainsi que soient Ω un ouvert dans C et $\varphi : \overline{\Omega} \to C$ tels que :*

1. *$0 \in \Omega$ et $\varphi(\overline{\Omega})$ est borné tel que : $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.*
2. *$\varphi_1 : \overline{\Omega} \to X$ est continu et complètement continu.*

3. $\varphi_2 : \overline{\Omega} \to X$ *est contractant (i. e, il existe une fonction positive croissante* $\pi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *satisfaite* $\pi(x) < x$, $x > 0$, *telle que*

$$\|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)\| \leq \pi \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Alors,

(i) φ *admet un point fixe ; ou bien*

(ii) Il existe $x \in \partial\Omega$;

$$x = \mu\varphi(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Chapitre 2

Solution des équations différentielles fractionnaires au sens de Hadamard

2.1 Introduction

Au cours des dernières années, les problèmes aux limites non classiques associés aux équations différentielles aux dérivées fractionnaires ont suscité un intérêt croissant, notamment les problèmes au sens d'Hadamard.

2.2 Position de problème :

On considère le problème d'ordre fractionnaire au sens d'Hadamard suivant

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t)), \quad t \in [t_0, e], \quad t_0 > 1, \quad 5 < \alpha \leq 6, \\ u(t_0) = \int_1^e u(s)ds, \quad u(e) = b_0, \\ u'(t_0) = a_1, \ u'(e) = b_1, \\ u''(t_0) = a_2, \quad u''(e) = b_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que ${}^{H}D^{\alpha}$ dériveé farctionnire d'ordre α au sens d'Hdamard et $(a_i)_{i=1,2}$ et $(b_k)_{k=\overline{0,2}}$ sont des constantes réels.

2.3 Solution intégrale :

Nous avons :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds + \sum_{i=1}^{6} c_i log(t)^{\alpha-i}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

En utilisant les conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} u(t_0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_0} log(\frac{t_0}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds + \sum_{i=1}^{6} c_i log(t_0)^{\alpha-i} \\ &= \int_1^e u(s)ds, \end{aligned}$$

ainsi que, on trouve

$$u(e) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e log(\frac{e}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds + \sum_{i=1}^{6} c_i = b_0.$$

en dérivant la fonction u, d'après le théorème de dérivation des intègrale il vient

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-2} \frac{f(s)}{s^2} ds + \sum_{i=1}^{6} \frac{c_i(\alpha-i)}{t} log(t)^{\alpha-i-1},$$

encore une fois, en utilisant lse conditions aux limites

$$\begin{aligned} u'(t_0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^{t_0} log(\frac{t_0}{s})^{\alpha-2} \frac{f(s)}{s} ds + \sum_{i=1}^{6} \frac{c_i(\alpha-i)}{t_0} log(t_0)^{\alpha-i-1} \\ &= a_1. \end{aligned}$$

ainsi que, on trouve

$$\begin{aligned} u'(e) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^e log(\frac{e}{s})^{\alpha-2} \frac{f(s)}{s^2} ds + \sum_{i=1}^{6} \frac{c_i(\alpha-i)}{e} \\ &= b_1. \end{aligned}$$

Maintenant, en dérivant la fonction u deux fois, on a

$$u''(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-3} \frac{f(s)}{s^3} ds + \sum_{i=1}^{6} \frac{c_i(\alpha-i)(\alpha-i-1)}{t^2} log(t)^{\alpha-i-2},$$

encore une fois, en utilisant lse conditions aux limites

$$u''(t_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_1^{t_0} log(\frac{t_0}{s})^{\alpha-3} \frac{f(s)}{s^3} ds + \sum_{i=1}^{6} \frac{c_i(\alpha-i)(\alpha-i-1)}{t_0^2} log(t_0)^{\alpha-i-2} = a_2,$$

ainsi que, on trouve

$$u''(e) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_1^e log(\frac{e}{s})^{\alpha-3} \frac{f(s)}{s^3} ds + \sum_{i=1}^{6} \frac{c_i(\alpha-i)(\alpha-i-1)}{e^2} = b_2.$$

D'après ces calculs, on obtient le système suivant, composé de six équations et de six conditions

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} c_i log(t_0)^{\alpha-i} = \int_1^e u(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_0} log(\frac{t_0}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds, \\ \sum_{i=1}^{6} c_i = b_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e log(\frac{e}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds, \\ \sum_{i=1}^{6} c_i(\alpha-i) log(t_0)^{\alpha-i-1} = t_0 \left(a_1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^{t_0} log(\frac{t_0}{s})^{\alpha-2} \frac{f(s)}{s^2} ds \right), \\ \sum_{i=1}^{6} c_i(\alpha-i) = e \left(b_1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^e log(\frac{e}{s})^{\alpha-2} \frac{f(s)}{s^2} ds \right), \\ \sum_{i=1}^{6} c_i(\alpha-i)(\alpha-i-1) log(t_0)^{\alpha-i-2} = t_0^2 \left(a_2 - \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_1^{t_0} log(\frac{t_0}{s})^{\alpha-3} \frac{f(s)}{s^3} ds \right), \\ \sum_{i=1}^{6} c_i(\alpha-i)(\alpha-i-1) = e^2 \left(b_2 - \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_1^e log(\frac{e}{s})^{\alpha-3} \frac{f(s)}{s^3} ds \right). \end{cases}$$

Nous utilisons la représentation du système sous forme matricielle afin de déterminer les constantes recherchées, alors

$$c_i = -\frac{(\delta^{6-i}(I_{1+}^{6-\alpha}f))(1)}{\Gamma(\alpha-i+1)}.$$

Enfin

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s)}{s}ds - \sum_{i=1}^{6}\frac{(\delta^{6-i}(I_{1+}^{6-\alpha}f))(1)}{\Gamma(\alpha-i+1)}log(t)^{\alpha-i}.$$

2.4 Transformation de problème :

1. On définie l'espace de Banach :$(C\left([t_0,e],\mathbb{R}\right),\|u\|_C)$

$$C\left([t_0,e],\mathbb{R}\right) = \{u : [t_0,e] \longrightarrow \mathbb{R},\ u \in C\left([t_0,e]\right)\}$$

muni de

$$\| u \|_C = \sup_{t\in[t_0,e]} | u(t) | .$$

2. Considérons l'opérateur :

$$H : C([t_0,e],\mathbb{R}) \to C([t_0,e],\mathbb{R}),$$

défini par :

$$(Hu)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,u(s))}{s}ds - \sum_{i=1}^{6}\frac{(\delta^{n-i}(I_{1+}^{n-\alpha}f))(1,u(1))}{\Gamma(\alpha-i+1)}log(t)^{\alpha-i}.$$

2.5 Les hypothèses :

Pour étudier les deux théorèmes de Schauder et de la contraction de Banach dans le cadre de notre problème, nous ajoutons les hypothèses suivantes :

(H_1) La fonction $f : [t_0,e]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue sur inetrvalle $t\in[t_0,e]$.

(H_2) Il existe une fonction positive $a\in C([t_0,e],\mathbb{R})$ et une constante $b>0$, tels que :

$$|f(t,u)| \le a(t)+b|u|, \quad \text{pour tout } u\in\mathbb{R} \text{ et } t\in[t_0,e].$$

2.6 Résultats Principaux :

Notre premier résultat repose sur le théorème du point fixe de Schauder

Théorème 2.1 *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient satisfaites. Si*

$$\Gamma(\alpha+1) > b.$$

Alors le problème (2.1) admet au moins une solution sur $[t_0,e]$.

Preuve. Transformons le problème (2.1) en un probème de point fixe. L'opérateur H est bien défini. En effet, pour tout $u \in C([t_0, e], \mathbb{R})$, on considère l'ensemble suivante :

$$B_r = \left\{ u \in C([t_0, e], \mathbb{R}) : \|u\|_{C([t_0,e],\mathbb{R})} < r \right\},$$

avec

$$r = \frac{\|a\|_C + \Gamma(\alpha+1)|\sum_{i=1}^{6} c_i|}{\Gamma(\alpha+1) - b},$$

D'après les hypothèses (H_1) et (H_2), on peut écrire

etape 1 :H est continu.

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([t_0, e], R)$ qui converge vers y i.e donc $\|y_n - y\|_C = 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, on va montrer que lim $\| F(u_n) - F(u) \|_\infty = 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

pour tout $t \in J$.

$$\begin{aligned}
\|(Hy_n)(t) - (Hy)(t)\|_C &= \sup_{t\in[t_0,e]} |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s, y_n(s))}{s} ds + \sum_{i=1}^{6} c_i \log(t)^{\alpha-i} \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s, y(s))}{s} ds + \sum_{i=1}^{6} c_i \log(t)^{\alpha-i}| \\
&\leq k_1 \sup_{t\in[t_0,e]} | \int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1} |y_n(s) - y(s)| \frac{ds}{s}| \\
&\leq k_1 \sup_{t\in[t_0,e]} |\frac{\log(t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}| \ \|y_n - y\|_C \\
&\leq \frac{k_1}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_n - y\|_C .
\end{aligned}$$

Puisque$\|y_n - y\|_C = 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, nous avons :

$$\|(Hy_n)(t) - (Hy)(t)\|_C \leq \frac{k_1}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_n - y\|_C \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

donc H est continu.

etape 2 :F transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformement borné dans $C(J, R)$.

En effet, il suffit demontrer que pour tout $\rho > 0$, il existe une constante strictement positif tel que pour

chaque $u \in Br = \{u \in C([t_0, e], R) :\| u \| \infty \leq r\}$ on obtient $\| H(u) \| \infty \leq r$

On a pour tout $u \in J$

$$\begin{aligned}
\|(Hu)(t)\|_{C([t_0,e],\mathbb{R})} &= \sup_{t\in[t_0,e]}|(Hu)(t)| \\
&= \sup_{t\in[t_0,e]}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,u(s))}{s}ds+\sum_{i=1}^{6}c_i\log(t)^{\alpha-i}| \\
&\leq \sup_{t\in[t_0,e]}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{a(s)+b|u(s)|}{s}ds|+\sum_{i=1}^{6}|c_i| \\
&\leq (\|(a\|_C+b\|(u\|_C)\sup_{t\in[t_0,e]}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}|+\sum_{i=1}^{6}|c_i| \\
&\leq (\|(a\|_C+br)\sup_{t\in[t_0,e]}|\frac{\log(t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}|+\sum_{i=1}^{6}|c_i| \\
&\leq \frac{(\|a\|_C+br)}{\Gamma(\alpha+1)}+\sum_{i=1}^{6}|c_i| \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Alors $H\subset B_r$ et $H(B_r)$ est uniformement borné.

Eape 03 :H transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans C(J,R).
Soit $t_1,t_2\in[t_0,e]$, $t_1<t_2$, B un ensemble borné de $C(J,R)$ et soit $y\in B_r$.
Alors

$$\begin{aligned}
\|(Hy)(t_1)-(Hy)(t_2)\|_C &= \sup_{t\in[t_0,e]}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1} log(\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,y(s))}{s}ds+\sum_{i=1}^{6}c_i\log(t_1)^{\alpha-i} \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_2} log(\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,y(s))}{s}ds-\sum_{i=1}^{6}c_i\log(t_2)^{\alpha-i}| \\
&\leq \frac{(\|(a\|_C+b\|(u\|_C)}{\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in[t_0,e]}|\left[\int_1^{t_1} log(\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}-\int_1^{t_2} log(\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\right] \\
&\quad +\sum_{i=1}^{6}c_i\left(\log(t_1)^{\alpha-i}-\log(t_2)^{\alpha-i}\right)| \\
&\leq \frac{(\|(a\|_C+b\|(u\|_C)}{\Gamma(\alpha+1)}|\left[\log(t_1)^\alpha-\log(t_2)^\alpha\right]|+|\sum_{i=1}^{6}c_i\left(\log(t_1)^{\alpha-i}-\log(t_2)^{\alpha-i}\right)
\end{aligned}$$

nous savons que

$$\exists\xi_1\in]t_1;t_2[,|\log(t_1)^\alpha-\log(t_2)^\alpha|\leq|\frac{\alpha}{\xi_1}\log(\xi_1)^{\alpha-1}||t_1-t_2|,$$

nous mettons

$$M_1=|\frac{\alpha}{\xi_1}\log(\xi_1)^{\alpha-1}|,$$

donc

$$\exists \xi_1 \in]t_1; t_2[, |\log(t_1)^\alpha - \log(t_2)^\alpha| \leq M_1 \ |t_1 - t_2|,$$

et de la meme facon

$$\exists \xi_2 \in]t_1; t_2[, |\log(t_1)^{\alpha-1} - \log(t_2)^{\alpha-1}| \leq |\frac{\alpha-1}{\xi_2} \log(\xi_1)^{\alpha-2}| \ |t_1 - t_2|,$$

nous mettons

$$M_2 = |\frac{\alpha-1}{\xi_2} \log(\xi_1)^{\alpha-2}|,$$

donc

$$\exists \xi_2 \in]t_1; t_2[, |\log(t_1)^{\alpha-1} - \log(t_2)^{\alpha-1}| \leq M_2 \ |t_1 - t_2|,$$

nous mettons

$$M = \max(M_1, M_2)$$

Et ainsi

$$\begin{aligned} \|(Hy)(t_1) - (Hy)(t_2)\|_C &\leq \frac{(\|(a\|_C + b\|(u\|_C)}{\Gamma(\alpha+1)} |\log(t_1)^\alpha - \log(t_2)^\alpha| + |\sum_{i=1}^{6} c_i \left(\log(t_1)^{\alpha-i} - \log(t_2)^{\alpha-i}\right)| \\ &\leq M \left(\frac{(\|(a\|_C + b\|(u\|_C)}{\Gamma(\alpha+1)} + |\sum_{i=1}^{6} c_i| \right) |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0.

Théorème 2.2 *Supposons qu' il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$|\ f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k_1 |x_1 - x_2|, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{k_1}{\Gamma(\alpha+1)} < 1.$$

Alors le problème (2.1) admet une unique solution sur $[t_0, e]$.

Preuve. Soient $x, y \in C([t_0, e], \mathbb{R})$ et $t \in [t_0, e]$. On a

$$
\begin{aligned}
\|(Hx)(t)-(Hy)(t)\|_C &= \sup_{t\in[t_0,e]} |\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,x(s))}{s}ds+\sum_{i=1}^{6} c_i \log(t)^{\alpha-i} \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,y(s))}{s}ds+\sum_{i=1}^{6} c_i \log(t)^{\alpha-i}| \\
&\leq k_1 \sup_{t\in[t_0,e]} |\int_1^t log(\frac{t}{s})^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|\frac{ds}{s}| \\
&\leq k_1 \sup_{t\in[t_0,e]} |\frac{\log(t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}|\ \|x-y\|_C \\
&\leq \frac{k_1}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_C .
\end{aligned}
$$

Chapitre 3

Exemples d'application

Exemple 3.1 *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{5,8}u(t) = \dfrac{2\log(t)\,|u(t)|}{(1+\log(t))\,(1+|u(t)|)} & t \in\,]1,e] = J, \\ u(\frac{7}{6}) = \int_1^e u(t)dt, \qquad u(e) = \log(2), \\ u'(\frac{7}{6}) = u'(e) = 1, \\ u''(\frac{7}{6}) = u''(e) = 0, \quad . \end{cases}$$

On montrer que le problème admet une solution unique en appliquant le théorème de la contraction de Banach.

Dans cette exemple on a

$$f(t,u(t)) = \frac{2\log(t)|u(t)|}{(3+\log(t))\,(1+|u(t)|)}.$$

En plus, nous avons pour tout $u, v \in [0,+\infty[$ et $t \in J$:

$$\begin{aligned} |\ f(t,u) - f(t,v)| &= \left| \frac{2\log(t)u}{(3+\log(t))\,(1+u)} - \frac{2\log(t)v}{(1+\log(t))\,(1+v)} \right| \\ &= \frac{2\log(t)}{(3+\log(t))} \left| \frac{u}{(1+x)} - \frac{v}{(1+y)} \right| \\ &= \frac{2\log(t)\,|u-v|}{(3+\log(t))\,(1+u)\,(1+v)} \\ &\leq \frac{2\log(t)}{(3+\log(t))}\,|u-v| \\ &\leq \frac{2}{3}\,|u-v| \end{aligned}$$

Ainsi, la condition $(H1)$est vérifiée avec $k_1 = \frac{2}{3}$, Nous vérifionsque cette condition est satisfaite pour des valeurs appropriées de $\alpha \in]5;6[$

En effet,

$$k_1 = \frac{2}{3} < \Gamma(\alpha+1)$$

Alors, problème admet une solution unique sur l'intervalle $\left[\frac{7}{6}, e\right]$.

Exemple 3.2 *Soit le problème non luinéare suivant :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{5,8}u(t) = \dfrac{2u(t)}{5+\log(t)} \qquad t \in]1,e] = J, \\ u(\frac{5}{4}) = \int_1^e u(t)dt, \quad u(e) = \log(5), \\ u'(\frac{5}{4}) = u'(e) = 3, \\ u''(\frac{5}{4}) = u''(e) = 1. \end{cases}$$

On montre que l'existence de la solution par le théorème de Leray-Schauder.

Dans cette exemple on a

$$f(t,u(t)) = \frac{2u(t)}{5+\log(t)},$$

Nous avons :

$${}^{H}D^{5.8}u(t) = f(t,u(t)),$$

En appliquant l'opérateur $J_1^{5.8}$ sur les deux membre de l'équation

$$\begin{aligned} J_1^{5.8}\,{}^{H}D^{5.8}u(t) &= J_1^{5.8}\ f(t,u(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(5.8)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{4.8}\frac{f(s,u(s))}{s}ds \end{aligned}$$

d'autre part, nous avons

$$J_1^{5.8}\,{}^{H}D^{5.8}u(t) = u(t) + \sum_{i=1}^{6}\frac{(\delta^{6-i}(I_{1+}^{0.2}f))(1,u(1))}{\Gamma(6.8-i)}log(t)^{5.8-i}$$

Alors la solution générale du problème est s'écrit comme se suite :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(5.8)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{4.8}\frac{f(s,u(s))}{s}ds - \sum_{i=1}^{6}\frac{(\delta^{6-i}(I_{1+}^{0.2}f))(1,u(1))}{\Gamma(6.8-i)}log(t)^{5.8-i}$$

D'aprè les hypothèses le problème admet au moins une solution sur J.
Transformons le problème en un problème du point fixe.
Considérons l'opérateur $F : C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R})$ défini par :

$$F(u(x)) = \frac{1}{\Gamma(5.8)}\int_1^t log(\frac{t}{s})^{4.8}\frac{f(s,u(s))}{s}ds + u_0(x),$$

avec

$$u_0(x) = -\sum_{i=1}^{6}\frac{(\delta^{6-i}(I_{1+}^{0.2}f))(1,u(1))}{\Gamma(6.8-i)}log(t)^{5.8-i}.$$

On va utiliser le théorème du point fixe de Leray-Schauder. La preuve est donnée en Trois étapes.

Etape1 : F est continu.

Soit $\{u_n\}$ une suite dans $C(J,R)$ qui converge vers u i.e $\lim_{n\to+\infty}\|u_n-u\|=0$, on va montrer que $\lim_{n\to+\infty}\|F(u_n)-F(u)\|_\infty=0$

pour tout $t\in J$.

$$\begin{aligned}\|F(u_n)(t)-F(u)(t)\|_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(5.8)}\sup_{t\in J}|\int_1^t log(\frac{t}{s})^{4.8}\left(f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right)|\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(6.8)}\sup_{t\in J}\left|\log(t)^{5.8}\left(f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right)\right|\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(6.8)}\|f(.,u_n(.))-f(.,u(.))\|_\infty\end{aligned}$$

Puisque f est une fonction continue, nous avons alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\|F(u_n)-F(u)\|_\infty=0.$$

D'où la continuité de F.

Etape2 :F transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformement borné dans $C(J,\mathbb{R})$.

En effet, il suffit demontrer que pour tout $\rho>0$, il existe une constante strictement positif tel que pour

chaque $y\in B_\rho=\{y\in C(J,\mathbb{R}):\|y\|_\infty\leq\rho\}$ on obtient $\|F(u)\|_\infty\leq\eta$

On a pour tout $u\in J$

$$\begin{aligned}\|F(u)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(5.8)}\sup_{t\in J}|\int_1^t log(\frac{t}{s})^{4.8}\frac{f(s,u(s))}{s}ds+u_0(x)|\\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in J}|\int_1^t log(\frac{t}{s})^{4.8}\frac{ds}{s}|+M_2\\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{t\in J}(\log(t)^\alpha)+M_2\\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}+M_2\end{aligned}$$

Alors $F\subset B_\rho$ et $F(B_\rho)$ est uniformement borné.

Etape 3 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $C(J,\mathbb{R})$.

Soit $x_1,x_2\in J$, $x_1<x_2$, B un ensemble borné de $C(J,\mathbb{R})$ et soit $y\in B_\rho$. Alors :

$$\begin{aligned}|F(u(x_2))-F(u(x_1))| &= |\frac{1}{\Gamma(5.8)}\int_1^{x_2}log(\frac{x_2}{s})^{4.8}\frac{f(s,u(s))}{s}ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{x_1}log(\frac{x_1}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,u(s))}{s}ds\\ &\quad +u_0(x_2)-u_0(x_1)|\\ &\leq \frac{M'}{\Gamma(6.8)}\left(\log(x_2)^{5.8}-\log(x_1)^{5.8}\right)+|u_0(x_2)-u_0(x_1)|\end{aligned}$$

Quand $x_1\longrightarrow x_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0.

Alors, La solution au problème existe.

3.1 Conclusion

En raison de l'importance croissante des dérivées et intégrales fractionnaires ainsi que de leurs nombreuses applications dans divers domaines scientifiques, nous avons choisi de consacrer cette étude à l'analyse de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème différentiel fractionnaire.

Nous avons étudié une équation différentielle fractionnaire de type Hadamard, pour laquelle nous avons démontré l'existence d'une solution en nous appuyant sur le théorème de Leray-Schauder, et l'unicité à l'aide du théorème de la contraction de Banach.

Bibliographie

[1] B. Ahmad and S.K Ntouyas : On Hadamard fractional integro-differential boundary value problems , Appl. Math. Comput., PIER 47, pp 119–131, (2015). 14

[2] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo : *Fractional Calculus Models and Numerical Methods. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos.* World Scientific,PIER 33, Boston (2012). 14

[3] M. Bengrine and Z. Dahmani : *Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations*, J. Open Problems Compt. Math. , (2012). 8

[4] H. Beddani, M. Beddani and Z. Dahmani : *Nonlinear Differential Problem with p-Laplacian and via Phi-Hilfer Approach : Solvability and Stability Analysis.* Eur. J. Math. Anal. 1 164-181. (2021)

[5] J. Hadamard : *Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor*, Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101–186, (1892). 8

[6] M. Houas and Z. Dahmani : *On existence of solutions for fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions.* Lobachevskii Journal of Math- ematics. 37, (2016), no. 2, 120-127.

[7] M. Houas : *Existence results for fractional diffrential equations involving two Caputo derivatives with nonlocal conditions.* Canad. J. Appl. Math. 3 (2021), no. 1, 46-60. Prior Science Publishing.

[8] A.A. Kilbas : *Hadamard-type fractional calculus*, Korean Math. Soc, PIER 38, pp 1191–1204, (2001). 11

[9] C. Kiataramkul, S.K. Ntouyas, J. Tariboon and A. Kijjathanakorn : *Ggeneralized sturm-liouville and langevin equations via hadamard fractional derivatives with anti-periodic boundary conditions. boundary value problems.* doi : 10.1186/s13661-016-0725-1

[10] M. Kaid, M. Belhamiti, Z. Dahmani and A. T. Abdulrahman : *Solvability for a system of fractional Sturm-Liouville Langevin equations.* Sci.Int.(Lahore),33(1),75-89, (2021).

[11] M. Hous et Z. Dahmani : *New resultats for a system of two fractional differential equations involving n Caputo derivatives.* Kragujevac Journal of Mathematics. Pages 283-301.

[12] D. O'Regan and R. Precup : *Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions*, J. Math. AnaL. Appl. 245 (2000), 594-612.

[13] I. Podlubny : *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[14] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev : *Fractional integrals and derivatives, Theory and applications.* Gordon and Breach (1993).

[15] M. Sowmya and A.S. Vatsala : *Generalized Iterative Methods for Caputo Fractional Differential Equations via Coupled Lower and Upper Solutions with Superlinear Convergence*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 15 (2) (2015) 198208.

[16] S. Szufla : *On the application of measure of noncompactness to existence theorems*, Rendiconti del Seminaro Mathematico Della Universita di Padova 75 (1986), 1-14.

[17] A. Oualid and Z. Dahmani : *Differential Equation Via Hadamard Approach*, *Some Existence Uniqueness Results*, Int. J. Open Prob. Compt. Math., Accepted paper, (2018). 5, 16, 21.

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحميد بن باديس-مستغانم-
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

تصريح شرفي خاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية لإنجاز البحث

أنا الممضي أدناه،

الطالب(ة): قدور باي بوعبدالله رقم التسجيل الجامعي: 191937033229

الحامل لبطاقة التعريف الوطنية رقم: 407170836 والصادرة بتاريخ: 29-09-2023

عن بلدية عشعاشة ولاية مستغانم

المسجل بـ : **كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي / قسم : رياضيات**

شعبة : رياضيات / التخصص : نمذجة، مراقبة وأمثلة

والمكلف بإنجاز مذكرة ماستر بعنوان:

Existence et unicité de la solution d'un problème fractionnaire

أصرح بشرفي أني ألتزم بمراعاة المعايير العلمية والمنهجية ومعايير الأخلاقيات العلمية والنزاهة الأكاديمية المطلوبة في إنجاز البحث ، وأتحمل المسؤولية الشخصية عن كل المحتوى المتضمن في البحث المذكور أعلاه .

التاريخ: 03-07-2025

إمضاء المعني

* ملحق القرار الوزاري رقم 933 المؤرخ في 28 جويلية 2016 الذي يحدد القواعد المتعلقة بالوقاية من السرقة العلمية ومكافحتها.