REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

THESE

DE DOCTORAT L.M.D.

Option

Analyse Fonctionnelle

Intitulée

Sur les propriétés des solutions des équations différentielles linéaires complexes

Présentée par M^{me}. CHERIET Nour el imane Khadidja épouse AMIRA

Thèse soutenue à Mostaganem le.......................devant le jury composé de :

Président : Mr. BELAÏDI Benharrat (Professeur à l'Université de Mostaganem).

Examinateur : Mr OUAHAB Abdelghani (Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbès).

Examinateur : Mr BENHARRAT Mohammed (M. C. A à l'ENP d'Oran).

Examinateur : Mr. HAMOUDA Saada (Professeur à l'Université de Mostaganem).

Encadreur : Mme. AZIZ HAMANI Karima(Professeur à l'Université de Mostaganem).

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la patience et la force durant toutes mes années d'études.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à ma directrice de thèse madame AZIZ HAMANI Karima, Professeur à l'université de Mostaganem pour la confiance qu'elle m'a accordée en acceptant de diriger ce travail, pour ses multiples conseils, sa disponibilité et ses encouragements, vraiment elle était la source de mon espoir dans les moments durs.

J'adresse toute ma gratitude à Monsieur BELAÏDI Benharrat, Professeur à l'université de Mostaganem. Je dois tout le respect du monde envers cette personne qui a donné tout son temps au savoir et à la recherche. Il m'a honoré en acceptant de présider le jury.

J'exprime ma très profonde reconnaissance aux examinateurs : Monsieur HAMOUDA Saada (Professeur à l'uinversité de Mostaganem), Monsieur OUAHAB Abdelghani (Professeur à l'université de Sidi Bel Abbas), Monsieur BENHARRAT Mohammed (Maître de Conférences A à l'ENP d'Oran) qui me font l'honneur d'examiner ce travail.

Le mot merci reste insuffisant devant deux êtres à qui je dois mon existence :
Mon père qui a semé en nous l'amour du savoir. Il a fait tout son possible pour que nous grandissions dans les meilleures conditions, il nous a tracé un chemin, où sa destination est clair, c'est le savoir.

Ma mère, son affection, ses prières et ses regards d'amour m'ont donné le courage et la force surtout dans les moments difficiles.

Un très grand merci à ma grand-mère Zohra qui est la source de ma joie et mon espoir. Avec ses prières, je sais que tout est facile.

Un immense merci à mon mari Ahmed qui m'a aidé et m'a vivement encouragé.

Je remercie infiniment ma très chère soeur Fatima et son mari Mhamad et leur petite princesse Afef, ma soeur Nihad notre prochain medecin, ma soeur la plus ambitieuse Hanaâ, ma petite fleur Malak, que Dieu les protègent.

Je remercie aussi mes amies les plus chères : Ouissam, Zahia, Manina, Sabrine et leurs familles.

Table des matières

Introduction

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le mathématicien Rolf Nevanlinna est un outil très important dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Pour l'équation différentielle du second ordre

$$f^{''} + e^{-z} f' + Q(z) f = 0, \tag{1}$$

où $Q(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, il est connu que toute solution de l'équation (1) est une fonction entière et si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1), alors au moins une des deux solutions f_1 et f_2 est d'ordre infini ([25], P. 167-168).

D'autre part, il existe des équations différentielles de la forme (1) possédant au moins une solution d'ordre fini. Par exemple, la fonction $f(z) = e^z$ est une solution d'ordre fini de l'équation (1) avec $Q(z) = -(1 + e^{-z})$.

Alors la question qui se pose est : Quelle condition doit-on imposer sur $Q(z)$ pour garantir que toute solution non nulle de l'équation (1) soit d'ordre infini ?.

Plusieurs auteurs Amemiya et Ozawa [1], Gundersen [21], Langley [29], frei [18] et Ozawa [31] ont étudié ce problème.

Ils ont démontré que si $Q(z)$ est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante d'ordre différent à un, alors toute solution non nulle de l'équation (1) est d'ordre infini.

En 2002, Chen [8] a considéré l'équation (1) mais dans le cas où $Q(z)$ est une fonction entière d'ordre égal à un.

Dans le même article, il a considéré ce problème pour des équations différentielles linéaires du second ordre de la forme

$$f'' + h_1(z)e^{az}f' + h_0(z)e^{bz}f = 0, \tag{2}$$

où $h_j(z)$ $(j = 0, 1)$ sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à un, a et b sont des nombres complexes non nuls. Ses travaux ont été plus tard généralisés pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (voir par exemple ([12], [13])).
Différents chercheurs ([9], [20], [27]) se sont intéressés à l'étude des équations différentielles linéaires de la forme :

$$f'' + h_1(z)e^{P(z)}f' + h_0(z)e^{Q(z)}f = 0, \tag{3}$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes non constants, $h_j(z)$ $(j = 0, 1)$ sont des fonctions entières. Ces résultats ont été aussi étendus pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (voir par exemple ([4], [6], [32])).
Ces dernières années, certains auteurs ([30],[34],[35]) ont étudié les équations différentielles linéaires non homogènes du second ordre et d'ordre supérieur. Ils se sont intéressés à la croissance et l'oscillation de leurs solutions.
Cette thèse consiste à étudier les propriétés des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur et non homogènes.
Le premier chapitre comporte quelques définitions, notions et résultats de la théorie de Nevanlinna nécessaires par la suite pour les autres chapitres.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'hyper-ordre des solutions des deux équations différentielles

$$f^{(k)} + h_{k-1}f^{(k-1)} + ... + h_2f'' + A_1e^{P(z)}f' + A_0e^{Q(z)}f = H \tag{4}$$

et

$$f^{(k)} + h_{k-1}f^{(k-1)} + ... + h_2f'' + \left(A_1e^{P(z)} + D_1\right)f' + \left(A_0e^{Q(z)} + D_0\right)f = H, \tag{5}$$

où $k \geq 2$ est un entier, h_j $(j = 2, ..., k-1)$, $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes et A_j, D_j $(j = 0, 1)$ et $H(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières.

Dans le troisième chapitre, on s'intéressera aussi à l'étude de l'hyper-ordre mais pour les solutions des équations différentielles de la forme

$$f^{(k)} + h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + ... + h_2e^{P_2(z)}f'' + h_1e^{P_1(z)}f' + h_0e^{P_0(z)}f = H, \qquad (6)$$

où $k \geq 2$ est un entier, $P_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des polynômes, h_j $(j = 0, ..., k-1)$ et $H(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières.

Le dernier chapitre est consacré aux équations différentielles de la forme (6) mais dans le cas où les fonctions H et h_j $(j = 0, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles.

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Définition 1.1.1. *([24],[28]). Soit f une fonction méromorphe. Pour tout complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z|\leq t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$. Posons*

$$N(r,a,f)=\int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt+n(0,a,f)\log r, a\neq\infty, \tag{1.1}$$

$$N(r,f)=N(r,\infty,f)=\int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r, \tag{1.2}$$

$$m(r,a,f)=m(r,\frac{1}{f-a})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta, a\neq\infty, \tag{1.3}$$

et

$$m(r,f)=m(r,\infty,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta, \tag{1.4}$$

où

$$\log^+ x=\max(\log x,0)=\begin{cases}\log x, & x>1\\ 0, & 0<x\leq 1.\end{cases}$$

$N(r, a, f)$ est appelée fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$ et $m(r, a, f)$ est dite la fonction de proximité de f.

Définition 1.1.2. *([24],[28]). Soit f une fonction méromorphe non constante. On définit la fonction caractéristique $T(r, f)$ de la fonction f par*

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) \tag{1.5}$$

Exemple 1.1.1. *Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t, \infty, f) = 0$ car f n'admet pas de pôles. D'où $N(r, f) = 0$.*
De plus, on a

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{re^{i\theta}}| d\theta,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{r\cos\theta}| d\theta,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (r\cos\theta) d\theta \right) = \frac{r}{\pi}.$$

Par conséquent

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

Exemple 1.1.2. *Soit $f(z) = e^{a_n z^n}$, où a_n est un nombre complexe non nul. Posons $a_n = |a_n|e^{i\varphi}$, $z = re^{i\theta}$. Alors*

$$|f(z)| = e^{|a_n| r^n \cos(n\theta + \varphi)}.$$

Par conséquent

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)} d\theta.$$

Par un changement de variable, on a

$$m(r, f) = \frac{1}{2n\pi} \int_{\varphi}^{2n\pi+\varphi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau.$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau$$

$$= \frac{|a_n| r^n}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \tau d\tau + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos \tau d\tau \right) = \frac{|a_n| r^n}{\pi}.$$

Comme f est entière, alors

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{|a_n| r^n}{\pi}.$$

Exemple 1.1.3. *Pour la fonction $f(z) = \frac{e^{a_n z^n}}{z}$, on a $T(r, f) = \frac{|a_n| r^n}{\pi} + O(\log r)$, $r \to \infty$.*

1.2 Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1. *([24],[28]) Soit f une fonction méromorphe et soit*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C}$$

le développent de Laurent de $f - a$ à l'origine. Alors

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) - \log |c_m| + \varphi(r, a). \tag{1.6}$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \log 2 + \log^+ |a|.$$

Remarque 1.2.1. *Le premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna peut être formulé comme suit :*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1), (r \to \infty) \tag{1.7}$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.2.1. *([24],[28]) Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, telles que $ad - bc \neq 0$. Alors*

(a) $T(r, \prod_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum_{k=1}^{n} T(r, f_k), \quad n \in \mathbb{N}.$

(b) $T(r, f^n) = nT(r, f)$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) $T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n, \quad n \in \mathbb{N}$.

(d) $T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + O(1)$, *en supposant que* $f \not\equiv -d/c$.

1.3 Croissance d'une fonction méromorphe

1.3.1 Ordre et hyper-ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1. *([24],[28]) Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre de croissance de f est défini par*

$$\sigma(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log T(r, f)}{\log r}. \tag{1.8}$$

Remarque 1.3.1. *Si f est une fonction entière, alors l'ordre de croissance de cette fonction est défini par*

$$\sigma(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log \log M(r, f)}{\log r} \tag{1.9}$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.3.1. *Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a*

$$\sigma(f) = \lim \sup_{r\to+\infty} \frac{\log \frac{r}{\pi}}{\log r} = 1.$$

Exemple 1.3.2. *Pour la fonction $f(z) = e^{a_n z^n}$, où $a_n \in \mathbb{C}$, on a*

$$\sigma(f) = \lim \sup_{r\to+\infty} \frac{\log \frac{|a_n| r^n}{\pi}}{\log r} = n.$$

Exemple 1.3.3. *([24], p.7) Pour la fonction $f(z) = \exp\{e^z\}$, on a*

$$T(r, f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{3}}}, r \to +\infty.$$

D'où

$$\sigma(f) = +\infty.$$

Pour exprimer le taux de croissance d'une fonction méromorphe d'ordre infini, on rappelle la définition suivante :

Définition 1.3.2. *([24],[28]) Soit f une fonction méromorphe. Alors l'hyper-ordre de cette fonction est défini par*

$$\sigma_2(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}. \tag{1.10}$$

Remarque 1.3.2. *Si f est une fonction entière, alors l'hyper-ordre de cette fonction est défini par*

$$\sigma_2(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}. \tag{1.11}$$

Propriétés 1.3.1. *([24],[28]) Soient f et g des fonctions méromorphes. Alors*

1) $\sigma(f+g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$,

2) $\sigma(fg) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$.

Remarque 1.3.3. *Dans* 1) *et* 2) *si $\sigma(f) < \sigma(g)$, alors $\sigma(fg) = \sigma(f+g) = \sigma(g)$.*

1.4 Terme maximal et indice central

Définition 1.4.1. *([28]) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière. Le terme maximal de f est défini par*

$$\mu(r) = \mu(r,f) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n \tag{1.12}$$

et l'indice central de f est défini par

$$\nu_f(r) = \nu(r,f) = \max\{m : |a_m| r^m = \mu(r,f)\}. \tag{1.13}$$

Exemple 1.4.1. *Soit le polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$. Alors pour r assez grand, on a*

$$\mu(r) = \mu(r,P) = |a_n| r^n.$$

Par suite

$$\nu_P(r) = \nu(r,P) = n.$$

1.5 Exposant et hyper-exposant de convergence des zéros d'une fonction

Définition 1.5.1. *([28]) L'exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$\lambda(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log N(r, \frac{1}{f})}{\log r}, \tag{1.14}$$

où

$$N(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} + n(0, \frac{1}{f}) \log r \tag{1.15}$$

et $n(t, \frac{1}{f})$ désigne le nombre de zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$.

Exemple 1.5.1. $\lambda(e^z) = 0$.

Exemple 1.5.2. *Pour la fonction $f(z) = e^z + 1$, on a $\lambda(f) = 1$.*

Définition 1.5.2. *([28]) L'exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$\overline{\lambda}(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log \overline{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r}, \tag{1.16}$$

où

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \frac{1}{f}) - \overline{n}(0, \frac{1}{f})}{t} + \overline{n}(0, \frac{1}{f}) \log r \tag{1.17}$$

et $\overline{n}(t, \frac{1}{f})$ désigne le nombre de zéros distincts de f situés dans le disque $|z| \leq t$.

Définition 1.5.3. *([28]) L'hyper-exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$\lambda_2(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log\log N(r, \frac{1}{f})}{\log r}. \tag{1.18}$$

Définition 1.5.4. *([28]) L'hyper-exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$\overline{\lambda}_2(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log\log \overline{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r}. \tag{1.19}$$

1.6 Mesure et densité

Définition 1.6.1. *([11]) On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt, \tag{1.20}$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Les densités supérieure et inférieure de l'ensemble E sont respectivement définies par

$$\overline{dens}E = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r} \tag{1.21}$$

et

$$\underline{dens}E = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r} \tag{1.22}$$

Exemple 1.6.1. *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, e] \cup [5, 8] \subset [0, +\infty)$ est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_1^e dt + \int_5^8 dt = e + 2.$$

Exemple 1.6.2. *La densité supérieure de l'ensemble $E = [1, +\infty)$ est*

$$\overline{dens}E = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r} = 1.$$

Définition 1.6.2. *([11]) La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est définie par*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}dt \tag{1.23}$$

où χ_F est la fonction caractéristique de l'ensemble F.

Les densités logarithmiques supérieure et inférieure de l'ensemble F sont respectivement définies par

$$\overline{\log dens}F = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r} \tag{1.24}$$

et

$$\underline{\log dens}F = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r}. \tag{1.25}$$

Exemple 1.6.3. *La mesure logarithmique de l'ensemble* $F = [1, e^2] \subset [1, +\infty)$ *est*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \chi_F(t)\frac{dt}{t} = \int_1^{e^2} \frac{dt}{t} = 2.$$

Exemple 1.6.4. *La densité logarithmique supérieure de l'ensemble* $F = [e, +\infty)$ *est*

$$\overline{\log dens} F = \limsup_{r\to\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r} = 1.$$

Chapitre 2

Sur l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes

2.1 Introduction et résultats

Pour l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0, \tag{2.1}$$

où $Q(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, il est bien connu que toute solution de l'équation (2.1) est une fonction entière et la plupart des solutions de l'équation (2.1) sont d'ordre infini. Mais l'équation (2.1) peut également avoir des solutions d'ordre fini. Par exemple, $f(z) = e^{2z}$ est une solution d'ordre fini de l'équation (2.1) avec $Q(z) = -(4 + 2e^{-z})$. Alors quelle condition doit-on imposer sur $Q(z)$ pour garantir que toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1) soit d'ordre infini ?.

Chen [8] a traité ce problème en prenant $Q(z) = h(z)e^{bz}$, $h(z)$ un polynôme non nul et b un nombre complexe. Il a montré que si $b \neq -1$, alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation (2.1) est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.

Il a aussi considéré dans le même article d'autres équations différentielles linéaires du second ordre et il a prouvé les deux résultats suivants :

Théorème 2.1.1. *([8]) Soient $A_j(z)(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1)$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$, a et b des constantes complexes tels que $ab \neq 0$ et $a = cb$ $(c > 1)$. Alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = 0 \tag{2.2}$$

est d'ordre infini.

Théorème 2.1.2. *([8]) Soient $A_j(z)(\not\equiv 0)$, $D_j(z)$ $(j = 0, 1)$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$, $\sigma(D_j) < 1$, a et b des constantes complexes tels que $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$. Alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + (A_1(z)e^{az} + D_1(z))f' + (A_0(z)e^{bz} + D_0(z))f = 0 \tag{2.3}$$

est d'ordre infini.

En 2008, Wang et Laine [34] ont étudié la croissance des solutions des équations non homogènes en relation avec les équations (2.2) et(2.3) et ils ont obtenu les deux résultats suivants :

Théorème 2.1.3. *([34])Soient $A_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 0, 1)$ et H des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à 1, et soient a et b des nombres complexes tels que $ab \neq 0$ et $b \neq a$. Alors toute solution non triviale f de l'équation*

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = H \tag{2.4}$$

est d'ordre infini.

Théorème 2.1.4. *([34])Soient $A_j(z) \not\equiv 0$, $D_j(z)$ $(j = 0, 1)$ et H des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à 1, et soient a et b des nombres complexes tels que $ab \neq 0$ et $b/a < 0$. Alors toute solution non triviale f de l'équation*

$$f'' + (A_1(z)e^{az} + D_1(z))f' + (A_0(z)e^{bz} + D_0(z))f = H \tag{2.5}$$

est d'ordre infini.

Dans [36], Xu et Cao ont étudié le problème ci-dessus pour des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur et ils ont prouvé les deux résultats suivants :

Théorème 2.1.5. *([36])Soient $k \geq 2$ un entier, $P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, et $Q(z) = b_n z^n + ... + b_1 z + b_0$ des polynômes non constants, où a_i, b_i $(i = 0, 1, ..., n)$ sont des nombres complexes avec $a_n b_n \neq 0$ et $a_n \neq b_n$. Supposons que $h_i(z)$ $(2 \leq i \leq k-1)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, $A_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 0, 1)$ et $H \not\equiv 0$ sont des fonctions entières vérifiant $\sigma(A_j) < n$, $(j = 0, 1)$, $\sigma(H) < n$ et φ est une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution f de l'équation*

$$f^{(k)} + h_{k-1}f^{(k-1)} + ... + h_2 f'' + A_1 e^{P(z)} f' + A_0 e^{Q(z)} f = H \tag{2.6}$$

satisfait $\sigma(f) = +\infty$, $\sigma(f) = \lambda(f) = \overline{\lambda}(f) = \overline{\lambda}(f - \varphi) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = \lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lambda}_2(f - \varphi) \leq n$.

Théorème 2.1.6. *([36])Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que $A_j(z) \not\equiv 0$, $D_j(z)$ $(j = 0, 1)$ et $H \not\equiv 0$ sont des fonctions entières vérifiant $\sigma(A_j) < n$, $\sigma(D_j) < n$, $(j = 0, 1)$, $\sigma(H) < n$ et $P(z)$, $Q(z)$, h_i $(2 \leq i \leq k-1)$ sont définis comme dans le Théorème 2.1.5 et vérifiant $a_n b_n \neq 0$ et $a_n/b_n < 0$. Alors toute solution f de l'équation*

$$f^{(k)} + h_{k-1}f^{(k-1)} + ... + h_2 f'' + \left(A_1 e^{P(z)} + D_1\right) f' + \left(A_0 e^{Q(z)} + D_0\right) f = H \tag{2.7}$$

est d'ordre infini.

Dans [16], El Farissi et Belaïdi ont étudié l'équation (2.7) mais dans le cas où $h_i(z)$ $(2 \leq i \leq k-1)$ sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à 1, $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes de degré 1, ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.1.7. *([16])Soient $P(z) = az$ et $Q(z) = bz$ des polynômes, où a et b sont des nombres complexes vérifiant $ab(a-b) \neq 0$. Supposons que h_i $(2 \leq i \leq k-1)$, $A_j(z) \not\equiv 0$, $D_j(z)$ $(j = 0,1)$ et $H \not\equiv 0$ sont des fonctions entières vérifiant $\max\{\sigma(h_j)(2 \leq i \leq k-1), \sigma(A_j)(j = 0,1), \sigma(D_j)(j = 0,1), \sigma(H)\} < 1$ et φ est une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution f de l'équation (2.7) satisfait $\sigma(f) = +\infty$, $\sigma(f) = \lambda(f) = \overline{\lambda}(f) = \overline{\lambda}(f-\varphi) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = \lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lambda}_2(f-\varphi) \leq 1$.*

En 2014, ils [17] ont aussi considéré ce problème et ils ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.8. *([17])Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que $A_j(z) \not\equiv 0$, $D_j(z)$ $(j = 0,1)$ et $H \not\equiv 0$ sont des fonctions entières vérifiant $\sigma(A_j) < n$, $\sigma(D_j) < n$, $(j = 0,1)$, $\sigma(H) < n$ et $P(z)$, $Q(z)$, h_i $(2 \leq i \leq k-1)$ sont définis comme dans le Théorème 2.1.5 et vérifiant $a_n b_n \neq 0$ et $a_n - b_n \neq 0$. Alors toute solution f de l'équation (2.7) satisfait $\sigma(f) = +\infty$, $\sigma(f) = \lambda(f) = \overline{\lambda}(f) = \overline{\lambda}(f-\varphi) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = \lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lambda}_2(f-\varphi) \leq n$.*

Dans ce chapitre, on précise l'hyper-ordre des solutions des équations (2.6) et (2.7). On démontre les deux résultats suivants :

Théorème 2.1.9. *([14]) Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que $P(z)$, $Q(z)$, a_n, b_n, $h_i(z)$ $(2 \leq i \leq k-1)$, $A_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 0,1)$, H et φ vérifient les hypothèses du Théorème 2.1.5. Alors toute solution non triviale f de l'équation* (2.6) *satisfait $\sigma_2(f) = \lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lambda}_2(f-\varphi) = n$.*

Exemple 2.1.1. *Pour l'équation différentielle*

$$f^{(5)} + (z+1)f^{(4)} + (2z^2-5)f^{(3)} + (z-6)f'' + (\cos z)e^{z^3+4}f' + 6e^{2z^3+3}f = (z+2)e^z,$$

toute solution f est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 3$.

Théorème 2.1.10. *([14]) Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que $P(z)$, $Q(z)$, a_n, b_n, $h_i(z)$ $(2 \leq i \leq k-1)$, $A_j(z) \not\equiv 0$, $D_j(z)$ $(j = 0,1)$ et H vérifient les hypothèses du Théorème 2.1.8. Alors toute solution non triviale f de l'équation* (2.7) *satisfait $\sigma_2(f) = n$.*

Exemple 2.1.2. *Pour l'équation différentielle*

$$f^{(4)} + (z+2)f^{(3)} + (z-6)f'' + (3e^{-z^2+2} + e^z)f' + (4e^{2z^2+1} + e^{-z})f = \cos z,$$

toute solution f est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 2$.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1. *([36]) Supposons que $k \geq 2$ est un entier, $A_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ et H $(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières d'ordre fini. Alors toute solution f d'ordre infini de l'equation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + ... + A_1(z)f' + A_0(z)f = H \tag{2.8}$$

satisfait $\sigma_2(f) \leq \max\{\sigma(A_j), \sigma(H) : j = 0, 1, ..., k-1\}$.

Lemme 2.2.2. *([19]) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et soient $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$ des constantes. Alors il existe un ensemble $E_1 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ qui dépend seulement de α et (i, j) (i, j sont des entiers positifs $i > j$) tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on ait*

$$\left|\frac{f^{(i)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq B\left[\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^\alpha r)\log T(\alpha r, f)\right]^{i-j}. \tag{2.9}$$

Lemme 2.2.3. *([23]), p. 344] Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière, $\nu_f(r)$ l'indice central de f, $\mu(r)$ le terme maximal, $\mu(r) = \left|a_{\nu_f(r)}\right| r^{\nu_f(r)}$. Alors*

$$\nu_f(r) = r\frac{d}{dr}\log\mu(r) < [\log\mu(r)]^2 \leq [\log M(r, f)]^2 \tag{2.10}$$

est vérifiée à l'éxtérieur d'un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie.

Lemme 2.2.4. *([22]) Soient $P(z) = (\alpha + i\beta) z^n + ...(\alpha,\ \beta$ sont des nombres réels, $|\alpha| + |\beta| \neq 0)$ un polynôme de degré $n \geq 1$ et $A(z)$ une fonction méromorphe avec $\sigma(A) < n$. Posons $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_3 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus H_1$ et pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, $r \to +\infty$, on ait*

(i) *Si $\delta(P, \theta) > 0$, alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}, \tag{2.11}$$

(ii) *Si $\delta(P, \theta) < 0$, alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}, \tag{2.12}$$

où $H_1 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$.

Lemme 2.2.5. *([28]) Soient $f(z)$ une fonction entière transcendante, $\nu_f(r)$ l'indice central de f et δ une constante avec $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Alors il existe un ensemble E_4 de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_4$ et $|f(z)| \geq M(r, f)\, \nu_f(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}$, on ait*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)) \quad (n \geq 1 \text{ un entier}). \tag{2.13}$$

Lemme 2.2.6. *([38]) Soient $f(z)$ une fonction entière et $M(r, f) = \left|f\left(re^{i\theta_r}\right)\right|$ pour tout r. Posons $\theta_r \to \theta_0 \in [0, 2\pi)$ quand $r \to +\infty$. Alors il existe une constante $l_0 > 0$ et un ensemble E de densité logarithmique inférieure positive tels que*

$$M(r, f)^{1/5} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \tag{2.14}$$

pour tout $r \in E$ suffisamment grand et pour tout θ tels que $|\theta - \theta_0| < l_0$.

Lemme 2.2.7. *([8]) Soient $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini et $\sigma_2(f) = \alpha < +\infty$, $E_5 \subset (1, +\infty)$ un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors il existe une suite de points $\left\{z_m = r_m e^{i\theta_m}\right\}$ telle que $|f(z_m)| = M(r_m, f)$, $\theta_m \in [0, 2\pi)$,*
$\lim\limits_{m\to+\infty} \theta_m = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $r_m \notin E_5$, $r_m \to +\infty$,

$$\lim_{r_m\to+\infty} \frac{\log \nu_f(r_m)}{\log r_m} = +\infty \tag{2.15}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a pour r_m suffisamment grand

$$\exp\left\{r_m^{\alpha-\varepsilon}\right\} < \nu_f(r_m) < \exp\left\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \tag{2.16}$$

où $\nu_f(r)$ est l'indice central de f.

2.3 Preuve du Théorème 2.1.9

Supposons que f est une solution non triviale de l'equation (2.6). D'après le Théorème 2.1.5, on a $\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = \lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lambda}_2(f - \varphi) \leq n$. Pour montrer que $\sigma_2(f) = n$, on suppose que $\sigma_2(f) = \alpha < n$ et on prouve que $\sigma_2(f) = \alpha$ est une contradiction. D'après le lemme 2.2.2, il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on ait

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq Br\left[T(2r, f)\right]^{j+1} (j = 1, ..., k) \tag{2.17}$$

D'après le lemme 2.2.3, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, on ait

$$\nu_f(r) < \left[\log M(r, f)\right]^2. \tag{2.18}$$

D'après le lemme 2.2.4, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_3 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus H_2$, où
$H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0 \text{ ou } \delta(Q - P, \theta) = 0 \text{ ou } \delta(Q, \theta) = 0\}$ et pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, $r \to +\infty$, on ait

si $\delta(P,\theta) > 0$, alors

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^n\right\} \leq \left|A_1(z)\,e^{P(z)}\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^n\right\}, \tag{2.19}$$

si $\delta(P,\theta) < 0$, alors

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^n\right\} \leq \left|A_1(z)\,e^{P(z)}\right| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^n\right\}, \tag{2.20}$$

si $\delta(Q-P,\theta) > 0$, alors

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(Q-P,\theta)\,r^n\right\} \leq \left|\frac{A_0(z)}{A_1(z)}e^{Q(z)-P(z)}\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(Q-P,\theta)\,r^n\right\}, \tag{2.21}$$

si $\delta(Q-P,\theta) < 0$, alors

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(Q-P,\theta)\,r^n\right\} \leq \left|\frac{A_0(z)}{A_1(z)}e^{Q(z)-P(z)}\right| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(Q-P,\theta)\,r^n\right\}, \tag{2.22}$$

si $\delta(Q,\theta) > 0$, alors

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(Q,\theta)\,r^n\right\} \leq \left|A_0(z)\,e^{Q(z)}\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(Q,\theta)\,r^n\right\}, \tag{2.23}$$

si $\delta(Q,\theta) < 0$, alors

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(Q,\theta)\,r^n\right\} \leq \left|A_0(z)\,e^{Q(z)}\right| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(Q,\theta)\,r^n\right\}. \tag{2.24}$$

D'après le lemme 2.2.5, pour toute constante donnée $0 < \delta < \frac{1}{4}$, il existe un ensemble E_4 de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_4$ et $|f(z)| \geq M(r,f)\,\nu_f(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}$, on ait

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^j(1+o(1))\ \ (j=1,...,k)\,. \tag{2.25}$$

Comme $m_l(E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4)<+\infty$, alors $m_l(E\setminus([0,1]\cup E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4))$ est infinie, où E est l'ensemble défini dans le lemme 2.2.6. Ainsi d'après le lemme 2.2.7, il existe une suite de points $\left\{z_m=r_me^{i\theta_m}\right\}$ tel que $|f(z_m)|=M(r_m,f)\,,\ \theta_m\in[0,2\pi)\,,\ \lim\limits_{m\to+\infty}\theta_m=\theta_0\in[0,2\pi)\,,\ r_m\in E\setminus([0,1]\cup E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4)\,,\ r_m\to+\infty$,

$$\lim_{r_m\to+\infty}\frac{\log\nu_f(r_m)}{\log r_m}=+\infty \tag{2.26}$$

et pour tout $\varepsilon>0$ donné, on a pour r_m suffisamment grand

$$\exp\left\{r_m^{\alpha-\varepsilon}\right\}<\nu_f(r_m)<\exp\left\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.27}$$

D'après (2.26), pour un assez grand $A>2\sigma(H)$ et m suffisamment grand, on a

$$\nu_f(r_m)>r_m^A. \tag{2.28}$$

D'après (2.18) et (2.28), on obtient pour m suffisamment grand

$$M(r_m,f)>\exp\left\{r_m^{A/2}\right\}. \tag{2.29}$$

D'autre part, pour tout ε donné $(0<2\varepsilon<A-2\sigma(H))$ et m suffisamment grand, on a

$$|H(z_m)|\le\exp\left\{r_m^{\sigma(H)+\varepsilon}\right\}. \tag{2.30}$$

De (2.29) et (2.30), il s'ensuit que

$$\frac{|H(z_m)|}{M(r_m,f)}\to 0 \tag{2.31}$$

quand $r_m\to+\infty$.

Pour le θ_0 ci-dessus, on a trois cas : $\delta(P,\theta_0)>0$, $\delta(P,\theta_0)<0$ et $\delta(P,\theta_0)=0$.

Cas 1. $\delta(P,\theta_0)>0$. De la continuité de $\delta(P,\theta)$, on a

$$\frac{1}{2}\delta(P,\theta_0)<\delta(P,\theta_m)<\frac{3}{2}\delta(P,\theta_0) \tag{2.32}$$

pour m suffisamment grand. Pour tout ε $(0<2\varepsilon<\min\{1,n-\alpha,\ A-2\sigma(H)\})$, de (2.19) et (2.32), on obtient

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\}\leq\left|A_1(z_m)e^{P(z_m)}\right|\leq\exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\} \tag{2.33}$$

pour m suffisamment grand.

(a). D'abord, on suppose que θ_0 satisfait $\eta:=\delta(Q-P,\theta_0)>0$. De la continuité de $\delta(Q-P,\theta)$, on a

$$\frac{1}{2}\delta(Q-P,\theta_0)<\delta(Q-P,\theta_m)<\frac{3}{2}\delta(Q-P,\theta_0). \tag{2.34}$$

Alors d'après (2.21) et (2.34), pour le ε ci-dessus, on a

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\}\leq\left|\frac{A_0(z_m)}{A_1(z_m)}e^{Q(z_m)-P(z_m)}\right|\leq\exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\} \tag{2.35}$$

pour m suffisamment grand.

De (2.6), on obtient

$$\left|\frac{A_0(z)}{A_1(z)}e^{Q(z)-P(z)}\right| \leq \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| +$$

$$\frac{1}{|A_1(z)e^{P(z)}|}\left(\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \sum_{j=2}^{k-1}\left|h_j(z)\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{H(z)}{f(z)}\right|\right). \tag{2.36}$$

En substituant (2.25) dans (2.36) et d'après (2.27) , (2.31) , (2.33) et (2.35), on a pour m suffisamment grand

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\} \leq \exp\left\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\} r_m^{-1}\left|1+o(1)\right| +$$

$$+\exp\left\{-\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\}\left[\exp\left\{kr_m^{\alpha+\varepsilon}\right\} r_m^{-k}\left|1+o(1)\right|\right]$$

$$+\exp\left\{-\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\}\left[M_1 r_m^{d_1}\exp\left\{(k-1)\, r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}\left|1+o(1)\right| + o(1)\right], \tag{2.37}$$

où M_1 (>0) est une constante et d_1 est un entier. C'est une contradiction.

(b). Supposons que $\eta := \delta(Q-P,\theta_0) < 0$. D'après la continuité de $\delta(Q-P,\theta_0)$ et (2.22) , on a pour m suffisamment grand

$$\exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\} \leq \left|\frac{A_0(z_m)}{A_1(z_m)}e^{Q(z_m)-P(z_m)}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\} \tag{2.38}$$

De (2.6) , on obtient

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{A_0(z)}{A_1(z)}e^{Q(z)-P(z)}\right|$$

$$+\frac{1}{|A_1(z)e^{P(z)}|}\left(\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \sum_{j=2}^{k-1}\left|h_j(z)\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{H(z)}{f(z)}\right|\right). \tag{2.39}$$

En substituant (2.25) dans (2.39) et d'après (2.27) , (2.31) , (2.33) et (2.38), on a pour m suffisamment grand

$$\left(\frac{\nu_f(r_m)}{r_m}\right)|1+o(1)| \leq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\}$$
$$+\exp\left\{-\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\}\left[\exp\left\{kr_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}r_m^{-k}\left|1+o\left(1\right)\right|\right]$$

$$+\exp\left\{-\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\}\left[M_2 r_m^{d_2}\exp\left\{\left(k-1\right)r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}|1+o(1)|+o\left(1\right)\right], \quad (2.40)$$

où M_2 (>0) est une constante et d_2 est un entier. Ce qui implique que $\nu_f(r_m) \to 0$ quand $m \to +\infty$. Ce qui est impossible.

(c). Supposons que $\eta := \delta(Q-P,\theta_0) = 0$. La formule (2.14) peut être utilisée pour construire une autre suite de points $\left\{z_m^* = r_m e^{i\theta_m^*}\right\}$ avec $\lim\limits_{m\to+\infty}\theta_m^* = \theta_0^*$ tel que $\eta_1 := \delta(Q-P,\theta_0^*) > 0$. En effet, on peut supposer que

$$\delta(Q-P,\theta) > 0,\ \theta \in \left(\frac{\theta_0+2k\pi}{n},\frac{\theta_0+(2k+1)\pi}{n}\right),$$
$$\delta(Q-P,\theta) < 0,\ \theta \in \left(\frac{\theta_0+(2k-1)\pi}{n},\frac{\theta_0+2k\pi}{n}\right) \quad (2.41)$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Quand m est suffisamment grand, on a $|\theta_m - \theta_0| \leq l_0$, où l_0 est une petite constante. Choisissons maintenant θ_m^* tel que $\frac{l_0}{2} \leq \theta_m^* - \theta_m \leq l_0$. Alors $\theta_0 + \frac{l_0}{2} \leq \theta_0^* \leq \theta_0 + l_0$.

Pour m suffisamment grand, on a (2.14) pour z_m^* et $\delta(Q-P,\theta_0^*) > 0$. D'où

$$\left|\frac{H\left(z_m^*\right)}{f\left(z_m^*\right)}\right| \leq \frac{\exp\left\{r_m^{\sigma(H)+\varepsilon}\right\}}{\left(M\left(r_m,f\right)\right)^{1/5}} \to 0,\ m \to +\infty \quad (2.42)$$

et

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta_1 r_m^n\right\} \leq \left|\frac{A_0\left(z_m^*\right)}{A_1\left(z_m^*\right)}e^{Q(z_m^*)-P(z_m^*)}\right| \leq \exp\left\{\frac{3\left(1+\varepsilon\right)}{2}\eta_1 r_m^n\right\} \quad (2.43)$$

pour m suffisamment grand. En prenant maintenant l_0 suffisamment petit, on a $\delta(P,\theta_0^*)>0$ de la continuité de $\delta(P,\theta)$. Alors

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0^*)r_m^n\right\}\leq\left|A_1\left(z_m^*\right)e^{P(z_m^*)}\right|\leq\exp\left\{\frac{3\left(1+\varepsilon\right)}{2}\delta(P,\theta_0^*)r_m^n\right\}\tag{2.44}$$

pour m suffisamment grand. D'après (2.17), (2.36), (2.42)-(2.44), on obtient

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta_1 r_m^n\right\}\leq M_3 r_m^{d_3}[T(2r,f)]^{k+1},\tag{2.45}$$

où M_3 (>0) est une constante et d_3 est un entier. Alors $\sigma_2(f)\geq n$. Ce qui contredit $\sigma_2(f)<n$.

Cas 2. $\delta(P,\theta_0)<0$. De la continuité de $\delta\left(P,\theta\right)$ et (2.20), pour tout ε donné $(0<2\varepsilon<\min\left\{1,\ n-\alpha,\ A-2\sigma\left(H\right)\right\})$, on a

$$\exp\left\{\frac{3\left(1+\varepsilon\right)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\}\leq\left|A_1\left(z_m\right)e^{P(z_m)}\right|\leq\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\}\tag{2.46}$$

pour tout m suffisamment grand.

(a). Supposons que $\delta(Q,\theta_0)>0$. De la continuité de $\delta\left(Q,\theta\right)$ et de (2.23), pour le ε ci-dessus et pour m suffisamment grand, on a

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(Q,\theta_0)r_m^n\right\}\leq\left|A_0\left(z_m\right)e^{Q(z_m)}\right|\leq\exp\left\{\frac{3\left(1+\varepsilon\right)}{2}\delta(Q,\theta_0)r_m^n\right\}.\tag{2.47}$$

De (2.6), on obtient

$$\begin{aligned}|A_0\left(z\right)e^{Q(z)}|\leq&\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|+\sum_{j=2}^{k-1}\left|h_j\left(z\right)\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\\&+\left|A_1(z)e^{P(z)}\right|\left|\frac{f'\left(z\right)}{f(z)}\right|+\left|\frac{H\left(z\right)}{f(z)}\right|.\end{aligned}\tag{2.48}$$

En substituant (2.25) dans (2.48) et d'après (2.27), (2.31), (2.46) et (2.47), on a pour m suffisamment grand

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(Q,\theta_0)r_m^n\right\} \leq \exp\left\{kr_m^{\alpha+\varepsilon}\right\} r_m^{-k}\left|1+o\left(1\right)\right| +$$

$$M_4 r_m^{d_4}\exp\left\{\left(k-1\right)r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}\left|1+o(1)\right| +$$

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\} r_m^{-1}\exp\left\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}\left|1+o(1)\right| + o(1), \tag{2.49}$$

où M_4 (>0) est une constante et d_4 est un entier. C'est une contradiction.

(b). Supposons que $\delta(Q,\theta_0) < 0$. De la continuité de $\delta\left(Q,\theta\right)$ et de (2.24), pour le ε ci-dessus et pour m suffisamment grand, on a

$$\exp\left\{\frac{3\left(1+\varepsilon\right)}{2}\delta\left(Q,\theta_0\right)r_m^n\right\} \leq \left|A_0\left(z_m\right)e^{Q(z_m)}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta\left(Q,\theta_0\right)r_m^n\right\}. \tag{2.50}$$

De (2.6), on obtient

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \sum_{j=2}^{k-1}\left|h_j\left(z\right)\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + \left|A_1(z)e^{P(z)}\right|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| +$$

$$\left|A_0(z)e^{Q(z)}\right| + \left|\frac{H\left(z\right)}{f(z)}\right|. \tag{2.51}$$

En substituant (2.25) dans (2.51) et d'après (2.27), (2.31), (2.46) et (2.50), on a pour m suffisamment grand

$$\begin{aligned}\left(\nu_f(r_m)\right)^k r_m^{-k}\left|1+o(1)\right| &\leq M_5 r_m^{d_5}\left(\nu_f(r_m)\right)^{k-1}\left|1+o(1)\right| \\ &+\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\}\exp\left\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}r_m^{-1}\left|1+o(1)\right| + \\ &\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(Q,\theta_0)r_m^n\right\} + o\left(1\right),\end{aligned} \tag{2.52}$$

où M_5 (>0) est une constante et d_5 est un entier. C'est une contradiction.

(c). Supposons que $\delta(Q,\theta_0) = 0$. En suivant le même raisonnement comme dans le cas

1(c), on peut construire une autre suite de points $\left\{z_m^* = r_m e^{i\theta_m^*}\right\}$ vérifiant $\frac{l_0}{2} \leq \theta_m^* - \theta_m \leq l_0$ avec $\lim\limits_{m\to+\infty} \theta_m^* = \theta_0^*$ telle que $\delta(P,\theta_0^*) < 0 < \delta(Q,\theta_0^*)$. En remplaçant $\delta(P,\theta_0)$ par $\delta(P,\theta_0^*)$ dans (2.46) et $\delta(Q,\theta_0)$ par $\delta(Q,\theta_0^*)$ dans (2.47). Comme dans le cas 1(c), on a aussi (2.42) pour la suite de points $\{z_m^*\}$. D'après (2.48) et pour m suffisamment grand, on a

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(Q,\theta_0^*) r_m^n\right\} \leq M_6 r_m^{d_6} [T(2r,f)]^{k+1}, \tag{2.53}$$

où M_6 (>0) est une constante et d_6 est un entier. Alors $\sigma_2(f) \geq n$. Ce qui contredit $\sigma_2(f) < n$.

Cas 3. $\delta(P,\theta_0) = 0$. On divise aussi ce cas en trois cas selon le signe de $\delta(Q,\theta_0)$:

(a). Supposons que $\delta(Q,\theta_0) > 0$. Par un raisonnement similaire à celui du cas 1(c), on peut choisir une autre suite de points $\left\{z_m^* = r_m e^{i\theta_m^*}\right\}$ vérifiant $\frac{l_0}{2} \leq \theta_m^* - \theta_m \leq l_0$ avec $\lim\limits_{m\to+\infty} \theta_m^* = \theta_0^*$, telle que z_m^* vérifie (2.42) et $\delta(P,\theta_0^*) < 0 < \delta(Q,\theta_0^*)$. Comme dans le cas 2(c), on trouve une contradiction quand m est suffisamment grand.

(b). Supposons que $\delta(Q,\theta_0) < 0$. D'après la definition de $\delta(P,\theta)$ dans le Lemme 2.2.4, on peut définir

$$\delta'(P,\theta) = -n\alpha \sin(n\theta) - n\beta\cos(n\theta),$$

où $a_n = \alpha + i\beta$. Comme $a_n \neq 0$, on a $\delta'(P,\theta_0) \neq 0$. Prenons $z_m' = r_m e^{i\theta_m'}$ qui satisfait $0 < \left|\theta_m' - \theta_0\right| \leq l_0$. On sait que z_m' satisfait (2.42) et $\delta(P,\theta_m') \neq 0$. De la continuité de $\delta(Q,\theta)$, on peut supposer que $\delta(Q,\theta_m') < 0 < \delta(P,\theta_m')$ pour un l_0 convenable, $0 < \theta_m' - \theta_0 \leq l_0$. Alors $\delta'(P,\theta_0) > 0$. C'est à dire pour un l_0 convenable

$$\frac{1}{2}\delta'(P,\theta_0) < \delta'(P,\theta) < \frac{3}{2}\delta'(P,\theta_0),\ \theta \in (\theta_0, \theta_0 + l_0). \tag{2.54}$$

Comme on a choisi z_m tel que $|f(z_m)| = M(r_m,f)$ et $\theta_m \to \theta_0$ quand $m \to \infty$, on a

$|f(r_m e^{i\theta_0})| \geq M(r_m, f)v_f(r_m)^{-\frac{1}{4}+\delta}$ pour m suffisamment grand. De (2.6), on a

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{1}{A_1(z)e^{P(z)}}\right| \left(|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}| + \sum_{j=2}^{k-1} |h_j(z)||\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}|\right) + \left|\frac{1}{A_1(z)e^{P(z)}}\right| \left(|A_0(z)e^{Q(z)}| + \left|\frac{H(z)}{f(z)}\right|\right). \tag{2.55}$$

D'après (2.19) et (2.24), on a pour le ε ci-dessus et pour m suffisamment grand

$$\exp\{(1+\varepsilon)\,\delta(Q,\theta'_m)r_m^n\} \leq |A_0\,(z'_m)\,e^{Q(z'_m)}| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(Q,\theta'_m)r_m^n\} \tag{2.56}$$

et

$$\exp\{-\,(1+\varepsilon)\,\delta(P,\theta'_m)r_m^n\} \leq \left|\frac{e^{-P(z'_m)}}{A_1\,(z'_m)}\right| \leq \exp\{-\,(1-\varepsilon)\,\delta(P,\theta'_m)r_m^n\} \tag{2.57}$$

pour m suffisamment large. D'après la définition de l'hyper-ordre, il s'ensuit que

$$T(2r_m, f) \leq \exp\{(2r_m)^{\alpha+\varepsilon}\} \tag{2.58}$$

pour m suffisamment large. D'après (2.17), (2.42), (2.55) $-$ (2.58), on obtient pour m suffisamment grand

$$\left|\frac{f'(z'_m)}{f(z'_m)}\right| \leq \exp\{-(1-2\varepsilon)\delta(P,\theta'_m){r_m}^n\}. \tag{2.59}$$

Comme θ'_m est arbitraire dans (θ_0, θ_0+l_0), pour m suffisamment grand, on peut trouver que

$$\left|\frac{f'(r_m e^{i\theta})}{f(r_m e^{i\theta})}\right| \leq \exp\{-(1-2\varepsilon)\delta(P,\theta)r_m^n\},\ \theta \in (\theta_0, \theta_0+l_0). \tag{2.60}$$

Alors pour $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + l_0)$, on a

$$\xi(r_m,\theta)=r_m\int_{\theta_0}^{\theta}\left|\frac{f'(r_me^{i\theta})}{f(r_me^{i\theta})}\right|d\theta\leq r_m\int_{\theta_0}^{\theta}e^{-\eta_2(\theta)r_m^n}d\theta=$$
$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{\eta_1(\theta){r_m}^{n-1}}e^{-\eta_2(\theta)r_m^n}d(\eta_2(\theta)r_m^n),\tag{2.61}$$

où $\eta_1(\theta)=(1-2\varepsilon)\delta'(P,\theta)$ et $\eta_2(\theta)=(1-2\varepsilon)\delta(P,\theta)$.

Comme $\delta(P,\theta)>0$ pour tout $\theta\in(\theta_0,\theta_0+l_0)$, on peut obtenir

$$0\leq\xi(r_m,\theta)\leq\frac{2}{(1-2\varepsilon)\delta'(P,\theta_0)r_m^{n-1}}(e^{-\eta_2(\theta_0)r_m^n}-e^{-\eta_2(\theta)r_m^n}).$$

Donc pour m suffisamment grand, on obtient

$$0\leq\xi(r_m,\theta)\leq\frac{2}{\eta_1(\theta_0)}.\tag{2.62}$$

D'après la preuve du Lemme 2.4 dans [34], on a

$$\log|f(r_me^{i\theta_0})|-\xi(r_m,\theta)\leq\log|f(r_me^{i\theta})|+2\pi.\tag{2.63}$$

Il s'ensuit de (2.63) et de (2.62) que

$$\nu_f(r_m)^{-\frac{1}{4}+\delta'}M(r_m,f)=\exp\{-2\pi-2/\eta_1(\theta_0)\}\nu_f(r_m)^{-\frac{1}{4}+\delta}M(r_m,f)\leq|f(r_me^{i\theta})|\tag{2.64}$$

pour $\theta\in(\theta_0,\theta_0+l_0)$, où $0<\delta'<\delta<\frac{1}{4}$. Alors, on choisit une autre suite de points $\{z_m^*=r_me^{i\theta_m^*}\}$ vérifiant $\theta_m^*=\frac{l_0}{2}+\theta_0$ et (2.42) pour z_m^*. De plus, d'après (2.64), on a (2.25) pour z_m^* quand m est suffisamment grand. Donc de (2.25) et (2.60), on peut déduire que $\nu_f(r_m)\to 0$ as $m\to\infty$. Ce qui est impossible.

Dans le cas où $\delta(Q,\theta'_m)<0<\delta(P,\theta'_m)$ pour $-l_0<\theta'_m-\theta_0<0$, clairement $\xi(r_m,\theta)\leq 0$ pour tout $\theta\in(\theta_0-l_0,\theta_0)$. De la même façon, on peut avoir

$$\nu_f(r_m)^{-\frac{1}{4}+\delta'}M(r_m,f)=\exp\{-2\pi\}\nu_f(r_m)^{-\frac{1}{4}+\delta}M(r_m,f)\leq|f(r_me^{i\theta})|\tag{2.65}$$

pour $\theta\in(\theta_0-l_0,\theta_0)$, où $0<\delta'<\delta<\frac{1}{4}$. Alors on peut aussi trouver une contradiction.

(c). Enfin, supposons que $\delta(Q,\theta_0)=0$, on a $a_n=cb_n$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Alors $P(z)=$

$cb_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$, $Q(z) - P(z) = (1-c)b_nz^n + R_{n-1}(z)$, où $R_{n-1}(z)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Si $c < 0$, on peut prendre l_0 suffisamment petit tel que $\delta(Q,\theta) < 0 < \delta(P,\theta)$ de telle façon que ou bien $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + l_0)$ ou $(\theta_0 - l_0, \theta_0)$. En utilisant le même raisonnement que celui dans le cas 3(b), on obtient une contradiction.

Si $0 < c < 1$, on obtient de façon similaire que $\delta(Q-P,\theta) > 0$ et $\delta(P,\theta) > 0$ de telle façon que ou bien $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + l_0)$ ou $(\theta_0 - l_0, \theta_0)$ pour l_0 suffisamment petit. En utilisant le même raisonnement que celui dans le cas 1(c), on trouve une contradiction.

Enfin, si $c > 1$, on obtient $\delta(Q-P,\theta) < 0$ et $\delta(P,\theta) > 0$ pour ou bien $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + l_0)$ ou $(\theta_0 - l_0, \theta_0)$. De plus, $z'_m = r_m e^{i\theta'_m}$ satisfait (2.42) de telle façon que $\theta'_m \in (\theta_0, \theta_0 + l_0)$ ou $(\theta_0 - l_0, \theta_0)$. En utilisant le même raisonnement que celui dans le cas 3(b), on obtient (2.60) et (2.64). Par un raisonnement standard de Wiman-Valiron, on peut avoir une contradiction. On en déduit alors d'après ces trois cas que $\sigma_2(f) = n$.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.10

Supposons que $f(z)$ est une solution non triviale de (2.7). On sait que $\sigma(f) = +\infty$. D'après le Lemme 2.2.1, il s'ensuit que $\sigma_2(f) \le n$. Posons $\sigma_2(f) = \alpha$ et on montre que $\alpha = n$. Maintenant, supposons que $\alpha < n$. Comme $\rho = \max\{\rho(D_j) : j = 0,1\} < n$, alors pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < n - \rho)$, on a

$$|D_j(z)| \le \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\} \;\; (j = 0,1)\,. \tag{2.66}$$

En suivant le même raisonnement que celui dans le Théorème 2.1.9, on peut prendre une suite de points $\{z_m = r_m e^{i\theta_m}\}$, $r_m \to \infty$, telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} \theta_m = \theta_0$ et $|f(z_m)| = M(r_m, f)$, $r_m \in E \setminus ([0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$ et cette suite de points satisfait (2.25) – (2.27) et (2.31) .

Comme $a_n/b_n = c < 0$, on a trois cas à discuter selon les signes de $\delta(P,\theta_0)$ et de $\delta(Q,\theta_0)$.

Cas 1. Supposons que $\delta(Q,\theta_0) < 0 < \delta(P,\theta_0)$. D'après (2.19) , (2.24) et la continuité de $\delta(Q,\theta)$ et de $\delta(P,\theta)$, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \min\{1, n-\alpha, A-2\sigma(H), n-\rho\})$, on a (2.33) et (2.50) pour m suffisamment grand. De la formule (2.7), on a

$$\left|A_1(z)e^{P(z)} + D_1(z)\right| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|$$

$$+\sum_{j=2}^{k-1} |h_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + \left|(A_0 e^{Q(z)} + D_0(z))\right| + \left|\frac{H(z)}{f(z)}\right|. \tag{2.67}$$

En combinant (2.66) avec (2.33) et (2.50), on conclut que

$$|A_0(z_m)\, e^{Q(z_m)} + D_0(z_m)| \leq \exp\{r^{\rho+2\varepsilon}\} \tag{2.68}$$

et

$$|A_1(z_m)e^{P(z_m)} + D_1(z_m)| \geq \exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\} \tag{2.69}$$

pour m suffisamment grand. En substituant (2.25), (2.31), (2.68) et (2.69) dans (2.67), on obtient pour m suffisamment grand

$$\left(\frac{\nu_f(r_m)}{r_m}\right) |1+o(1)| \leq \exp\left\{\frac{-(1-2\varepsilon)}{2}\delta(P,\theta_0)r_m^n\right\} \left[\exp\{kr_m^{\alpha+\varepsilon}\}r_m^{-k}\,|1+o(1)|\right.$$

$$\left. + M_7 r_m^{d_7} \exp\{(k-1)\, r_m^{\alpha+\varepsilon}\}\,|1+o(1)| + \exp\{r_m^{\rho+2\varepsilon}\} + o(1)\right], \tag{2.70}$$

où M_7 (>0) est une constante et d_7 est un entier. Ce qui implique que $\nu_f(r_m) \to 0$, $m \to +\infty$. Ce qui est impossible.

Cas 2. Supposons que $\delta(P,\theta_0) < 0 < \delta(Q,\theta_0)$. D'après (2.20) , (2.23) et la continuité de $\delta(Q,\theta)$ et de $\delta(P,\theta)$, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \min\{1, n-\alpha,\ A-2\sigma(H), n-\rho\})$, on a (2.46) et (2.47) pour m suffisamment grand. De (2.7), on a

$$\left|A_0(z)e^{Q(z)}+D_0(z)\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \sum_{j=2}^{k-1}|h_j(z)|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| +$$

$$|(A_1(z)e^{P(z)}+D_1(z))|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{H(z)}{f(z)}\right|. \tag{2.71}$$

En combinant (2.66) avec (2.46) et (2.47), on conclut que

$$|A_1(z_m)\,e^{P(z_m)}+D_1(z_m)| \leq \exp\{r^{\rho+2\varepsilon}\} \tag{2.72}$$

et

$$|A_0(z_m)e^{Q(z_m)}+D_0(z_m)| \geq \exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)}{2}\delta(Q,\theta_0)r_m^n\right\} \tag{2.73}$$

pour m suffisamment grand. En substituant (2.25), (2.31), (2.72) et (2.73) dans (2.71), on obtient pour m suffisamment grand

$$\exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)}{2}\delta(Q,\theta_0)r_m^n\right\} \leq M_8 r_m^{d_8}\exp\{kr_m^{\alpha+\varepsilon}\}\exp\{r_m^{\rho+2\varepsilon}\}, \tag{2.74}$$

où M_8 (>0) est une constante et d_8 est un entier. C'est une contradiction.

Cas 3. Supposons que $\delta(Q,\theta_0)=0=\delta(P,\theta_0)$. Comme dans le cas 1(c) dans la preuve du Théorème 2.1.9, on peut encore construire une suite de points $\{z_m^*=r_me^{i\theta_m^*}\}$ avec $\lim_{m\to+\infty}\theta_m^*=\theta_0^*$, telle que $\delta(P,\theta_0^*)<0$ et (2.42) soit vérifiée pour z_m^*.
On peut supposer que

$$\delta(P,\theta)>0,\ \ \theta\in\left(\frac{\theta_0+2q\pi}{n},\frac{\theta_0+(2q+1)\,\pi}{n}\right)$$

et

$$\delta(P,\theta)<0,\ \ \theta\in\left(\frac{\theta_0+(2q-1)\,\pi}{n},\frac{\theta_0+2q\pi}{n}\right)$$

pour tout $q\in\mathbb{Z}$. En prenant m suffisamment grand, on a $|\theta-\theta_m|\leq l_0$. En choisissant maintenant θ_0^* tel que $\frac{l_0}{2}\leq\theta_m-\theta_m^*\leq l_0$, alors $\theta_0-l_0\leq\theta_0^*\leq\theta_0-\frac{l_0}{2}$ et $\delta(P,\theta_0^*)<0$. Comme $\delta(Q,\theta_0^*)>0$, on trouve une contradiction comme dans le cas 2 ci-dessus.

Chapitre 3

L'hyper-ordre des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes avec des coefficients fonctions entières

3.1 Introduction et résultats

Plusieurs auteurs ([9], [20], [27]) ont étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + h_1(z)e^{P(z)}f' + h_0(z)e^{Q(z)}f = 0, \tag{3.1}$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes non constants, $h_1(z)$ et $h_0(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières avec $\sigma(h_1) < \deg P$ et $\sigma(h_0) < \deg Q$. Gundersen [20] a montré que si $\deg P \neq \deg Q$, alors toute solution non constante de l'équation (3.1) est d'ordre infini. Si $\deg P = \deg Q$, alors l'équation (3.1) peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini. Par exemple, $f(z) = z$ est une solution de l'équation $f'' - z^3e^zf' + z^2e^zf = 0$.

Z. X. Chen et K. H. Shon [10] ont aussi étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre et ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 3.1.1. *([10]) Soient $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1)$ des fonctions méromorphes avec $\sigma(A_j) < 1$, a et b des constantes complexes tels que $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$. Alors toute solution méromorphe f $(\not\equiv 0)$ de l'équation différentielle*

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = 0, \tag{3.2}$$

est d'ordre infini.

En 2008, Wang et Laine [34] ont considéré l'équation différentielle linéaire non homogène du second ordre

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = H, \tag{3.3}$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, 1)$, H sont des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$, a et b sont des constantes complexes. Ils ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 3.1.2. *([34]) Supposons que $A_0 \not\equiv 0$, $A_1 \not\equiv 0$ et H sont des fonctions entières d'ordre inférieur strictement à un, a et b sont des constantes complexes tels que $ab \neq 0$ et $b \neq a$. Alors toute solution non triviale de l'équation (3.3) est d'ordre infini.*

Considérons maintenant l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z)f = H(z), \tag{3.4}$$

où $k \geq 2$ est un entier, $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et $H\,(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières d'ordre fini. Il est bien connu que toutes les solutions de l'équation (3.4) sont des fonctions entières et si quelques coefficients sont transcendantes, alors la plupart des solutions de l'équation (3.4) sont d'ordre infini. Toute solution d'ordre infini de l'équation (3.4) est d'hyper ordre inférieur ou égal au $\max\{\sigma(A_j), \sigma(H) : j = 0, 1, ..., k-1\}$(voir [36]).

Une question naturelle est la suivante : Quelles conditions doit-on imposer sur $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et H pour que toute solution de (3.4) soit d'ordre infini ?.

Wang et Laine [35] ont étudié ce problème et ils ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.1.3. *([35]) Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que $A_j(z) = h_j(z) e^{P_j(z)}$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$, où $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des nombres complexes, $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < n$ $(j = 0, ..., k-1)$ et qui ne sont pas toutes nulles et soit $H\,(\not\equiv 0)$ une fonction entière telle que $\sigma(H) < n$. Si $a_{n,j}$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des nombres complexes distincts, alors toute solution de l'équation (3.4) est d'ordre infini.*

Dans le même travail, ils ont considéré aussi l'équation (3.4) en imposant d'autres conditions sur les coefficients et ils ont montré les deux résultats suivants :

Théorème 3.1.4. *([35]) Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que $A_j(z) = h_j(z) e^{P_j(z)}$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$, où $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des nombres complexes, $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < n$ $(j = 0, ..., k-1)$ et soit $H\,(\not\equiv 0)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(H) < n$. Supposons qu'il existe deux nombres complexes non nuls $a_{n,s}$ et $a_{n,l}$ tels que $0 < s < l \leq k-1$, $a_{n,s} = |a_{n,s}| e^{i\theta_s}$, $a_{n,l} = |a_{n,l}| e^{i\theta_l}$, θ_s, $\theta_l \in [0, 2\pi)$, $\theta_s \neq \theta_l$, $h_s h_l \not\equiv 0$ et pour $j \neq s, l$, $a_{n,j} = d_j a_{n,s}$ $(0 < d_j < 1)$ ou $a_{n,j} = d_j a_{n,l}$ $(0 < d_j < 1)$. Alors toute solution transcendante de l'équation (3.4) est d'ordre infini.*

Théorème 3.1.5. *([35]) Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que $A_j(z) = h_j(z) e^{P_j(z)} + g_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$, où $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, $a_{0,j}, ...,$ $a_{n,j}$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des nombres complexes, $h_j(z)$, $g_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < n$, $\sigma(g_j) < n$ $(j = 0, ..., k-1)$ et soit $H\,(\not\equiv 0)$ une fonction entière avec $\sigma(H) < n$. Supposons qu'il existe s, $l \in \{1, ..., k-1\}$ tels que $h_s h_l \not\equiv 0$, $a_{n,s} = d_s e^{i\varphi}$, $a_{n,l} = -d_l e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $d_s > 0$,*

$d_l > 0$ *et pour* $j \neq s, l$, $a_{n,j} = d_j e^{i\varphi}$ *ou* $a_{n,j} = -d_j e^{i\varphi}$ $(d_j \geq 0)$ *et* $\max\{d_j : j \neq s, l\} = d < \min\{d_s, d_l\}$. *Alors toute solution transcendante de l'équation* (3.4) *est d'ordre infini.*

Remarque 3.1.1. *Sous les hypotyèses du Théorème* 3.1.5, *la solution polynômiale peut exister. Par exemple, l'équation*

$$f^{(4)} + (e^{3z} + 1)f''' + (e^{-2z} + z)f'' + (ze^z + 1)f' - (e^z + 1)f = 1 - z$$

admet le polynôme $f(z) = z$ *comme solution.*

Dans ce chapitre, on continue à considérer les trois théorèmes ci-dessus en précisant l'hyper-ordre des solutions de l'équation (3.4). On obtient les deux résultats suivants :

Théorème 3.1.6. *([15]) Soit* $k \geq 2$ *un entier. Supposons que* $A_j(z)$, $a_{n,j}$ *et* H *vérifient les mêmes hypothèses du Théorème* 3.1.3. *Alors toute solution* f *de l'équation* (3.4) *satisfait* $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 3.1.1. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$f^{(5)} + (z^2 + 1)e^{2z^4+z} f^{(4)} + (2z^2 + 9)e^{z^4+2z^2} f^{(3)} + (z^3 - 6)e^{3z^4+z^3} f'' +$$
$$2e^{4z^4+5z^3+4} f' + 5e^{\frac{1}{2}z^4+2z^3+3} f = 2.$$

D'après le Théorème 3.1.6, toute solution f *de l'équation ci-dessus est d'ordre infini et satisfait* $\sigma_2(f) = 4$.

Théorème 3.1.7. *([15]) Soit* $k \geq 2$ *un entier. Supposons que* $A_j(z)$, $a_{n,j}$ *et* H *vérifient les mêmes hypothèses du Théorème* 3.1.4 *ou celles du Théorème* 3.1.5. *Alors toute solution transcendante* f *de l'équation* (3.4) *satisfait* $\sigma_2(f) = n$.

Exemple 3.1.2. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$f^{(4)} + (ze^{-z} - 5)f^{(3)} - (e^{2z} - 8)f'' - (ze^z + 3z + 5)f' + (e^z - z)f = -z^2 - 3z - 5.$$

D'après le Théorème 3.1.7, toute solution transcendante f *de l'équation ci-dessus est d'ordre infini et satisfait* $\sigma_2(f) = 1$. *On remarque que* $f(z) = e^{e^z} + z$ *est une solution de cette equation avec* $\sigma_2(f) = 1$.

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1. *([19])Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et soient $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$ des constantes. Alors il existe un ensemble $E_1 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ qui depend seulement de α et (i, j) $(i, j$ sont des entiers positifs $i > j)$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on ait*

$$\left|\frac{f^{(i)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq B\left[\frac{T(\alpha r, f)}{r}\left(\log^{\alpha} r\right)\log T(\alpha r, f)\right]^{i-j}. \tag{3.5}$$

Lemme 3.2.2. *([33]) Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante. Pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, on prend $z_r = re^{i\theta_r}$ un point vérifiant $|f(z_r)| = M(r, f)$. Alors il existe une constante δ_r (> 0) et un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_2$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$, on ait*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq 2r^{i} \ \ (i \geq 1 \textit{ is an integer}). \tag{3.6}$$

Lemme 3.2.3. *([22]) Soient $P(z) = (\alpha + i\beta) z^n + ...$ $(\alpha, \beta$ des nombres réels, $|\alpha| + |\beta| \neq 0)$ un polynôme de degré $n \geq 1$ et $A(z)$ une fonction méromorphe avec $\sigma(A) < n$. Posons $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha\cos(n\theta) - \beta\sin(n\theta)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_3 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus H$, où $H = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$ et pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, $r \to +\infty$, on ait*

(i) *si $\delta(P, \theta) > 0$, alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}, \tag{3.7}$$

(ii) *si $\delta(P, \theta) < 0$, alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}. \tag{3.8}$$

Lemme 3.2.4. *([20]) Soient $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que $\varphi(r) \leq \psi(r)$ pour tout $r \notin E_4 \cup [0, 1]$, où $E_4 \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ tel que $\varphi(r) \leq \psi(\alpha r)$ pour tout $r > r_0$.*

Lemme 3.2.5. *([36]) Supposons que $k \geq 2$ est un entier, $A_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ et H $(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières d'ordre fini. Alors toute solution f d'ordre infini de l'équation (3.4) satisfait* $\sigma_2(f) \leq \max\{\sigma(A_j), \sigma(H) : j = 0, 1, ..., k-1\}$.

3.3 Preuve du Théorème 3.1.6

Supposons que f est une solution de l'équation (3.4). D'après le Théorème 3.1.3, il s'ensuit que f est transcendante et d'ordre infini. D'après le lemme 3.2.1, il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on ait

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq Br\left[T(2r, f)\right]^{j+1} (0 \leq i < j \leq k). \tag{3.9}$$

Pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, prenons $z_r = re^{i\theta_r}$ un point vérifiant $|f(z_r)| = M(r, f)$. D'après le lemme 3.2.2, il existe une constante δ_r (> 0) et un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tels que l'inégalité

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq 2r^i \ \ (i = 1, ..., k) \tag{3.10}$$

soit vérifiée pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_2, r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$. Posons $\sigma = \sigma(H) < n$. Pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < n - \sigma)$, on a pour r suffisamment grand

$$|H(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}. \tag{3.11}$$

Comme $|f(z)|$ est continue sur $|z| = r$, alors il existe une constante λ_r (> 0) telle que pour tout z vérifiant $|z| = r$ suffisamment grand et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \lambda_r, \theta_r + \lambda_r]$, on ait

$$\frac{1}{2}|f(z_r)| < |f(z)| < \frac{3}{2}|f(z_r)|. \tag{3.12}$$

Comme $M(r, f) \geq 1$ pour r suffisamment grand, il s'ensuit de (3.11) et de (3.12) que

$$\left|\frac{H(z)}{f(z)}\right| \leq 2\exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \tag{3.13}$$

quand $|z| = r \to +\infty$.

Posons

$$H_1 = \bigcup_{j=0}^{k-1} \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j, \theta) = 0\} \tag{3.14}$$

et

$$H_2 = \bigcup_{0 \leq i < j \leq k-1} \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j - P_i, \theta) = 0\}. \tag{3.15}$$

Comme $a_{n,j}$ sont des nombres complexes distincts, il existe un unique $s \in \{0, ..., k-1\}$ tel que $\delta_1 = \delta(P_s, \theta) = \max\{\delta(P_j, \theta) : j = 0, ..., k-1\}$ pour tout $\theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, où $\alpha = \min\{\delta_r, \lambda_r\}$.

On a

$$\delta(P_s, \theta) > 0 \text{ ou } \delta(P_s, \theta) < 0$$

Cas 1. $\delta_1 > 0$. Posons $\delta_2 = \max\{\delta(P_j, \theta) : j \neq s\}$. Alors $\delta_2 < \delta_1$.

(a). Supposons que $\delta_2 > 0$. Donc $0 < \delta_2 < \delta_1$. Alors d'après le lemme 3.2.4, pour tout ε $\left(0 < 2\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta 2}, n - \sigma\right\}\right)$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, on ait

$$|A_s(z)| \geq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta_1 r^n\} \tag{3.16}$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\delta_2 r^n\} \, (j \neq s). \tag{3.17}$$

On peut réecrire (3.4) sous la forme

$$-A_s(z) = \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} + ... + A_{s+1}(z) \frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}$$

$$+ A_{s-1}(z) \frac{f^{(s-1)}}{f} \frac{f}{f^{(s)}} + ... + A_1(z) \frac{f'}{f} \frac{f}{f^{(s)}} + A_0(z) \frac{f}{f^{(s)}} - \frac{H}{f} \frac{f}{f^{(s)}}. \tag{3.18}$$

En substituant (3.9), (3.10), (3.13), (3.16) et (3.17) dans (3.18), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, on obtient

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r^n\} \leq M_1 r^{s+1} \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \exp\left\{(1+\varepsilon)\delta_2 r^n\right\} [T(2r,f)]^{k+1}, \tag{3.19}$$

où $M_1\,(>0)$ est une constante. Comme la fonction caractéristique de Nevanlinna est croissante, on peut déduire de (3.19) et du lemme 3.2.4 que $\sigma_2(f) \geq n$ et d'après le lemme 3.2.5, on trouve que $\sigma_2(f) = n$.

(b). Supposons que $\delta_2 < 0$. D'après le lemme 3.2.3, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \min\{1, n-\sigma\})$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, on ait (3.16) et

$$|A_j(z)| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_j,\theta) r^n\} < 1 \ \ (j \neq s). \tag{3.20}$$

En substituant (3.9), (3.10), (3.13), (3.16) et (3.20) dans (3.18), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, on obtient

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_1 r^n\right\} \leq M_2 r^{s+1} \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} [T(2r,f)]^{k+1}, \tag{3.21}$$

où $M_2\ (>0)$ est une constante. Alors en utilisant le lemme 3.2.4 et (3.21), on obtient que $\sigma_2(f) \geq n$ et d'après le lemme 3.2.5, on trouve que $\sigma_2(f) = n$.

Cas 2. $\delta_1 < 0$. D'après le lemme 3.2.3, pour tout $\varepsilon\ (0 < 2\varepsilon < \min\{1, n-\sigma\})$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, on ait

$$|A_j(z)| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r^n\} \ \ (j = 0, ..., k-1). \tag{3.22}$$

De (3.4), on obtient

$$-1 = A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}}{f} \frac{f}{f^{(k)}} + ... + A_s(z) \frac{f^{(s)}}{f} \frac{f}{f^{(k)}}$$

$$+... + A_1(z) \frac{f'}{f} \frac{f}{f^{(k)}} + A_0(z) \frac{f}{f^{(k)}} + \frac{H}{f} \frac{f}{f^{(k)}}. \tag{3.23}$$

En substituant (3.9), (3.10), (3.13) et (3.22) dans (3.23), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, on obtient

$$1 \leq M_3 r^{k+1} \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_1 r^n\right\} [T(2r, f)]^{k+1}, \tag{3.24}$$

où M_3 (> 0) est une constante. Alors en utilisant le lemme 3.2.4 et (3.24), on obtient que $\sigma_2(f) \geq n$ et d'après le lemme 3.2.5, on a $\sigma_2(f) = n$.

3.4 Preuve du Théorème 3.1.7

Supposons que f est une solution transcendante de l'équation (3.4). D'après les Théorèmes 3.1.4 et 3.1.5, on déduit que f est d'ordre infini. De la même manière que celle utilisée dans la première étape de la preuve du Théorème 3.1.6, d'après le lemme 3.2.1, il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on ait (3.9). Pour $|z| = r$ suffisamment grand, prenons $z_r = re^{i\theta_r}$ un point vérifiant $|f(z_r)| = M(r, f)$. D'après le Lemme 3.2.2, il existe une constante δ_r (> 0) et un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tels que l'estimation (3.10) soit vérifiée pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_2, r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$.

Posons $\sigma = \sigma(H) < n$. Pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < n - \sigma)$, on a (3.11) pour r suffisamment grand.

Comme $|f(z)|$ est continue sur $|z| = r$, alors il existe une constante $\lambda_r\ (> 0)$ telle que pour tout z vérifiant $|z| = r$ suffisamment grand et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \lambda_r, \theta_r + \lambda_r]$, on ait (3.12). Comme $M(r, f) \geq 1$ pour r suffisamment grand, il s'ensuit de (3.11) et (3.12) que (3.13) est vérifiée quand $|z| = r \to +\infty$.

(i) D'adord, on suppose que f vérifie les hypothèses du Théorème 3.1.4. Posons

$$H_1 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s, \theta) = 0 \text{ ou} \delta(P_l, \theta) = 0\}$$

et

$$H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s, \theta) = \delta(P_l, \theta)\}.$$

Pour tout $\theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, où $\alpha = \min\{\delta_r, \lambda_r\}$, on a

$$\delta(P_s, \theta) \neq 0,\ \ \delta(P_l, \theta) \neq 0 \text{ et} \delta(P_s, \theta) > \delta(P_l, \theta) \ \text{ ou} \delta(P_s, \theta) < \delta(P_l, \theta).$$

Posons $\delta_1 = \delta(P_s, \theta)$ et $\delta_2 = \delta(P_l, \theta)$.

Cas 1. $\delta_1 > \delta_2$**.** Ici on divise aussi notre démonstration en trois cas :

(a). Supposons que $\delta_1 > \delta_2 > 0$. Posons $\delta_3 = \max\{\delta(P_j, \theta) : j \neq s\}$. Alors $0 < \delta_3 < \delta_1$. Alors d'après le lemme 3.2.3, pour tout ε $\left(0 < 2\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta_1 - \delta_3}{\delta_1 + \delta_3}, n - \sigma\right\}\right)$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, on ait (3.16) et

$$|A_j(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\delta_3 r^n\} \ \ (j \neq s). \tag{3.25}$$

En substituant (3.9), (3.10), (3.13), (3.16) et (3.25) dans (3.18), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_2 \cup H_3$, on obtient

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r^n\}$$

$$\leq M_1 r^{s+1} \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_3 r^n\right\} [T(2r,f)]^{k+1}\,, \tag{3.26}$$

où $M_1\,(>0)$ est une constante. Donc en utilisant le lemme 3.2.4 et (3.26), on obtient $\sigma_2\,(f) \geq n$ et d'après le Lemme 3.2.5, on a $\sigma_2\,(f) = n$.

(b). Supposons que $\delta_1 > 0 > \delta_2$. Posons $\beta = \max\{d_j : j \neq s, l\}$. D'après le lemme 3.2.3, pour tout $\varepsilon \left(0 < 2\varepsilon < \left\{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}, n-\sigma\right\}\right)$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha]\,/H_1 \cup H_2$, on ait (3.16) et

$$|A_j\,(z)| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\beta\delta_1 r^n\} \ \ (j \neq s)\,. \tag{3.27}$$

En substituant (3.9), (3.10), (3.13), (3.16) et (3.27) dans (3.18), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha]\,/H_1 \cup H_2$, on obtient

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_1 r^n\right\}$$

$$\leq M_2 r^{s+1} \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\beta\delta_1 r^n\right\} [T(2r,f)]^{k+1}\,, \tag{3.28}$$

où $M_2\ (>0)$ est une constante. Alors en utilisant le lemme 3.2.4 et (3.28), on obtient $\sigma_2\,(f) \geq n$ et d'après le lemme 3.2.5, on a $\sigma_2\,(f) = n$.

(c). Supposons que $0 > \delta_1 > \delta_2$. Posons $\gamma = \min\{d_j \ : j \neq s, l\}$. D'après le lemme 3.2.3, pour tout $\varepsilon\ (0 < 2\varepsilon < \min\{1, n-\sigma\})$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha]\,/H_1 \cup H_2$, on ait

$$|A_j\,(z)| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\gamma\delta_1 r^n\} \ \ (j = 0, ..., k-1)\,. \tag{3.29}$$

En substituant (3.9), (3.10), (3.13) et (3.29) dans (3.23), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H_1 \cup H_2$, on obtient

$$1 \leq M_3 r^{k+1} \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \exp\left\{(1-\varepsilon)\gamma\delta_1 r^n\right\} [T(2r,f)]^{k+1}, \tag{3.30}$$

où M_3 (> 0) est une constante. Alors en utilisant le lemme 3.2.4 et (3.30), on obtient $\sigma_2(f) \geq n$ et d'après le lemme 3.2.5, on a $\sigma_2(f) = n$.

Cas 2. $\delta_1 < \delta_2$. En utilisant le même raisonnement que celui du premier cas, on peut aussi obtenir $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Supposons maintenant que f satisfait les hypothèses du Théorème 3.1.5.
Posons $\rho = \max\{\sigma(H), \sigma(g_j) : j = 0, ..., k-1\} < n$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, on a

$$|g_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\} \quad (j = 0, ..., k-1). \tag{3.31}$$

Posons $H = \{\theta \in [0, 2\pi) : \cos(\varphi + n\theta) = 0\}$. Pour tout $\theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H$, on a

$$\cos(\varphi + n\theta) > 0 \text{ ou} \cos(\varphi + n\theta) < 0.$$

Cas 1. $\cos(\varphi + n\theta) > 0$.
D'après le lemme 3.2.3, pour tout ε $\left(0 < 2\varepsilon < \min\left\{\frac{d_s - d}{d_s + d}, n - \rho\right\}\right)$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H$, on ait

$$\left|h_s(z) e^{P_s(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon) d_s \cos(\varphi + n\theta) r^n\} \tag{3.32}$$

et

$$\left|h_j(z) e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon) d \cos(\varphi + n\theta) r^n\} \quad (j \neq s). \tag{3.33}$$

De (3.31) et (3.32), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H$, on a

$$|A_s(z)| \geq (1 - o(1)) \exp\{(1-\varepsilon) d_s \cos(\varphi + n\theta) r^n\}. \tag{3.34}$$

De (3.31) et (3.33), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H$, on a

$$|A_j(z)| \leq (1 + o(1)) \exp\{(1+\varepsilon) d \cos(\varphi + n\theta) r^n\} \ \ (j \neq s). \tag{3.35}$$

En substituant (3.9), (3.10), (3.13), (3.34) et (3.35) dans (3.18), pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \alpha, \theta_r + \alpha] / H$, on obtient

$$\begin{aligned} &(1 - o(1)) \exp\{(1-\varepsilon) d_s \cos(\varphi + n\theta) r^n\} \\ &\leq M_1 r^{s+1} (1 + o(1)) \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \exp\{(1+\varepsilon) d \cos(\varphi + n\theta) r^n\} [T(2r, f)]^{k+1}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

où $M_1 (> 0)$ est une constante. Alors en utilisant le lemme 3.2.4 et (3.36), on obtient $\sigma_2(f) \geq n$ et d'après le lemme 3.2.5, on trouve $\sigma_2(f) = n$.

Cas 2. $\cos(\varphi + n\theta) < 0$.

On utilise le même raisonnement que celui du premier cas en remplaçant $h_s(z) e^{P_s(z)}$ par $h_l(z) e^{P_l(z)}$ pour prouver que $\sigma_2(f) \geq n$ et d'après le lemme 3.2.5, on trouve $\sigma_2(f) = n$.

Chapitre 4

Croissance des solutions méromorphes transcendantes de certaines équations différentielles linéaires non homogènes

4.1 Introduction et résultats

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + h_1(z)e^{P(z)}f' + h_0(z)e^{Q(z)}f = 0, \tag{4.1}$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes non constants, $h_1(z)$ et $h_0(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières vérifiant $\sigma(h_1) < \deg P$ et $\sigma(h_0) < \deg Q$. Gundersen a montré dans [[20], p. 419] que si $\deg P \neq \deg Q$, alors toute solution non constante de l'équation (4.1) est d'ordre infini. Si $\deg P = \deg Q$, alors l'équation (4.1) peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini. En effet, $f(z) = z$ satisfait l'équation $f'' - z^3e^zf' + z^2e^zf = 0$.

K. H. Kwon [27] a consideré le cas où $\deg P = \deg Q$ et a prouvé le résultat suivant :

Théorème 4.1.1. ([27]) *Soient $P(z)$ et $Q(z)$ des polynômes non constants tels que*

$$P(z) = a_nz^n + ... + a_1z + a_0, \tag{4.2}$$

$$Q(z) = b_n z^n + ... + b_1 z + b_0, \tag{4.3}$$

où a_i, b_i $(i = 0, 1, ..., n)$ *sont des nombres complexes,* $a_n \neq 0$ *et* $b_n \neq 0$*. Soient* $h_j(z)$ $(j = 0, 1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(h_j) < n$*. Supposons que* $\arg a_n \neq \arg b_n$ *ou* $a_n = cb_n$ $(0 < c < 1)$*. Alors toute solution non constante* f *de l'équation* (4.1) *est d'ordre infini et satisfait* $\sigma_2(f) \geq n$*.*

Dans [6], Belaïdi et Abbas ont étudié quelques équations différentielles linéaires d'ordre supérieur avec des coefficients entières et ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 4.1.2. ([*6*]) *Soient* $k \geq 2$ *un entier et* $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *des polynômes non constants de degré* $n \geq 1$*, où* $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes tels que* $a_{n,j} a_{n,s} \neq 0$ $(j \neq s)$ $(1 \leq s \leq k-1)$*. Soient* $h_j(z) (\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(h_j) < n$*. Supposons que* $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,s}$ *ou* $a_{n,j} = c_j a_{n,s}$ $(0 < c_j < 1)$ $(j \neq s)$*. Alors toute solution transcendante* f *de l'équation*

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} h_j(z) e^{P_j(z)} f^{(j)} = 0 \tag{4.4}$$

est d'ordre infini et satisfait $\sigma_2(f) = n$*. De plus, si* $\max\{c_1, ..., c_{s-1}\} < c_0$*, alors toute solution* $f (\not\equiv 0)$ *de l'équation* (4.4) *est d'ordre infini et satisfait* $\sigma_2(f) = n$*.*

En 2008, J. Tu et C. F. Yi [32] ont considéré aussi l'équation (4.4) et ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 4.1.3. ([*32*]) *Soient* $k \geq 2$ *un entier et* $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *des polynômes de degré* $n \geq 1$*, où* $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes. Soient* $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(h_j) < n$*. Supposons qu'il existe des nombres complexes non nuls* $a_{n,s}$ *et* $a_{n,l}$ *tels que* $0 \leq s < l \leq k-1$*,* $a_{n,s} = |a_{n,s}| e^{i\theta_s}$*,* $a_{n,l} = |a_{n,l}| e^{i\theta_l}$*,* $\theta_s, \theta_l \in [0, 2\pi)$*,* $\theta_s \neq \theta_l$*,* $h_s h_l \not\equiv 0$ *et pour* $j \neq s, l$*,* $a_{n,j}$ *satisfait* $a_{n,j} = d_j a_{n,s}$ $(0 < d_j < 1)$ *ou* $a_{n,j} = d_j a_{n,l}$ $(0 < d_j < 1)$*. Alors toute solution transcendante* f *de l'équation* (4.4) *vérifie* $\sigma(f) = +\infty$*. De plus, si* f *est une solution polynômiale de l'équation* (4.4)*, alors* $\deg f \leq s - 1$ *; si* $s = 1$*, alors toute solution non constante* f *de l'équation* (4.4) *satisfait* $\sigma(f) = +\infty$*.*

Dans ce chapitre, on continue l'étude de ce type de problèmes. le but de ce travail est d'étendre les résultats ci- dessus pour des équations différentielles linéaires non homogènes avec des coefficients méromorphes vérifiant certaines conditions. On va montrer les deux résultats suivants :

Théorème 4.1.4. *Soient* $k \geq 2$ *un entier,* $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, \ldots, k-1)$ *des polynômes de degré* $n \geq 1$*, où* $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 0, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes. Soient* $h_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ *et* F $(\not\equiv 0)$ *des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles avec* $\max\{\sigma(F), \sigma(h_j) : j = 0, ..., k-1\} < n$*. Supposons qu'il existe un entier* $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$ *tel que* $h_0 h_s \not\equiv 0$ *et* $a_{n,j} = c_j a_{n,s}$ $(0 < c_j < 1)$ $(j \neq s)$*. Alors toute solution méromorphe transcendante de l'équation*

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} h_j(z) e^{P_j(z)} f^{(j)} = F \tag{4.5}$$

est d'ordre infini. De plus, si $\max\{c_1, ..., c_{s-1}\} < c_0$*, alors toute solution méromorphe* $f(\not\equiv 0)$ *de l'équation* (4.5) *est d'ordre infini.*

Exemple 4.1.1. *D'après le Théorème 4.1.4, toute solution méromorphe transcendante de l'équation différentielle*

$$f^{(5)} + \frac{1}{(z+1)} e^{\frac{1}{3}z^4+z+2} f^{(4)} + \frac{2}{(2z^2-1)} e^{4z^4+5} f^{(3)} + \frac{1}{(z-6)} e^{\frac{1}{2}z^4+1} f''$$
$$+2e^{z^4+4} f' + 6e^{2z^4+3} f = 5$$

est d'ordre infini.

Théorème 4.1.5. *Soient* $k \geq 2$ *un entier,* $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, \ldots, k-1)$ *des polynômes de degré* $n \geq 1$*, où* $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 0, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes. Soient* $h_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ *et* F $(\not\equiv 0)$ *sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles avec* $\max\{\sigma(F), \sigma(h_j) : j = 0, ..., k-1\} < n$*. Supposons qu'il existe deux entiers* s, d *tels que* $1 \leq s < d \leq k-1$*,* $h_s h_d \not\equiv 0$ *et* $a_{n,s} \neq a_{n,d}$*. Soient* I *et*

J deux ensembles vérifiant $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$, $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J = \{0, \ldots, k-1\}/\{s, d\}$ tels que pour $j \in I$, $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,s}$ $(0 < \alpha_j < 1)$ et pour $j \in J$, $a_{n,j} = \beta_j a_{n,d}$ $(0 < \beta_j < 1)$. Posons $a_{n,l} = |a_{n,l}| e^{i\theta_l}$, $\theta_l \in [0, 2\pi)$ $(l = s, d)$ et $\alpha = \max\{\alpha_j : j \in I\}$.
Si $(\theta_s \neq \theta_d)$ ou $(\theta_s = \theta_d$ et $|a_{n,d}| < (1-\alpha)|a_{n,s}|)$, alors toute solution méromorphe transcendante de l'équation (4.5) est d'ordre infini. De plus, si f est une solution polynômiale de (4.5), alors $\deg f \leq s - 1$.

Exemple 4.1.2. *D'après le Théorème 4.1.5, toute solution méromorphe transcendante de l'équation différentielle*

$$f^{(4)} + \frac{1}{(2z^2-1)} e^{(1+i)z^2+4} f^{(3)} + \frac{1}{(z+1)} e^{(\frac{1}{2}+i)z^2+1} f''$$
$$+3e^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z^2+1} f' + 2e^{(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}i)z^2+2} f = z$$

est d'ordre infini.

4.2 Lemmes préliminaires

Lemme 4.2.1. ([2]) *Soient $P_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k)$ des polynômes tels que $\deg P_0(z) = n$ $(n \geq 1)$ et $\deg P_j(z) \leq n$ $(j = 1, 2, ..., k)$. Soient $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\max\{\sigma(A_j) : j = 0, 1, ..., k\} < n$ tels que $A_0(z) \not\equiv 0$. On note*

$$F(z) = A_k(z) e^{P_k(z)} + A_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} + ... + A_1(z) e^{P_1(z)} + A_0(z) e^{P_0(z)}. \qquad (4.6)$$

Si $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$ pour tout $j = 1, ..., k$, alors F est une fonction méromorphe non triviale d'ordre fini et satisfait $\sigma(F) = n$.

Lemme 4.2.2. ([19]) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini σ. Soit $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ l'ensemble de paires distinctes d'entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe* *une constante* $R_1 = R_1(\theta) > 1$ *telle que pour tout* z *vérifiant* $\arg z = \theta$ *et* $|z| \geq R_1$ *et pour tout* $(k,j) \in \Gamma$*, on ait*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{4.7}$$

Lemme 4.2.3. ([5]) *Soient* $P(z) = (\alpha + i\beta) z^n + \dots$ $(\alpha, \beta$ *sont des nombres réels,* $|\alpha| + |\beta| \neq 0)$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$ *et* $A(z)$ *une fonction méromorphe avec* $\sigma(A) < n$*. Posons* $f(z) = A(z) e^{P(z)}$*,* $z = re^{i\theta}$*,* $\delta(P,\theta) = \alpha\cos(n\theta) - \beta\sin(n\theta)$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ensemble* $E_2 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle tel que pour tout* $\theta \in [0,2\pi) \setminus E_2 \cup H$*, où* $H = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P,\theta) = 0\}$ *est un ensemble fini, il existe une constante* $R_2 > 1$ *telle que pour* $|z| = r \geqslant R_2$*, on ait*

(i) *si* $\delta(P,\theta) > 0$*, alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}, \tag{4.8}$$

(ii) *si* $\delta(P,\theta) < 0$*, alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\} \leq \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta) r^n\}. \tag{4.9}$$

Lemme 4.2.4. ([3]) *Soient* $n \geq 1$ *un entier,* $f(z)$ *une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles et supposons que*

$$G(z) = \frac{\log^+ \left|f^{(n)}(z)\right|}{|z|^\rho}$$

n'est pas bornée sur un rayon $\arg z = \theta$ *avec* $\rho > 0$ *une constante. Alors il existe une suite infinie de points* $\{z_m = r_m e^{i\theta}\}$ $(m = 1, 2, \dots)$*, où* $r_m \to +\infty$ *telle que* $G(z_m) \to \infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(n)}(z_m)}\right| \leqslant \frac{1}{(n-j)!}(1+o(1))|z_m|^{n-j} \quad (j = 0, \dots, n-1) \;\; \text{quand } m \to +\infty. \tag{4.10}$$

Lemme 4.2.5. ([35]) *Soit* $f(z)$ *une fonction entière d'ordre fini. Supposons qu'il existe un ensemble* $E_3 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle tel que pour tout rayon* $\arg z = \theta \in [0,2\pi) \setminus E_3$*, on ait*

$$\log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M r^\sigma, \tag{4.11}$$

où M (> 0) *est une constante qui ne dépend que de* θ *et* σ (> 0) *est une constante indépendante de* θ*. Alors* $\sigma(f) \leq \sigma$*.*

4.3 Preuve du Théorème 4.1.4

D'abord on prouve que toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (4.5) est d'ordre $\sigma(f) \geq n$. Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (4.5) d'ordre $\sigma(f) < n$. On peut écrire l'équation (4.5) sous la forme

$$\sum_{j=0}^{k-1} h_j f^{(j)} e^{P_j(z)} = B(z), \tag{4.12}$$

où $B(z) = -f^{(k)} + F$ et $h_j f^{(j)}$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\sigma\left(h_j f^{(j)}\right) < n$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et $\sigma(B) < n$. On a $h_s f^{(s)} \not\equiv 0$. En effet, si $h_s f^{(s)} \equiv 0$, il s'ensuit que $f^{(s)} \equiv 0$ et donc f est un polynôme de degré inférieur à s. C'est une contradiction.

Comme $a_{n,j} = c_j a_{n,s}$ $(0 < c_j < 1)$ $(j \neq s)$, on obtient $\deg(P_s(z) - P_j(z)) = n$ $(j \neq s)$. Ainsi de la formule (4.12) et du lemme 4.2.1, on a $\sigma(B) = n$. Ce qui contredit le fait que $\sigma(B) < n$. Alors toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (4.5) est d'ordre $\sigma(f) \geq n$.

Maintenant supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (4.5) avec $\sigma(f) = \sigma < +\infty$. D'après le lemme 4.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe une constante $R_1 = R_1(\theta) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| \geq R_1$, on ait

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq |z|^{k\sigma} \quad (0 \leq i < j \leq k). \tag{4.13}$$

D'après le lemme 4.2.3, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2 \cup H_1$ et pour r suffisamment grand, les fonctions $h_j e^{P_j(z)}$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ vérifient (4.8) ou (4.9), où $H_1 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s, \theta) = 0\}$.

Posons $\rho = \max\{\sigma(F), \sigma(h_j) : j = 0, 1, ..., k-1\}$ et $c = \max\{c_j : j \neq s\}$. Comme

$F(z)$ est une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, alors d'après le Théorème de Factorisation de Hadamard, on peut écrire $F(z) = \frac{H(z)}{Q(z)}$, où $Q(z)$ est un polynôme de degré $\deg Q(z) = p \geq 1$ et $H(z)$ est une fonction entière avec $\sigma(H) = \sigma(F)$.

Pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1 \cup E_2 \cup H_1$, on a

$$\delta(P_s, \theta) > 0 \text{ ou} \delta(P_s, \theta) < 0.$$

Cas 1. $\delta(P_s, \theta) > 0$. Pour tout $\varepsilon \left(0 < 3\varepsilon < \min\left\{\frac{1-c}{1+c}, n-\rho\right\}\right)$ et tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r$ suffisamment grand, on a

$$\left|h_s(z)e^{P_s(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_s, \theta) r^n\} \tag{4.14}$$

et

$$\left|h_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)c\delta(P_s, \theta)r^n\} \quad (j \neq s). \tag{4.15}$$

Maintenant montrons que

$$G(z) = \frac{\log^+ \left|f^{(s)}(z)\right|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Si $G(z)$ n'est pas bornée sur $\arg z = \theta$, alors d'après le lemme 4.2.4, il existe une suite de points $\{z_m = r_m e^{i\theta}\}$ $(m = 1, 2, ...)$, où $r_m \to +\infty$ telle que $G(z_m) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leqslant \frac{1}{(s-j)!}(1 + o(1))|z_m|^{s-j} \quad (j = 0, ..., s-1) \text{ as } m \to +\infty. \tag{4.16}$$

Comme $G(z_m) \to \infty$ pour $A > 0$ suffisamment grand, on a

$$\left|f^{(s)}(z_m)\right| > \exp\left\{A|z_m|^{\rho+\varepsilon}\right\} \text{ quand } m \to +\infty. \tag{4.17}$$

De (4.17), on a pour m suffisamment grand

$$\left|\frac{F\left(z_{m}\right)}{f^{(s)}\left(z_{m}\right)}\right|=\left|\frac{H\left(z_{m}\right)}{Q\left(z_{m}\right)f^{(s)}\left(z_{m}\right)}\right|\leq\frac{\left|H\left(z_{m}\right)\right|}{\lambda_{1}r_{m}^{p}\exp\left\{A\left|z_{m}\right|^{\rho+\varepsilon}\right\}}\leq\frac{\left|H\left(z_{m}\right)\right|}{\exp\left\{A\left|z_{m}\right|^{\rho+\varepsilon}\right\}},\quad(4.18)$$

où $\lambda_1\,(>0)$ est une constante. Comme $\sigma\left(H\right)\leq\rho$, on obtient

$$\left|\frac{F\left(z_{m}\right)}{f^{(s)}\left(z_{m}\right)}\right|\leq\frac{\left|H\left(z_{m}\right)\right|}{\exp\left\{A\left|z_{m}\right|^{\rho+\varepsilon}\right\}}\rightarrow0\text{ as }m\rightarrow+\infty.\quad(4.19)$$

De (4.5), on a

$$\left|h_{s}(z)e^{P_{s}(z)}\right|\leq\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(s)}\left(z\right)}\right|+\left|h_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\right|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|$$

$$+...+\left|h_{s+1}(z)e^{P_{s+1}(z)}\right|\left|\frac{f^{(s+1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+\left|h_{s-1}(z)e^{P_{s-1}(z)}\right|\left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|$$

$$+\cdots+\left|h_{1}(z)e^{P_{1}(z)}\right|\left|\frac{f'(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+\left|h_{0}(z)e^{P_{0}(z)}\right|\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+\left|\frac{F\left(z\right)}{f^{(s)}(z)}\right|.\quad(4.20)$$

En substituant (4.13) – (4.16) et (4.19) dans (4.20), on a pour z_m ci-dessus

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta\left(P_{s},\theta\right)r_{m}^{n}\}\leq M_{1}r_{m}^{d_{1}}\exp\{(1+\varepsilon)c\delta\left(P_{s},\theta\right)r_{m}^{n}\},\quad(4.21)$$

où $M_1\ (>0)$, $d_1\,(>0)$ sont des constantes. De (4.21) et $0<\varepsilon<\dfrac{1-c}{3(1+c)}$, on obtient

$$\exp\{\frac{(1-c)}{3}\delta\left(P_{s},\theta\right)r_{m}^{n}\}\leq M_{1}r_{m}^{d_{1}}.\quad(4.22)$$

C'est la contradiction. Donc $G\left(z\right)$ est bornée sur $\arg z=\theta$.

D'où

$$\left|f^{(s)}\left(z\right)\right|\leq\exp\left\{M\left|z\right|^{\rho+\varepsilon}\right\}\quad(4.23)$$

sur $\arg z=\theta$, où $M\ (>0)$ est une constante. De (4.23) et (s)-fois d'intégration itérées, on conclut que

$$|f(z)| \leq \exp\left\{M|z|^{\rho+2\varepsilon}\right\} \tag{4.24}$$

sur $\arg z = \theta$.

Cas 2. $\delta(P_s, \theta) < 0$. Pour tout ε $(0 < 3\varepsilon < \min\{1, n - \rho\})$ et pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r$ suffisamment grand, on a

$$\left|h_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_j,\theta)r^n\} \ (j = 0, ..., k-1). \tag{4.25}$$

De (4.5), on obtient

$$-1 = h_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)}$$

$$+ ... + h_s(z)e^{P_s(z)}\frac{f^{(s)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + h_0(z)e^{P_0(z)}\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)} + \frac{F(z)}{f^{(k)}(z)}. \tag{4.26}$$

Maintenant montrons que

$$D(z) = \frac{\log^+\left|f^{(k)}(z)\right|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Si $D(z)$ n'est pas bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors d'après le lemme 4.2.4, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m = 1, 2, ...)$, où $r_m \to +\infty$ telle que $D(z_m) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leqslant \frac{1}{(k-j)!}(1 + o(1))|z_m|^{k-j} \ \ (j = 0, ..., k-1) \text{ quand } m \to +\infty. \tag{4.27}$$

Comme $D(z_m) \to \infty$ pour $B > 0$ suffisamment grand, on a

$$\left|f^{(k)}(z_m)\right| > \exp\left\{B|z_m|^{\rho+\varepsilon}\right\} \text{ quand } m \to +\infty. \tag{4.28}$$

En utilisant le même raisonnement que celui ci-dessus, de (4.28), on a pour m suffisamment grand

$$\left|\frac{F(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| = \left|\frac{H(z_m)}{Q(z_m) f^{(k)}(z_m)}\right| \leq \frac{|H(z_m)|}{\exp\left\{B|z_m|^{\rho+\varepsilon}\right\}}. \tag{4.29}$$

Comme $\sigma(H) \leq \rho$, on obtient

$$\left|\frac{F(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leq \frac{|H(z_m)|}{\exp\left\{B|z_m|^{\rho+\varepsilon}\right\}} \to 0 \text{ quand } m \to +\infty. \tag{4.30}$$

En substituant (4.13), (4.25), (4.27) et (4.30) dans (4.26), on obtient quand $r_m \to +\infty$

$$1 \leq 0.$$

C'est une contradiction. Alors $D(z)$ est bornée sur $\arg z = \theta$. Donc

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \exp\left\{M|z|^{\rho+\varepsilon}\right\} \tag{4.31}$$

sur $\arg z = \theta$, où M (> 0) est une constante. D'après (4.31) et (k)-fois d'intégration itérées, on obtient (4.24) sur $\arg z = \theta$.

De l'équation (4.5), on sait que les pôles de f peuvent se produire seulement par les pôles de F et $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$. Comme F et $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles, alors f doit avoir un nombre fini de pôles. Ainsi d'après le Théorème de Factorisation de Hadamard, on peut écrire $f(z) = \frac{g(z)}{R(z)}$, où $R(z)$ est un polynôme et $g(z)$ est une fonction entière avec $\sigma(g) = \sigma(f) \geq n$. De (4.24), on a

$$|g(z)| \leq \lambda_2 r^q \exp\left\{M|z|^{\rho+2\varepsilon}\right\} \tag{4.32}$$

sur $\arg z = \theta$, où $\lambda_2 (> 0)$ est une constante et $q = \deg R \geq 1$. Alors

$$|g(z)| \leq \exp\left\{M|z|^{\rho+3\varepsilon}\right\} \tag{4.33}$$

sur $\arg z = \theta$. Donc pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1 \cup E_2 \cup H_1$, où $E_1 \cup E_2 \cup H_1$ est un ensemble de mesure linéaire nulle, on a (4.33) sur $\arg z = \theta$. Alors d'après le lemme

4.2.5, on a $\sigma(g) \leq \rho + 3\varepsilon < n$. Ce qui contredit le fait que $\sigma(g) \geq n$. Ce qui montre que $\sigma(f) = +\infty$.

Supposons maintenant que $\max\{c_1, ..., c_{s-1}\} < c_0$. Si f est une solution rationnelle de (4.5), alors d'après $\max\{c_1, ..., c_{s-1}\} < c_0$ et

$$f = \frac{F}{h_0 e^{P_0(z)}} - (\frac{e^{-P_0(z)}}{h_0} f^{(k)} + \frac{h_{k-1}}{h_0} e^{P_{k-1}(z)-P_0(z)} f^{(k-1)} + ... + \frac{h_1}{h_0} e^{P_1(z)-P_0(z)} f'), \quad (4.34)$$

on obtient une contradiction.

Maintenant, on prouve que l'équation (4.5) ne peut pas avoir une solution polynômiale. Posons $c' = \max\{c_1, ..., c_{s-1}\} < c_0$ et soit $f(z)$ est une solution polynômiale non nulle de l'équation (4.5) avec $\deg f(z) = d$. On prend le rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus H_1$, où H_1 est défini comme ci-dessus tel que $\delta(P_s, \theta) > 0$. D'après le lemme 4.2.3, pour tout ε $(0 < 3\varepsilon < \min\{\frac{1-c}{1+c}, \frac{c_0-c'}{c_0+c'}, n-\rho\})$, il existe un ensemble E_2 de mesure linéaire nulle tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2 \cup H_1$ et $|z| = r$ suffisamment grand, on ait (4.14) et (4.15).

(i) Si $d \geq s$, de (4.5), (4.14) et (4.15), on obtient pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2 \cup H_1$ et $|z| = r$ suffisamment grand

$$B_1 r^{d-s} \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_s, \theta) r^n\} \leq |h_s(z) e^{P_s(z)} f^{(s)}(z)| \leq \sum_{j \neq s} |h_j(z) e^{P_j(z)} f^{(j)}(z)| + |F(z)|$$

$$\leq B_2 r^d \exp\{(1+\varepsilon)c\delta(P_s, \theta) r^n\} + \frac{\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}}{\lambda_1 r^p}, \quad (4.35)$$

où B_1 (> 0), B_2 (> 0) sont des constantes.
De (4.35), on obtient

$$\exp\{\frac{(1-c)}{3}\delta(P_s, \theta) r^n\} \leq B_3 r^{d_2} \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}, \quad (4.36)$$

où $B_3 (> 0)$ et d_2 sont des constantes. Alors (4.36) est une contradiction.

(ii) Si $d < s$, de (4.5), (4.14) et (4.15), on obtient pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2 \cup H_1$ et $|z| = r$ suffisamment grand

$$B_4 r^{s-1} \exp\{(1-\varepsilon)c_0 \delta(P_s,\theta) r^n\} \leq |h_0(z)e^{P_0(z)}||f(z)| \leq \sum_{j=1}^{s-1} |h_j e^{P_j} f^{(j)}(z)| + |F(z)|$$

$$\leq B_5 r^{s-2} \exp\{(1+\varepsilon)c' \delta(P_s,\theta) r^n\} + \frac{\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}}{\lambda_1 r^p}, \tag{4.37}$$

où B_4 (> 0), B_5 (> 0) sont des constantes.
De (4.37), on obtient

$$\exp\{\frac{(c_0 - c')}{2}\delta(P_s,\theta) r^n\} \leq \frac{B_6}{r} \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}, \tag{4.38}$$

où $B_6 (> 0)$ est une constante. C'est une contradiction.
Ainsi si $\max\{c_1, ..., c_{s-1}\} < c_0$, alors toute solution méromorphe de l'équation (4.5) est d'ordre infini.

4.4 Preuve du Théorème 4.1.5

En utilisant le même raisonnement que celui du Théorème 4.1.4, on prouve que toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (4.5) est d'ordre $\sigma(f) \geq n$.

Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (4.5) avec $\sigma(f) = \sigma < +\infty$. D'après le lemme 4.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe une constane $R_1 = R_1(\theta) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| \geq R_1$, on a (4.13). D'après le lemme 4.2.3, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2 \cup H_2$ et r suffisamment grand, les fonctions $h_j e^{P_j(z)}$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ vérifient (4.8) ou (4.9), où $H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s,\theta) = 0$ ou $\delta(P_d,\theta) = 0\}$.
Posons $\rho = \max\{\sigma(F), \sigma(h_j) : j = 0, 1, ..., k-1\}$. Comme $F(z)$ est une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, alors d'après le Théorème de Factorisation de

Hadamard, on peut écrire $F(z) = \frac{H(z)}{Q(z)}$, où $Q(z)$ est un polynôme avec $\deg Q = p \geq 1$ et $H(z)$ est une fonction entière avec $\sigma(H) = \sigma(F)$.

Cas 1. Supposons que $\theta_s \neq \theta_d$. Posons $H_3 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s, \theta) = \delta(P_d, \theta)\}$. Comme $\theta_s \neq \theta_d$, alors H_3 est de mesure linéaire nulle. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1 \cup E_2 \cup H_2 \cup H_3$, on a

$$\delta(P_s, \theta) \neq 0, \; \delta(P_d, \theta) \neq 0 \text{ et} \delta(P_s, \theta) > \delta(P_d, \theta) \text{ ou} \delta(P_s, \theta) < \delta(P_d, \theta).$$

Posons $\delta_1 = \delta(P_s, \theta)$ et $\delta_2 = \delta(P_d, \theta)$.

(a). $\delta_1 > \delta_2$. On divise aussi notre preuve en trois cas :

(i) $\delta_1 > \delta_2 > 0$. Posons $\delta_3 = \max\{\delta(P_j, \theta) : j \neq s\}$. Alors $0 < \delta_3 < \delta_1$. donc pour tout ε $\left(0 < 3\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta_1 - \delta_3}{\delta_1 + \delta_3}, n - \rho\right\}\right)$ et pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r$ suffisamment grand, on a

$$\left|h_s(z)e^{P_s(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r^n\} \tag{4.39}$$

et

$$\left|h_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_3 r^n\} \;\; (j \neq s) \tag{4.40}$$

Maintenant on montre que

$$G(z) = \frac{\log^+ \left|f^{(s)}(z)\right|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur un rayon $\arg z = \theta$. Si $G(z)$ n'est pas boenée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors d'après le lemme 4.2.4, il existe une suite infinie de points $\{z_m = r_m e^{i\theta}\}$ $(m = 1, 2, ...)$, où $r_m \to +\infty$ telle que $G(z_m) \to \infty$ et (4.16) soit vérifiée. De (4.17), on a (4.18) pour m suffisamment grand. Comme $\sigma(H) \leq \rho$, on obtient (4.19).

En substituant (4.13), (4.16), (4.19), (4.39) et (4.40) dans (4.20), pour z_m ci-dessus, on obtient

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r_m^n\} \leq M_2 r_m^{d_3} \exp\{(1+\varepsilon)\delta_3 r_m^n\}, \tag{4.41}$$

où M_2 (>0), $d_3\,(>0)$ sont des constantes. De (4.41) et $0<\varepsilon<\frac{\delta_1-\delta_3}{3(\delta_1+\delta_3)}$, on a

$$\exp\{\frac{(\delta_1-\delta_3)}{3} r_m^n\} \leq M_2 r_m^{d_3}. \tag{4.42}$$

C'est une contradiction. Alors $G\,(z)$ est bornée sur $\arg z=\theta$. Donc (4.24) est vérifiée sur $\arg z=\theta$.

(ii) $\delta_1>0>\delta_2$. Alors pour tout ε $\left(0<3\varepsilon<\min\left\{\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}, n-\rho\right\}\right)$ et pour tout z vérifiant $\arg z=\theta$ et $|z|=r$ suffisamment grand, on a (4.39),

$$\left|h_d(z)e^{P_d(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta_2 r^n\} < 1, \tag{4.43}$$

$$\left|h_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta_1 r^n\} \ \ (j\in I) \tag{4.44}$$

et

$$\left|h_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_j,\theta) r^n\} < 1 \ \ (j\in J)\,. \tag{4.45}$$

Maintenant on montre que

$$G\,(z)=\frac{\log^+\left|f^{(s)}\,(z)\right|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur un rayon $\arg z=\theta$. Si $G\,(z)$ n'est pas bornée sur le rayon $\arg z=\theta$, alors d'après le lemme 4.2.4, il existe une suite infinie de points $\{z_m=r_m e^{i\theta}\}$ $(m=1,2,...)$, où $r_m\to+\infty$ telle que $G\,(z_m)\to\infty$ et (4.16) soit vérifiée.

En substituant (4.13), (4.16), (4.19), (4.39), (4.43) – (4.45) dans (4.20), pour z_m ci-dessus, on obtient

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r_m^n\} \leq M_3 r_m^{d_4} \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta_1 r_m^n\}, \tag{4.46}$$

où M_3 (>0) et d_4 (>0) sont des constantes. De (4.46) et $0<\varepsilon<\dfrac{1-\alpha}{3(1+\alpha)}$, on a

$$\exp\{\frac{(1-\alpha)}{3}\delta_1 r_m^n\} \leq M_3 r_m^{d_4}. \tag{4.47}$$

C'est une contradiction. Alors $G(z)$ est bornée sur $\arg z=\theta$. Donc (4.24) est vérifiée sur $\arg z=\theta$.

(iii) $0>\delta_1>\delta_2$. Pour tout ε $(0<3\varepsilon<\min\{1,n-\rho\})$ et pour tout z vérifiant $\arg z=\theta$ et $|z|=r$ suffisamment grand, on a (4.25). En utilisant le même raisonnement que celui du cas 2 dans la preuve du Théorème 4.1.4, (4.24) est vérifiée sur $\arg z=\theta$.

(b). $\delta_1<\delta_2$. En utilisant le même raisonnement que celui du cas 1(a), on peut aussi obtenir (4.24) sur $\arg z=\theta$.

Cas 2. Supposons que $\theta_s=\theta_d$ et $|a_{n,d}|<(1-\alpha)|a_{n,s}|$. Pour tout $\theta\in[0,2\pi)\setminus E_1\cup E_2\cup H_2$, où E_1, E_2 et H_2 sont définis ci-dessus, on a

$$\delta(P_s,\theta)>0 \text{ ou } \delta(P_s,\theta)<0.$$

(a). $\delta(P_s,\theta)>0$. Pour tout ε $\left(0<3\varepsilon<\min\left\{\frac{(1-\alpha)|a_{n,s}|-|a_{n,d}|}{(1+\alpha)|a_{n,s}|+|a_{n,d}|}, n-\rho\right\}\right)$ et pour tout z vérifiant $\arg z=\theta$ et $|z|=r$ suffisamment grand, on a (4.14),

$$\left|h_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(P_s,\theta)r^n\} \ \ (j\in I), \tag{4.48}$$

et

$$\left|h_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_d,\theta)r^n\} \ (j\in J\cup\{d\}) \tag{4.49}$$

Maintenant on prouve que

$$G(z) = \frac{\log^+ \left| f^{(s)}(z) \right|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur un rayon $\arg z = \theta$. Si $G(z)$ n'est pas bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors d'après le lemme 4.2.4, il existe une suite infinie de points $\{z_m = r_m e^{i\theta}\}$ $(m = 1, 2, ...)$, où $r_m \to +\infty$ telle que $G(z_m) \to \infty$ et (4.16) soit vérifiée.
En substituant (4.13), (4.14), (4.16), (4.19), (4.48) et (4.49) dans (4.20), pour z_m ci-dessus, on obtient

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_s,\theta)r_n\}$$

$$\leq M_4 r_m^{d_5} \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(P_s,\theta)r_m^n\} \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_d,\theta)r_m^n\}, \tag{4.50}$$

où M_4, d_5 (>0) sont des constantes. De (4.50), on a

$$\exp\{\gamma r_m^n\} \leq M_4 r_m^{d_5}, \tag{4.51}$$

où

$$\gamma = (1-\varepsilon)\delta(P_s,\theta) - (1+\varepsilon)\delta(P_d,\theta) - (1+\varepsilon)\alpha\delta(P_s,\theta). \tag{4.52}$$

Comme $0 < \varepsilon < \dfrac{(1-\alpha)|a_{n,s}| - |a_{n,d}|}{3[(1+\alpha)|a_{n,s}| + |a_{n,d}|]}$, $\theta_s = \theta_d$ et $\cos(\theta_s + n\theta) > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma &= \{(1-\alpha)|a_{n,s}| - |a_{n,d}| - \varepsilon[(1+\alpha)|a_{n,s}| + |a_{n,d}|]\} \cos(\theta_s + n\theta) \\ &> \frac{((1-\alpha)|a_{n,s}| - |a_{n,d}|)}{3} \cos(\theta_s + n\theta) > 0. \end{aligned}$$

Comme $\gamma > 0$, alors (4.51) est une contradiction. Alors $G(z)$ est bornée sur $\arg z = \theta$. Donc (4.24) est vérifiée sur $\arg z = \theta$.

(b) $\delta(P_s,\theta) < 0$. En utilisant le même raisonnement que celui du cas 2 dans la preuve du Théorème 4.1.4, (4.24) est vérifiée sur $\arg z = \theta$.

De l'équation (4.5), on sait que les pôles de f peuvent seulement se produire par les pôles de F et $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$. Comme F et $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles, alors f doit avoir un nombre fini de pôles. Ainsi d'après le Théorème de Factorisation de Hadamard et suivant le même raisonnement que celui du Théorème 4.1.4, on peut écrire $f(z) = \frac{g(z)}{R(z)}$, où $R(z)$ est un polynôme et $g(z)$ est une fonction entière avec $\sigma(g) = \sigma(f) \geq n$. De (4.24), on a (4.33) sur $\arg z = \theta$. Alors d'après le lemme 4.2.5, on a $\sigma(g) \leq \rho + 3\varepsilon < n$. Ce qui contredit le fait que $\sigma(g) \geq n$. Donc $\sigma(f) = +\infty$.

Dans la suite, on montre que si $f(z)$ est une solution polynômiale de (4.5), alors $\deg f \leq s-1$.

Supposons que f est une solution polynômiale de (4.5) avec $\deg f = b \geq s$.

(a) Supposons que $\theta_s \neq \theta_d$.

(i) Si $\theta_s \neq \theta_d + \pi$ ou $\theta_d \neq \theta_s + \pi$, posons $H_4 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s, \theta) > \delta(P_d, \theta) > 0\}$.
Alors $m(H_4) > 0$. On peut choisir une courbe $\Gamma = \{z : \arg z = \theta \in H_4\}$.
D'après (4.5), (4.39) et (4.40), pour tout $z \in \Gamma$ et $|z| = r$ suffisamment grand, on obtient

$$\begin{aligned} B_7 r^{b-s} \exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r^n\} &\leq |h_s(z)e^{P_s(z)} f^{(s)}(z)| \\ &\leq \sum_{j \neq s} |h_j(z)e^{P_j(z)} f^{(j)}(z)| + \left|\frac{H(z)}{Q(z)}\right| \\ &\leq B_8 r^{d_6} \exp\{(1+\varepsilon)\delta_3 r^n\} \frac{\exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}}{\lambda_1 r^p}, \end{aligned} \tag{4.53}$$

où $B_7(>0)$, $B_8(>0)$,d_6 et λ_1 sont des constantes.
De (4.53), on obtient

$$\exp\left\{\frac{(\delta_1 - \delta_3)}{3} r^n\right\} \leq B_9 r^{d_6} \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}, \tag{4.54}$$

où $B_9(>0)$ et d_6 sont des constantes. C'est une contradiction

(ii) Si $\theta_s = \theta_d + \pi$ ou $\theta_d = \theta_s + \pi$, posons $H_5 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s, \theta) > 0 > \delta(P_d, \theta)\}$.
Alors $m(H_5) > 0$. On peut choisir une courbe $G = \{z : \arg z = \theta \in H_5\}$.
De (4.5), (4.39) et $(4.43) - (4.45)$, pour tout $z \in G$ et $|z| = r$ suffisamment grand, on obtient

$$B_{10} r^{b-s} \exp\{(1-\varepsilon)\delta_1 r^n\} \leq B_{11} r^{d_7} \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta_1 r^n\} \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}, \tag{4.55}$$

où $B_{10}(> 0)$, $B_{11}(> 0)$ et d_7 sont des constantes.
D'après (4.55), on obtient

$$\exp\left\{\frac{(1-\alpha)}{3}\delta_1 r^n\right\} \leq B_{12} r^{d_8} \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}, \tag{4.56}$$

où $B_{12}(> 0)$ et d_8 sont des constantes. C'est une contradiction

(b) Supposons que $\theta_s = \theta_d$ et $|a_{n,d}| < (1-\alpha)|a_{n,s}|$. On peut prendre un rayon $\arg z = \theta$ tel que $\delta(P_s, \theta) > 0$. Alors $\delta(P_s, \theta) > \delta(P_d, \theta) > 0$.
De (4.5), (4.39) et (4.40), pour tout z avec $\arg z = \theta$ et $|z| = r$ suffisamment grand, on obtient (4.54). D'où la contradiction.

Alors toute solution polynômiale f de (4.5) satisfait $\deg f \leq s - 1$.

Conclusion

Certains chercheurs ([29], [34], [35]) se sont intéressés à l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur non homogènes dont les coefficients sont des fonctions entières. On sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont souvent d'ordre infini.

Dans cette thèse, on a démontré quelques résultats concernant ces équations en donnant des estimations précises sur l'hyper-ordre des solutions d'ordre infini de ces équations. On s'est aussi intéressé dans notre travail à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur non homogène avec des coefficients méromorphes ayant un nombre fini de pôles.

De nombreux résultats ([2], [3], [5], [10]) ont été réalisés conçernant les équations différentielles linéaires avec des coefficients méromorphes. Mais elles sont peu étudiées car leurs solutions ne sont pas toujours des fonctions méromorphes. Par exemple, la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}} + e^z$ est une solution qui n'est pas une fonction méromorphe de l'équation différentielle.

$$f^{''} + (z^3 + z^2)f^{'} + (z + 1 - \frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^3})f = (z^3 + z^2 + z + 2 - \frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^3})e^z.$$

Ces dernières années, plusieurs résultats ont été obtenus concernant les équations différentielles linéaires mais dans le cas où les coefficients sont des fonctions analytiques dans le disque unité.

Bibliographie

[1] I. Amemiya and M. Ozawa, *Non-existence of finite order solutions of* $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$, Hokkaido Math. J. 10 (1981), 1-17.

[2] M. Andasmas and B. Belaïdi, *On the order and hyper-order of meromorphic solutions to higher order linear differential equations*, Hokkaido Math. J., 42 (2013), 357-383.

[3] M. Andasmas and B. Belaïdi, *On the growth and fixed points meromorphic solutions of second order non-homogeneous linear differential equations*, Int. J. Math. Comput., 18 (2013), no. 1, 28-45.

[4] B. Belaïdi, *Some precise estimates of the hyper-order of solutions of some complex linear differential equations*, J. Inequal. Pure and Appl. Math., 8 (4)(2007), 1-14.

[5] B. Belaïdi and A. El. Farissi, *Differential polynomials generated by some complex linear differential equations with meromorphic coefficients*, Glas. Math. Ser. III 43 (2008), no. 2, 363-373.

[6] B. Belaïdi and S. Abbas, *On the hyper-order of solutions of a class of higher order linear differential equations*, An. st. Univ. ovidius Constanta. 16 (2008), no. 2, 1-16.

[7] Z.-X. Chen and C. C. Yang, *Some further results on the zeros and growth of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J., 22 (1999), no. 2, 273–285.

[8] Z.-X. Chen, *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$, *where the order (Q)=1*, Sci. China Ser., A 45 (2002), no. 3, 290-300.

[9] Z.-X. Chen, *On the hyper-order of solutions of some second order linear differential equations*, Acta. Math. Sinica Engl. Ser., 18 (1) (2002), 79-88.

[10] Z.-X. Chen and K. H. Shon, *On the growth and a fixed points of solutions of second order linear differential equations with meromorphic coefficients,* Acta. Mathematica Sinica Engl. Ser., 21 (4)(2005), 753-764.

[11] Z.-X. Chen and C. C. Yang, *Quantitative estimations on the zeros and growth of entire solutions of linear diğerential equations*, Complex Var. Elliptic Equ. 42 (2000) 119-133.

[12] Z.-X. Chen and K. H. Shon, *On the growth of solutions of a class oh higher order differential equations*, Acta Mathematica Scientia, 24B (1)(2004), 52-60.

[13] Z.-X. Chen and K. H. Shon, *The growth of solutions of higher order differential equations*, Southeast Asian Bull. Math., 27 (2004), 995-1004.

[14] N. K. Cheriet and K. Hamani, *On the hyper-order of solutions of nonhomogeneous linear differential equations*, Math. Commun. 22 (2017), 133-147.

[15] N. K. Cheriet and K. Hamani, *On the Hyper-order of Solutions of Nonhomogeneous Linear Differential Equations with Entire Coefficients*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 23 (2016), no. 3, 68 - 78.

[16] A. El Farissi and B. Belaïdi, *On the growth of solutions of some higher order linear differential equations.* Appl. Math. 57(2012), no.4, 377-390.

[17] A. El Farissi and B. Belaïdi, *Growth of solutions of higher order linear differential equations.* Math. J. Okayama Univ. 56(2014), 129-143.

[18] M. Frei, *Über die subnormalen Lösungen der differentialgleichung* $w'' + e^{-z}w' + (Konst.)w = 0$, Comment Math. Helv., 36 (1962), 1-8.

[19] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, 88–104.

[20] G. G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415–429.

[21] G. G. Gundersen, *On the question of whether* $f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0$ *can admit a solution* $f \not\equiv 0$ *of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 102 A(1986), 9-17.

[22] K. Hamani and B. Belaïdi, *On the hyper-order of solutions of a class of higher order linear differential equations*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 20 (2013), 27-39.

[23] W. K. Hayman, *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method*, Canad. Math. Bull., 17 (1974), no. 3, 317–358.

[24] W. K. Hayman, *Meromorphic functions,* Clarendon Press, Oxford, 1964.

[25] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Willey, New-York, 1976.

[26] G. Jank and L. Volkmann, *Einführung in die theorieder ganzen und meromrphen funktionen mit anwenendungen auf differentialgleichungen*, Birkhäuser, Basel, 1985.

[27] K.H. Kwon, *Nonexistence of finite order solutions of certain second linear differential equations*, Kodai. Math. J., 19 (1996), 378-387.

[28] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, W. de Gruyter, Berlin, 1993.

[29] J. K. Langley, *On complex oscillation and a problem of Ozawa*, Kodai Math. J. 9 (1986), 430-439.

[30] Y. Z. Li and J. Wang, *Oscillation of solutions of linear differential equations*, Acta Math. Sin. Engl. Ser. 24 (1)(2008), 167-178.

[31] M. Ozawa, *On a solution of* $w'' + e^{-z}w' + (az+b)w = 0$, Kodai Math. J. 3 (1980), 295-309.

[32] J. Tu and C. F. Yi, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 487–497.

[33] J. Tu, H.-Y. Xu, H.-M Liu and Y. Liu, *Complex oscillation of higher order Linear differential equations with coefficients being lacunary series of finite iterated order*, Abstr. Appl. Anal., (2013), Art. ID 634739, 1-8.

[34] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of second order linear differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 342 (2008), 39–51.

[35] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations*, Abstr. Appl. Anal., (2009), Art. ID 363927, 1-11.

[36] H.-Y. Xu and T.-B. Cao, *Oscillation of solutions of some higher order linear differential equations*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. Vol. 2009, 63 (2009), 1-18.

[37] C.-C. Yang and H.-X. Yi, *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Mathematics and Its Applications, 557, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[38] G. Zhang, *The hyper-order of solutions of second order linear differential equations*, Abstr. Appl. Anal., 2013 (2013), Art. ID 626898, 1-7.