

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE  
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de Master en Mathématiques  
Spécialité : Modélisation contrôle et Optimisation

Thème  
Méthode des Résidues Ponderer

Présenté par  
BENGUETTAT Nabila

Soutenu le 04/06/2014.

Devant le jury

Examineurs

U. MOSTAGANEM.

Encadreur

BELHAMITI Omar, MCA

U. MOSTAGANEM.

# Table des matières

<b>Remerciments</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Présentation et modélisation d'un modèle mathématique</b>	<b>2</b>
1.1 Qu'est ce qu'une modélisation mathématique ? . . . . .	2
1.2 Présentation de l'épidémie de Babésiose bovine . . . . .	2
1.3 La modélisation de l'épidémie de Babésiose bovine . . . . .	3
1.3.1 <b>Le diagramme qui schématise le modèle</b> . . . . .	4
<b>2 L'approche mathématique</b>	<b>6</b>
2.1 Définition d'un opérateur différentiel . . . . .	6
2.2 Définition de $L^2$ . . . . .	6
2.3 Polynômes de Legendre . . . . .	6
2.3.1 Propriétés des polynômes de Legendre . . . . .	8
2.3.2 La dérivée du polynôme de Legendre : . . . . .	12
2.4 Méthode résiduelle pondérée : . . . . .	13
2.5 Le choix qui correspond à notre modèle mathématique . . . . .	15
2.5.1 La condition initiale $u_0$ . . . . .	18
2.5.2 La technique de découplage . . . . .	18

<b>3 Le test de la méthode</b>	<b>20</b>
3.0.3 simulation de la transmission de l'épidémie de Babisios . . . . .	23
<b>Bibliographie</b>	<b>33</b>

# Remerciements

Avant toutes choses, je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a aidé en m'offrant toute la force qui m'a fallu pour réaliser ce modeste travail.

La première personne que je tien à remercier est mon encadreur Mr BELHAMITI Professeur au Département de Mathématiques Informatique de l'Université de Mostaganem, pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Més remerciements s'étendent également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je tien aussi à saisir cette occasion et adresser més profonds remerciements et reconnaissances à tous més enseignants durant les années des études.

Merci à tous et à toutes!

Je n'oublie bien évidemment pas més camarades de formation et je les remercie chaleureusement pour tous ces agréables moments passés ensemble.

Je tien enfin à remercier tout particulièrement ma famille qui m'a accordé la liberté d'action et la patience nécessaires pour réaliser ce travail ainsi que toutes les personnes qui m'ont soutenues.

# Introduction

Ces dernières années, de nombreux modèles mathématiques en épidémiologie ont été développés dans le but de comprendre le comportement biologique des facteurs épidémiologiques (tique, veruse, ...) voir même pour éviter les réalisations expérimentales souvent longues et coûteuses.

Dans ce travail on s'intéresse à la transmission de la maladie de "Babiosose bovine" qu'on peut définir comme une maladie qui s'installe rapidement au sein des cheptels bovins suite à des piqûres de tiques infectées que subissent les individus bovins.

Ce pendant, pour présenter ce travail on présente le plan suivant :

- Le premier chapitre se compose en premier lieu de la définition d'une modélisation mathématique d'une manière générale, ensuite de la description et la modélisation de la maladie de "Babiosose".
  - Dans le deuxième chapitre, on présente l'approche mathématique pour la résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires.
  - Dans le troisième chapitre, on présente deux exemples pour illustrer l'efficacité et le bon fonctionnement de la méthode mathématique développée au paravent. Ensuite, on l'applique au modèle de Babiosose.
-

# Présentation et modélisation d'un modèle mathématique

---

L'objectif de ce chapitre est d'expliquer les maladies transmissibles et infectieuses. On s'intéresse en particulier à la modélisation des maladies vectorielles pour lesquelles l'agent pathogène (virus, parasite,...) est transmis d'un individu infecté (homme, animal) à un autre par des tiques (protozoaire).

## 1.1 Qu'est ce qu'une modélisation mathématique ?

La modélisation mathématique en biologie est un procédé complémentaire aux approches expérimentales traditionnelles. Ces dernières années, de nombreux modèles mathématiques épidémiologiques ont été développés afin d'aider à la compréhension de processus biologiques impliquant des maladies infectieuses. Les simulations issues de ces modèles peuvent remplacer l'expérimentales, voire éviter la réalisation d'expériences biologiques *in vivo* (*vivo* c-à-d le corps humain ou animal) souvent longues et coûteuses.

## 1.2 Présentation de l'épidémie de Babésiose bovine

Ces dernières années, les conditions climatiques hivernales favorables ont permis un développement important des tiques, agent de transmission de la piroplasmose. Cela entraîne des modifications dans l'épidémiologie de cette maladie.

La babésiose ou piroplasmose bovine est une grave maladie parasitaire des bovins due à un protozoaire, petit parasite microscopique qui vit dans le sang des animaux atteints. Sa

multiplication dans les globules rouges provoque leur éclatement, les parasites ainsi libérés vont parasiter d'autres globules et les faire éclater à nouveau. Tous les troubles observés découlent de ces phénomènes. Cette maladie est appelée maladie spécifique c'est à dire qu'un piroplasma de bovin ne peut être transmis que par des Tiques . Pour reconnaître cette maladie deux situations épidémiologiques peuvent s'observer : La température dépasse souvent  $40^{\circ}\text{C}$ . Chez les laitières, la diminution brutale de la production laitière et lorsque la maladie évolue quelques jours, on note une baisse ou un arrêt de l'appétit, parfois de la prostration et de la constipation, un changement de couleur des muqueuses qui blanchissent d'abord pour virer au jaune ensuite.

Pour combattre cette maladie un traitement doit être précoce pour être efficace et éviter que la maladie ne laisse des séquelles ; L'IMIDOCARBE (arbésia) est un médicament utilisé pour détruire les piroplasmes. Si la maladie a été détectée tardivement un traitement complémentaire devra être mis en œuvre en fonction de l'état de l'animal pour compenser l'anémie due à la destruction des globules rouge et soutenir les fonctions hépatique et rénales [3] .

### 1.3 La modélisation de l'épidémie de Babésiose bovine

La modélisation de la maladie de babésiose nous permet de décrire sa transmission, on dispose donc de deux populations, hôte (Bovines) de taille  $N_B$  et de vecteur Tique de taille  $N_T$ .

La population des bovins est divisée en trois classes complémentaires :

1. Bovins qui peuvent être infectés (sensibles  $S_B(t)$  ),
2. Bovins infecté par l'épidémie de Babésiose (infectés  $I_B(t)$ ),
3. Bovins qui ont été traités (Résistant  $R_B(t)$ ).

La population des tiques est divisée en deux classes :

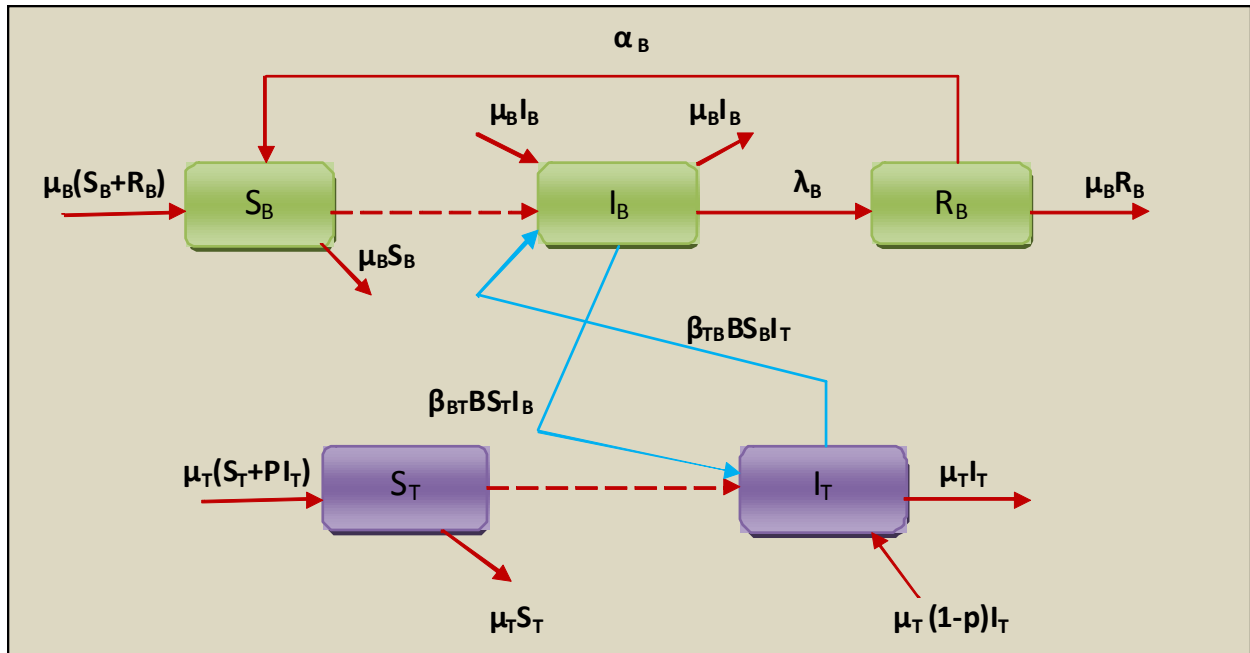
1. tiques qui peuvent être infectés par la maladie (sensibles  $S_T(t)$  ),
2. tiques porteuses de la maladie (infectés  $I_T(t)$  ).

Le nombre total des bovins  $N_B$  est constant, ce qui signifie que  $N_B = S_B + I_B + R_B$  de même pour des tiques qui est aussi supposé constant tel que  $N_T = S_T + I_T$  .

Les bovins ou les tiques vont passer successivement d'un état sain à un état infecté puis résistant (pour les bovins) .

La transmission verticale est à 100% dans la population des bovins. Dans la population des tiques,  $p$  est la probabilité qu'une tique susceptible soit née d'une tique déjà infectée.[7]

### 1.3.1 Le diagramme qui schématise le modèle



Pour obtenir l'interprétation mathématique de ce diagramme est donnée par,

$$S_B(t - \Delta t) - S_B(t) = \left[ -\beta_{TB} B S_B(t) \frac{I_T(t)}{N_T} + \mu_B(S_B + R_B(t)) + \alpha_B R_B(t) - \mu_B S_B(t) \right] \Delta t$$

$$\frac{S_B(t - \Delta t) - S_B(t)}{\Delta t} = -\beta_{TB} B S_B(t) \frac{I_T(t)}{N_T} + \mu_B(S_B + R_B(t)) + \alpha_B R_B(t) - \mu_B S_B(t)$$

Lorsqu'on passe à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S_B(t - \Delta t) - S_B(t)}{\Delta t} = \frac{dS_B(t)}{dt} = -\beta_{TB} B S_B(t) \frac{I_T(t)}{N_T} + \mu_B(S_B + R_B(t)) + \alpha_B R_B(t) - \mu_B S_B(t)$$

Même procédé pour  $\frac{dI_B(t)}{dt}$ ,  $\frac{dR_B(t)}{dt}$ ,  $\frac{dS_T(t)}{dt}$ ,  $\frac{dI_T(t)}{dt}$ .

Donc on peut interpréter le diagramme par le système d'équations différentielles non linéaires

définie sur  $[0, T]$  suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_B(t)}{dt} = -\beta_{TB}BS_B(t)\frac{I_T(t)}{N_T} + \mu_B(S_B + R_B(t)) + \alpha_BR_B(t) - \mu_BS_B(t), \\ \frac{dI_B(t)}{dt} = \mu_B I_B(t) + \beta_{TB}BS_B(t)\frac{I_T(t)}{N_T} - \mu_B I_B(t) - \lambda_B I_B(t), \\ \frac{dR_B(t)}{dt} = \lambda_B I_B(t) - [\mu_B + \alpha_B] R_B(t), \\ \frac{dS_T(t)}{dt} = \mu_T(S_T(t) + PI_T(t)) - \beta_{BT}BS_T(t)\frac{I_B(t)}{N_B} - \mu_T S_T(t), \\ \frac{dI_T(t)}{dt} = \beta_{BT}BS_T(t)\frac{I_B(t)}{N_B} + (1 - P)\mu_T I_T(t) - \mu_T I_T(t), \end{array} \right.$$

où,

- le paramètre  $B$  est le taux de tique qui infeste les bovin,
- le paramètre  $\beta_{TB}$  est le taux de passage de la maladie d'une tique infectée a un bovin sensible lorsqu'une tique infeste un bovin,
- Le paramètre  $\beta_{BT}$  est le taux de passage de la maladie d'un bovin infectée a une tique sensible lorsqu'elle infeste un bovin,
- le paramètre  $\mu_B$  est le taux de naissance des bovins qui est égale au taux de mortalité,
- le paramètre  $\mu_T$  est le taux de naissance des tiques qui est égale au taux de mortalité,
- la fraction  $\lambda_B$  des bovins infecté qui ont été traité contre la maladie sont Résistant,
- la fraction  $\alpha_B$  des bovins traités qui peuvent retourner à l'état sensible.

Pour des raisons technique, on doit adimensionner le système précédant, en faisant les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_B &= \frac{S_B}{N_B}; \mathbf{I}_B = \frac{I_B}{N_B}; \mathbf{R}_B = \frac{R_B}{N_B} \\ \mathbf{S}_T &= \frac{S_T}{N_T}; \mathbf{I}_T = \frac{I_T}{N_T} \end{aligned}$$

Le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{S}_B(t)}{dt} = -\beta_{TB}B\mathbf{S}_B(t)\mathbf{I}_T(t) + \mu_B(\mathbf{S}_B + \mathbf{R}_B(t)) + \alpha_B\mathbf{R}_B(t) - \mu_B\mathbf{S}_B(t), \\ \frac{d\mathbf{I}_B(t)}{dt} = \mu_B \mathbf{I}_B(t) + \beta_{TB}B\mathbf{S}_B(t)\mathbf{I}_T(t) - \mu_B \mathbf{I}_B(t) - \lambda_B \mathbf{I}_B(t), \\ \frac{d\mathbf{R}_B(t)}{dt} = \lambda_B \mathbf{I}_B(t) - [\mu_B + \alpha_B] \mathbf{R}_B(t), \\ \frac{d\mathbf{S}_T(t)}{dt} = \mu_T(\mathbf{S}_T(t) + P\mathbf{I}_T(t)) - \beta_{BT}B\mathbf{S}_T(t)\mathbf{I}_B(t) - \mu_T\mathbf{S}_T(t), \\ \frac{d\mathbf{I}_T(t)}{dt} = \beta_{BT}B\mathbf{S}_T(t)\mathbf{I}_B(t) + (1 - P)\mu_T\mathbf{I}_T(t) - \mu_T\mathbf{I}_T(t). \end{array} \right.$$

# L'approche mathématique

---

## 2.1 Définition d'un opérateur différentiel

Un opérateur différentiel linéaire d'ordre  $n$  est défini par

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^n a_i(x) D^i$$

Où les  $a_i(x)$  sont des fonctions d'une variable, appelées coefficients de l'opérateur  $\mathcal{L}$

## 2.2 Définition de $L^2$

En mathématique, l'espace  $L^2$  est l'espace des fonctions carré intégrable.

Si  $\Omega$  est un ouvert, l'espace des fonctions (réelles ou complexes) qui sont de carré intégrable au sens de l'intégrale de Lebesgue est noté  $L^2(\Omega)$ , c'est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \hat{g} du.$$

## 2.3 Polynômes de Legendre

Prenons  $I = (-1, 1)$  et  $\omega = 1$ . La famille  $\{x^n; 0 \leq n\}$  est totale dans l'espace de Hilbert  $L^2(I; dx)$  et le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

La formule suivante, dite formule de Rodrigues, donne l'expression de  $p_n$  pour tout entier  $n \geq 0$ .

**Théoreme :**

Pour tout entier  $n$ ,  $p_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  et on a

$$p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n),$$

Notons que pour tout  $n$ ,  $p_n(1) = 2^n(n!)^2/(2n!)$ . Les polynômes de Legendre, que nous désignerons dans la suite par une lettre majuscule  $P_n$ , sont proportionnels aux polynômes  $p_n$  et normalisés de façon que  $P_n(1)$  soit égal à 1. Ils sont donc donnés, grâce à la formule de Rodrigues, par

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

**Théorème :**

Le carré d'un polynôme de Legendre est déterminé pour tout entier  $n \geq 0$  par

$$\|P_n\|^2 = 2/(2n + 1)$$

.

**Théorème**

La suite des polynômes de Legendre ( $P_n$ ) est une base orthogonale de l'espace  $L^2((-1, 1), dx)$

.

Toute fonction  $f$  de  $L^2((-1, 1), dx)$  se développe de façon unique sous la forme

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) P_n \quad \text{avec} \quad c_n(f) = \frac{2n+1}{2} \langle f, P_n \rangle$$

où la convergence de la série a lieu en moyenne quadratique

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=0}^N c_n(f) P_n \right\| = 0$$

On a de plus l'égalité de Parseval

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n(f)|^2}{2n+1}$$

On notera que le polynôme de Legendre de  $f$ , de degré  $n$ , donné par

$$L_n f(x) = \sum_{k=0}^n c_k(f) P_k(x)$$

réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de  $f$  par des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On notera aussi que si  $f$  est paire (resp. impaire), son développement ne fera intervenir que les polynômes de Legendre d'indice pair (resp. impair).

### 2.3.1 Propriétés des polynômes de Legendre

#### 1. Parité

Pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x$ , on a

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

en particulier

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

Ainsi pour  $n$  pair,  $P_n(x)$  ne contient que des puissances paires de  $x$  et pour  $n$  impair,  $P_n(x)$  ne contient que des puissances impaires de  $x$ .

#### 2. Représentation intégrale et majoration de $P_n$

Pour tout entier  $n$ , on a

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \sin \theta)^n d\theta,$$

en particulier

$$|P_n(x)| < 1, \quad \forall -1 < x < 1.$$

Ce résultat, souvent employé dans les applications, est une conséquence de la formule de Rodrigues que l'on écrit, grâce à la formule de Cauchy, sous la forme

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz$$

où  $\gamma$  désigne le cercle de centre  $x$  et de rayon  $\sqrt{1-x^2}$ . La représentation intégrale s'obtient alors en faisant, dans l'intégrale précédente, le changement de variable  $z = x + i\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}$ . De plus, puisque

$$|x + i\sqrt{1-x^2}\sin\theta|^2 = [x^2 + (1-x^2)\sin^2\theta]^2 \leq 1$$

on en déduit la majoration  $|P_n(x)| \leq 1$ , pour tout  $-1 \leq x \leq 1$ .

### 3. Relation de récurrence.

$$\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x) = xP_n(x) \dots (1)$$

Pour démontrer cette relation on remarque que  $xP_n(x)$  est un polynôme de degré  $n+1$  et admet donc un développement sous la forme

$$xP_n(x) = \sum_{j \leq n+1} a_{nj}P_j(x) \quad \text{avec} \quad a_{nj}\|P_j\|^2 = \langle xP_n, P_j \rangle$$

Comme

$$a_{nj}\|P_j\|^2 = a_{jn}\|P_n\|^2,$$

il en résulte que  $a_{nj} = 0$  pour  $j < n-1$  (et pour  $j > n+1$ ).

En posant

$$a_{nn+1} = \alpha_n, a_{nn} = \beta_n \text{ et } a_{nn-1} = \gamma_n,$$

on en déduit que

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

En examinant la parité des deux membres, on voit que  $\beta_n = 0$  et en faisant  $x = 1$ , il vient  $\alpha_n + \gamma_n = 1$ .

Enfin, en comparant les termes de plus haut degré dans chacun des deux membres, on trouve

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \alpha_n \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}$$

d'où il résulte que

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

et par suite  $\gamma_n = \frac{n}{2n+1}$

ce qui termine la preuve.

La relation (I) peut être écrite sous une autre forme comme suit ;

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x).$$

#### 4. Fonction génératrice.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1$$

Voici une manière de démontrer cette relation. On désigne le premier membre par  $u(x, t)$  et le second membre par  $v(x, t)$ . On a

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(-2x+2t) = (x-t)(1-2xt+t^2)^{-3/2},$$

où  $u_t$  désigne la dérivée partielle de  $u$  par rapport à  $t$ . Il en résulte que

$$(1-2xt+t^2)u_t(x, t) = (x-t)u(x, t)$$

D'autre part, puisque  $|P_n(x)| \leq 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [-1, 1]$ , on peut dériver par rapport à  $t$  terme à terme la série du second membre.

Il vient

$$v_t(x, t) = \sum_n nP_n(x)t^{n-1},$$

on en déduit que

$$(1-2xt+t^2)v_t(x, t) = \sum_n nP_n(x)t^{n-1} - \sum_n 2xnp_n(x)t^n + \sum_n nP_n t^{n+1}$$

Le coefficient de  $t^n$  dans le second membre de l'égalité ci-dessus est

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x),$$

il est justement égal à

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x),$$

d'après la formule de récurrence.

Par suite

$$(x - t)v(x, t) = (1 - 2xt + t^2)v_t(x, t).$$

Ainsi, les fonctions  $u$  et  $v$  vérifient, par rapport à  $t$ , la même équation différentielle (de degré 1), comme elles coïncident en  $t = 0$ , elles sont donc égales.

### 5. Équation différentielle.

Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0$$

On peut établir cette équation de la manière suivante ; on part de l'égalité

$$\frac{d}{dx}\{(1 - x^2)P_n'(x)\} = (1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x)$$

le deuxième membre est un polynôme de degré  $n$ , on peut donc le décomposer suivant la base  $\{P_i; i \leq n\}$

$$\frac{d}{dx}\{(1 - x^2)P_n'(x)\} = \sum_{j=0}^n \alpha_j P_j(x) \quad (\star)$$

la propriété d'orthogonalité implique

$$\alpha_i \|P_i\|^2 = \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{d}{dx}\{(1 - x^2)P_n'(x)\} dx$$

deux intégrations par parties successives donnent

$$\alpha_i \|P_i\|^2 = \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx}\{(1 - x^2)P_i'(x)\} dx$$

Or la dérivée de  $(1 - x^2)P_i'(x)$  est un polynôme de degré  $i$ , on en déduit que

$$\alpha_i = 0, \quad \forall i < n$$

et la relation  $(\star)$  peut maintenant s'écrire

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) = \alpha_n P_n(x)$$

En comparant les coefficients des termes de plus haut degré dans chacun des membres, on trouve immédiatement

$$\alpha_n = -n(n + 1).$$

D'où résulte l'équation différentielle cherchée.

### 6. Propriété de minimisation.

Les polynômes de Legendre sont caractérisés par la propriété de minimum suivante : Parmi tous les polynômes unitaires de degré  $n$ ,  $p_n$  est l'unique qui réalise le minimum de la distance quadratique à 0, c'est-à-dire que pour tout polynôme unitaire  $q$  de degré  $n$ ,

$$\int_{-1}^1 |p_n(x)|^2 dx \leq \int_{-1}^1 |q(x)|^2 dx$$

et l'égalité a lieu si et seulement si  $q = p_n$ .

Cela résulte du fait que tout polynôme unitaire  $q$  de degré  $n$  s'écrit sous la forme

$$q(x) = p_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k p_k,$$

donc

$$\int_{-1}^1 |q(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 |p_n(x)|^2 dx + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \int_{-1}^1 |p_k(x)|^2 dx$$

Il est alors clair que le second membre atteint son minimum lorsque

$$a_k = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq n - 1.$$

### 2.3.2 La dérivée du polynôme de Legendre :

**Théorème :**

Soit  $m \in \mathbb{N}$  et soit  $P_m$  un polynôme de Legendre sur  $[0, 1]$  la dérivée de  $P_m$  est définie par  $\forall x \in [0, 1]$

$$P'_m(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k+m)\text{impair}}}^{m-1} (2k+1)P_k(x)$$

## 2.4 Méthode résiduelle pondérée :

La méthode résiduelle pondérée est une technique utilisée pour trouver la solution approchée pour les équations différentiels. on considère le problème suivant

$$\begin{cases} u'(x) + a(x)u(x) = f(x) & x \in ]0, 1] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

ou  $f$  et  $a$  sont des fonctions continues sur  $[0, 1]$ .

On va développer notre méthode sur  $[0, 1]$  mais on peut toujours résoudre ce problème sur un intervalle quelconque  $[a, b]$ , on peut passer à  $[0, 1]$  avec la transformation suivante :

$$t = \frac{x - a}{b - a}.$$

On suppose que  $u \in L^2([0, 1])$ , donc, il existe une base dans  $L^2([0, 1])$  tels que

$$u(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i b_i(x),$$

avec  $b_i(x)$  forme une base dans  $L^2$  et  $u_i$  est le paramètre d'approximation.

Pour des raisons technique, on tranque la serie infinie par

$$u(x) \simeq \tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^N u_i b_i(x)$$

Si on remplace  $\tilde{u}$  dans l'équation (2.4.1), on obtient

$$\begin{cases} \tilde{u}'(x) + a(x)\tilde{u}(x) \neq f(x) & \forall x \in ]0, 1] \\ \tilde{u}(0) = u_0 \end{cases}$$

alors, on pose

$$r(x) = \tilde{u}'(x) + a(x)\tilde{u}(x) - f(x)$$

Le principe des méthodes des résidus pondérés est de trouver  $u_i$  qui minimise la fonction  $r(x)$  au sens des distributions en le pondérant par une famille de fonctions régulières et à support compacte  $\Psi_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,

$$\int_0^1 r(x)\Psi_i(x)dx = 0.$$

Le choix  $\Psi_i(x)$  donne le jour à plusieurs méthodes, parmi les plus connus :

### Méthode de collocation par point

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

suite à ce choix on aura :

$$\int_0^1 r(x_i)dx = 0 \text{ implique } r(x_i) \int_0^1 dx \implies r(x_i) = 0$$

Ce choix de  $\Psi_i(x)$  nous évite de calculer les intégrales par suite la méthode devient plus simple à implémenter. L'inconvénient de cette méthode c'est qu'elle ne donne pas une grande précision.

### Méthode de collocation par sous domaine

Pour cette méthode on considère la fonction poids suivante :

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\cup_i \Omega_i = [0, 1]$  et  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ .

### Méthode des moments

on choisit

$$\Psi_i(x) = x^i.$$

### Méthode de Galerkin

Dans cette méthode Galerkin propose de poser

$$\Psi_i(x) = b_i(x).$$

## 2.5 Le choix qui correspond à notre modèle mathématique

On applique la méthode de collocation par point dans le but de minimiser le résidue  $r(x)$ .

On doit d'abord décrire l'intervalle  $]0, 1]$  en  $N$  points tq  $x_0 = 0, x_2 = h, \dots, x_{N-1} = 1$  et

$h = \frac{1}{N-1}$  on trouve :

$$r(x_i) = \tilde{u}'(x_i) + a(x_i)\tilde{u}(x_i) - f(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1$$

**Preuve :**

pour  $i = 0$

$$\int_0^1 (\tilde{u}'(x_0) + a(x_0)\tilde{u}(x_0) - f(x_0))\Psi_j(x_0)dx = 0 \quad \forall j = 0, \dots, N-1$$

$$\int_0^1 (\tilde{u}'(x_0) + a(x_0)\tilde{u}(x_0) - f(x_0))\Psi_0(x_0)dx = 0$$

$$\text{car } \Psi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc ;

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x_0) + a(x_0)\tilde{u}(x_0) - f(x_0)dx = 0$$

$$\tilde{u}'(x_0) + a(x_0)\tilde{u}(x_0) - f(x_0) = 0 \quad \text{presque partout}$$

pour  $i = 1$

$$\int_0^1 (\tilde{u}'(x_1) + a(x_1)\tilde{u}(x_1) - f(x_1))\Psi_j(x_1)dx = 0 \quad \forall j = 0, \dots, N-1$$

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x_1) + a(x_1)\tilde{u}(x_1) - f(x_1)dx = 0$$

$$\tilde{u}'(x_1) + a(x_1)\tilde{u}(x_1) - f(x_1) = 0 \quad \text{presque partout}$$

.

.

pour  $i = N - 1$

$$\tilde{u}'(x_{N-1}) + a(x_{N-1})\tilde{u}(x_{N-1}) - f(x_{N-1}) = 0 \quad \text{presque partout}$$

D'ou notre résultat

De

$$r(x_i) = \tilde{u}'(x_i) + a(x_i)\tilde{u}(x_i) - f(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, N - 1,$$

on écrit :

$$\tilde{u}'(x_i) + a(x_i)\tilde{u}(x_i) = f(x_i) \dots (2)$$

$$\forall i = 0, \dots, N - 1$$

résoudre l'équation (2) revient à trouver  $\check{u}(x_i)$

d'après

$$\check{u}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i b_i(x) \quad \text{implique} \quad \check{u}(x_i) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i b_i(x_i)$$

La base  $b_i(x)$  est pris comme polynome de Legendre tel que :

$$b_0(t) = 1,$$

$$b_1(t) = t,$$

$$b_i(t) = \frac{2i-1}{i} t b_{i-1}(t) - \frac{i-1}{i} b_{i-2}(t) \quad \text{pour tout } i = 2, \dots, N - 1$$

Comme le polynome de legendre est définie sur  $[-1, 1]$  on procède au changement de variable suivant

$$x = \frac{t+1}{2} \quad \text{implique} \quad t = 2x - 1 \quad \text{donc, } b_i(t) = b_i(2x - 1) = \tilde{b}_i(x) \quad \text{pour tout } i = 0, \dots, N - 1$$

pour developper notre méthode sur  $[0, 1]$  .

$$\check{u}(x_j) = \sum_{i=1}^N u_i B_j = U^T B_j \quad \text{tel que } B_j = b_i(x_j) \quad \text{pour tout } i, j = 0, N - 1$$

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-1} \end{pmatrix}$$

et

$$B_j = \begin{pmatrix} b_0(x_0) & b_0(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & b_0(x_{N-1}) \\ b_1(x_0) & b_1(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & b_1(x_{N-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{N-1}(x_0) & b_{N-1}(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & b_{N-1}(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

On passe a la dérivée de  $\check{u}(x_i)$  on obtient :

$$\begin{aligned} \check{u}'(x_i) &= \sum_{i=1}^N u_i \check{b}'_i(x_j) \quad \text{tq} \quad \check{b}'_i(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k+i) \text{ impaire}}}^{i-1} (2k+1) \check{b}_k(x) \\ &= U^T B'_j \text{ tel que } B'_j = b'_i(x_j) \\ &= U^T \begin{pmatrix} b'_0(x_0) & b'_0(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & b'_0(x_{N-1}) \\ b'_1(x_0) & b'_1(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & b'_1(x_{N-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b'_{N-1}(x_0) & b'_{N-1}(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & b'_{N-1}(x_{N-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tq

$$B'_i(x_j) = \begin{pmatrix} b'_0(x_0) & b'_0(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & b'_0(x_{N-1}) \\ b'_1(x_0) & b'_1(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & b'_1(x_{N-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b'_{N-1}(x_0) & b'_{N-1}(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & b'_{N-1}(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Revenons a notre équation initiale

$$U^T B'_j + a(x_j) U^T B_j = F(x_j)$$

$$U^T [B'_j + a(x_j) B_j] = F(x_j)$$

$$F(x_j) = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

on obtien une matrice de dimension  $N$  que l'on nomera  $A$

$$U^T A = F^T$$

donc,

$$AU = F$$

### 2.5.1 La condition initiale $u_0$

Pour imposer la condition au limite, on procède comme suit

$$u(0) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i b_i(0) = u_0,$$

et

$$u_0 = U^T B_0.$$

Dans la première equation du système, on rempace  $U^T B_0$  par  $u_0$ , on obtient

$$U^T B'_0 + a(x_0)U^T B_0 = F_0.$$

D'où, cette première équation du système devient

$$U^T B'_0 = F_0 - a(x_0)u_0.$$

**Remarque 2.5.1** *Si la condition est en  $x = 1$ , on fait le même procédé pour la dernière équation du système.*

### 2.5.2 La technique de découplage

Dans cette partie, on developpe la technique de découplage et de quasi-linearization (TDQL), pour résoudre un système d'équations différentielles non linéaires couplées. D'abord, on se donne des profils initiales des solutions  $\mathbf{U}^{(0)}$  et  $\mathbf{V}^{(0)}$ . Alors

$$\begin{cases} (\mathbf{U}^{(k+1)})' + a(x, \mathbf{U}^{(k)}, \mathbf{V}^{(k)}) \mathbf{U}^{(k+1)} = f(x, \mathbf{U}^{(k)}, \mathbf{V}^{(k)}) \\ (\mathbf{V}^{(k+1)})' + b(x, \mathbf{U}^{(k)}, \mathbf{V}^{(k)}) \mathbf{V}^{(k+1)} = g(x, \mathbf{U}^{(k)}, \mathbf{V}^{(k)}) \end{cases}$$

les solutions en  $(k + 1)$  et  $(k)$  sont des approximations à l'itération en court, et l'itération précédent respectivement.

Par la suite, dans chaque itération, on utilise notre méthode pour résoudre chaque équation du système précédent indépendamment.

L'erreur de TDQL est donnée par

$$E_{TDQL} = \max \left( \|U^{(k+1)} - U^{(k)}\|_2, \|V^{(k+1)} - V^{(k)}\|_2 \right).$$

La solution est obtenue quand  $E_{DQLT}$  est minimale.

# Le test de la méthode

---

Le but dans cette partie est de présenter un exemple qui se compose d'un système couplé à 2 équations sachant qu'on connaît sa solution exacte ,puis le simuler numériquement en utilisant la méthode précédement développé pour pouvoir comparer la solution trouvée avec la solution exacte

Et voici l'exemple académique proposé :

$$\begin{cases} u'(x) - v(x)u(x) = 1 + 2e^{2x} + e^{2x}(x + e^{2x}) \\ v'(x) - u(x)v(x) = 2e^{2x} + (x + e^{2x})e^{2x} \\ u(0) = 1 ; v(0) = 1 \quad \text{sur } [0, 1] \end{cases}$$

avec la solution exacte

$$\begin{aligned} u_{ex}(x) &= x - e^{2x} \\ v_{ex}(x) &= e^{2x} \end{aligned}$$

On présente le résultat de l'erreur dans les deux tableaux suivant

où,

Erreur ponctuelle ( $Ep$ ) (la valeur absolue de la différence entre la solution exacte et la solution approchée) ,

Erreur absolue ( $Ea$ ) (la norme de la différence entre la solution exacte et la solution approchée),

- Suite à la discrétisation du domaine avec  $n = 10$  nous avons obtenu le tableau ci dessous qui correspond au changement de valeur de l'erreur ponctuelle à chaque point de discrétisation pour  $v$

$x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	
$Epu$	$7.0878e-7$	$6.1792e-7$	$5.0013e-7$	$3.7687e-7$	$2.4105e-7$	
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	$7.7142e-8$	$1.418e-8$	$4.488e-8$	$8.5908e-8$	$1.3050e-6$	$1.5172e-6$

On remarque facilement que si  $0 \leq x \leq 0.5$  l'erreur est en diminution permanente tant dis que si  $0.6 \leq x \leq 1$  l'erreur est en progression.

- Suite à de différentes valeurs données à  $n$  nous avons obtenu le tableau si dessous qui correspond au changement de la valeur de l'erreur absolue par rapport au changement du nombre de discrétisation pour  $u$

$n$	5	7	9	11	13	15
$Eau$	0.0653	$8.4442e-4$	$8.0243e-6$	$2.2672e-6$	$1.6179e-6$	$2.0940e-6$

On remarque que si  $n$  prend les valeurs de 5 jusqu'à 13 l'erreur est en diminution

- le tableau si dessous correspond au changement de valeur de l'erreur ponctuelle à chaque point de discrétisation pour  $v$

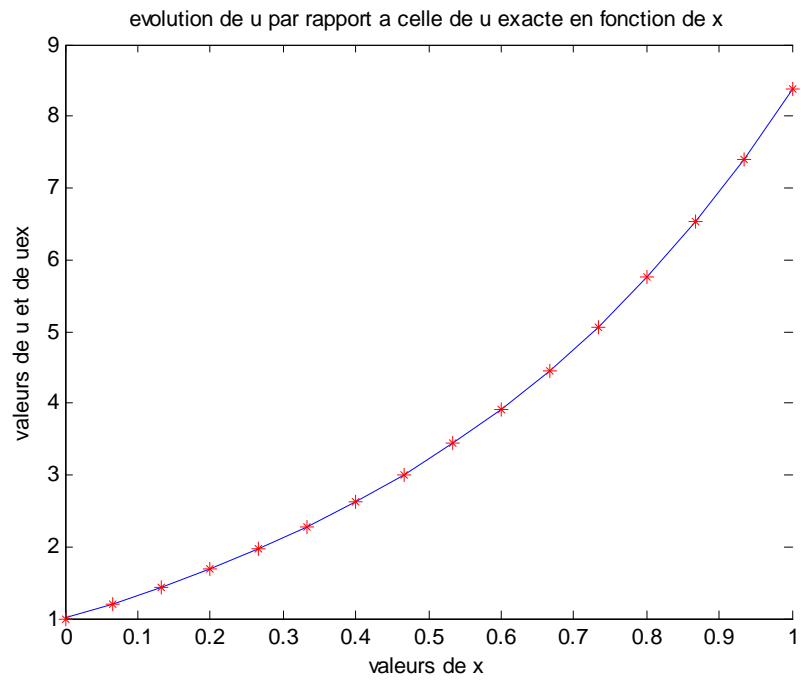
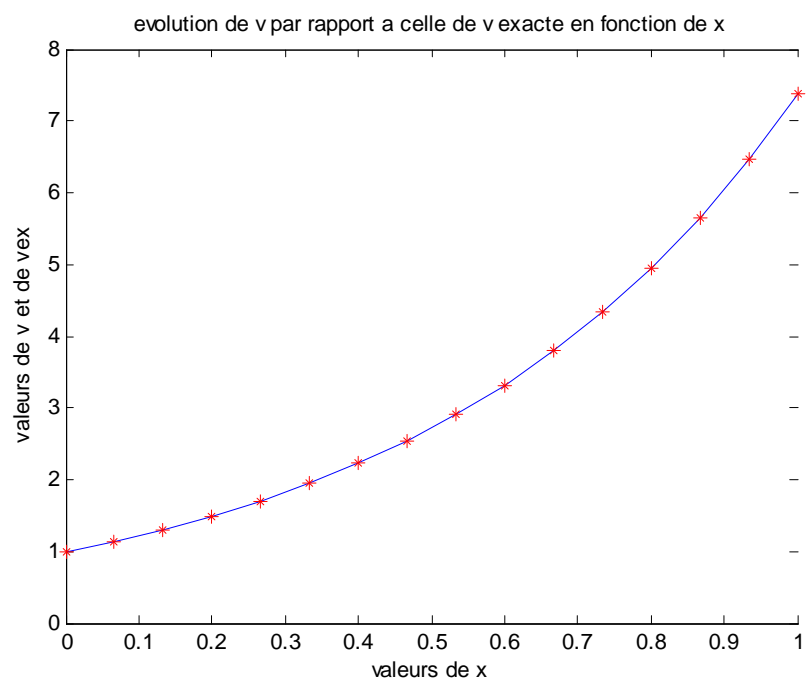
$x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	
$Epv$	$3.4391e-7$	$2.4541e-7$	$1.4122e-7$	$5.1382e-8$	$1.4326e-8$	
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	$4.3973e-8$	$2.1571e-8$	$7.6407e-8$	$2.7976e-7$	$6.025e-7$	$9.6738e-7$

On remarque facilement que si  $0 \leq x \leq 0.4$  l'erreur est en diminution permanente tant dis que si  $0.6 \leq x \leq 1$  l'erreur est en progression après avoir fait un pique sur 0.5.

- le tableau si dessous correspond au changement de valeur de l'erreur absolu par rapport au changement du nombre de discrétisation pour  $v$

$n$	5	7	9	11	13	15
$Eav$	$6.5280e-2$	$8.4062e-4$	$1.0078e-5$	$1.0896e-6$	$5.8894e-7$	$8.6863e-7$

On remarque facilement que l'erreur n'a fait que diminuer tout au long de notre recherche.

La solution  $u$ La solution  $v$

### 3.0.3 simulation de la transmission de l'épidémie de Babesios

Après avoir testé notre méthode numérique sur un exemple académique et après avoir confirmé son efficacité, il est temps maintenant de s'intéresser à notre problème, et pour cela on a adapté le système trouvé à la méthode numérique

– Remarques

Sachant que  $t \in [0, T]$  nous avons dû faire un changement de variable qui nous a donné l'intervalle  $[0, 1]$  pour nous permettre de résoudre le système et pour cela on a posé  $s = \frac{t}{T}$ .

La compilation du programme nous a permis d'obtenir les graphes suivants

On considère le modèle suivant

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{S}_B(s)}{ds} = T \times (-\beta_{TB} B \mathbf{S}_B(s) \mathbf{I}_T(s) + (\mu_B + \alpha_B) \mathbf{R}_B(s)) \\ \frac{d\mathbf{I}_B(s)}{ds} = T \times (\beta_{TB} B \mathbf{S}_B(s) \mathbf{I}_T(s) - \lambda_B \mathbf{I}_B(s)) \\ \frac{d\mathbf{R}_B(s)}{ds} = T \times (\lambda_B \mathbf{I}_B(s) - [\mu_B + \alpha_B] \mathbf{R}_B(s)) \\ \frac{d\mathbf{S}_T(s)}{ds} = T \times (\mu_T P \mathbf{I}_T(s) - \beta_{BT} B \mathbf{S}_T(s) \mathbf{I}_B(s)) \\ \frac{d\mathbf{I}_T(s)}{ds} = T \times (\beta_{BT} B \mathbf{S}_T(s) \mathbf{I}_B(s) - P \mu_T \mathbf{I}_T(s)), \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \mathbf{S}_B(0) = 0.7 \\ \mathbf{I}_B(0) = 0.1 \\ \mathbf{R}_B(0) = 0.2 \\ \mathbf{S}_T(0) = 0.2 \\ \mathbf{I}_T(0) = 0.8 \end{cases}$$

Les données mathématiques

$$\begin{cases} n = 20 \\ \text{erreur} = 10^{-5} \end{cases}$$

Les données physiques

- $N_B = 1240$  population bovines,
- $N_T = 3975$  population des tiques,
- $T = 730$  jours
- $\beta_{TB} = 0.0124$  taux de passage de la maladie d'une tique infectée à un bovin sensible lorsqu'une tique infeste un bovin,
- $\beta_{BT} = 0.0996$  taux de passage de la maladie d'un bovin infecté à une tique sensible lorsqu'elle infeste un bovin,
- $\mu_B = 0.0002999$  taux de naissance des bovins qui est égale au taux de mortalité,

- $\mu_T = 0.001609$       taux de naissance des tiques qui est égale au taux de mortalité,
- $\lambda_B = 0.00265$       bovins infecté qui ont été traité contre la maladie sont Résistant,
- $\alpha_B = 0.001$       bovins traités qui peuvent retourner à l'état sensible,
- $p = 0.1$       probabilité qu'une tique sensible soit né d'une tique déjà infecté
- $B$       taux de tique qui infeste les bovin.

Nous avons choisis les valeurs  $B = 0.4$ ;  $B = 0.3$ ;  $B = 0.2$  respectivement.

On va proposer des graphes qui correspondes à trois valeurs données à  $B$

- pour  $B = 0.4$

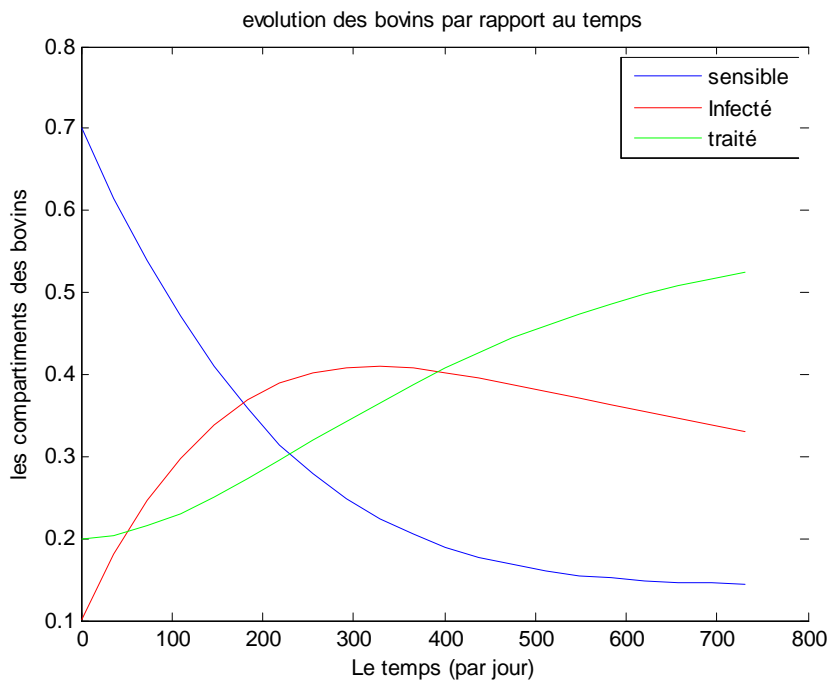


figure 1

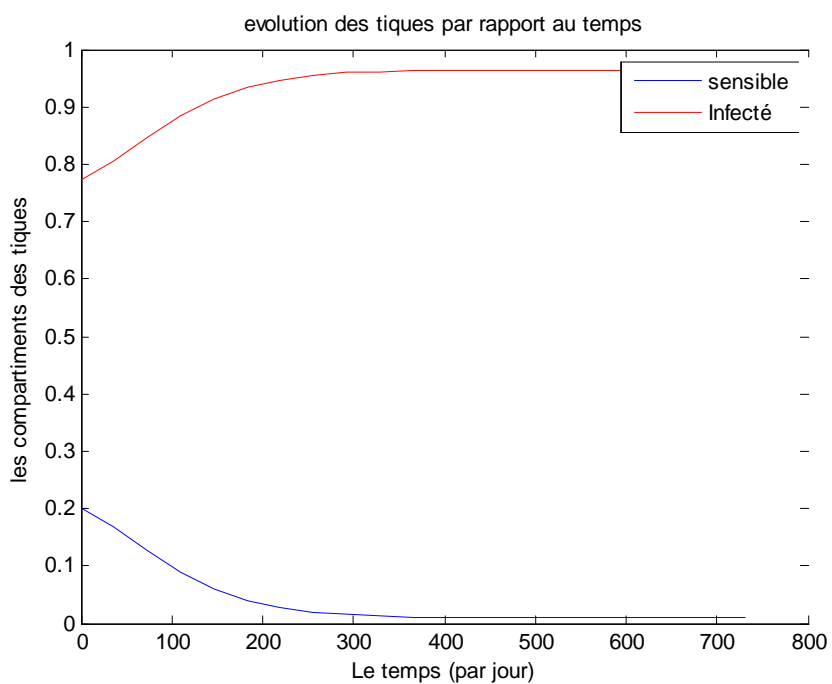
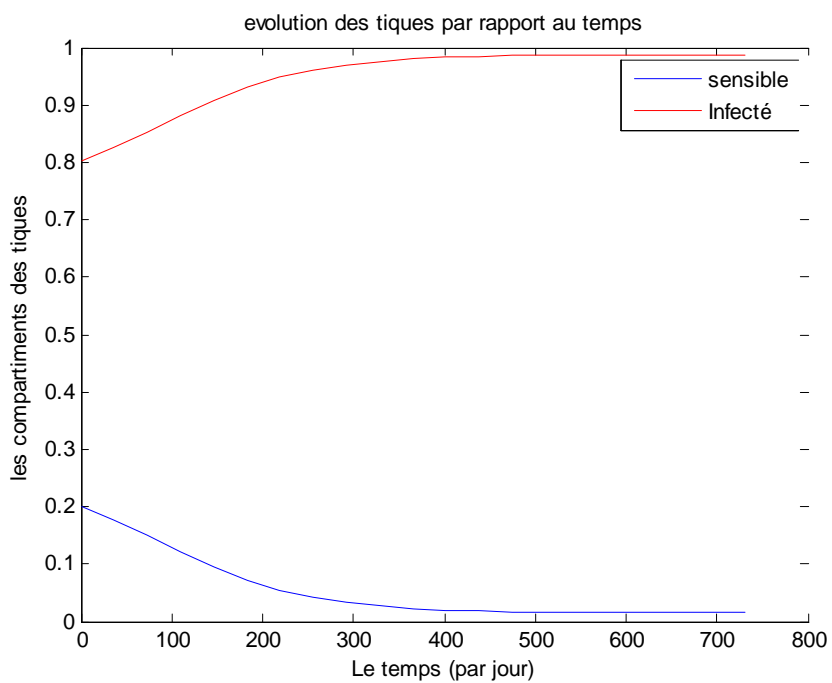
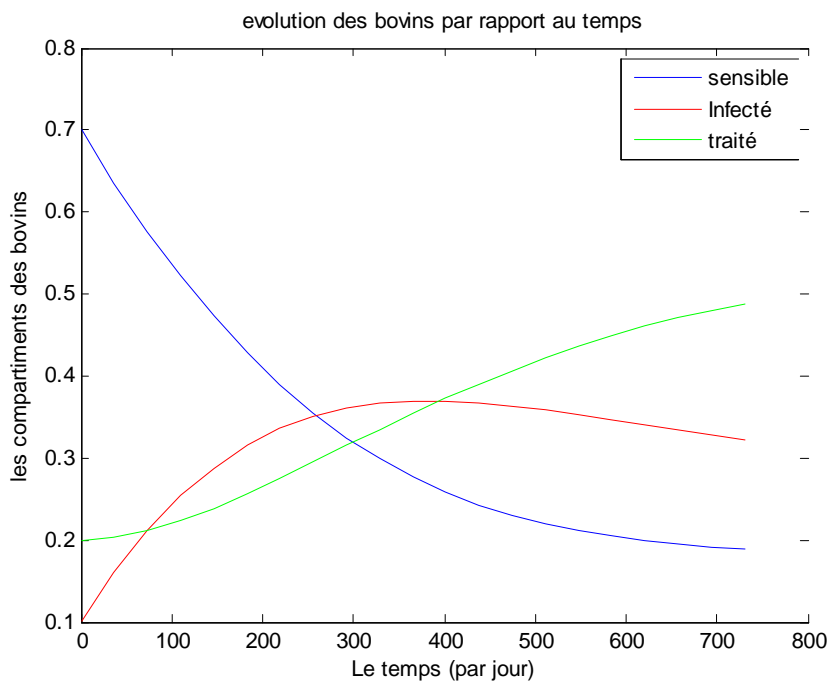
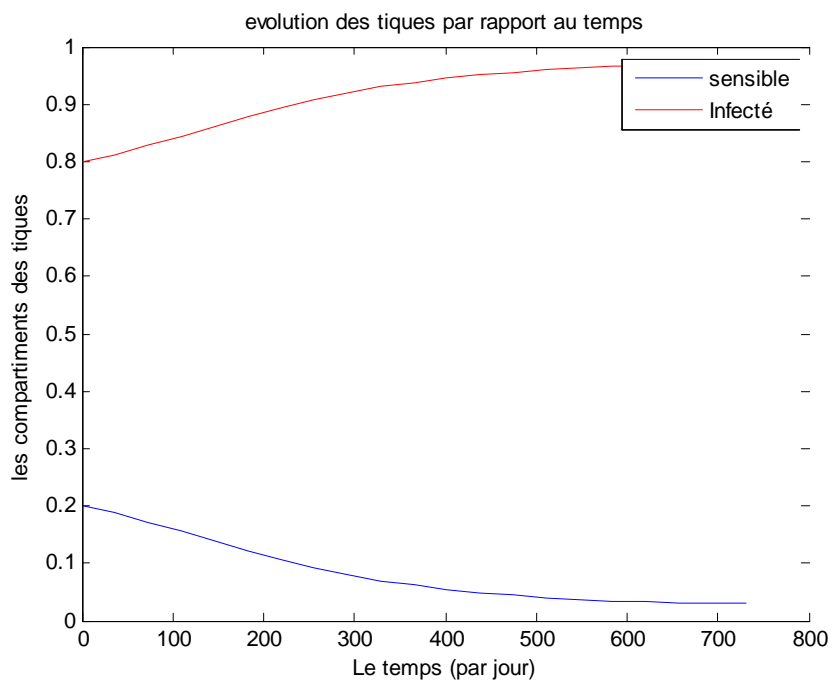
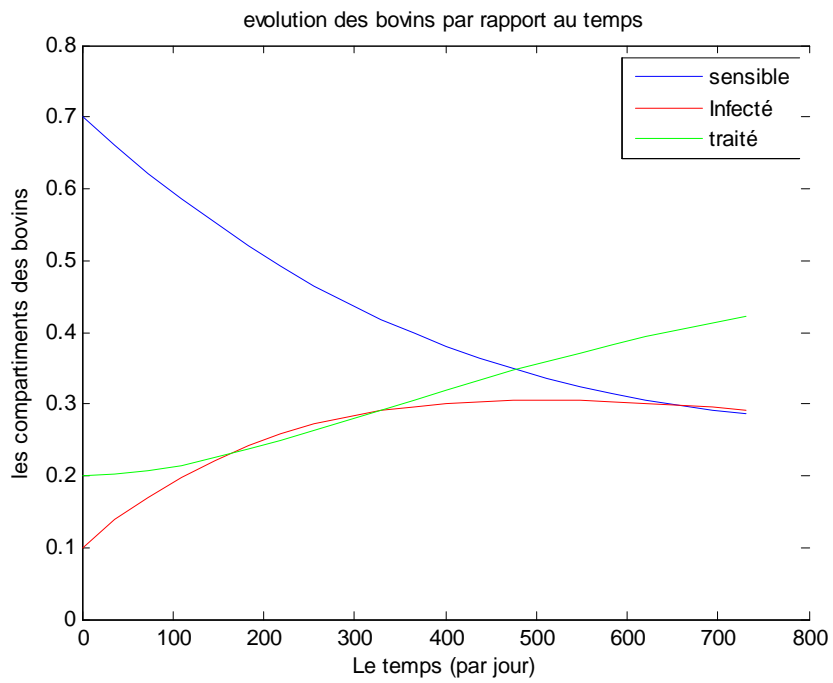


figure 2

– Pour  $B = 0.3$



– Pour  $B = 0.2$



# conclusion

L'application de ce type de méthode attirent de plus en plus l'attention de nombreux chercheurs,et les simulations numérique montre que ce type de méthode correspond mieux à la réalité,ce qui est prouver dans notre travail.

# Annexe

On propose tous les programmes qui on etait utilisés dans se travail

– Le programme principal

```
clear all
```

```
clc
```

```
close all
```

```
n = 20;
```

```
h = 1/(n);
```

```
x = 0 :h :1;
```

```
T = 2*365;
```

```
beta_tb = 0.0124;
```

```
beta_bt = 0.0996;
```

```
B = 0.4;
```

```
mub = 0.0002999;
```

```
mut = 0.001609;
```

```
lamda_b = 0.00265;
```

```
alpha_b = 0.001;
```

```
p = 0.1;
```

```
Nb = 1240;
```

```
Nt = 3975;
```

```
SB0 = 0.7;
```

```
IB0 = 0.1;
RB0 = 0.2;
ST0 = 0.2;
IT0 = 0.8;
err = 10^(-5);
SB = ones(1,n+1);
IB = ones(1,n+1);
RB = ones(1,n+1);
ST = ones(1,n+1);
IT = ones(1,n+1);
e = 1;
while e > err
    SBp = SB;
    IBp = IB;
    RBp = RB;
    STp = ST;
    ITp = IT;
    %=====
    a1 = T*beta_tb*B.*IT;
    h1 = (mub+alpha_b)*T.*RB;
    SB = methode(n,x,SB0,h1,a1);
    a2 = T*lamda_b*ones(1,n+1);
    h2 = T*beta_tb*B.*SB.*IT;
    IB = methode(n,x,IB0,h2,a2);
    a3 = T*(mub + alpha_b)*ones(1,n+1);
    h3 = T*lamda_b.*IB;
    RB = methode(n,x,RB0,h3,a3);
    %=====
    a4 = T*beta_bt*B.*IB;
    h4 = T*p*mut*IT;
```

```

ST = methode(n,x,ST0,h4,a4);
a5 = T*p*mut*ones(1,n+1);
h5 = T*beta_bt*B.*ST.*IB;
IT = methode(n,x,IT0,h5,a5);
%=====
e = max([norm(SBp-SB),norm(IBp-IB),norm(RBp-RB),norm(STp-ST),norm(ITp-IT)])
end
xx = linspace(0,T,length(x));
figure(1)
plot(xx,SB,xx,IB,'r',xx,RB,'g')
xlabel('Le temps (par jour)')
ylabel('les compartiments des bovins')
legend('sensible','Infecté','traité')
title('evolution des bovins par rapport au temps')
figure(2)
plot(xx,ST,xx,IT,'r')
xlabel('Le temps (par jour)')
ylabel('les compartiments des tiques')
legend('sensible','Infecté')
title('evolution des tiques par rapport au temps')
- DL
function vl = DL(n,x)
s = 0;
for k = 0 :n-1
if mod(k+n,2) == 1 %rem
s = s + (2*k+1)* L(k,x);
end
end
vl = 2*s;
- Methode

```

```
function uapp = methode(n,x,u0,f,a)
for j=1 :n+1
for i= 0 :n
DLmat(j,i+1) = DL(i,x(j));
aLmat(j,i+1) = a(j)* L(i,x(j));
end
end
for j = 1 :n+1
B(j) = f(j);
end
A = DLmat + aLmat;
for i= 0 :n
A(1,i+1) = DL(i,x(1));
end
B(1) = B(1) - a(1)* u0;
u = inv(A)*B';
for j = 1 :n+1
s = 0;
for i = 0 :n
s = s+u(i+1)*L(i,x(j));
end
uapp(j) = s;
end
```

# Abstract

Dans ce travail, on procède à une modélisation de la transmission de l'épidémie de "babisios", en utilisant pour la simulation numérique une méthode basée sur la méthode de Legendre et pour illustrer ce travail et résoudre le problème on donne un exemple académique pour étudier l'efficacité et les faibles de la méthode, pour enfin simuler le phénomène épidémiologique qui est la transmission de l'épidémie de "Babisios".

# Bibliographie

- [1] Omar BELHAMITI A new approche to solve a set of nonliner splitboundary value problems.
- [2] BOUZID Leila Mémoir master en mathématique 20 juin 2013.
- [3] Site web [www.pleinchamp.com](http://www.pleinchamp.com).
- [4] INRIA end IRD 2010 Modélisation et simulation en épidimologie.
- [5] Article de la publication de l'université de Tunise [www.uvt.rnu.tn](http://www.uvt.rnu.tn) .
- [6] A.BOULKKABOUL Revue Elev.Méd.Vét.pays trop,2003 parasitisme des tiques (Ixodidae)de bovins à Tiaret Algerie.
- [7] G.Ding A mathematical model for babisiosis disease in bovin and tick populations ;article de recherche publier le 30 décembre 2011.