
	الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
	People's Democratic Republic of Algeria	
	وزارة التعليم العالي والبحث العلمي	
	Ministry of Higher Education and Scientific Research	
	جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم	
	Abdel Hamid Ibn Badis University – Mostaganem	
	كلية العلوم والتكنولوجيا	
	Faculty of Sciences and Technology	
قسم الهندسة الميكانيكية	Department of Mechanical Engineering	

N° d'ordre : M2...../GM/2025

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDES DEMASTER ACADEMIQUE

**Filière: Génie Mécanique**

**Spécialité : Construction Mécanique**

### Thème

**Étude des vibrations des pipelines sous l'effet de l'écoulement en fonction des différentes conditions de fixation**

Présenté par

1-BELAYACHI CHAKIR NOUR ISLAM

2-KACHOU HOUSSEYN

Soutenu le 29/06/ 2025 devant le jury composé de :

Président :	ZENASNI RAMADANE	Professeur	Université de Mostaganem
Examineur :	BENKABOUCHE SALAH-EDDINE	Maitre de Conférences "B"	Université de Mostaganem
Encadrant :	BENKHETTAB MOHAMED	Maitre de Conférences "B"	Université de Mostaganem

Année universitaire 2024 / 2025

## Dédicaces

... إلى كل لحظة شقاء وتعب صنعت مني إنساناً أقوى و إلى أحلامي وطموحاتي التي منحتني الدافع لأبذل قصارى جهدي في سبيل تحقيقها إلى **أمي الحبيبة**، سندي وركيزة روحي، التي كانت نوراً في عتمتي، بكلماتها الطيبة ودعائها الصادق الذي عطّر قلبي وبتّ الطمأنينة في نفسي وإلى **أبي العزيز**، الذي لم يبالِ بخسائره من أجل نجاحي، وكان دومًا عونًا لي في دربي، يفرح بإنجازاتي ويشدّ على يدي في لحظات ضعفي اللهم بارك في عمره، وقرّ عيني به ، ولا تُرهقه بما لا يطيق وإلى كل من انتقدني بصدق، فدفعتني لأن أكون **نسخة أفضل من نفسي** وإلى إخوتي وأصدقائي الذين كانوا دومًا أهلًا قبل أن يكونوا رفاقًا، تقاسمت معهم تعب الطريق وحلاوة الانتصار وإلى كل من كان سببًا في زرع ابتسامته على وجهي في لحظات الانكسار ولا أنسى أن أتقدم ببالغ الشكر والعرفان إلى **الأستاذ: بن خطاب محمد**، الذي لم يبخل عليّ بتوجيهه ودعمه الكريم لقد كان خير عونٍ لي خلال هذا المسار، وكانت نصائحه النور الذي أضاء دربي العلمي وقبل الجميع، وفوق كل من ذكر، أحمّدك يا ربّ، وأشكرك على كل نعمة، فلك الحمد حتى ترضى، ولك الحمد إذا رضيت، ولك الحمد بعد الرضا.

**Belayachi chakir nour islam**

**Kachou housseyn**

## Remerciements

Dieu merci de nous avoir donné la volonté et le courage d'arriver à faire ce modeste travail. En préambule à ce mémoire, nous souhaitons adresser notre reconnaissance à toute personne ayant apporté son aide et contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Nous remercions notre encadrant, Docteur **Benkhattab Mohamed**, d'avoir accepté de diriger ce travail. Nous tenons à exprimer notre gratitude au Professeur **Zenasni Ramadane**, d'avoir accepté de présider le jury de notre projet de fin d'études. Nos remerciements vont au Docteur **Benkabouche Salah Eddine**, qui nous a fait l'honneur d'accepter l'examen de ce mémoire. Le temps que les membres de jury aient passé, ainsi que l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail sont une marque de reconnaissance inestimable.

A tous nos enseignants de Génie mécanique de l'université de Mostaganem et particulièrement ceux qui ont contribué à notre formation particulièrement en master.

## Liste des figures

- Figure 1.1.** Réponse du régime libre conservatif ( $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 100000 \text{ N/m}$ ,  $x_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $\dot{x}_0 = 100 \text{ mm/s}$ ) (10)
- Figure 1.2** Réponse du régime libre critique ( $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 100000 \text{ N/m}$ ,  $x_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $\dot{x}_0 = 100 \text{ mm/s}$ ). (12)
- Figure 1.3** Réponse du régime libre sous-critiques ( $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 100000 \text{ N/m}$ ,  $c = 100 \text{ kg/s}$ ,  $x_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $\dot{x}_0 = 100 \text{ mm/s}$ ). (13)
- Figure 1.4 :** Comparaison entre les trois réponses d'un système amorti (14)
- Figure 1.5 :** Facteur d'amplification dynamique ( $\mu$ ) en fonction de la pulsation relatif ( $\Omega$ ) pour cinq valeurs de  $\gamma$  (16)
- Figure 1.6 :** Le déphasage ( $\varphi$ ) en fonction de la pulsation relatif ( $\Omega$ ) pour cinq valeurs de  $\gamma$  (17)
- Figure 1.7 :** Types de vibrations des systèmes continus (18)
- Figure 1.8 :** Poutre en vibration longitudinale (19)
- Figure 1.9.** Équilibre dynamique d'une section de longueur  $dx$  (20)
- Figure 2.0.** Poutre en vibration de torsion. (22)
- Figure 2.1 :** Équilibre dynamique d'une section de longueur  $dx$  (22)
- Figure 2.2 :** Poutre en vibration transversale (23)
- Figure 2.3 :** Représentation d'une poutre en flexion (24)

<b>Figure 2.4.</b> Equilibre dynamique d'une section d'épaisseur $d$	(25)
<b>Figure 2.5.</b> Les conditions aux limites d'une poutre	(29)
<b>Figure 2.6.</b> Modes longitudinales de la poutre encastree-libre	(31)
<b>Figure 2.7.</b> Modes longitudinales de la poutre encastree encastree	(32)
<b>Figure 2.8.</b> Modes longitudinales de la poutre libre-libre	(33)
<b>Figure 2.9 :</b> Elément de poutre (4ddl)	(66)
<b>Figure 3.0:</b> Elément de référence	(69)
<b>Figure 3.1 :</b> Elément de fluide (a) et de conduite (b) sur une longueur $\delta s$	(87)
<b>Figure 3.2:</b> Représentation du premier terme de l'équation du mouvement d'un tuyau de transport	(90)
<b>Figure 3.3:</b> Représentation du deuxième terme de l'équation du mouvement d'un tuyau de transport.	(91)
<b>Figure 3.4:</b> Représentation du troisième terme de l'équation du mouvement d'un tuyau de transport	(92)
<b>Figure 3.5 :</b> Représentation du quatrième terme de l'équation du mouvement d'un tuyau de transport (Force d'inertie).	(93)
<b>Figure 3.6:</b> Poutre appuyée-appuyée	(98)
<b>Figure 3.7:</b> Poutre encastree-appuis simple	(99)
	(102)
<b>Figure 3.8 :</b> Solution graphique de l'équation caractéristique d'une poutre encastree-appuis.	

<b>Figure 3.9</b> : Poutre encastrée-encastrée	(102)
<b>Figure 3.10</b> : Solution graphique de l'équation caractéristique d'une poutre encastrée-encastrée.	(105)
<b>Figure 3.11</b> : Poutre encastrée-libre	(105)
<b>Figure 4.1</b> : Convergence des trois premiers modes propres en fonction du nombre des éléments d'un tuyau sous écoulement interne en appuis simples par MEF	(112)
<b>Figure 4.2</b> : Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.	(113)
<b>Figure 4.3</b> : Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.	(113)
<b>Figure 4.4</b> : troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.	(114)
<b>Figure 4.5</b> : Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.	(115)
<b>Figure 4.6</b> : Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur	(115)
<b>Figure 4.7</b> : troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur	(116)
<b>Figure 4.8</b> : Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique	(117)
<b>Figure 4.9</b> : Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.	(117)

- Figure 4.10:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique (118)
- Figure 4.11:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur (119)
- Figure 4.12:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur. (119)
- Figure 4.13:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur. (120)
- Figure 4.14:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur (120)
- Figure 4.15:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur. (121)
- Figure 4.16:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur (121)
- Figure 4.17:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique (122)
- Figure 4.18:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique (122)
- Figure 4.19:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique (123)
- Figure 4.20:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur (123)
- Figure 4.21:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur. (124)
- Figure 4.22:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur. (124)
- Figure 4.23:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur. (125)

**Figure 4.24:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur. (125)

**Figure 4.25:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur. (126)

**Figure 4.26:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique (126)

**Figure 4.27:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique (127)

**Figure 4.28:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique. (127)

## Liste des tableaux

**Tableau 1.** *Pulsations et déformées modales en vibrations longitudinales* (32)

**Tableau 2.** Les premières valeurs de  $X_n^2$  pour les conditions aux limites les plus courantes sont présentées dans le (39)

## Liste des abréviations

Abréviation	Signification
PFD	Principe Fondamental de la Dynamique
E	Module de Young (Élasticité)
G	Module de cisaillement (ou module de Coulomb)
$\rho$ (rho)	Masse volumique
S	Section droite de la poutre
L	Longueur de la poutre
J	Moment quadratique de la section droite
I	Moment d'inertie de la section
$\theta$ (thêta)	Angle de torsion
$\varphi$ (phi)	Déphasage entre excitation et réponse
$\omega$ (oméga)	Pulsation (rad/s)
$\omega_0$	Pulsation propre du système conservatif
$\zeta$ (Zeta)	Amortissement relatif (ou facteur d'amortissement)
$\Omega$ (Omega majuscule)	Pulsation relative ( $\omega/\omega_0$ )
$\delta$ (delta)	Décrément logarithmique

$v(x, t)$	Flèche (déplacement transverse)
$u(x, t)$	Déplacement longitudinal
$T(x, t)$	Effort tranchant
$M(x, t)$	Moment fléchissant
$f(x, t)$	Force extérieure appliquée
$\mu$	Facteur d'amplification dynamique
$a$	Facteur de forme (section)
$c$	Célérité (vitesse des ondes)
EL / EE / LL / EA / LA	Types de conditions aux limites : Encastrement-Libre, Encastrement-Encastrement, Libre-Libre, Encastrement-Appui, Libre-Appui

## Résumé

L'objectif de cette étude est de déterminer les trois premières fréquences de résonance d'un pipe ligne transportant un fluide, en considérant différents facteurs physiques influents tels que la longueur de la pipe, son épaisseur, la masse volumique du fluide, ainsi que diverses conditions de fixation ou des conditions aux limites. Pour ce faire, nous avons développé un programme sous MATLAB permettant de simuler ces fréquences en fonction des paramètres mentionnés.

Cette étude démontre que les fréquences de résonance des tuyaux dépendent principalement de trois facteurs : (1) la longueur, avec une relation inverse (doublement de la longueur  $\approx$  division par 4 des fréquences), (2) l'épaisseur, suivant une loi cubique (augmentation de 1 mm pouvant élever les fréquences de 30%), et (3) la densité du fluide (fluide 20% plus dense  $\approx$  baisse de 15-20% des fréquences). Les conditions de fixation ont un impact majeur : les configurations encastéré-libre présentent les fréquences les plus basses (jusqu'à 4 fois inférieures), tandis que l'encastéré-encastéré donne les plus hautes (+60-80% par rapport à encastéré-libre), et l'encastéré-appuyé se situe entre les deux (+30-40%). Ces variations résultent directement des différences de rigidité globale et de distribution des contraintes, comme confirmé par nos simulations numériques. Ces résultats quantitatifs permettent une prédiction précise du comportement vibratoire pour des applications industrielles critiques.

Les mots clés : Interaction fluide-structure, fréquences de résonance, méthode des éléments finis.

## ملخص

تهدف هذه الدراسة إلى تحديد الترددات الرنانة الثلاثة الأولى لخط أنابيب يحمل مائعًا، مع مراعاة عوامل فيزيائية مؤثرة مختلفة، مثل طول الأنبوب، وسمكه، وكثافته، وظروف التثبيت أو الحدود المختلفة. ولتحقيق ذلك، طُوّرنا برنامج MATLAB لمحاكاة هذه الترددات بناءً على المعلمات المذكورة أعلاه.

تُظهر هذه الدراسة أن ترددات رنين الأنابيب تعتمد بشكل أساسي على ثلاثة عوامل: (1) الطول، بعلاقة عكسية (مضاعفة الطول  $\approx$  قسمة الترددات على 4)، (2) السمك، وفقًا لقانون التكعيب (زيادة 1 مم يمكن أن ترفع الترددات بنسبة 30%)، و(3) كثافة السائل (زيادة كثافة السائل بنسبة 20%  $\approx$  انخفاض في الترددات بنسبة 15-20%). لظروف التركيب تأثير كبير: فالتركيبات غير المتدفقة تُعطي أقل ترددات (أقل بأربع مرات)، بينما تُعطي التركيبات المتدفقة المتدفقة أعلى تردد (+60-80% مقارنةً بالتركيبات غير المتدفقة)، بينما التركيبات المدعمة بالتدفق تقع بين هذين الترددتين (+30-40%). وتنتج هذه الاختلافات مباشرةً عن الاختلافات في الصلابة الكلية وتوزيع الإجهاد، كما أكدته عمليات المحاكاة الرقمية التي أجريناها. وتتيح هذه النتائج الكمية تنبؤًا دقيقًا بسلوك الاهتزاز في التطبيقات الصناعية الحرجة.

الكلمات المفتاحية: تفاعل السائل مع البنية، ترددات الرنين، طريقة العناصر المحدودة.

***Abstract:***

The objective of this study is to determine the first three resonant frequencies of a fluid-carrying pipeline, considering various influencing physical factors such as pipe length, thickness, fluid density, and various fixation or boundary conditions. To do this, we developed a MATLAB program to simulate these frequencies based on the aforementioned parameters. This study demonstrates that pipe resonant frequencies depend primarily on three factors: (1) length, with an inverse relationship (doubling the length  $\approx$  dividing the frequencies by 4), (2) thickness, following a cubic law (a 1 mm increase can raise frequencies by 30%), and (3) fluid density (a 20% denser fluid  $\approx$  a 15-20% decrease in frequencies).

The mounting conditions have a major impact: the flush-free configurations have the lowest frequencies (up to 4 times lower), while the flush-flush gives the highest (+60-80% compared to flush-free), and the flush-supported is in between (+30-40%). These variations result directly from the differences in overall stiffness and stress distribution, as confirmed by our numerical simulations. These quantitative results allow an accurate prediction of vibration behavior for critical industrial applications.

**Keywords:** Fluid-structure interaction, resonance frequencies, finite element method.

## **Table des matières**

## Table des matières

Introduction Générale.....	5 -
Chapitre I : Généralité sur les vibrations .....	7 -
Généralité sur les vibrations.....	8 -
2.1 Introduction.....	8 -
2.1 Régimes vibratoires .....	8 -
2.1 Les systèmes discontinus .....	9 -
<b>1.3.1 Régime libre conservatif (non amorti) ou oscillateur harmonique</b> .....	9 -
1.2 Régime libre amorti (dissipatif) .....	10 -
1.2.1 Amortissement critique ( .....	11 -
<b>1.1.1 Excitation (Régime) Harmonique</b> .....	14 -
2.1 Les systèmes discontinus .....	17 -
4.1 Vibrations dans les milieux élastiques 1D .....	18 -
1.2 Différents types d'équations du mouvement .....	18 -
4.2 Equations de mouvements des poutres (arbres).....	19 -
1.3 Fréquences, modes et orthogonalités.....	26 -
Chapitre II.....	41 -
2.1 Introduction.....	41 -
2.4 Fonctions de forme et interpolation [6] .....	42 -
2.8 Matrice de Masse pour un Élément de Poutre .....	48 -
2.9 Exemple : Poutre en traction divisée en 3 points (2 éléments).....	49 -
2.10 Etude de vibration transversal (cas de flexion) en utilisant MEF .....	51 -
<b>Dérivation de la Matrice de Rigidité</b> .....	52 -

<b>Relation courbure-déplacement</b> .....	- 52 -
<b>Énergie de déformation</b> .....	- 53 -
L'énergie de déformation s'écrit : .....	- 53 -
<b>Calcul de la matrice de rigidité</b> .....	- 53 -
Matrice de masse : .....	- 53 -
2. Cinématique de la poutre .....	- 53 -
6 3. Conditions aux limites .....	- 53 -
5. Énergie cinétique .....	- 54 -
6. Construction de la matrice .....	- 54 -
7. Calcul des intégrales .....	- 54 -
8. Matrice finale .....	- 55 -
1.1 Détermination des matrices élémentaires .....	- 57 -
Détermination les matrices pour la conduite .....	- 60 -
<b>1.1.1</b> Détermination les matrices pour le fluide .....	- 64 -
Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport .....	- 72 -
<b>1 Introduction</b> .....	- 72 -
<b>2 Equations du mouvement et conditions aux limites</b> .....	- 72 -
<b>2.1 Théorie des poutres d'Euler-Bernoulli</b> .....	- 72 -
10.2 Les pulsations et modes propres .....	- 78 -
<b>2.1.2 La méthode de Galerkin</b> .....	- 79 -
<b>Orthogonalité des fonctions normales</b> .....	- 87 -
Résultat et discussion .....	- 91 -
4.1 Introduction : .....	- 91 -
4.2 Etude de la convergence .....	- 91 -

4.3	Tuyau de transport en encastrées-appuis.....	- 92 -
4.4	Tuyau de transport en encastrées -libre .....	- 97 -
4.5	Tuyau de transport en encastrées-encastrées .....	- 102 -
	Conclusion générale et recommandations.....	- 128 -
	Bibliographie .....	- 2 -

## Introduction Générale

Dans les systèmes industriels modernes, le problème des vibrations et de la résonance dans les conduites transportant des fluides se pose comme l'un des défis d'ingénierie les plus complexes et les plus impactant pour la sécurité des structures. Ce phénomène ne se limite pas à de simples vibrations mécaniques transitoires, mais s'étend aux phénomènes de résonance destructrice qui se produisent lorsque les fréquences des forces motrices générées par l'écoulement du fluide coïncident avec les fréquences naturelles de la conduite.

Dans les centrales nucléaires par exemple, le phénomène de résonance dans les tuyaux de refroidissement peut provoquer des contraintes répétées conduisant à des fissures dans les soudures, comme ce fut le cas lors de l'accident célèbre de la plateforme "Piper Alpha", où ce phénomène contribua à la catastrophe de fuite radioactive. Quant aux plateformes pétrolières offshore, l'effet de résonance sur les conduites d'extraction peut provoquer des vibrations violentes entraînant des déplacements aux points d'ancrage atteignant 15 cm, mettant en danger l'intégrité de toute la plateforme.

Le mécanisme physique de ce phénomène réside dans le fait que la vitesse d'écoulement du fluide dans la conduite influence directement les fréquences de résonance, créant des forces dynamiques variables dans le temps. Lorsque la vitesse d'écoulement approche la vitesse critique, le système commence à absorber l'énergie de l'écoulement du fluide, ce qui amplifie considérablement l'amplitude des vibrations. Des études ont montré qu'une augmentation de 10% de la vitesse d'écoulement au-delà de la limite de sécurité peut multiplier par trois l'amplitude des vibrations, ce qui explique les catastrophes industrielles récurrentes dans les systèmes de conduites haute pression.

Pour résoudre ce problème complexe, plusieurs stratégies pratiques se sont développées, basées sur le contrôle intelligent de la vitesse d'écoulement. Une méthode innovante consiste à utiliser des systèmes de contrôle actifs s'appuyant sur des accéléromètres couplés à un contrôleur PID précis qui ajuste en temps réel la vitesse des pompes pour maintenir les fréquences hors de la plage de résonance. Des études récentes ont également démontré que l'ajout d'absorbeurs de vibrations au milieu de la conduite peut réduire l'amplitude des vibrations jusqu'à 60%, particulièrement lorsqu'ils sont réglés sur les fréquences critiques prédéterminées par modélisation aux éléments finis.

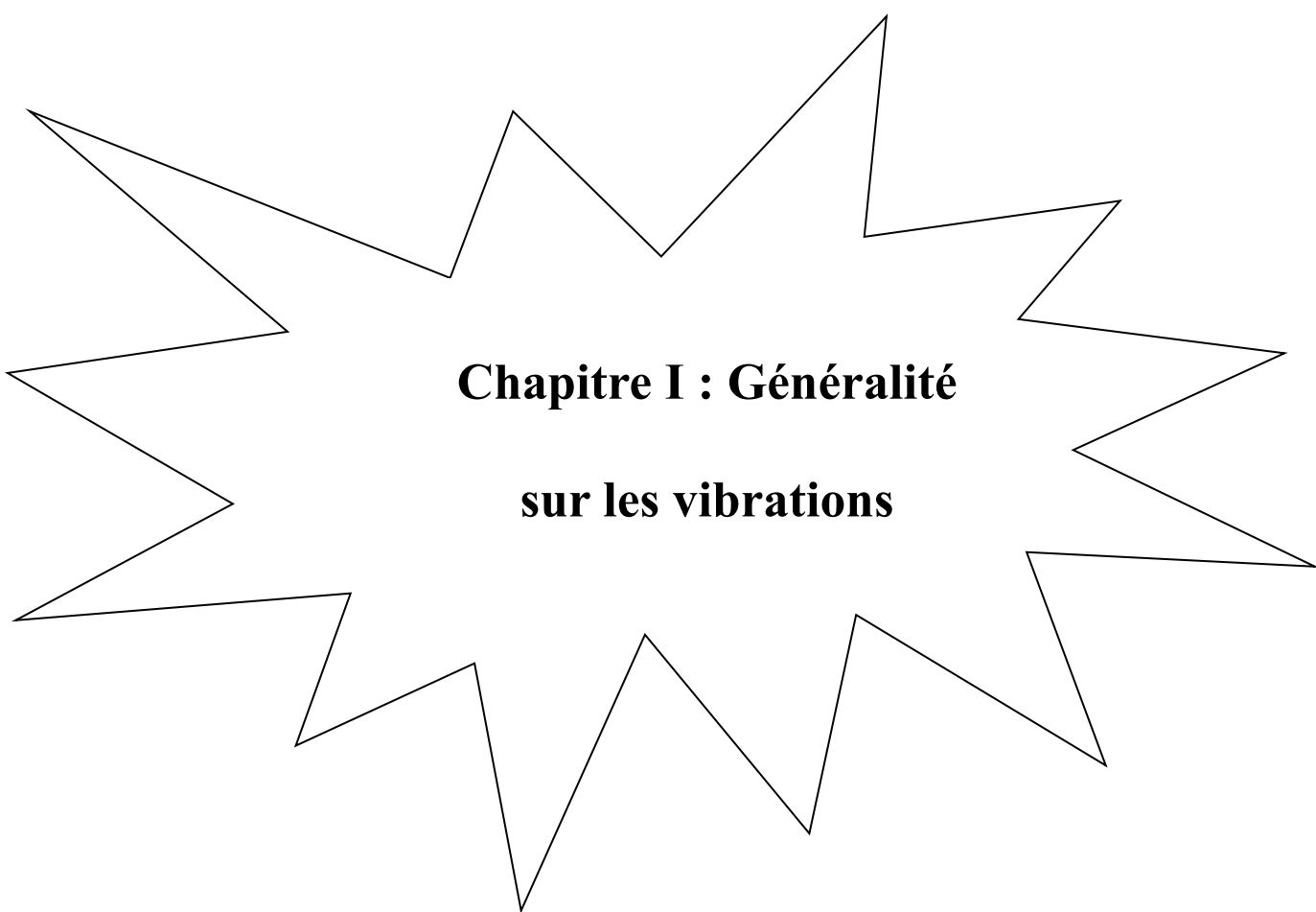
Dans ce contexte, cette recherche apporte une contribution qualitative dans le domaine de l'analyse dynamique des conduites transportant des fluides. Le premier chapitre aborde les bases théoriques des vibrations et de la résonance dans les systèmes continus, en mettant l'accent sur les conditions aux limites conduisant à l'amplification des amplitudes vibratoires. Le deuxième

chapitre est consacré à une explication approfondie de la méthode des éléments finis pour analyser à la fois les cas statiques et dynamiques, en soulignant comment modéliser l'effet de la vitesse d'écoulement sur les fréquences naturelles. Le troisième chapitre présent, le quatrième chapitre présente une application pratique complète utilisant des logiciels avancés comme MATLAB, où plusieurs scénarios opérationnels sont analysés pour déterminer les plages de vitesses sûres évitant le phénomène de résonance, tout en tenant compte de certaines conditions de fixation et paramètres influençant les fréquences de résonance de ces conduites.

Les conclusions pratiques de cette recherche consistent en une méthodologie intégrée permettant aux ingénieurs de :

- Prévoir avec précision les fréquences de résonance en fonction des caractéristiques de la conduite et des conditions d'écoulement
- Déterminer les plages de vitesses critiques à éviter opérationnellement
- Concevoir des systèmes de contrôle préventif efficaces contre les phénomènes de vibration et résonance
- Améliorer la durée de vie opérationnelle des systèmes de conduites et réduire les coûts de maintenance

Ce travail scientifique vise finalement à fournir des solutions pratiques applicables dans divers domaines industriels, des systèmes de transport pétrolier et gazier aux centrales énergétiques et complexes chimiques, où la sécurité des systèmes de conduites constitue un facteur crucial pour garantir la durabilité opérationnelle et la sécurité publique.



**Chapitre I : Généralité  
sur les vibrations**

## Généralité sur les vibrations

### 2.1 Introduction

Dans le domaine du génie mécanique, les vibrations ne sont pas simplement des phénomènes passagers, mais plutôt la base fondamentale sur laquelle repose la fabrication, le fonctionnement et la maintenance des machines. Qu'il s'agisse de la précision des turbines ou de la stabilité des ponts grandioses, la compréhension des phénomènes vibratoires fait la différence entre efficacité et panne, entre durabilité à long terme et usure rapide. C'est pourquoi l'étude des vibrations est un domaine essentiel à maîtriser, nécessitant l'exploration de tous ses aspects multidimensionnels. L'analyse vibratoire se divise en deux branches principales les vibrations des systèmes discrets et les vibrations des systèmes continus.

Dans ce chapitre, nous commencerons par étudier les systèmes discrets, en examinant, les systèmes libres (amortis et non amortis), et les systèmes forcés, avec une analyse de la réponse aux forces et une étude dynamique. La deuxième partie sera consacrée à l'étude des systèmes continus soumis à trois types de sollicitations (Traction, Flexion et torsion). L'objectif de cette partie sera de dériver les formules mathématiques permettant de déterminer analytiquement les fréquences de résonance

### 2.1 Régimes vibratoires

On distingue les régimes vibratoires suivants :

**Régime libre** (pas de force extérieure) : si  $f(t) = 0$  ;

**Régime forcé** : si  $f(t) \neq 0$  ;

**Régime permanent** : ce régime est le régime forcé, après disparition des termes transitoires, provoqué par une force périodique. Il n'est pas influencé par les conditions initiales. Quand le système est conservatif ( $c = 0$ ), il n'existe pas de régime permanent à proprement parler.

### 2.1 Les systèmes discontinus

#### 1.3.1 Régime libre conservatif (non amorti) ou oscillateur harmonique

Un régime libre est conservatif si  $c = 0$ , ainsi l'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1.1)$$

Introduisant la notation suivante :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2)$$

Avec  $\omega_0$  la pulsation propre (naturelle) du système conservatif.

La solution de l'équation est du type :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad (1.3)$$

Or que cette dernière peut être mise sous la forme suivante:

$$x(t) = X\cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (1.4)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} X = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \varphi = \text{atan2}(A, B) \end{cases} \quad (1.5)$$

L'équation (1.3) montre clairement que le déplacement de la masse est un mouvement harmonique de pulsation  $\omega_0$ , de fréquence  $f_0$  et de période  $T_0$ . Ainsi, le système est appelé oscillateur harmonique.

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.6)$$

Si

$x_0$  est la position initiale ( $x(t = 0) = x_0$ ) et

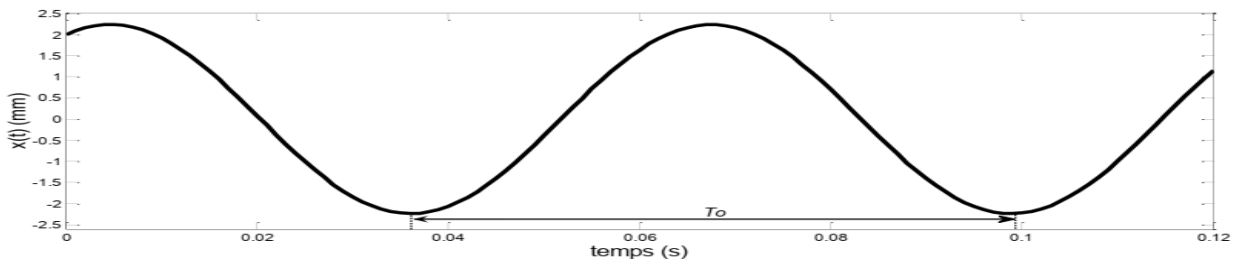
## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

$\dot{x}_0$  Est la vitesse initiale ( $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ ),

Alors :

$$B = x_0 \quad \text{et} \quad A = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \quad (1.7)$$



**Figure 1.1.** Réponse du régime libre conservatif ( $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 100000 \text{ N/m}$ ,  $x_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $\dot{x}_0 = 100 \text{ mm/s}$ ).

### 1.2 Régime libre amorti (dissipatif)

Dans ce cas, l'équation du mouvement aura l'expression suivante :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1.8)$$

Si on pose  $\beta = \frac{c}{2m}$ , et on divise sur  $m$ , l'équation devient :

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (1.9)$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$x(t) = D e^{rt} \quad (1.10)$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$(r^2 + 2\beta r + \omega_0^2) D e^{rt} = 0 \quad (1.11)$$

Or que cette équation est toujours vérifiée si et seulement si :

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0 \quad (1.12)$$

Les racines de cette équation sont :

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm \omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (1.13)$$

Avec  $\gamma = \frac{c}{2\omega_0 m}$  le facteur d'amortissement ou l'amortissement relatif. Il est à remarquer que  $\beta = \gamma \omega_0$ .

Il est clair que Les racines  $r_{1,2}$  dépendent de l'amortissement relatif  $\gamma$ . Ainsi, on distingue les trois cas suivants :

### 1.2.1 Amortissement critique ( $\gamma = 1$ )

Dans ce cas :

$$c = c_{cr} = 2\omega_0 m \quad (1.14)$$

Où  $c_{cr}$  est l'amortissement critique. Ainsi, on trouve :

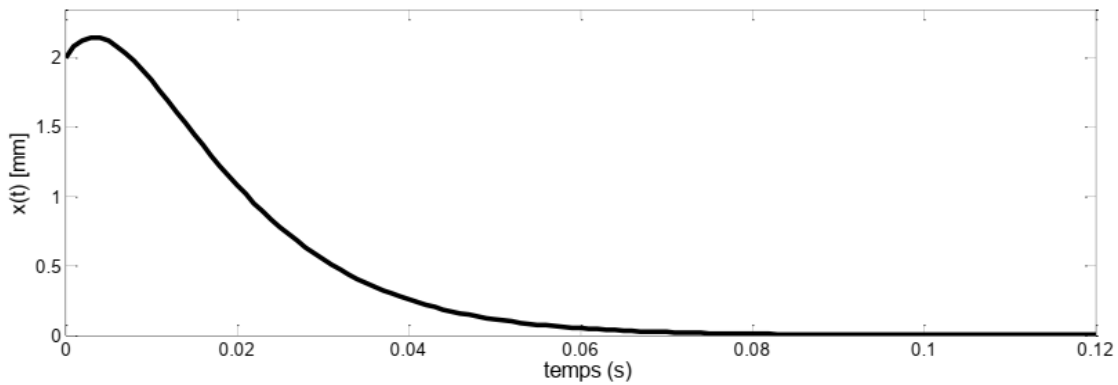
$$r_{1,2} = -\beta = -\omega_0 \quad (1.15)$$

Et la réponse du système s'écrit :

$$x(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\omega_0 t} \quad (1.16)$$

Avec  $k_1$  et  $k_2$  des constantes qui sont déduites des conditions aux limites :

$$k_1 = x_0 \quad \text{et} \quad k_2 = \omega_0 x_0 + \dot{x}_0 \quad (1.17)$$



**Figure 1.2** Réponse du régime libre critique ( $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 100000 \text{ N/m}$ ,  $x_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $\dot{x}_0 = 100 \text{ mm/s}$ ).

### 1.2.2 Amortissement sous-critique ( $\gamma < 1$ )

Les racines données par l'équation pour un amortissement sous-critique sont complexes :

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\omega_a \quad (1.18)$$

Avec  $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2}$  la pseudo-pulsation en amortissement sous-critique.

Ainsi, la réponse dans ce cas a l'expression suivante :

$$x(t) = (k_3 \sin(\omega_a t) + k_4 \cos(\omega_a t)) e^{-\beta t} \quad (1.19)$$

Avec  $k_3$  et  $k_4$  des constantes qui dépendent des conditions aux limites :

$$k_3 = \frac{\omega_0 x_0 + \dot{x}_0}{\omega_a} \quad \text{et} \quad k_4 = x_0$$

On peut écrire cette réponse sous la forme condensée suivante :

$$x(t) = X e^{-\beta t} \cos(\omega_a t - \phi) \quad (1.20)$$

Avec :

$$X = \sqrt{k_3^2 + k_4^2} \quad \text{et} \quad \phi = \text{atan2}(k_3, k_4)$$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

Il est utile d'utiliser la notion du décrement logarithmique  $\Lambda$ , ainsi :

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x(t)}{x(t + nT_a)} \right) \quad (1.21)$$

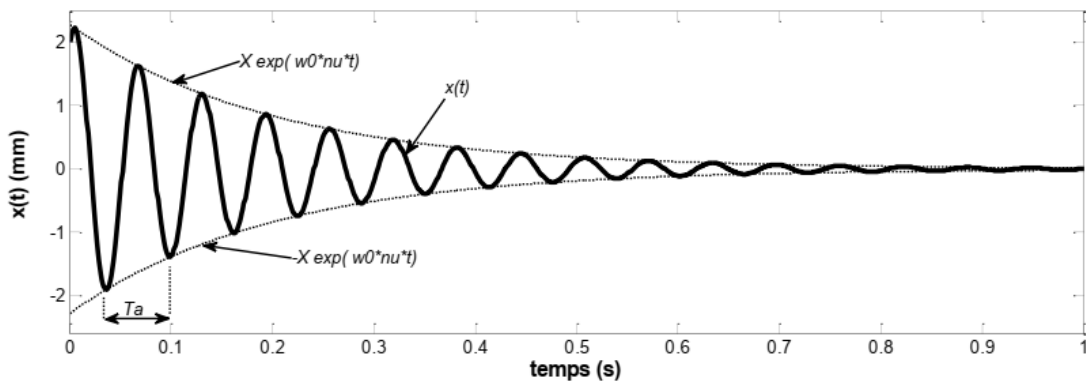
Avec  $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$  la pseudo-période.

Le décrement logarithmique n'est fonction que de l'amortissement relatif :

$$\Lambda = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (1.22)$$

Et réciproquement :

$$\gamma = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \quad (1.23)$$



**Figure 1.3** Réponse du régime libre sous-critiques ( $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 100000 \text{ N/m}$ ,  $c = 100 \text{ kg/s}$ ,  $x_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $\dot{x}_0 = 100 \text{ mm/s}$ ).

### 1.2.3 Amortissement sur-critique ( $\gamma > 1$ )

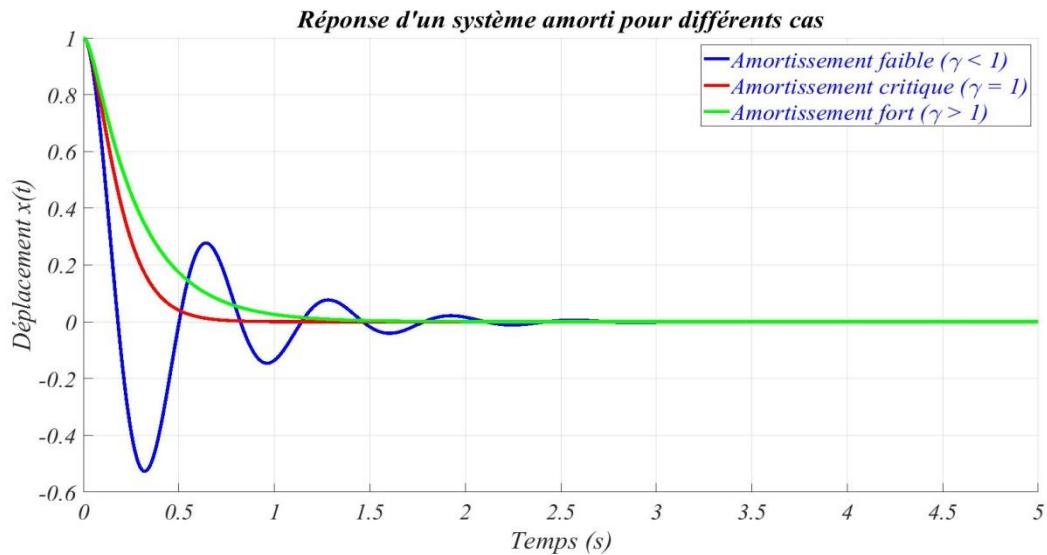
La réponse du système sur-critique est :

$$x(t) = (k_5 \sinh(\omega_b t) + k_6 \cosh(\omega_b t)) e^{-\gamma \omega_0 t} \quad (1.24)$$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

Avec  $\omega_b = \omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}$  et  $k_5, k_6$  des constantes qui dépendent des conditions aux limites.

L'allure de cette réponse est comparable à celle de la réponse du système critique. Cependant, le retour vers la position d'équilibre est plus rapide en raison du facteur d'amortissement plus important.



**Figure 1.4 :** Comparaison entre les trois réponses d'un système amorti.

### 1.1.1 Excitation (Régime) Harmonique

Nous allons traiter le cas particulier, très important, celui du régime permanent, provoqué par une force extérieure pure après disparition des termes transitoires.

Dans ce cas, l'excitation (la force extérieure) est harmonique et l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\theta t) \quad (1.25)$$

Où :

- $\theta$  est la pulsation de la force harmonique.

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

- $F_0$  est l'amplitude de la force harmonique.

La solution permanente (solution particulière) a l'expression suivante :

$$x(t) = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t) \quad (1.26)$$

En introduisant  $x(t)$  et ses dérivées dans l'équation (1.25), on obtient :

$$A = \frac{F_0(k - \theta^2 m)}{(k - \theta^2 m)^2 + \theta^2 c^2}, \quad B = \frac{F_0 \theta c}{(k - \theta^2 m)^2 + \theta^2 c^2} \quad (1.27)$$

En combinant les deux fonctions harmoniques ( $A\cos(\theta t)$  et  $B\sin(\theta t)$ ), la solution donnée par (1.26) devient :

$$x(t) = X\cos(\theta t - \varphi) \quad (1.28)$$

Avec :

$$X = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \theta^2 m)^2 + \theta^2 c^2}}, \quad \tan(\varphi) = \frac{B}{A} = \frac{\theta c}{k - \theta^2 m} \quad (1.29)$$

Où :

$X$  Est l'amplitude de la réponse.

$\varphi$  Est le déphasage de la réponse par rapport à l'excitation.

Il est commode, pour étudier les variations de  $X$  et  $\varphi$  en fonction de  $\theta$ , d'introduire :

La pulsation propre de l'oscillateur conservatif :  $\omega_0$ .

L'amortissement relatif :  $\gamma$ .

Et de définir encore les quantités suivantes :

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

La pulsation relative de la force extérieure :  $\Omega = \frac{\theta}{\omega_0}$ .

Le déplacement statique dû à une force extérieure statique :  $X_s = \frac{F_0}{k}$ .

Le facteur d'amplification dynamique :  $\mu = \frac{X}{X_s}$ .

L'injection de ces valeurs dans l'équation (1.29) conduit à :

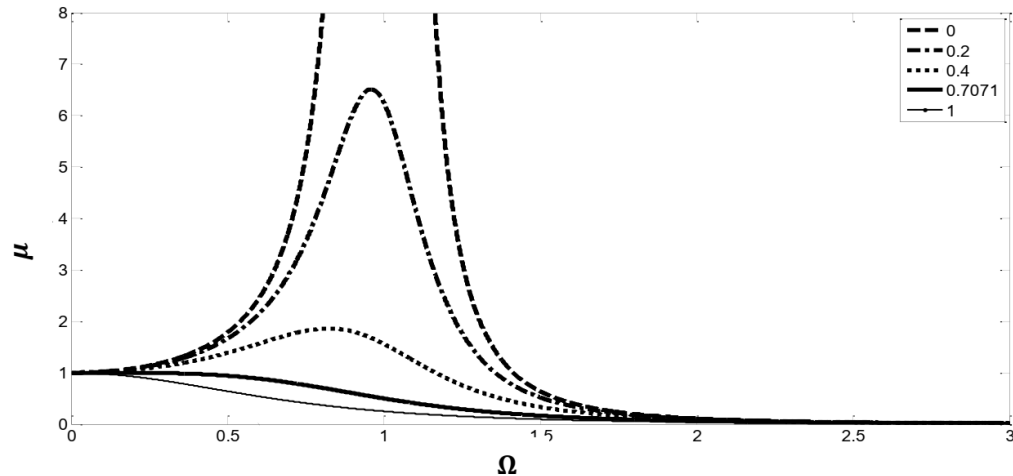
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \quad \tan(\varphi) = \frac{2\gamma\Omega}{1 - \Omega^2} \quad (1.30)$$

Il est à remarquer que dans l'équation (1.30)  $X$  est maximum si la dérivée de  $\mu$  par rapport à  $\Omega$  est nulle.

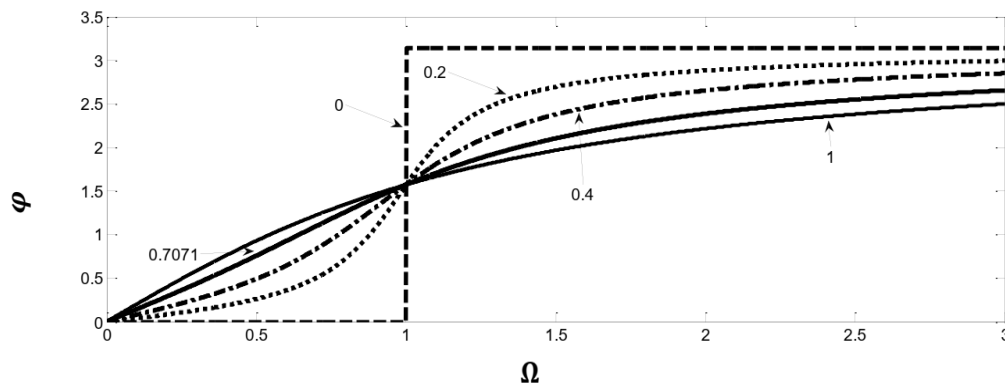
$$\frac{d\mu}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Omega = 0 \\ \text{ou} \\ \Omega = \sqrt{1 - 2\gamma^2} \end{cases} \quad (1.31)$$

Le point  $\Omega = 0$  est un point commun est maximum pour  $\gamma \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  et la deuxième valeur  $(\sqrt{1 - 2\gamma^2})$  qui annule la dérivée définit la pulsation de résonance d'amplitude  $\omega_2$  qui a l'expression suivante :

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\gamma^2} \quad (1.32)$$



**Figure 1.5 :** Facteur d'amplification dynamique ( $\mu$ ) en fonction de la pulsation relatif ( $\Omega$ ) pour cinq valeurs de  $\gamma$ .



**Figure 1.6 :** Le déphasage ( $\varphi$ ) en fonction de la pulsation relatif ( $\Omega$ ) pour cinq valeurs de  $\gamma$ .

**Remarque :** Il est important de noter que par principe la résonance apparaît par définition quand  $\theta = \omega_0$  (fréquence naturelle du système non-amorti), ce qui correspond à un déphasage ( $\varphi$ ) de  $90^\circ$ . Toutefois, pour un système amorti  $\omega_0$  ne correspond pas exactement à la fréquence où la réponse en régime est maximale (la réponse est maximale pour  $\theta = \omega_2$ ).

## 2.1 Les systèmes discontinus

### 1. Généralités

Parmi les éléments constituant une structure, on trouve fréquemment des éléments de type poutre, plaque et coque. Les solutions analytiques permettant de déterminer leur comportement

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

n'existent que rarement. Dans le cas où la recherche de la solution analytique est très pénible, il est préférable d'utiliser systématiquement des méthodes numériques.

L'amortissement n'est pas pris en compte et la réponse n'est traitée qu'en régime permanent.

### 4.1 Vibrations dans les milieux élastiques 1D

Les ondes longitudinales sont des ondes de traction-compression dans la direction  $x$ .

Une barre peut vibrer en torsion : la vibration est caractérisée par un déplacement angulaire (mouvement de rotation) autour de l'axe longitudinal de la barre.

Dans la plupart des cas, les poutres sont destinées à reprendre les actions de type flexion. D'une façon générale, toute section de la poutre est soumise à un moment de flexion et un effort tangentiel.

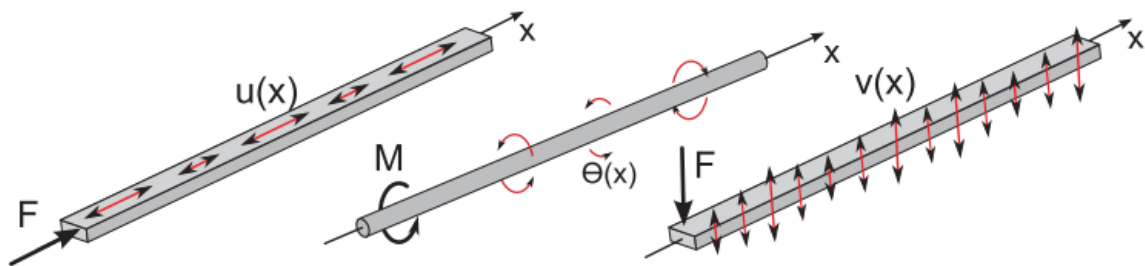


Figure 1.7 : Types de vibrations des systèmes continus

### 1.2 Différents types d'équations du mouvement

Afin de mener une étude vibratoire, on est amené à tenir compte des limites de la modélisation des structures simples liées à la géométrie et au matériau. Ces limites peuvent se résumer dans le cas des poutres :

Poutre rectiligne ; Longueur finie  $L$  ; Section constante  $S \ll L$ .

Homogène ; Linéaire et isotrope ; Non dissipatif.

*En fonction du type de sollicitation, on peut considérer trois types de vibrations :*

Vibrations longitudinales ;

Vibrations de Torsion ;

# Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

## Vibrations de flexion

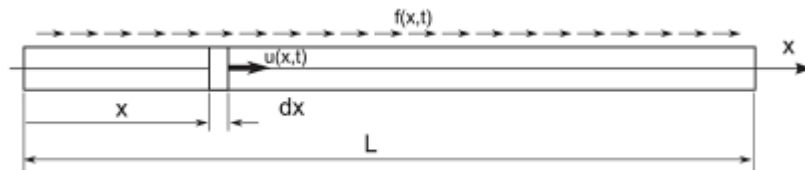
En général, les équations différentielles d'ordre 2 (vibrations longitudinales et de torsion) ou d'ordre 4 (vibrations de flexion) sont :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} &= g(x, t) \\ \frac{1}{c_F^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} &= g(x, t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

## 4.2 Equations de mouvements des poutres (arbres)

### 1.4.2.1 Mouvement longitudinal

Lorsque la barre est en vibration longitudinale, l'élément  $dx$ , situé à l'abscisse  $x$ , est soumis à un mouvement vibratoire  $u(x, t)$  sous l'action de la force extérieure  $f(x, t)$ . L'onde vibratoire se déplace le long de la barre suivant l'équation de propagation (1.33).



1. **Figure 1.8** : Poutre en vibration longitudinale.

#### *Hypothèses*

Poutre droite : Longueur  $L \gg e, l$  ( $e$  : épaisseur,  $l$  : largeur)

Section constante  $S$

Matériau isotrope :  $\rho, E, \nu$  non dissipatif

Distribution de forces  $f(x, t)$

Petites perturbations

Grandeur étudiée : déplacement longitudinal local  $u(x, t)$

#### *Méthodes :*

Pour écrire et résoudre les équations du mouvement, deux méthodes peuvent être utilisées :

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

Méthode locale : Elle utilise le Principe fondamental de la dynamique (PFD). Elle est adaptée aux structures simples.

Méthode énergétique ou variation elle : Elle utilise le théorème d'Hamilton et les variations énergétiques en introduisant les conditions aux limites. Elle est adaptée aux structures complexes.

### *Equation du mouvement*

On écrit l'équilibre dynamique d'une section de longueur  $dx$  :

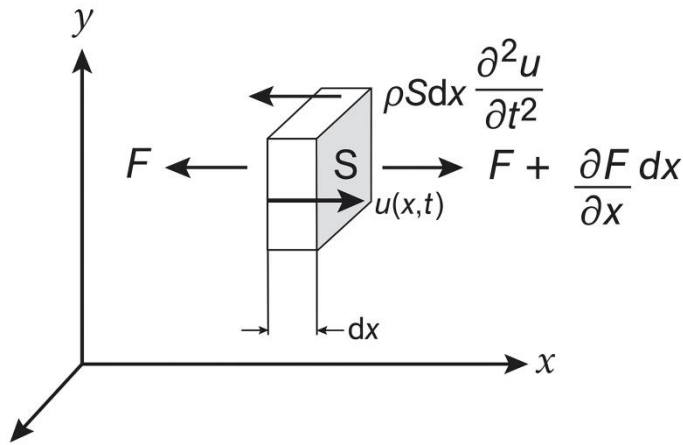
Masse :  $\rho S dx$

Déplacement :  $u(x, t)$

Accélération :  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Force à gauche :  $-F$

Force à droite :  $F + \frac{\partial F}{\partial x} dx$



**Figure 1.9.** Équilibre dynamique d'une section de longueur  $dx$

On a donc :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F + F + \frac{\partial F}{\partial x} dx + f(x, t) dx \quad (1.34)$$

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + f(x, t) \quad (1.35)$$

**Traction/Compression pure :**

$$F = \sigma S = ES \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} + f(x, t) \quad (1.36)$$

Comme E et S constants :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S} f(x, t) \quad \text{On note} \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.37)$$

Finalemment :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho S} f(x, t) \quad (1.38)$$

Le mouvement est défini par :

u : déplacement axial ;

F : force agissant sur le plan de section droite ;

S : aire de la section droite ;

E : module de Young ;

$\rho$  : Masse volumique.

c = Célérité du son ou vitesse des ondes longitudinales. [c] = m/s

### **1..1.2 Mouvement de torsion**

#### **Equation du mouvement - Paramètres**

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

Le mouvement est défini par :

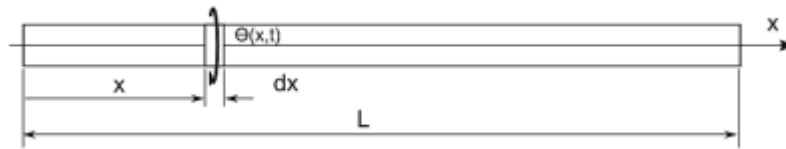
$\theta$  : Angle de torsion ;

M: Couple de torsion ;

$I_\theta$  : Inertie de masse par rapport à l'axe et par unité de longueur ;

$I_x$  : Inertie polaire de la section droite ;

G: module de Coulomb ou de torsion



**Figure 2.0.** Poutre en vibration de torsion.

### Hypothèses :

Poutre droite : Longueur  $L$  ( $\gg e, l$ ), Section constante  $S$

Matériau isotrope :  $\rho, E, \nu, G$  (module de torsion), non dissipatif

Petites perturbations + gravité non prise en compte

Grandeur étudiée : déplacement angulaire local  $\theta(x, t)$

On écrit l'équilibre dynamique d'une section de longueur  $dx$  :

Moment d'inertie :  $\rho I_x dx$

Déplacement :  $\theta(x, t)$

Accélération :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$

Moment à gauche :  $-M$

Moment à droite :  $M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$

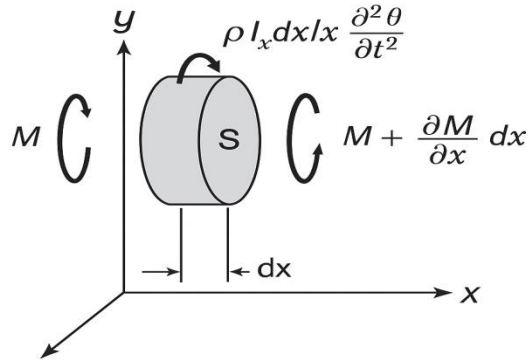


Figure 2.1 : Équilibre dynamique d'une section de longueur dx

$$\rho I_x dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (1.39)$$

**Torsion pure** : Le couple et l'angle de torsion sont reliés par :  $M = GI_x \frac{d\theta}{dx}$

$$\rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial \left( GI_x \frac{d\theta}{dx} \right)}{\partial x} \quad (1.40)$$

Comme G et  $I_x$  sont constants :

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1.41)$$

On note  $c^2 = \frac{G}{\rho} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

L'équation aux dérivées partielles de mouvement s'écrit, alors, pour une section constante :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (1.42)$$

# Chapitre I : Généralité sur les vibrations

## 1.1.3 Mouvement transversal (de flexion)

### Equation locale du mouvement pour une poutre

#### Paramètres

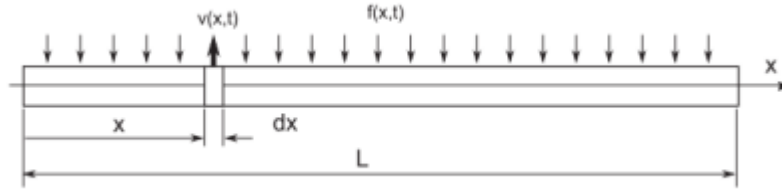


Figure 2.2 : Poutre en vibration transversale

#### Poutre droite :

Section constante  $S = \text{largeur} \times \text{hauteur} = l \times e$ ,

Longueur  $L (\gg e, l)$ ,

Moment quadratique de section  $I_{\perp} = \frac{le^3}{12}$

Matériau isotrope :  $\rho, E, \nu$  non dissipatif

#### Variables :

Distribution de forces transverses  $f(x, t)$

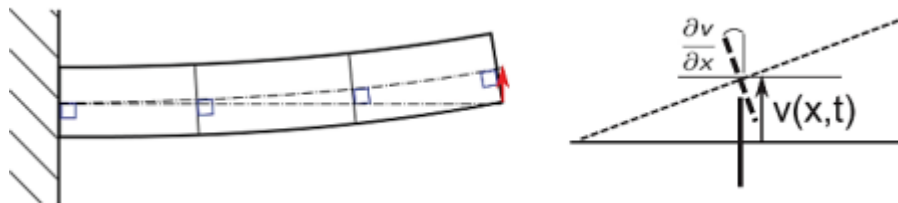
Petites perturbations + gravité non prise en compte

Grandeur étudiée : déplacement transverse local (flèche)  $v(x, t)$

#### Hypothèses

Hypothèse d'Euler-Bernoulli : L'inertie de rotation des sections est négligée.

Conséquence : les sections droites restent perpendiculaires à la ligne neutre.



## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

**Figure 2.3 :** Représentation d'une poutre en flexion

Rotation des sections :

$$\theta(x) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.43)$$

On écrit l'équilibre dynamique d'une section d'épaisseur  $dx$  :

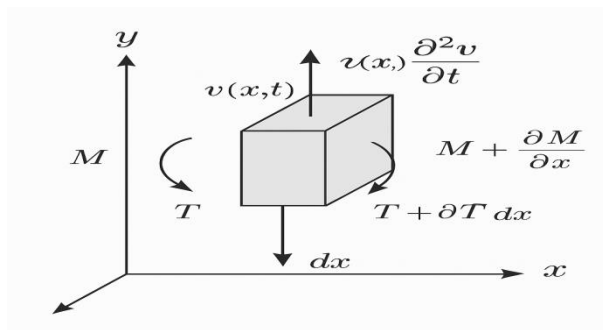
Masse :  $\rho S dx$

Déplacement (flèche) :  $v(x, t)$

Accélération :  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

Effort tranchant à gauche :  $T$

Effort tranchant à droite :  $T + \frac{\partial T}{\partial x} dx$



**Figure 2.4.** Equilibre dynamique d'une section d'épaisseur  $dx$

Le mouvement est défini par :

$V$  : flèche ;

$\psi$  : Pente due au moment fléchissant ;

$T$  : effort tranchant ;

$C$  : moment fléchissant ;

$I$  : inertie de section ;

$a$  : facteur de forme. Il est de l'ordre de l'unité pour des sections usuelles.

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

L'application des théorèmes généraux de la dynamique conduit à :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T - T - \frac{\partial T}{\partial x} dx \quad (1.44)$$

$$\rho J dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -C + C + \frac{\partial C}{\partial x} dx - T dx \quad (1.45)$$

$$C = -EJ \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (1.46)$$

$$T = \frac{dC}{dx} = -q \quad (1.47)$$

$$a \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \text{inertie}, \quad \Delta m = \rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.48)$$

En dérivant l'équation (1.46) 2 fois par rapport à x, on obtient :

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = q = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.49)$$

Supposons que E et J sont des constants, l'équation (1.49) aura la forme suivante :

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{EJ}{\rho S} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (1.50)$$

Equilibre dynamique d'une section d'épaisseur dx

*Equilibre dynamique d'une section d'épaisseur dx*

### 1.3 Fréquences, modes et orthogonalités

Les sections droites des poutres sont supposées constantes lors de la recherche des fréquences et modes propres. Les équations du mouvement libre sont résolues par la méthode classique de séparation des variables. Par ailleurs, l'équation aux dérivées partielles de la torsion étant

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

formellement identique à celle du mouvement longitudinal, le mouvement de torsion n'est pas traité dans ce document.

### 1..3.2 *Mouvement longitudinal libre*

Solution libres = Solutions de l'équation du mouvement lorsque  $f(x, t) = 0$

Posons :

$$u(x, t) = \phi(x)f(t) \quad (1.51)$$

L'équation de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.52)$$

Reportant (1.50) dans (1.51):

$$\phi(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} - \frac{E}{\rho} f(t) \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = 0 \quad (1.53)$$

La séparation de la fonction de la variable d'espace de celle de la variable du temps conduit à :

$$\frac{E}{\rho} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lambda(x, t) = -\omega^2 \quad (1.54)$$

Le premier membre de (1.53) est indépendant de t mais le second est indépendant de x. Leur égalité implique que la fonction  $\lambda(x, t)$  qui figure dans le troisième membre soit, à la fois, indépendante de x et de t. C'est-à-dire égale à une constante ( $-\omega^2$ ) appelée pulsation propre  $\omega = 2\pi f$  où f représente la fréquence propre en Hz.

Afin que les solutions restent bornées dans le temps, il s'en suit que :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0 \quad (1.55)$$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{\rho}{E} \phi(x) = 0 \quad (1.56)$$

Les équations (1.54) et (1.55) ont comme solution:

$$f(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (1.57)$$

$$\phi(x) = C\sin\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x\right) + D\cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x\right) \quad (1.58)$$

La forme générale de la solution stationnaire en modes libres s'écrit alors :

$$u(x, t) = (A\sin\omega t + B\cos\omega t) \left( C\sin\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x\right) + D\cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x\right) \right) \quad (1.59)$$

### *Conditions aux limites*

Deux cas simples de conditions aux limites peuvent être considérés :

Bord libre : aucun effort à l'extrémité  $F = 0$

$$\Leftrightarrow ES \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Mouvement indéterminé ( $u = ?$ )

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall t$$

**Encastrement** : Section extrême bloquée :  $u = 0$

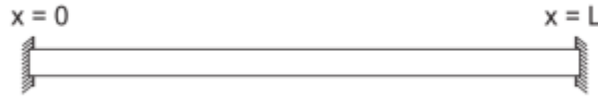
Effort indéterminé ( $F = ?$ )

$$\Leftrightarrow u = 0, \forall t$$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

- Poutre encastrée – encastrée



- Poutre encastrée – libre



- Poutre libre – libre



**Figure 2.5.** Les conditions aux limites d'une poutre

### ***Cas de la poutre encastrée-libre :***

Les pulsations  $\omega$  sont déterminées par l'application des conditions aux limites. Dans le cas d'une poutre encastrée-libre (E-L), quelque soit l'instant  $t$ , on aura :

Encastrement en  $x = 0$

$$u(0, t) = 0, \forall t \Leftrightarrow \phi(0)f(t) = 0 \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = C \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right)$$

Libre en  $x = L$  (d'après la loi de Hooke)

$$N(L, t) = ES \frac{d\phi(x)}{dx} f(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \phi'(L) = 0$$

La fonction  $f(t)$  ne peut être nulle quelque soit  $t$ , la première condition entraîne  $D=0$  et la seconde :

$$\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right) C \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) = 0$$

Afin d'éviter la solution identiquement nulle, il faut que:

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

$$\cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) = 0$$

Et les fréquences sont données pour  $\omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$   $n = 1, 2, \dots$

Les modes associés à  $\omega_n$  définis à une constante près, s'écrivent:

$$\phi_n(x) = \sin\left((2n - 1) \frac{\pi}{2L} x\right) \quad (1.60)$$

Pour les vibrations longitudinales, tout solide déformable possède une infinité de degré de liberté.

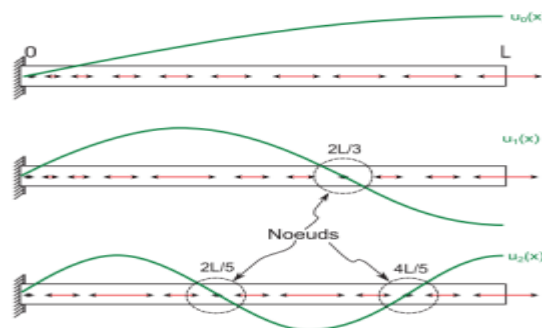
La plus petite fréquence

$$n = 1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow \omega_n = \omega_1(2n - 1) \quad (1.61)$$

En mouvement libre, la solution générale de l'équation aux dérivées partielles s'écrit donc :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin\left((2n - 1) \frac{\pi x}{2L}\right) \quad (1.62)$$

Les constantes  $A_n$  et  $B_n$  sont déterminées à partir des conditions initiales.



**Figure 2.6.** Modes longitudinaux de la poutre encastree-libre

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

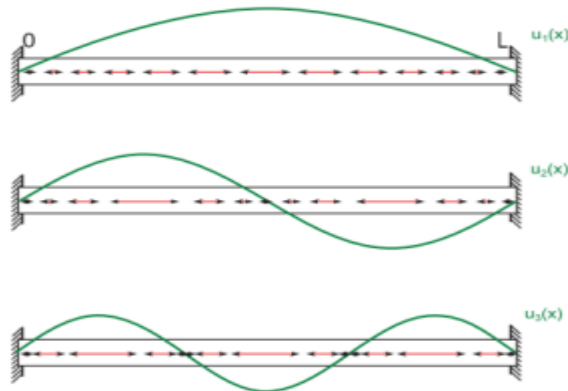
---

Dans les autres cas, tels que poutre (E- E) ou (E - L) aux deux extrémités, les calculs s'effectuent de la même façon. Les solutions sont présentées dans le tableau 1.

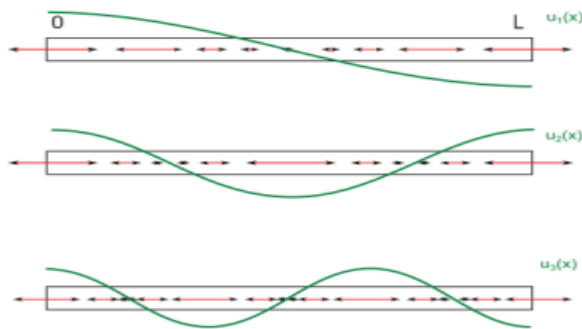
# Chapitre I : Généralité sur les vibrations

**Tableau 1.** Pulsations et déformées modales en vibrations longitudinales

<b>E-L</b>	$\omega_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\phi_n(x) = \sin\left((2n - 1) \frac{\pi x}{2L}\right)$ $n=1, 2, 3, \dots$
<b>E-E</b>	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) n=1, 2, 3, \dots$
<b>L-L</b>	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\phi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) n=1, 2, 3, \dots$



**Figure 2.7.** Modes longitudinaux de la poutre encastree-encastree



**Figure 2.8.** Modes longitudinaux de la poutre libre-libre

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

### Relations d'orthogonalité :

Compte tenu des résultats précédents, l'équation de mouvement ci-dessous s'écrit :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.63)$$

$$\frac{d}{dx} \left( ES \frac{d\phi}{dx} \right) = -\rho S \omega^2 \phi \quad (\text{Pour simplifier l'écriture } \phi = \phi(x))$$

Puisque cette équation est vérifiée pour les couples  $(\omega_i, \phi_i)$  et  $(\omega_j, \phi_j)$  :

$$\frac{d}{dx} \left( ES \frac{d\phi_i}{dx} \right) = -\rho S \omega_i^2 \phi_i \quad (1.64)$$

$$\frac{d}{dx} \left( ES \frac{d\phi_j}{dx} \right) = -\rho S \omega_j^2 \phi_j \quad (1.65)$$

Si les extrémités de la poutre ont comme abscisses 0 et L, on multiplie (1.64) par  $\phi_j$  et (1.65) par  $\phi_i$  :

$$\int_0^L \phi_j \frac{d}{dx} \left( ES \frac{d\phi_i}{dx} \right) dx = -\omega_i^2 \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx \quad (1.66)$$

$$\int_0^L \phi_i \frac{d}{dx} \left( ES \frac{d\phi_j}{dx} \right) dx = -\omega_j^2 \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx \quad (1.67)$$

En supposant des conditions aux limites courantes: libre  $\left( ES \frac{d\phi}{dx} = 0 \right)$  ou encastrée  $(\phi = 0)$ , l'intégration par parties de (1.66) et (1.67) conduit à :

$$-\int_0^L ES \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = -\omega_i^2 \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx \quad (1.68)$$

$$-\int_0^L ES \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = -\omega_j^2 \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx \quad (1.69)$$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

En retranchant (1.68) de (1.69) :

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2) \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx = 0 \quad (1.70)$$

Puisque  $\omega_i \neq \omega_j$

$$\int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx = 0 \quad (1.71)$$

A partir de (1.68)

$$\int_0^L E S \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = 0 \quad (1.72)$$

Les expressions (1.71) et (1.72) sont les conditions classiques d'orthogonalité.

Par ailleurs, en multipliant les deux membres de (1.64) par  $\phi_i$ , et en intégrant de 0 à L :

$$\int_0^L \phi_i \frac{d}{dx} \left( ES \frac{d\phi_i}{dx} \right) dx = -\omega_i^2 \int_0^L \rho S \phi_i^2 dx \quad (1.73)$$

L'intégration par parties avec des conditions aux limites courantes, libre ou encastrée entraîne:

$$\frac{\int_0^L E S \left( \frac{d\phi_i}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho S \phi_i^2 dx} = \frac{k_i}{m_i} \quad (1.74)$$

Les intégrales  $k_i$  et  $m_i$  sont la raideur et la masse modales associées aux modes  $i$ .

### 1.4.4.2 Mouvement de flexion

Posons :

$$v(x, t) = \phi(x) f(t) \quad (1.75)$$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

Soit:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.76)$$

Par remplaçant de (1.75) dans (1.76) on obtient :

$$EI \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} f(t) + \rho S \phi(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0 \quad (1.77)$$

Par séparation des variables :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^4 \phi}{dx^4} = - \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = Cte = \omega^2 \quad (1.78)$$

Dans ce cas, la constante doit être prise égale à  $+\omega^2$ . Il en découle:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0 \quad (1.79)$$

$$\frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} - \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \phi(x) = 0 \quad (1.80)$$

La solution de (1.79) est:

$$f(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (1.81)$$

Les solutions de (1.80) sont cherchées sous la forme  $\phi(x) = e^{rt}$

L'équation caractéristique :

$$r^4 - \frac{\rho S}{EI} \omega^2 = 0 \quad (1.82)$$

L'équation (1.82) a comme racines :  $r = \beta, -\beta, j\beta, -j\beta$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}} \omega^2 \quad (1.83)$$

Avec

Pour chaque valeur de  $\beta$ ,  $\phi(x)$  peut se mettre sous la forme :

$$\phi(x) = C\sin\beta x + D\cos\beta x + E\sinh\beta x + F\cosh\beta x \quad (1.84)$$

Les pulsations  $\omega$  sont déterminées par l'application des conditions aux limites. Les conditions les plus courantes sont:

$$\text{Libre (L) : } T = 0, C=0$$

$$\text{Encastrée (E) : } v = 0, \psi = 0$$

$$\text{Appuyée (A) : } v = 0, C=0 \quad (1.85)$$

Dans le cas d'une poutre encastrée libre et en supposant que l'extrémité encastrée soit à  $x = 0$ , et l'extrémité libre à  $x = L$ , on a compte tenu de  $\frac{dC}{dx} = T$ , (1.84) et (1.85) :

$$\begin{aligned} D + F &= 0 \\ C + E &= 0 \\ -C\sin\beta L - D\cos\beta L + E\sinh\beta L + F\cosh\beta L &= 0 \\ -C\cos\beta L + D\sin\beta L + E\cosh\beta L + F\sinh\beta L &= 0 \end{aligned} \quad (1.86)$$

Les solutions, autres que les solutions identiquement nulles, impliquent que le déterminant du système (1.86) soit nul.

Les calculs conduisent à :

$$1 + \cos\beta L \cosh\beta L = 0 \quad (1.87)$$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

Les solutions de cette équation ont la forme :  $\beta_n L = X_n$  et les pulsations, compte tenu de (1.83) s'écrivent:

$$\omega_n = \frac{X_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \beta_n = k_n = \sqrt{\omega^4} \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}, \quad C_f = \frac{\omega}{k}, \quad C_f = \sqrt{\omega^4} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (1.88)$$

Les premières valeurs de  $X_n^2$  pour les conditions aux limites les plus courantes sont présentées dans le tableau 2

		$X_1^2$	$X_2^2$	$X_3^2$	$X_4^2$	$X_5^2$
EL	$1 + chx \cos x = 0$	3.516	22.03	61.69	120.9	199.8
AA	$\sin x = 0$	9.869	39.47	88.82	157.9	246.7
EE	$1 - chx \cos x = 0$	22.37	61.67	120.9	199.8	298.5
LL	$1 - chx \cos x = 0$					
EA	$tgx = thx$	15.41	49.96	104.2	178.2	272.0
LA	$tgx = thx$					

### Relations d'orthogonalité

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) = \rho S \omega^2 \phi \quad (1.89)$$

(Cette équation est vérifiée pour les couples  $\omega_i, \phi_i$ , et  $\omega_j, \phi_j$ . Il en découle :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right) = \rho S \omega_i^2 \phi_i \quad (1.90)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \right) = \rho S \omega_j^2 \phi_j \quad (1.91)$$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

En intégrant deux fois par parties dans le cas des trois conditions aux limites courantes: L, E, A :

$$\int_0^L EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx \quad (1.92)$$

$$\int_0^L EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx \quad (1.93)$$

Comme  $\omega_i \neq \omega_j$ , la soustraction de (1.93) et (1.92) conduit aux conditions d'orthogonalités:

$$\int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx = 0 \quad (1.94)$$

$$\int_0^L EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx = 0 \quad (1.95)$$

De même que précédemment, on démontre que :

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^L EI \left( \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho S \phi_i^2 dx} = \frac{k_i}{m_i} \quad (1.96)$$

Avec  $k_i$  et  $m_i$  sont la raideur et la masse modales du mode  $i$ .

### Conditions aux limites

1. En  $x_1 = 0$

2.

$$v(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(0, t) = 0$$

Encastrement (déplacement + pente)

3.  $v(0, t) = 0$

$$EI_f \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(0, t) = 0$$

## Chapitre I : Généralité sur les vibrations

---

Appui (déplacement + moment fléchissant)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( EI_f \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) (0, t) = 0$$

Libre (Effort tranchant cisailant + M. fléchissant)

$$E \cdot I_f \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} (0, t) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( E \cdot I_f \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) (0, t) = 0$$

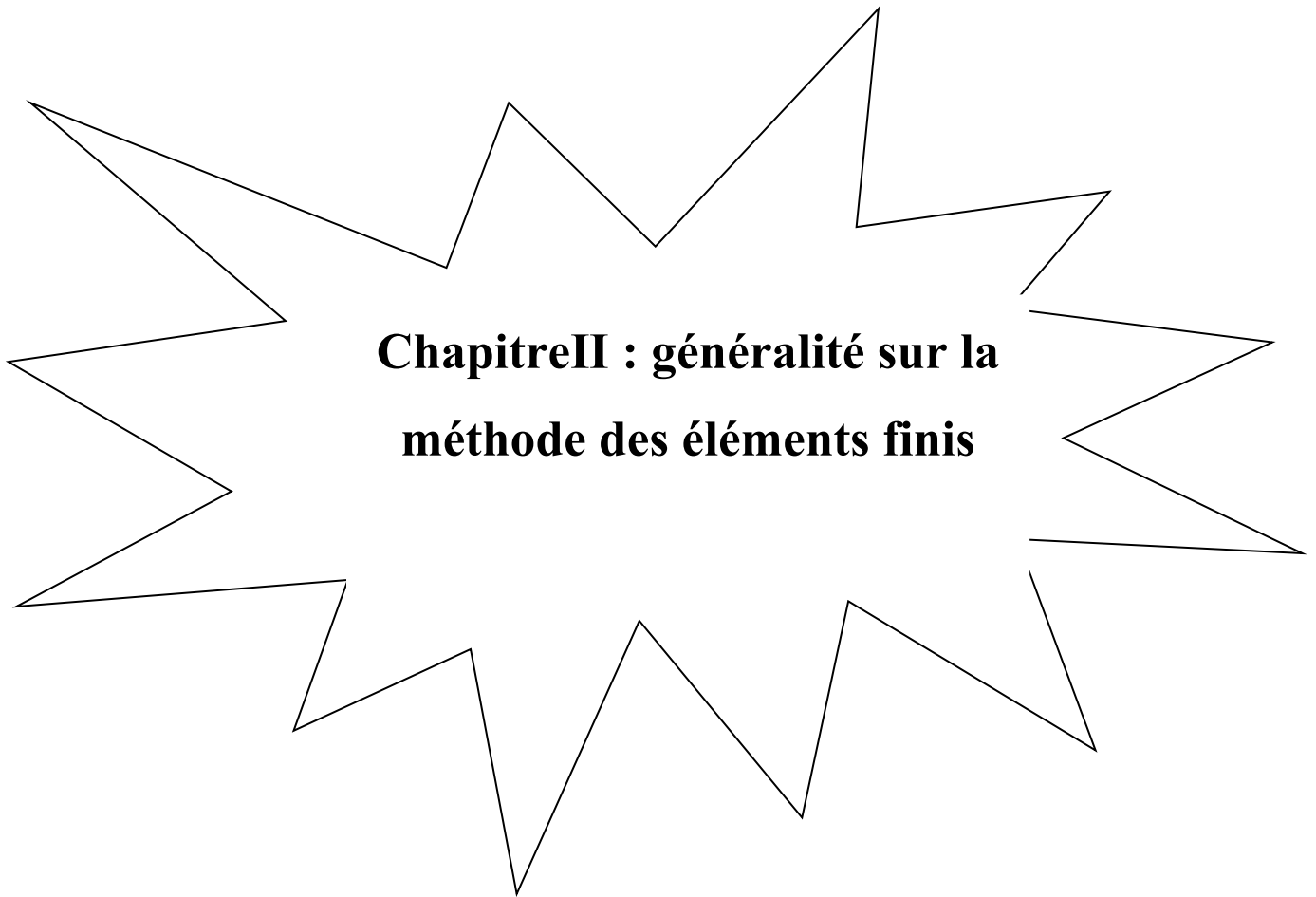
Liaison guidée

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} (0, t) = 0$$

**Remarque :** Tant qu'on traite des vibrations libres, le phénomène de résonance n'intervient pas. La résonance intervient uniquement en vibrations forcées lorsque la fréquence d'excitation par la force coïncide avec l'une des fréquences propres de la structure

### Résumé

Ce chapitre traite des **vibrations des systèmes continus**, un sujet fondamental en mécanique des structures. Il s'intéresse aux éléments comme les poutres ou les barres, qui peuvent vibrer selon trois modes principaux : **longitudinal**, **en torsion** ou **en flexion**. L'analyse repose sur des modèles physiques simplifiés, avec des matériaux supposés homogènes, isotropes et non dissipatifs. Lorsque les équations analytiques deviennent trop complexes, on utilise des **méthodes numériques**, notamment la méthode des éléments finis. Le chapitre présente également les concepts essentiels de **fréquences propres** et de **modes propres**, qui décrivent la façon naturelle dont une structure vibre.



## Chapitre II

### *Généralité sur la méthode des éléments finis*

#### 2.1 Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) constitue l'un des outils numériques les plus importants pour modéliser les vibrations dans les structures continues, offrant une solution précise et efficace à des problèmes souvent complexes pour les méthodes analytiques classiques. Cette approche repose sur la subdivision du système continu en un nombre fini d'éléments interconnectés, facilitant ainsi la formulation matricielle des équations gouvernantes du mouvement. Dans le contexte des vibrations, la MEF permet de calculer les fréquences naturelles et les modes propres en résolvant un problème aux valeurs propres dérivé des matrices de masse et de rigidité. Elle permet également d'étudier différents cas tels que la traction, la flexion et la torsion, contribuant ainsi à une meilleure compréhension de la réponse dynamique des structures. Grâce aux progrès en calcul numérique et aux outils de simulation, cette méthode est devenue incontournable pour analyser des structures complexes et optimiser leur conception face aux charges vibratoires. Ce chapitre vise donc à présenter l'application de la méthode des éléments finis dans la modélisation des vibrations, en mettant l'accent sur la détermination des fréquences de résonance dans différents types de sollicitations (traction, flexion et torsion).

#### Détail mathématique de la méthode des éléments finis (MEF)

##### 2.2 Équations aux dérivées partielles (EDP) [5]

Les équations aux dérivées partielles constituent le fondement mathématique des problèmes résolus par MEF. Elles expriment la relation entre les variables physiques (déplacement, contrainte, température) et leurs dérivées spatiales et temporelles.

#### Exemples courants en ingénierie:

##### 2.2.1 Équation de diffusion thermique:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.0)$$

##### 2.2.2 Équation d'élasticité linéaire (équation de Navier-Stokes simplifiée):

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

##### 2.2.3 Équation d'onde vibratoire:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (2.2)$$

**Principal défi:** La résolution analytique de ces équations est difficile (voire impossible) pour des géométries complexes, d'où l'utilisation de la **méthode des éléments finis** pour leur résolution numérique.

### 2.3 Formulation faible

La transformation des EDP en forme intégrale facilite leur résolution numérique.

**Étapes:**

2.3.1 **Multiplication par une fonction de pondération**  $w(x)$ :

$$\int_{\Omega} w \cdot (\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}) d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

2.3.2 **Intégration par parties: Pour réduire l'ordre de dérivation (exemple pour l'équation de la chaleur):**

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla^2 T d\Omega \rightarrow - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla T d\Omega + \text{conditions aux limites} \quad (2.4)$$

2.3.3 **Introduction des conditions aux limites:**

Conditions de **Dirichlet**: valeurs fixes des variables

Conditions de **Neumann**: valeurs des dérivées

**Exemple:** Formulation faible pour l'équation de diffusion:

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla T d\Omega = \alpha \int_{\partial\Omega} w \cdot \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.5)$$

## 2.4 Fonctions de forme et interpolation [6]

Les fonctions de forme relient les valeurs nodales aux valeurs internes de l'élément.

### 2.4.1 Propriétés fondamentales:

#### 3 Interpolation:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \cdot u_i \quad (2.6)$$

Où :

3.2  $N_i(x)$  : fonction de forme pour le nœud  $i$

3.3  $u_i$  : valeur du déplacement au nœud  $i$

#### Propriété de Kronecker Delta :

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.7)$$

#### Types de fonctions de forme:

**2.4.2 Éléments linéaires (1D):** Pour un élément barre à deux nœuds:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (2.8)$$

**2.4.3 Éléments quadrangulaires (2D):** Pour un élément quadrilatéral à 4 nœuds (Q4):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 \pm \xi)(1 \pm \eta) \quad (2.9)$$

où  $\xi, \eta$  sont des coordonnées naturelles  $[-1,1]$

**2.4.4 Éléments triangulaires (2D):** Pour un élément triangulaire à 3 nœuds (T3):

$$N_i(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A} \quad (2.10)$$

$A$  étant l'aire du triangle

#### Résumé des relations entre ces concepts

1. Le problème physique est décrit par des **EDP**
2. Transformation en **formulation faible** pour faciliter la résolution numérique

3. Approximation des solutions avec des **fonctions de forme** dans chaque élément
4. Assemblage des éléments pour obtenir le système global résolu numériquement

**Exemple appliqué: Analyse d'une poutre sous charge**

1. **Équation originale (EDP):**

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (2.11)$$

2. **Formulation faible:**

$$\int_0^L v \cdot EI \frac{d^4 w}{dx^4} dx = \int_0^L v \cdot q(x) dx \quad (2.12)$$

Après intégration par parties:

$$\int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int_0^L v \cdot q(x) dx + \text{conditions aux limites} \quad (2.13)$$

3. **Utilisation des fonctions de forme:** Pour un élément poutre à deux nœuds (chaque nœud ayant un déplacement  $w$  et une rotation  $\theta$ ):

$$w(x) = N_1(x)w_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)w_2 + N_4(x)\theta_2 \quad (2.14)$$

Où  $N_i$  sont des fonctions d'Hermite

## 2.5 La méthode de Galerkin [7]

La méthode de Galerkin est une approche variationnelle pour résoudre des équations différentielles partielles (EDP). Elle est largement utilisée dans le cadre de la méthode des éléments finis (MEF) et repose sur une approximation du problème dans un sous-espace de dimension finie.

### 2.5.1 Formulation Variationnelle

Avant d'appliquer la méthode de Galerkin, on transforme l'EDP en une formulation faible. Prenons l'exemple de l'équation de Poisson avec conditions de Dirichlet homogènes :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.15)$$

## Chapitre II : *généralité sur la méthode des éléments finis*

---

En multipliant par une fonction test  $v \in H_0^1(\Omega)$  et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.16)$$

### 2.5.2 Discrétisation par Galerkin

On cherche une solution approchée  $u_h$  dans un sous-espace  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  de dimension finie  $N$ .

#### Espace d'approximation $V_h$

On choisit une base  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  de  $V_h$  (par exemple, des éléments finis de Lagrange). La solution approchée s'écrit :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x). \quad (2.17)$$

#### Problème discret

La méthode de Galerkin conduit à :

$$a(u_h, \phi_i) = L(\phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (2.18)$$

Où :

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx, \quad L(v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx. \quad (2.19)$$

### 2.5.3 Système Linéaire

Le problème discret se réécrit sous forme matricielle :

$$AU = F, \quad (2.20)$$

Avec :

- 3  $A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$  (matrice de rigidité),
- 4  $F_i = L(\phi_i)$  (vecteur de charge),
- 5  $U = (u_1, \dots, u_N)^T$  (inconnues nodales).

### 2.5.4 Convergence

L'erreur  $\|u - u_h\|_{H^1}$  est contrôlée par le meilleur approximant dans  $V_h$  :

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1}. \quad (2.21)$$

Pour des éléments finis de degré  $k$ , si  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ , on a :

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch^k |u|_{H^{k+1}}. \quad (2.22)$$

## 2.6 Méthode des éléments finis (dans le cas de vibration) [8]

Les étapes principales pour appliquer la **méthode des éléments finis** à l'étude des vibrations sont les suivantes :

### 2.6.1 Discrétisation du modèle en éléments finis

La structure continue (poutres, poteaux, etc.) est divisée en plusieurs petits éléments interconnectés

Le **type d'élément** (barre, plaque, volume...) est choisi selon la nature du problème

### 2.6.2 Choix des fonctions de forme

Utilisation de fonctions d'interpolation pour représenter le champ de déplacement

Ces fonctions relient les déplacements nodaux aux déplacements internes de l'élément

### Formulation des matrices élémentaires

Matrice de rigidité  $[K_e]$  dérivée par le principe de l'énergie potentielle

Matrice de masse  $[M_e]$  (cohérente ou concentrée)

Matrice d'amortissement  $[C_e]$  si nécessaire

### Assemblage des matrices globales

Combinaison des matrices élémentaires en matrices globales  $[K], [M], [C]$

Application des conditions aux limites

### 2.6.3 Formulation et résolution des équations du mouvement

$$\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (2.23)$$

Pour les vibrations libres (sans amortissement ni force extérieure) :

$$\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (2.24)$$

En supposant une solution harmonique  $\{u\} = \{\phi\}e^{i\omega t}$ , on obtient le problème aux valeurs propres :

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = 0 \quad (2.25)$$

### **Calcul des fréquences propres et modes propres**

Résolution du problème aux valeurs propres

Extraction des fréquences naturelles  $\omega_n$  et modes propres  $\{\phi_n\}$

Tri des fréquences par ordre croissant

#### **2.6.5 Analyse de la réponse dynamique (optionnelle)**

Intégration temporelle directe pour les systèmes non-linéaires

Analyse spectrale pour les systèmes linéaires sous chargement périodique

#### **2.6.6 Interprétation et validation des résultats**

Comparaison avec solutions analytiques ou expérimentales

Étude de convergence du maillage

### **2.7 Etude de vibration longitudinal (cas de traction) en utilisant MEF**

#### **2.7.1 Hypothèses**

Élément de poutre 1D de longueur  $L$ .

Matériau élastique linéaire (loi de Hooke :  $\sigma = E\epsilon$ ).

Déplacements axiaux  $u(x)$  décrits par une interpolation linéaire.

Petites déformations.

#### **2.7.2 Déplacements Nodaux et Fonctions de Forme**

Déplacements nodaux :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \text{où } u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont les déplacements aux nœuds 1 et 2.} \quad (2.26)$$

Interpolation linéaire :

$$\mathbf{u}(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2, \quad (2.27)$$

avec les fonctions de forme :

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad N_2(x) = \frac{x}{L}. \quad (2.28)$$

### 2.7.3 Relation Déformation-Déplacement

Déformation axiale  $\epsilon(x)$  :

$$\epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(N_1 u_1 + N_2 u_2) = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.29)$$

où  $\mathbf{B} = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right]$  est la matrice des dérivées des fonctions de forme.

### 2.7.4 Énergie de Déformation et Matrice de Rigidité

Énergie de déformation  $U$  :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E A \epsilon^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left( \int_0^L E A \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right) \mathbf{u}. \quad (2.30)$$

Matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  :

$$\mathbf{K} = \int_0^L E A \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = EA \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

### 2.7.5 Relation Efforts-Déplacements

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

## 2.8 Matrice de Masse pour un Élément de Poutre

### 2.8.1 Hypothèses

Mêmes hypothèses que pour la rigidité, avec une masse volumique  $\rho$ .

### 2.8.2 Énergie Cinétique

Énergie cinétique  $T$  :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (2.33)$$

Approximation du déplacement :

$$u(x, t) = N_1(x)u_1(t) + N_2(x)u_2(t). \quad (2.34)$$

Vitesse :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N_1 \dot{u}_1 + N_2 \dot{u}_2. \quad (2.35)$$

### 2.8.3 Matrice de Masse Cohérente

Formulation :

$$T = \frac{1}{2} \dot{u}^T \left( \int_0^L \rho A N^T N dx \right) \dot{u}, \quad \text{où } N = [N_1 \quad N_2]. \quad (2.36)$$

Calcul :

$$M = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2^2 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

### 2.8.4 Matrice de Masse Diagonale (Lumped)

Approximation : Concentrer la masse aux nœuds :

$$M = \frac{\rho A L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

## 2.9 Exemple : Poutre en traction divisée en 3 points (2 éléments)

### 2.9.1 Données du problème

Longueur totale :  $L = 2 \text{ m}$  (2 éléments de  $L_e = 1 \text{ m}$ )

Section :  $A = 0.01 \text{ m}^2$

Module de Young :  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$

Masse volumique :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

### 2.9.2 Matrices élémentaires

Matrice de rigidité élémentaire  $K_e$  :

$$K_e = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times 10^9 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Matrice de masse élémentaire  $M_e$  :

$$M_e = \frac{\rho AL_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 13 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

### 2.9.3 Assemblage des matrices globales

Matrice de rigidité globale  $K$  :

$$K = 2 \times 10^9 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Matrice de masse globale  $M$  :

$$M = 13 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

### 2.9.4 Résolution du problème aux valeurs propres

On résout:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

Equation caractéristique:

$$\det \left( 2 \times 10^9 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \times 13 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (2.44)$$

## 5. Résultats

Mode	$\omega$ (rad/s)	$f$ (Hz)
1 (Rigide)	0	0
2 (Fondamental)	$1.54 \times 10^4$	2450
3 (Harmonique)	$3.08 \times 10^4$	4900

### Interprétation physique

Le mode 1 ( $\omega = 0$ ) correspond au mouvement de corps rigide

Le mode 2 est le premier mode de vibration flexible

Le mode 3 montre un nœud vibratoire au centre

### Applications pratiques

Éviter les résonances dans les structures

Validation des modèles éléments finis

Conception de systèmes vibrants

## 2.10 Etude de vibration transversal (cas de flexion) en utilisant MEF

On considère une poutre

### 2.10.1 D'Euler-Bernoulli à 2 nœuds avec :

Longueur :  $L$

Module de Young :  $E$

Moment d'inertie :  $I$

Variables nodales :  $v_1, \theta_1$  (nœud 1) et  $v_2, \theta_2$  (nœud 2)

### 2.10.2 Dérivation des Fonctions de Forme

#### Équation de la déformée

La flèche  $v(x)$  est interpolée par un polynôme cubique :

$$v(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (2.45)$$

#### Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \text{En } x = 0: v(0) &= v_1 = a \\ \text{En } x = 0: v'(0) &= \theta_1 = b \\ \text{En } x = L: v(L) &= v_2 = a + bL + cL^2 + dL^3 \\ \text{En } x = L: v'(L) &= \theta_2 = b + 2cL + 3dL^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

#### Résolution du système

On obtient les coefficients :

$$\begin{aligned}
 a &= v_1 \\
 b &= \theta_1 \\
 c &= \frac{3(v_2 - v_1)}{L^2} - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{L} \\
 d &= \frac{2(v_1 - v_2)}{L^3} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{L^2}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

### Fonctions de forme

Expression finale avec fonctions d'Hermite :

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right)v_1 + \left(x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_1 \\
 &+ \underbrace{\left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right)}_{N_3(x)}v_2 + \underbrace{\left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)}_{N_4(x)}\theta_2
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

### Dérivation de la Matrice de Rigidité

#### Relation courbure-déplacement

La courbure  $\kappa$  s'exprime comme :

$$\kappa = \frac{d^2v}{dx^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{u}} \tag{2.49}$$

### Énergie de déformation

L'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E I \kappa^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left( EI \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right) \mathbf{u} \quad (2.50)$$

### Calcul de la matrice de rigidité

Après intégration, on obtient :

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Matrice de masse :

#### 2. Cinématique de la poutre

Le déplacement transversal est décrit par le polynôme cubique :

$$v(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 \quad (2.52)$$

#### 6 3. Conditions aux limites

Identiques à la matrice de rigidité :

$$\begin{aligned} \text{En } x = 0: & \begin{cases} v(0, t) = v_1(t) \\ \theta(0, t) = \theta_1(t) \end{cases} \\ \text{En } x = L: & \begin{cases} v(L, t) = v_2(t) \\ \theta(L, t) = \theta_2(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.53)$$

#### 4. Fonctions de forme

Nous utilisons les mêmes fonctions de forme Hermitiennes :

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
 N_2(x) &= x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\
 N_3(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
 N_4(x) &= -\frac{x^2}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

### 5. Énergie cinétique

L'énergie cinétique s'exprime comme :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx
 \tag{2.55}$$

En utilisant l'approximation par les fonctions de forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}
 \tag{2.56}$$

### 6. Construction de la matrice

La matrice de masse cohérente est obtenue par :

$$\mathbf{M}_e = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 \end{bmatrix} dx
 \tag{2.57}$$

### 7. Calcul des intégrales

Exemple de calcul pour deux termes :

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \rho A \int_0^L \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right)^2 dx = \frac{156}{420} \rho A L \\
 M_{12} &= \rho A \int_0^L \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right) \left(x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) dx = \frac{22L}{420} \rho A L
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

## 8. Matrice finale

Après calcul de tous les termes, on obtient :

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

### Étude de vibration en torsion en utilisant la MEF

#### Paramètres de la poutre

On considère une poutre à 2 nœuds soumise à une torsion pure. Les paramètres sont :

- 7 Longueur :  $L$
- 8 Module de cisaillement :  $G$
- 9 Moment d'inertie polaire :  $J$
- 10 Variables nodales :  $\phi_1$  (angle de torsion au nœud 1) et  $\phi_2$  (angle de torsion au nœud 2)

#### 1. Dérivation des Fonctions de Forme

##### Équation de la torsion

L'angle de torsion  $\phi(x)$  est interpolé par un polynôme linéaire :

$$\phi(x) = a + bx \quad (2.60)$$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \text{En } x = 0: \phi(0) = \phi_1 = a \\ \text{En } x = L: \phi(L) = \phi_2 = a + bL \end{cases} \quad (2.61)$$

##### Résolution du système

On obtient les coefficients :

$$\begin{cases} a = \phi_1 \\ b = \frac{\phi_2 - \phi_1}{L} \end{cases} \quad (2.62)$$

### Fonctions de forme

L'angle de torsion s'exprime comme :

$$\phi(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{x}{L}\right)}_{N_1(x)} \phi_1 + \underbrace{\left(\frac{x}{L}\right)}_{N_2(x)} \phi_2 \quad (2.63)$$

### 2. Dérivation de la Matrice de Rigidité

#### Relation déformation-déplacement

La déformation en torsion  $\gamma$  est donnée par :

$$\gamma = \frac{d\phi}{dx} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.64)$$

Où :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

#### Énergie de déformation :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L GJ \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left( GJ \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right) \mathbf{u} \quad (2.66)$$

#### Calcul de la matrice de rigidité :

$$\mathbf{K}_e = GJ \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\boxed{\mathbf{K}_e = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \quad (2.68)$$

### 3. Dérivation de la Matrice de Masse

#### Énergie cinétique

L'énergie cinétique due à la rotation est :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho J \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}} \quad (2.69)$$

Où  $\dot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{Bmatrix}$ .

**Construction de la matrice de masse**

$$\mathbf{M}_e = \rho J \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{bmatrix} dx \quad (2.70)$$

Avec  $N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$  et  $N_2(x) = \frac{x}{L}$ .

**Calcul des intégrales**

$$\begin{cases} M_{11} = \rho J \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{\rho J L}{3} \\ M_{12} = M_{21} = \rho J \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) dx = \frac{\rho J L}{6} \\ M_{22} = \rho J \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{\rho J L}{3} \end{cases} \quad (2.71)$$

**Matrice finale**

$$\boxed{\mathbf{M}_e = \frac{\rho J L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \quad (2.72)$$

**Formulation d'interaction fluide-structure par la méthode des éléments finis [9-11]**

**1.1 Détermination des matrices élémentaires**

Considérons le modèle éléments finis d'une structure discrétisée en  $N$  degrés de libertés. Le comportement dynamique de la structure est décrit par l'équation de vibration des poutres dans la direction transversale ( $Y$ ). CE système d'équations peut être assemblé en un système élémentaire de la forme,

$$[M_t]\{\ddot{q}_e\} + [C]\{\dot{q}_e\} + [K_t]\{q_e\} = 0 \quad (2.73)$$

## Chapitre II : *généralité sur la méthode des éléments finis*

---

Avec

$[M_t]$  Matrice élémentaire de masse,

$[C]$  Matrice d'amortissement du système

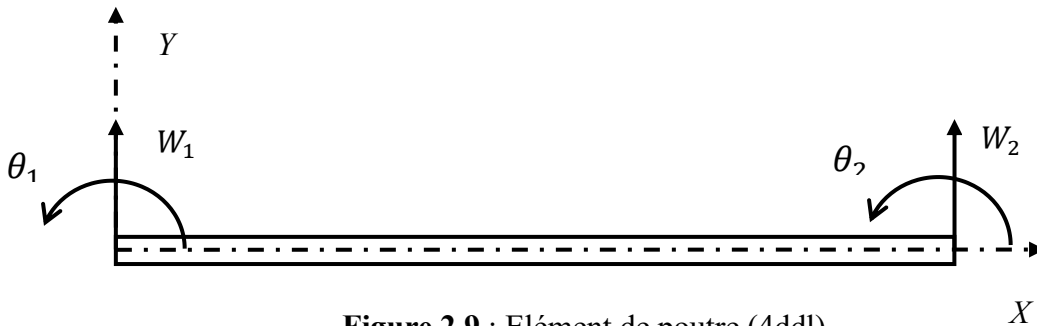
$[K_t]$  Matrice élémentaire de raideur,

Le champ de déplacement élémentaire est,

$$\{q_e\} = [W_1 \theta_1 W_2 \theta_2]^T \quad (2.74)$$

Où

$W_1, \theta_1, W_2$  et  $\theta_2$  : Sont les déplacements et les rotations aux nœuds, l'élément utilisé est une barre (voir figure 3.1) à 2 nœuds avec deux degrés de liberté.



**Figure 2.9** : Élément de poutre (4ddl)

Avec

$W(X, T)$  : Déplacement transversal

$\theta(X, T)$  : Rotation de la section droite,

$$\theta(X, T) = \frac{\partial W(X, T)}{\partial X} \quad (2.75)$$

## Chapitre II : *généralité sur la méthode des éléments finis*

---

Le déplacement transversal exprimés en fonction des déplacements nodaux s'écrivent,

$$W(X, T) = \sum_{i=1}^N N_i(X)W_i(T) \quad (2.76)$$

Avec

$[N_i]$  : Sont des fonctions de formes pour l'élément de poutre à deux degrés de liberté

$i=1..4$ .

L'interpolation du champ des déplacements est donnée par :

$$\begin{aligned} W(X, T) &= b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \\ \theta(X, T) &= b_1 + 2b_2X + 3b_3X^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Peuvent être obtenus les déplacements et les rotations locales par l'interpolation sur les déplacements aux nœuds :

$$W(X, T) = N_1(X)W_1 + N_2(X)\theta_1 + N_3(X)W_2 + N_4(X)\theta_2 \quad (2.78)$$

$$\theta(X, T) = N'_1(X)W_1 + N'_2(X)\theta_1 + N'_3(X)W_2 + N'_4(X)\theta_2 \quad (2.79)$$

Les fonctions de forme sont données par,

$$\left\{ \begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3} \\ N_2 &= X - 2\frac{X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2} \\ N_3 &= 3\frac{X^2}{L^2} - 2\frac{X^3}{L^3} \\ N_4 &= \frac{X^3}{L^2} - \frac{X^2}{L} \end{aligned} \right. \quad (2.80)$$

## Chapitre II : *généralité sur la méthode des éléments finis*

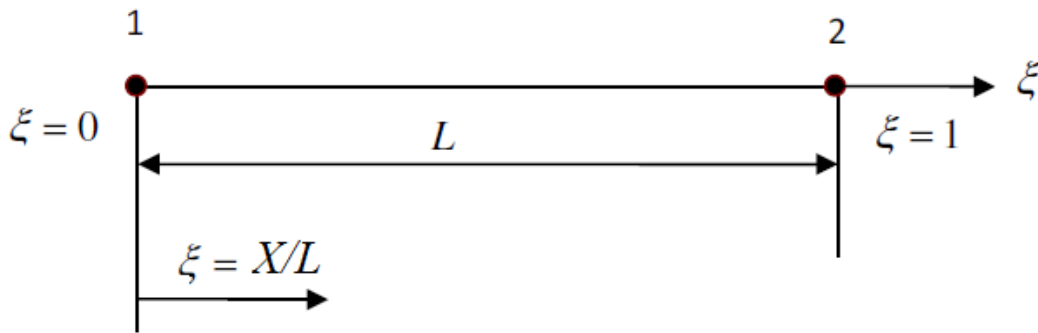
---

Les fonctions de forme pour un élément de référence sont données par,

$$\begin{cases} N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2 = L(\xi - 2\xi^2 + 3\xi^3) \\ N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_4 = L\xi^2(\xi - 1) \end{cases} \quad (2.81)$$

Les coordonnées locales sont liées aux coordonnées adimensionnelles par,

$$\xi = \frac{X}{L} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.82)$$



**Figure 3.0 :** Elément de référence

On peut écrire cette interpolation sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} W(X, T) \\ \theta(X, T) \end{Bmatrix} = [N_e(X)] \{q_e(T)\} \quad (2.83)$$

Détermination les matrices pour la conduite

La détermination de toutes les matrices sera faite par la méthode des éléments finis.

*Matrice de la rigidité de la conduite*

D'après l'équation de l'énergie de déformation (potentiel) cas de poutre,

$$V = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right)^2 dX \quad (2.84)$$

On a

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = [K_s] \{q_i\}$$

Avec

$[K_s]$  Matrice de rigidité de la conduite

L'énergie de déformation adimensionnelle est donnée par l'expression,

$$V = \frac{EI}{2L^3} \int_0^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} d\xi \quad (2.85)$$

$$V = \frac{EI}{2L^3} \int_0^1 \dot{W}^T \dot{W} d\xi \quad (2.86)$$

A partir de l'équation

$$\dot{W} = [N_1'' N_2'' N_3'' N_4''] \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Avec

$$\dot{W}^T = [W_1 \theta_1 W_2 \theta_2] \begin{bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Donc l'expression du potentiel sera,

$$V = \frac{EI}{2L^3} \int_0^1 [W_1 \theta_1 W_2 \theta_2] \begin{bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{bmatrix} [N_1'' N_2'' N_3'' N_4''] \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.89)$$

A partir de l'équation on peut exprimer,

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 [W_1 \theta_1 W_2 \theta_2] [K_s] \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.90)$$

La raideur de la conduite est,

$$[K_s] = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{bmatrix} [N_1'' N_2'' N_3'' N_4''] d\xi \quad (2.91)$$

La matrice de rigidité pour la structure est,

$$[K_s] = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1''^2 & N_1'' N_2'' & N_1'' N_3'' & N_1'' N_4'' \\ N_2'' N_1'' & N_2''^2 & N_2'' N_3'' & N_2'' N_4'' \\ N_3'' N_1'' & N_3'' N_2'' & N_3''^2 & N_3'' N_4'' \\ N_4'' N_1'' & N_4'' N_2'' & N_4'' N_3'' & N_4''^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.92)$$

$$[K_s] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

## Chapitre II : *généralité sur la méthode des éléments finis*

---

Matrice masse de la conduite

L'énergie cinétique du solide est donnée par,

$$E_{Cs} = \frac{1}{2} \rho_s A_s \int \frac{d^2W}{dT^2} dX \quad (2.94)$$

Avec

$\rho_s$ , la masse volumique de la structure et,

$A_s$ , Aire de structure

L'énergie cinétique adimensionnelle est donnée par l'expression,

$$E_{Cs} = \frac{1}{2} \rho_s A_s L \int_0^1 \dot{W}^T \dot{W} d\xi \quad (2.95)$$

En introduisant les fonctions on trouve,

$$E_{Cs} = \frac{1}{2} \rho_s A_s L \int_0^1 \{\dot{q}_i\}^T [N_i]^T [N_i] \{\dot{q}_i\} d\xi \quad (2.96)$$

Avec

$$E_{Cs} = \frac{1}{2} \int_0^1 \{\dot{q}_i\}^T [m] \{\dot{q}_i\} d\xi \quad (2.97)$$

Donc

$$[m] = \rho_s A_s L [N_1 N_2 N_3 N_4] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$[m] = \rho_s A_s L \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3^2 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.99)$$

$$[m] = \frac{\rho_s A_s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

### 1.1.1 Détermination les matrices pour le fluide

*Matrice de rigidité du fluide*

L'équation de l'énergie cinétique pour un élément du fluide est

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \rho_f A_f \int \left( U \frac{dW}{dX} + \frac{dW}{dT} \right)^2 dX \quad (2.101)$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \rho_f A_f \int \left( U^2 \frac{dW^2}{dX^2} + 2U \frac{d^2W}{dT dX} + \frac{d^2W}{dT^2} \right) dX \quad (2.102)$$

Avec

$\rho_f$ , la masse volumique du fluide et,

$A_s$ , Aire du fluide

L'équation a contient trois termes,

Le premier terme signifie la matrice de la rigidité du fluide,

$$\frac{1}{2} \rho_f A_f U^2 \int \frac{dW^2}{dX^2} dX \quad (2.103)$$

Le deuxième terme signifie la matrice masse du fluide,

$$\frac{1}{2} \rho_f A_f \int \frac{dW^2}{dT^2} dX \quad (2.104)$$

Le dernier terme c'est la matrice d'amortissement

$$\frac{1}{2} (\rho_f A_f) 2U \int \frac{d^2W}{dT dX} dX \quad (2.105)$$

Matrice de la rigidité du fluide

$$\frac{1}{2} \rho_f A_f U^2 \int \frac{dW^2}{dX^2} dX = \frac{1}{2} \rho_f A_f U^2 \int_0^L \frac{dW}{dX} \frac{dW}{dX} dX \quad (2.106)$$

L'expression en coordonnées adimensionnelles est donnée par,

$$\frac{1}{2L} \rho_f A_f U^2 \int_0^1 \frac{dW}{d\xi} \frac{dW}{d\xi} d\xi \quad (2.107)$$

Et donc

$$\frac{1}{2L} \rho_f A_f U^2 \int_0^1 \dot{W}^T \dot{W} d\xi \quad (2.108)$$

En utilisant les fonctions de forme,

$$\frac{1}{2L} \rho_f A_f U^2 \int_0^1 \{q_e\}^T [N_i']^T [N_i'] \{q_e\} d\xi \quad (2.109)$$

Sachant que

$$\frac{1}{2L} \rho_f A_f U^2 \int_0^1 [W_1 \theta_1 W_2 \theta_2] \begin{bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ N_4' \end{bmatrix} [N_1' N_2' N_3' N_4'] \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.110)$$

## Chapitre II : *généralité sur la méthode des éléments finis*

---

On sait que l'énergie de déformation pour un fluide est [52],

$$\frac{1}{2L} \rho_f A_f U^2 \int_0^1 [W_1 \theta_1 W_2 \theta_2] [K_f] \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.111)$$

Avec

$[K_f]$  Matrice de rigidité de fluide

On trouve la forme de rigidité du fluide sous l'expression,

$$[K_f] = \frac{\rho_f A_f U^2}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \\ N'_4 \end{bmatrix} [N'_1 N'_2 N'_3 N'_4] d\xi \quad (2.112)$$

La matrice de rigidité du fluide pour notre system est,

$$[K_f] = \frac{\rho_f A_f U^2}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1'^2 & N_1' N_2' & N_1' N_3' & N_1' N_4' \\ N_2' N_1' & N_2'^2 & N_2' N_3' & N_2' N_4' \\ N_3' N_1' & N_3' N_2' & N_3'^2 & N_3' N_4' \\ N_4' N_1' & N_4' N_2' & N_4' N_3' & N_4'^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.113)$$

$$[K_f] = \frac{\rho_f A_f U^2}{L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 3L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

*Matrice masse du fluide*

Pour la deuxième terme de l'énergie cinétique du fluide,

$$\frac{1}{2} \rho_f A_f \int \frac{dW^2}{dT^2} dX = \frac{1}{2} \rho_f A_f U^2 \int_0^L \dot{W}^T \dot{W} dX \quad (2.115)$$

## Chapitre II : *généralité sur la méthode des éléments finis*

---

En introduisant la matrice de fonction on obtient :

$$\frac{1}{2} \rho_f A_f L \int_0^1 \{\dot{q}_e\}^T [N_i']^T [N_i'] \{\dot{q}_e\} d\xi \quad (2.116)$$

On sait que l'énergie cinétique est,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \{\dot{q}_e\}^T [M] \{\dot{q}_e\} d\xi \quad (2.117)$$

Donc

$$\rho_f A_f L \int_0^1 [N_1 N_2 N_3 N_4] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.118)$$

De cela

$$[M] = \rho_f A_f L \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3^2 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.119)$$

La matrice masse du fluide pour notre system est,

$$[M] = \frac{\rho_f A_f L}{420} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 3L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

*La matrice d'amortissement du fluide*

Le troisième terme de l'énergie cinétique contribue à l'expression de la matrice d'amortissement et le system,

$$\frac{1}{2} \rho_f A_f \int 2U \frac{d^2 W}{dT dX} dX = \frac{1}{2} \rho_f A_f 2U \int \frac{dW}{dT} \frac{dW}{dX} dX \quad (2.121)$$

En utilisant les coordonnées adimensionnelles et les fonctions de forme donc on trouve,

$$\frac{1}{2} \rho_f A_f \int 2U \{q_e\}^T [N_i]^T [N_i'] \{q_e\} d\xi \quad (2.122)$$

Avec [51],

$$[C_f] = 2U \rho_f A_f \int [N_i]^T [N_i'] d\xi \quad (2.123)$$

Donc

$$[C_f] = 2U \rho_f A_f \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1 N_1' & N_1 N_2' & N_1 N_3' & N_1 N_4' \\ N_2 N_1' & N_2 N_2' & N_2 N_3' & N_2 N_4' \\ N_3 N_1' & N_3 N_2' & N_3 N_3' & N_3 N_4' \\ N_4 N_1' & N_4 N_2' & N_4 N_3' & N_4 N_4' \end{bmatrix} d\xi \quad (2.124)$$

La matrice d'amortissement du system est,

$$[C] \equiv [C_f] = \frac{2U \rho_f A_f}{30} \begin{bmatrix} -30 & 6L & 30 & -6L \\ -6L & 0 & 6L & -L^2 \\ -30 & -6L & 30 & 6L \\ 6L & L^2 & -6L & 0 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

L'équation du mouvement structure plus fluide

En appliquant principe de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (2.126)$$

Où

$E_C$ , L'énergie cinétique du système fluide plus conduite

Donc, on peut représenter l'équation du mouvement (3.1) sous,

$$([M_s] + [M_f])\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + ([K_s] - [K_f])\{q\} = 0 \quad (2.127)$$

On peut exprimer cette équation sous,

$$([M_t])\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + ([K_t])\{q\} = 0 \quad (2.128)$$

$$\{q\} = \{A\}. \exp(\lambda t)$$

Avec  $\lambda$  est la valeur propre du système et le vecteur propre correspondant de cette valeur est

$$\{A\}, \quad \lambda = \omega j$$

Notre système sera,

$$\{([M_s] + [M_f])\{-\omega^2\} + [C]\{\omega j\} + ([K_s] - [K_f])\}\{A\}. \exp(\omega j t) = 0 \quad (2.129)$$

Et donc,

$$([M_s] + [M_f])\{-\omega^2\} + [C]\{\omega j\} + ([K_s] + [K_f])\{A\} = 0 \quad (2.130)$$

L'équation du mouvement du système est,

$$(-\omega^2[M_t]) + \omega j[C] + ([K_t]) = 0 \quad (2.131)$$

Dans une notre étude, les paramètres de fréquences adimensionnelles sont donné par l'expression suivante,

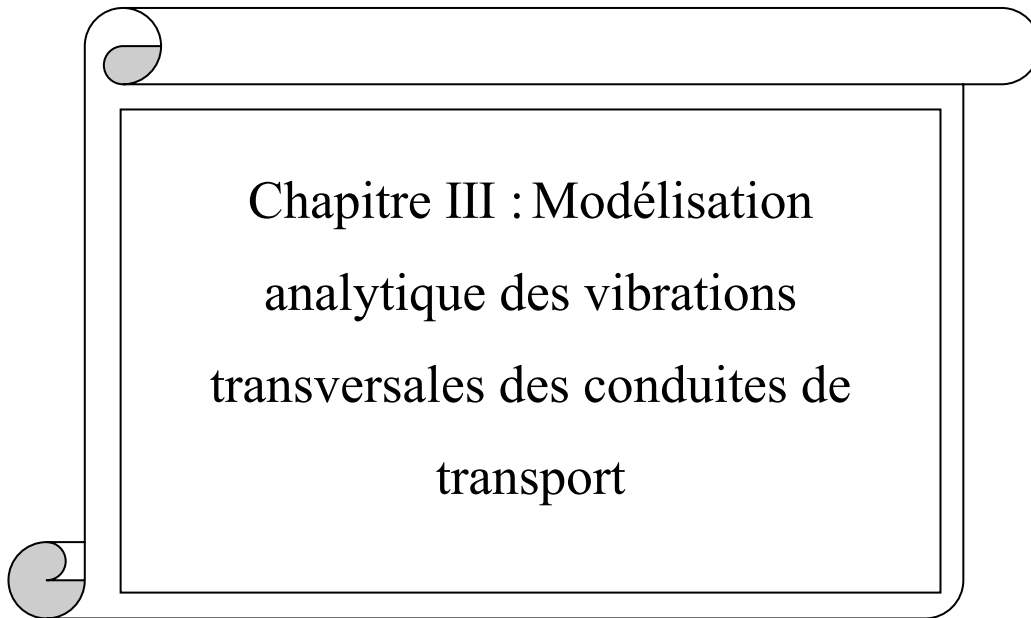
$$\Omega = \left(\frac{m_f + m_s}{EI}\right)^{1/2} \omega L^2 \quad (2.132)$$

Avec  $\omega$ , pulsation propre du système,

$$\omega = 2\pi f$$

Dans l'expression  $f$ : c'est la fréquence naturelle de notre poutre





### Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

#### 1 Introduction

Cette section expose l'approche théorique du problème des vibrations induites par l'écoulement d'un fluide dans une conduite. L'objectif est d'analyser les effets de couplage dynamique entre le fluide et la paroi de la conduite. L'étude porte sur un tuyau droit en acier, de section circulaire, en adoptant l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire. Le matériau du tuyau et le fluide sont supposés homogènes et isotropes.

#### 2 Equations du mouvement et conditions aux limites

##### 2.1 Théorie des poutres d'Euler-Bernoulli

Les équations du mouvement du tuyau de transport ont été initialement obtenues par Bourrières. Nous décrivons ici le développement des équations telles que cela apparaît dans. On cherche à construire la forme de mouvements possibles de vibrations libres d'une poutre droite. La poutre a une longueur  $L$ , une section  $A$  et un moment quadratique  $I$ . Le matériau élastique dont elle est constituée est homogène de module d'Young  $E$ , de masse  $m_s$ . Conduisant un fluide de masse linéique  $m_f$  à la vitesse moyenne  $U$ . Le déplacement du tuyau entraîne une force de frottement avec le fluide extérieur, caractérisée par le coefficient de frottement  $c$ . Quelques approximations doivent être faites :

- Le tuyau est inextensible ; son déplacement latéral est exprimé par  $Y(X, T)$ , on note  $W(X, T)$  la flèche latérale d'une section située à l'axe  $Y$ .
- Le tuyau peut être assimilé à une poutre de type Bernoulli-Euler, de flèche  $Y(X, T)$  petite.
- Le déplacement  $Y(X, T)$  est d'amplitude et de longueur d'onde faible devant le diamètre du tuyau. Aussi l'abscisse curviligne ( $s$ ) est-elle équivalente à la coordonnée cartésienne  $X$ .
- L'écoulement considéré est uniforme, peut être vu comme une colonne sans aucune rigidité se déplaçant à l'intérieur d'éconduite à la vitesse  $U$ .

Considérons alors les éléments de fluide et de solide infinitésimal  $\delta s$ , représentés sur la figure 3.1.

Dans la figure 3.1a on apparaît les différentes forces agissant sur l'élément fluide, les forces induites par le gradient de pression, la réaction normale du tuyau sur le fluide, la réaction tangentielle associée aux frottements visqueux et la force de gravité.

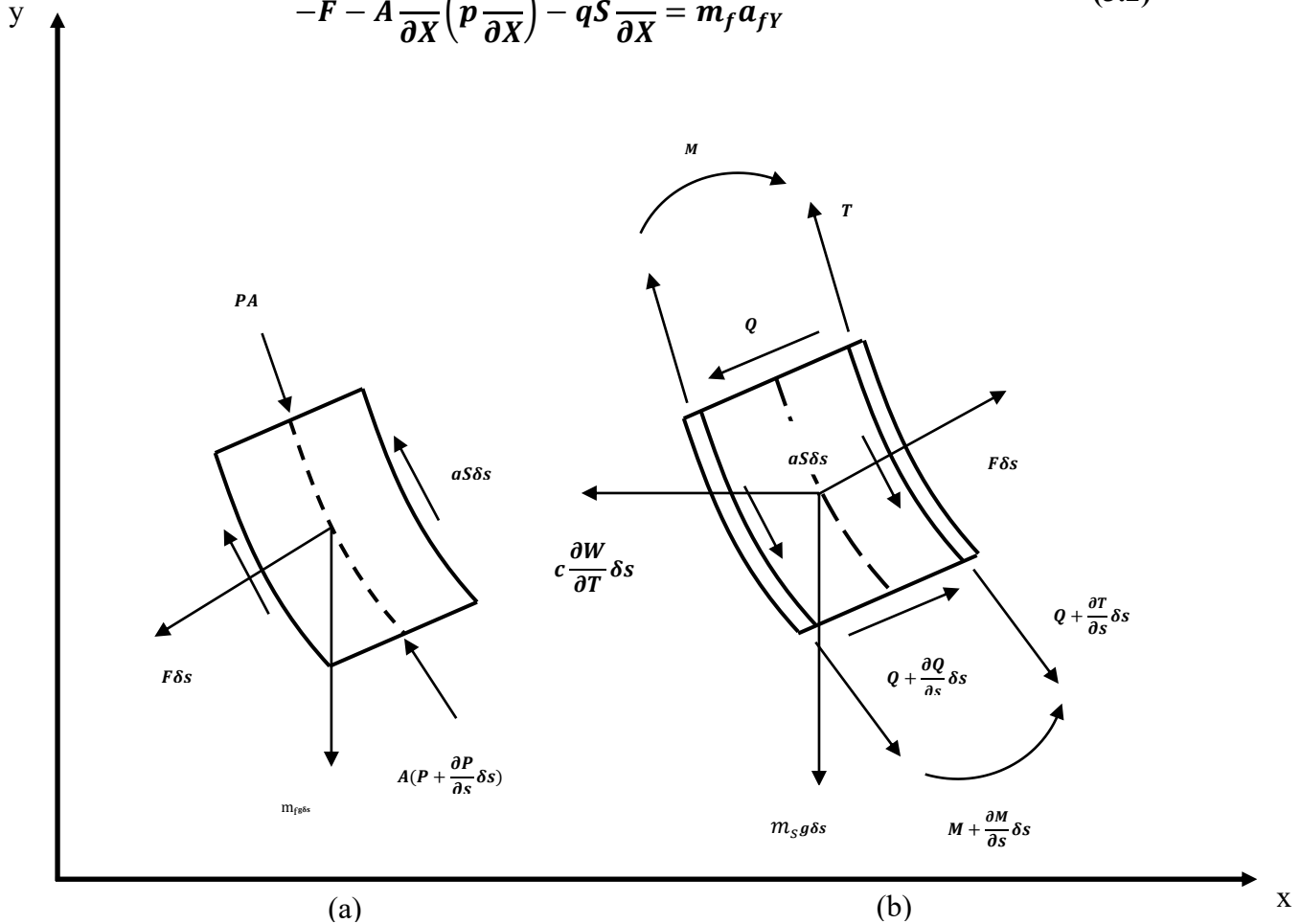
L'équation décrivant sa déformation latérale,

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

En projection selon  $X$  et  $Y$  et en éliminant les termes de second ordre, cela donne,

$$-A \frac{\partial P}{\partial X} - qS + m_f g + F \frac{\partial Y}{\partial X} = m_f a_{fX} \quad (3.1)$$

$$-F - A \frac{\partial}{\partial X} \left( p \frac{\partial Y}{\partial X} \right) - qS \frac{\partial Y}{\partial X} = m_f a_{fY} \quad (3.2)$$



**Figure 3.1:** Élément de fluide (a) et de conduite (b) sur une longueur  $\delta s$

$a_{fX}$  et  $a_{fY}$  sont les accélérations de l'élément fluide selon  $X$  et  $Y$  respectivement. Comme apparaît sur la figure 3.1.b, des forces supplémentaires agissent sur l'élément de conduite  $\delta s$ , la force de frottement  $Q$ , la tension  $T$ , et le moment de flexion  $M$ . On obtient,

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

$$\frac{\partial T}{\partial X} + qS + m_s g - F \frac{\partial Y}{\partial X} = m_s a_{pX} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X} + F + \frac{\partial}{\partial X} \left( T \frac{\partial Y}{\partial X} \right) + qS \frac{\partial Y}{\partial X} - c \frac{\partial Y}{\partial T} = m_s a_{pY} \quad (3.4)$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial X} = -EI \frac{\partial W^3}{\partial X^3} \quad (3.5)$$

Les accélérations selon la direction  $X$  sont nulles et celles selon  $Y$  sont de la forme

$$a_{fY} = \left( \frac{\partial}{\partial T} + U \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 Y, \quad a_{pY} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} + [m_f U^2 - (m_f + m_s)g(L - X)] \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + 2m_f U \frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial T} \\ + (m_f + m_s)g \frac{\partial Y}{\partial X} + c \frac{\partial Y}{\partial T} + (m_f + m_s) \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + KY = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Utilisons les mêmes paramètres adimensionnels que dans [12],

$$\begin{aligned} x = X/L, \quad y = Y/L, \quad t = \left( EI / (m_f + m_s) \right)^{1/2} T / L^2, \quad \beta = \\ m_f / (m_f + m_s), \end{aligned} \quad (3.8)$$

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

$$u = UL(m_f/EI)^{1/2}, \quad k = KL^2/EI, \quad \gamma = (m_f + m_s)gL^3/EI,$$

$$\alpha = cL^2/(EI(m_f + m_s))^{1/2}$$

Où  $u$ ,  $k$ ,  $\sigma$ , et  $\alpha$  représentent respectivement la vitesse, la raideur élastique, la gravité et le coefficient de frottement adimensionnels. Le paramètre  $\beta$ , appelé rapport de masse, varie entre 0 et 1. Nous pouvons maintenant écrire l'équation sous forme adimensionnelle,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + [u^2 - \gamma(1-x)] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta} u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \gamma \frac{\partial y}{\partial x} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y^2}{\partial t^2} + ky = 0 \quad (3.9)$$

La variation du paramètre  $x$  entre  $[0,1]$ . Selon le cas particulier considéré, nous en retirerons certains termes. Le cas particulier qui servira à introduire tous les différents concepts est celui du "tuyau simple", pour lequel la fondation élastique, la tension, la gravité et le frottement sont absentes. L'équation du mouvement sera,

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} + m_f U^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + 2m_f U \frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial T} + m_s \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} = 0 \quad (3.10)$$

L'équation adimensionnelle de son mouvement se réduit à,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta} u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y^2}{\partial t^2} = 0 \quad (3.11)$$

Dans l'expression (2.10), le terme indépendant de la vitesse de l'écoulement est évidemment l'effort inertiel d'interaction fluide-structure, qui associe à la masse ajoutée. Les deux autres termes caractérisent le couplage fluide-élastique entre l'écoulement et la structure [13].

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

Le terme proportionnel à  $U^2$  s'interprète comme l'effort centrifuge qui est exercé par l'écoulement sur la conduite. Le terme proportionnel à  $U$  est l'effort de Coriolis. Les figures suivantes décrivent les forces qui s'exercent sur la conduite de transport déchoque terme de l'équation du mouvement,

Le terme  $EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4}$  est un composant de force agissant sur le tuyau au mode flexionnel. La figure 3.2 montre une vue schématique de cet effort.

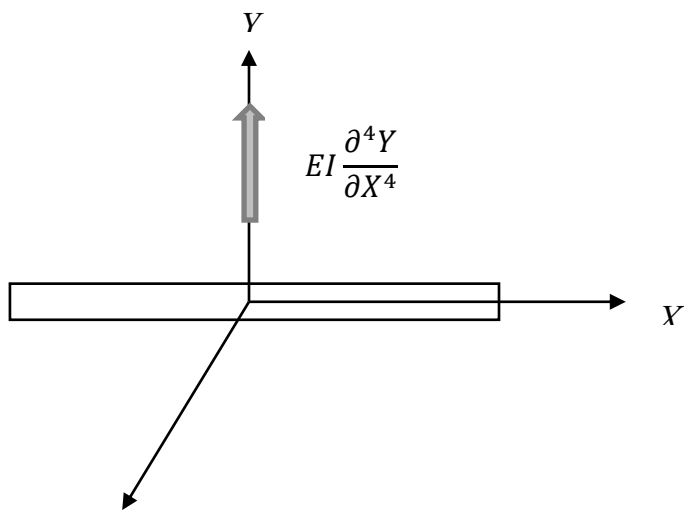


Figure 3.2: Représentation du premier terme de l'équation du mouvement d'un tuyau de transport.

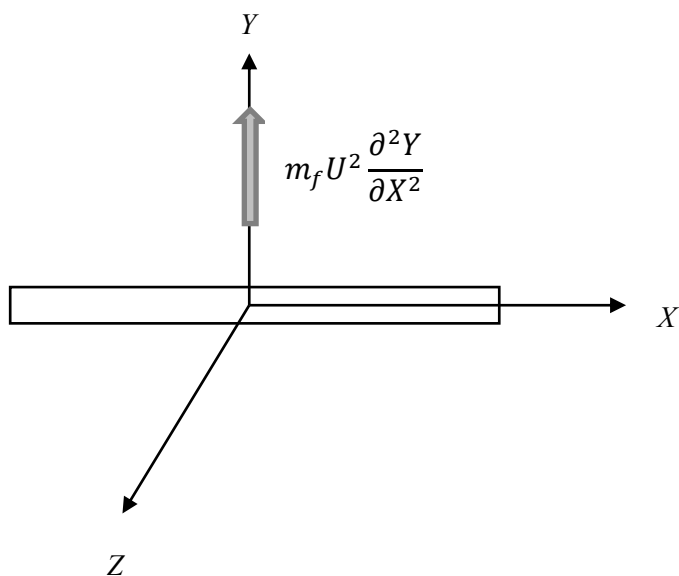


Figure 3.3: Représentation du deuxième terme de l'équation du mouvement d'un tuyau de transport.

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

$m_f U^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}$  : Représente la composante de force qui contraint le fluide à la courbure du tuyau. La figure

3.3 montre une vue schématique de cette force

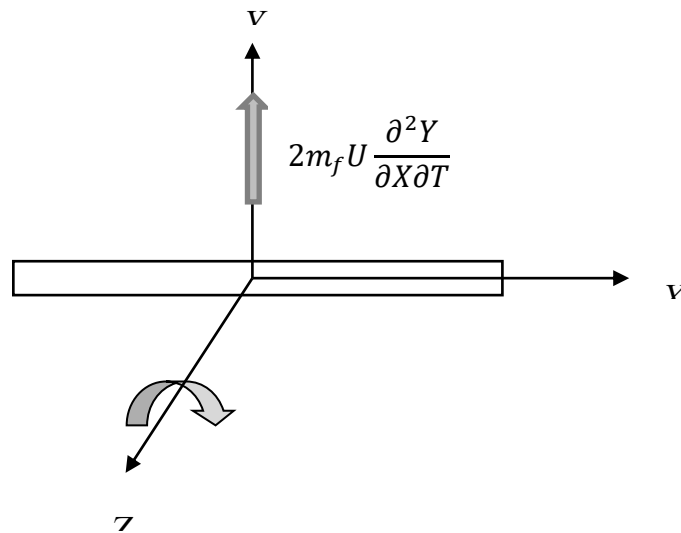


Figure 3.4: Représentation du troisième terme de l'équation du mouvement d'un tuyau de transport.

Le terme  $2m_f U \frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial T}$  est la force nécessaire pour la rotation de l'élément du fluide avec une vitesse angulaire (l'effet de Coriolis). Cette force est représentée par la figure 3.4.

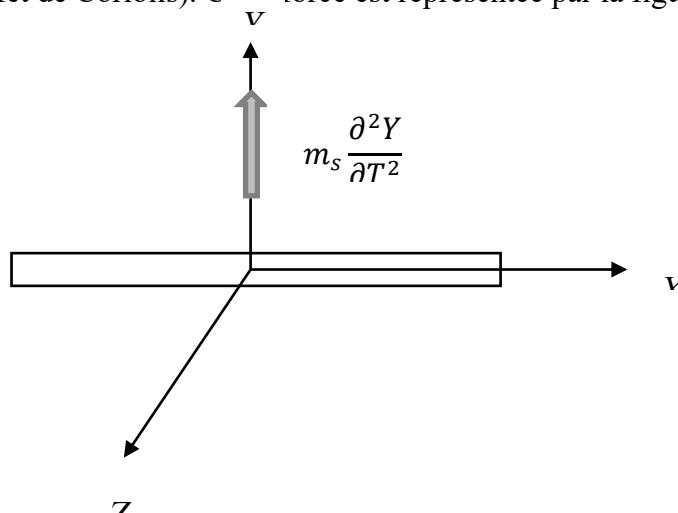


Figure 3.5: Représentation du quatrième terme de l'équation du mouvement d'un tuyau de transport (Force d'inertie).

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

Le terme  $m_s \frac{\partial^2 y}{\partial T^2}$  est un composant de force agissant sur le tuyau en raison de l'inertie du tuyau et le fluide s'écoulant à travers, elle est représentée schématiquement sur la figure 2.5.

#### 10.2 Les pulsations et modes propres

A une pulsation complexe donnée supposons-la déformée du tuyau de la forme,

$$y(x) = A^{ikx} \quad (3.12)$$

Puisque l'équation du mouvement adimensionnelle (1.11) est linéaire, nous exprimons le déplacement du tuyau [35],

$$y(x, t) = \Re e \left[ \sum_{j=1}^4 A_j e^{ik_j x} e^{i\omega t} \right] \quad (3.13)$$

Où  $k$  est le nombre d'onde et  $\omega$  pulsation propre

Pour un polynôme d'ordre 4 en  $k$  et nous avons donc quatre nombres d'onde  $k_j$ ,  $j = 1: 4$ . La déformée du tuyau est donc de la forme,

$$y(x, t) = \exp(i\omega t) \left[ A_1 \exp(ik_1 x) + A_2 \exp(ik_2 x) + A_3 \exp(ik_3 x) + A_4 \exp(ik_4 x) \right] \quad (3.14)$$

Cette expression doit satisfaire de plus les quatre conditions aux limites, dépendant du type d'extrémité. Pour un tuyau encastré-libre, nous avons,

$$[\sum_{j=1}^4 A_j] = 0; [\sum_{j=1}^4 k_j A_j] = 0; [\sum_{j=1}^4 k_j^2 A_j e^{ik_j}] = 0; [\sum_{j=1}^4 k_j^3 A_j e^{ik_j}] = 0 \quad (3.15)$$

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

Pour avoir une solution non triviale il faut que le déterminant du système soit nul,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_1^2 e^{ik_1} & k_2^2 e^{ik_2} & k_3^2 e^{ik_3} & k_4^2 e^{ik_4} \\ k_1^3 e^{ik_1} & k_2^3 e^{ik_2} & k_3^3 e^{ik_3} & k_4^3 e^{ik_4} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

En raison de la complexité de l'équation (3.16), ne peuvent pas être exprimées sous la forme explicite en termes de  $u$ ,  $\beta$  et  $\Omega$ , il n'est pas possible d'obtenir des solutions par des méthodes directes. Gregory et autre [19] ont proposé une méthodologie permettant d'obtenir les vitesses critiques pour un tuyau simple sous un écoulement interne dans le cas général, donc on a nécessairement à une méthode numérique. La deuxième méthode permet d'obtenir avec plus de facilité les pulsations et modes propres du tuyau. Il s'agit d'une méthode numérique de type Galerkin se servant d'une base modale constituée des modes propres du tuyau sans écoulement.

#### 2.1.2 La méthode de Galerkin

C'est une méthode analytique approximative, elle permet de calculer  $N$  pulsations propres du système à partir d'une base modale constituée de  $N$  modes. La méthode de Galerkin est très bien détaillée dans [35],

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) q_n(t) \quad (3.17)$$

$\psi_n(x), n = 1, \infty$  : sont les fonctions propres modes de la poutre (cas d'un tuyau).

Dans notre cas la base modale choisie est constituée des modes propres du tuyau sans écoulement, c'est à dire les modes propres d'une poutre ayant les mêmes conditions aux limites.

$q_n(t)$  : sont les coordonnées généralisées du système discret.

On peut exprimer,

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

$$\psi_n(x) = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + c_3 \operatorname{ch} ax + c_4 \operatorname{sh} ax \quad (3.18)$$

Avec

$C_n$ ,  $n= 1..4$  constantes, sont calculées à partir des conditions aux limites

*Poutre en appuis simples*

Pour le cas de la poutre appuyée-appuyée, Nous avons

$$Y|_{x=0} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} |_{x=0} = Y|_{x=L} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} |_{x=L} = 0 \quad (3.19)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ -c_1 - c_3 = 0 \\ c_1 \cos aL + c_2 \sin aL + c_3 \operatorname{ch} aL + c_4 \operatorname{sh} aL = 0 \\ -(c_1 \cos aL + c_2 \sin aL + c_3 \operatorname{ch} aL + c_4 \operatorname{sh} aL) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

On peut écrire l'équation (3.20) sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ \cos aL & \sin aL & \operatorname{ch} aL & \operatorname{sh} aL \\ -\cos aL & -\sin aL & -\operatorname{ch} aL & -\operatorname{sh} aL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Pour avoir une solution non triviale, il faut que le déterminant du système soit nul.

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

Ce qui donne l'équation de fréquences :

$$\sin \alpha_n L = 0 \quad (3.22)$$

Les modes possibles de vibration sont donc caractérisés par :

$$\alpha_n L = n\pi; \mathbf{n} = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

Les pulsations propres de vibration sont :

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (3.24)$$

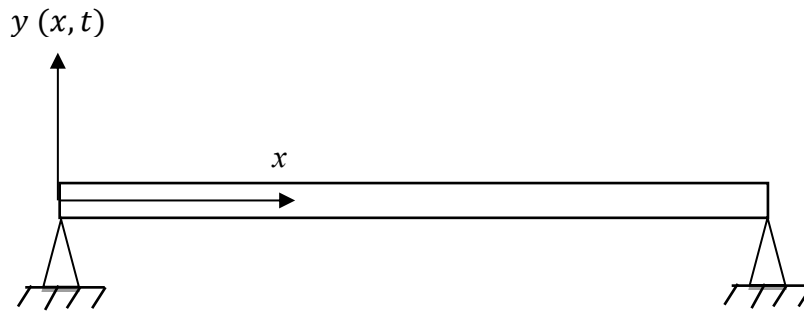
Donc l'équation du mouvement sous forme de série de Fourier ;

$$Y(X, T) = \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) \sin \omega_j T + \sum_{n=2,4,6,\dots} a_n \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) \cos \omega_j T \quad (3.25)$$

Avec  $j = 1, 2, 3, \dots$

$\omega_j$  Représente la pulsation propre du  $j^{\text{ème}}$  mode de la vibration, avec  $a_n$  sont des constantes.

**Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport**

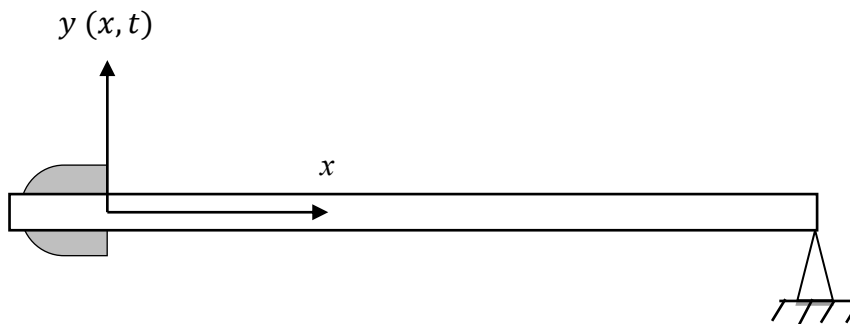


**Figure 3.6:** Poutre appuyée-appuyée

***Poutre encastrée-appuis simple***

Les conditions aux limites, pour une conduite encastrée-appuyée,

$$y|_{x=0} = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = y|_{x=1} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=1} = 0 \quad (3.26)$$



**Figure 3.7:** Poutre encastrée-appuis simple

Donnent :

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha + c_3 \cosh \alpha + c_4 \sinh \alpha = 0 \\ -c_1 \cos \alpha - c_2 \sin \alpha - c_3 \sinh \alpha - c_4 \cosh \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

Alors la forme matricielle est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & ch\alpha & sh\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & -ch\alpha & -sh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

L'équation de fréquence de ce type est :

$$\tan\alpha_n - \tanh\alpha_n = 0 \quad (3.29)$$

A partir de l'intersection des courbes de deux fonctions (voir la figure 3.8), on obtient les trois premières valeurs de  $\alpha_n$

$$\alpha_1 = 3.9266; \alpha_2 = 7.0685; \alpha_3 = 10.2101 \quad (3.30)$$

$$\sigma_n = \left( \frac{ch\alpha_n - \cos\alpha_n}{sh\alpha_n - \sin\alpha_n} \right) \quad (3.31)$$

Donc

$$\psi_n(x) = (\cos\alpha_n x - ch\alpha_n x) + \sigma_n (\sin\alpha_n x - sh\alpha_n x) \quad (3.32)$$

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

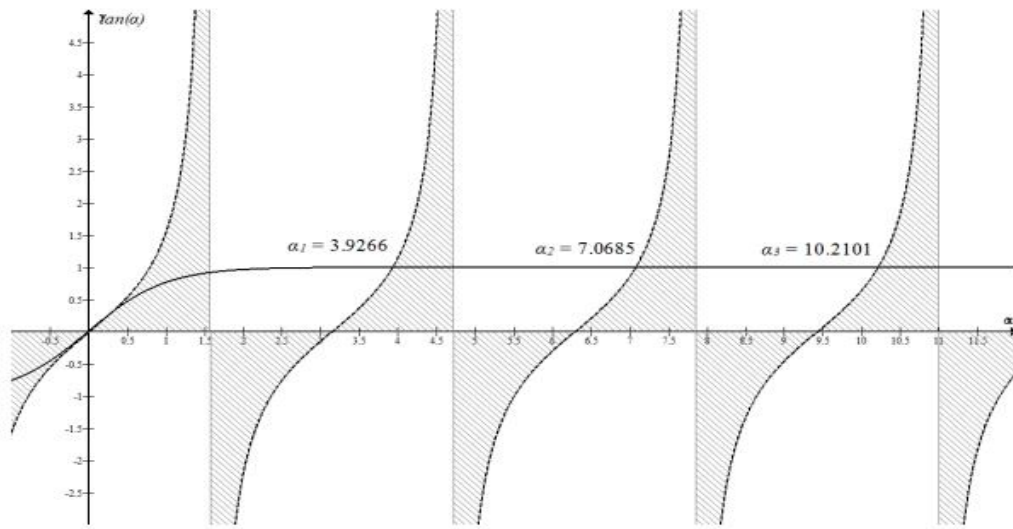


Figure 3.8: Solution graphique de l'équation caractéristique d'une poutre encastrée-appuis.

#### *Poutre encastrée-encastrée*

Les conditions aux limites sont ;

$$y|_{x=0} = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = y|_{x=1} = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=1} = 0 \quad (3.33)$$

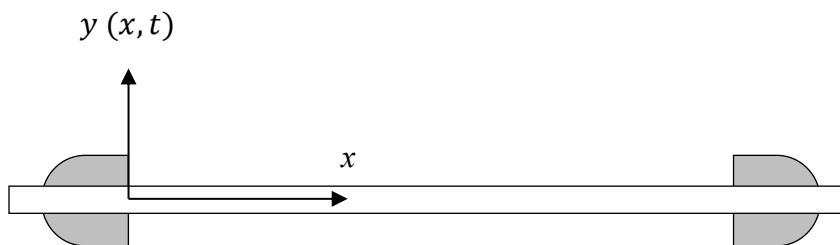


Figure 3.9: Poutre encastrée-encastrée

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

Donnent

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha + c_3 \operatorname{ch} \alpha + c_4 \operatorname{sh} \alpha = 0 \\ -c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha - c_3 \operatorname{ch} \alpha + c_4 \operatorname{sh} \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

La forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & \operatorname{ch} \alpha & \operatorname{sh} \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & -\operatorname{ch} \alpha & \operatorname{sh} \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

L'équation de fréquences est :

$$\cos \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n = -1 \quad (3.36)$$

La résolution de l'équation (3.36) par la méthode graphique (figure 3.10) donne une infinité de racines.

Les trois premières racines sont,

$$\alpha_1 = 4.7300 \quad ; \quad \alpha_2 = 7.8532; \alpha_3 = 10.9956 \quad (3.37)$$

$$\sigma_n = \left( \frac{\operatorname{ch} \alpha_n - \cos \alpha_n}{\operatorname{sh} \alpha_n - \sin \alpha_n} \right) \quad (3.38)$$

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

Donc

$$\psi_n(x) = C_{1n}[(\cos\alpha_n x - \cosh\alpha_n x) + \sigma_n(\sin\alpha_n x - \sinh\alpha_n x)] \quad (2.39)$$

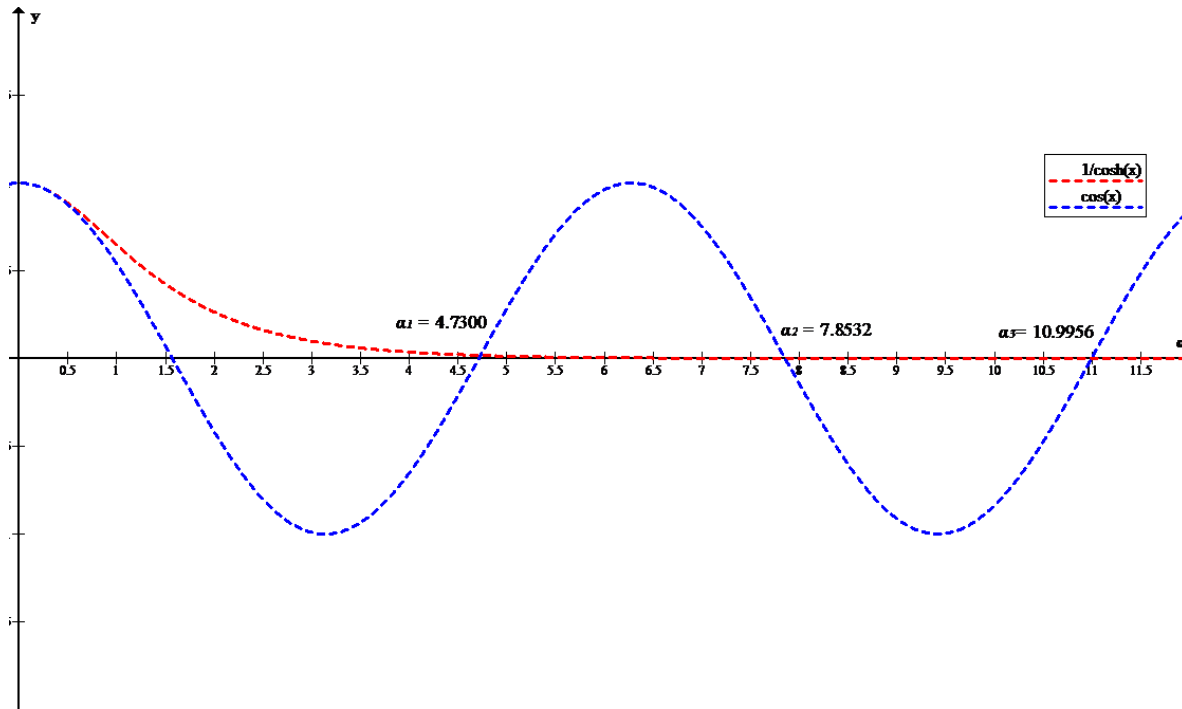


Figure 3.10: Solution graphique de l'équation caractéristique d'une poutre encastree-encastree.

#### *Poutre encastree-libre*

Pour une conduite encastree, en  $x = 0$  et libre en  $x = 1$

$$y|_{x=0} = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=1} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}|_{x=1} = 0 \quad (3.40)$$

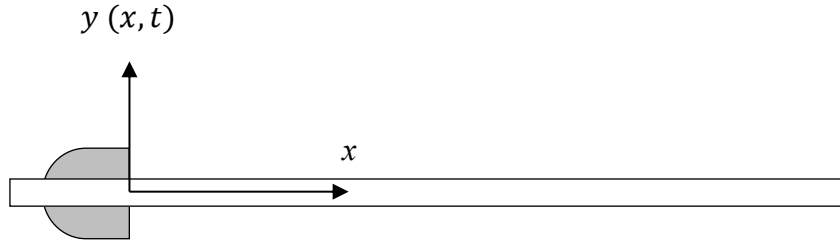


Figure 3.11: Poutre encastrée-libre

### Orthogonalité des fonctions normales

La déformée  $y(x, t)$ , satisfait toujours les conditions aux limites. Nous considérons de plus qu'une troncature à  $N$  modes est suffisante pour décrire de façon satisfaisante l'évolution du système. On introduit dans l'équation du mouvement, cela donne

$$\sum_{n=1}^N q_n \psi_n'''' + u^2 \psi_n'' q_n + 2\beta^{1/2} u \psi_n' \dot{q}_n + \psi_n \ddot{q}_n \tag{3.41}$$

On multiplie l'équation ci-dessus par  $\psi_m$  et en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions propres et intégrant sur le domaine  $[0, 1]$ ,

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \left[ \int_0^1 \psi_n'''' \psi_m dx + u^2 \int_0^1 \psi_n'' \psi_m dx \right] q_n + \left[ 2\beta^{1/2} u \int_0^1 \psi_n \psi_m' dx \right] \dot{q}_n + \left[ \int_0^1 \psi_n \psi_m dx \right] \ddot{q}_n \right\} = 0 \tag{3.42}$$

Avec

### Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport

$$\psi_n'''' = \alpha_n^4 \psi_n, \delta_{nm} = \int_0^1 \psi_n \psi_m dx \quad (3.43)$$

$\delta_{nm}$  Étant le delta de Kronecker ;

Les intégrales définies peuvent être évaluées dans le domaine fermé, définissant l'ensemble de constantes :

$$b_{mn} = \int_0^1 \psi_m \psi_n' dx, \quad c_{mn} = \int_0^1 \psi_m \psi_n'' dx \quad (3.44)$$

L'équation (2.42) peut être écrite sous la forme de matrice comme suit :

$$\ddot{q} + [F + 2\beta^{1/2}uB]\dot{q} + [F + u^2D]q = 0 \quad (3.45)$$

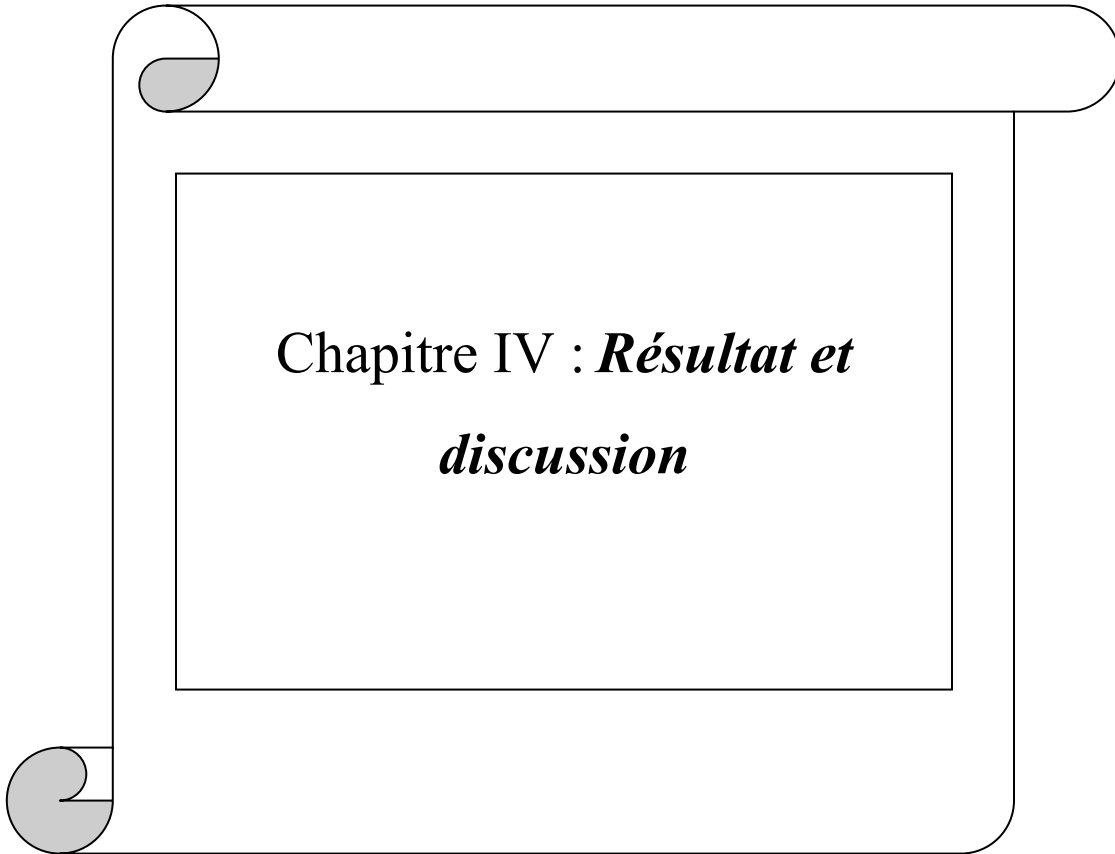
Où

$q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}^T$ ,  $F$  est la matrice diagonale, et les matrices carrées  $B$  et  $D$ , dont les éléments sont respectivement  $b_{mn}$  et  $c_{mn}$

L'équation du mouvement peut alors être exprimée sous la forme matricielle,

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = 0 \quad (3.46)$$

### **Chapitre III : Modélisation analytique des vibrations transversales des conduites de transport**



## **Résultat et discussion**

### **4.1 Introduction :**

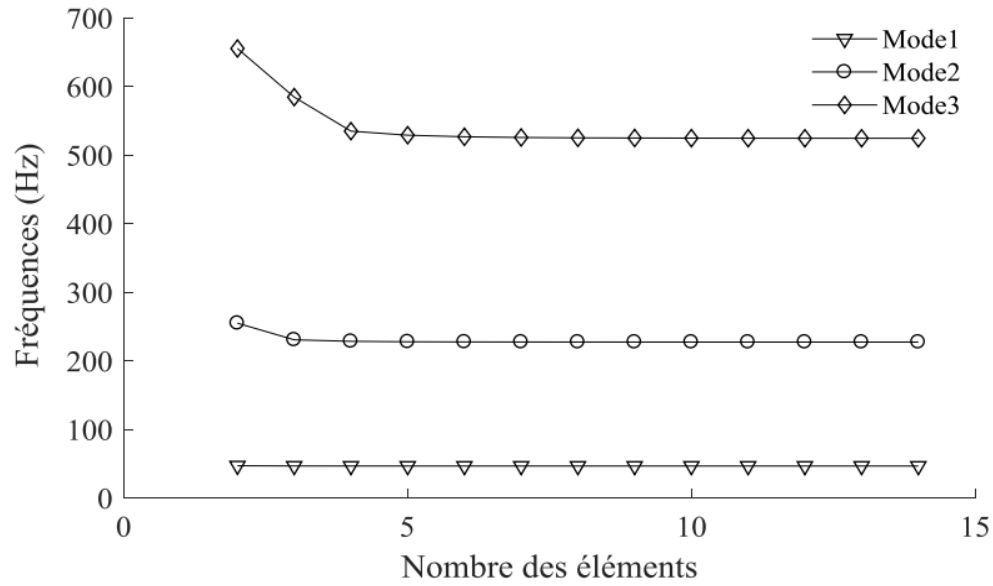
Dans ce chapitre, nous étudions la modélisation numérique des vibrations de résonance dans les tuyaux transportant des fluides en utilisant MATLAB. Nous nous concentrons sur l'analyse des fréquences naturelles et l'impact de différents paramètres, tels que les propriétés des tuyaux et leurs conditions de fixation. Nous explorons plusieurs configurations d'appuis, notamment les extrémités « encastrées, appuyées », « encastrées-libres » et « encastrées-encastrées », afin de comprendre leur influence sur le comportement vibratoire. Un modèle mathématique basé sur les équations des vibrations est développé, puis résolu numériquement avec MATLAB pour simuler les phénomènes physiques et analyser les résultats. Ce travail vise à fournir des insights pratiques pour optimiser la conception des tuyaux et éviter les phénomènes de résonance dangereux.

### **4.2 Etude de la convergence**

Pour valider notre programme, une étude de convergence a été effectuée pour une vitesse de 100 m/s, les résultats obtenus sont présentés sur les figures 4.1.

L'objectif de ce test est de calculer la valeur stable des trois fréquences de la pipe en fonction de nombre de maillage (N).

## Chapitre IV : Résultat et discussion



**Figure 4.1** : Convergence des trois premiers modes propres en fonction du nombre des éléments d'un tuyau sous écoulement interne en appuis simples par MEF,

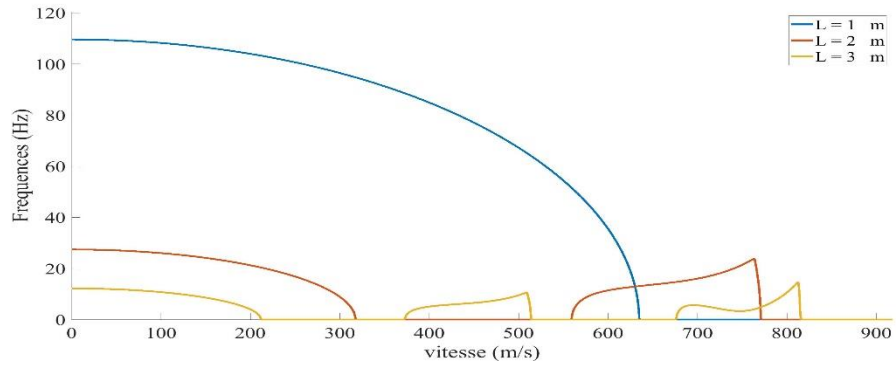
### 4.3 Tuyau de transport en encastrées-appuis

L'étude des tuyaux de transport encastrés-appuis nécessite l'analyse de facteurs tels que la longueur, l'épaisseur et la masse volumique du fluide. Ces paramètres influencent directement la résistance mécanique et l'efficacité du système. Une optimisation de ces éléments permet d'assurer des performances durables et fiables.

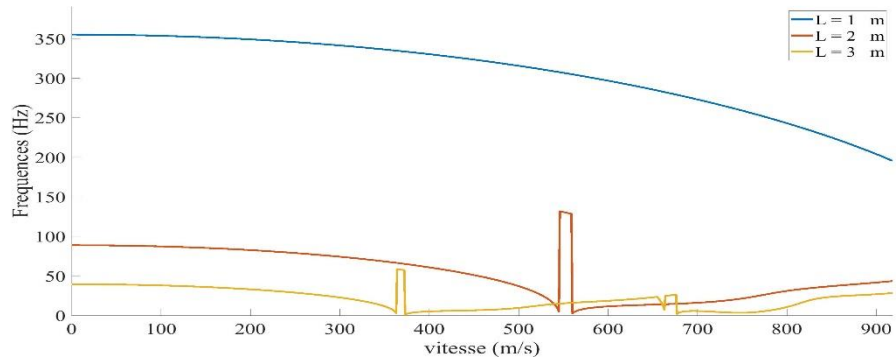
#### 4.3.1 Effet de longueur

Dans cette étude, nous analysons l'influence de la longueur du tuyau sur ses trois fréquences de résonance principales. Cette relation est cruciale pour comprendre le comportement vibratoire du système.

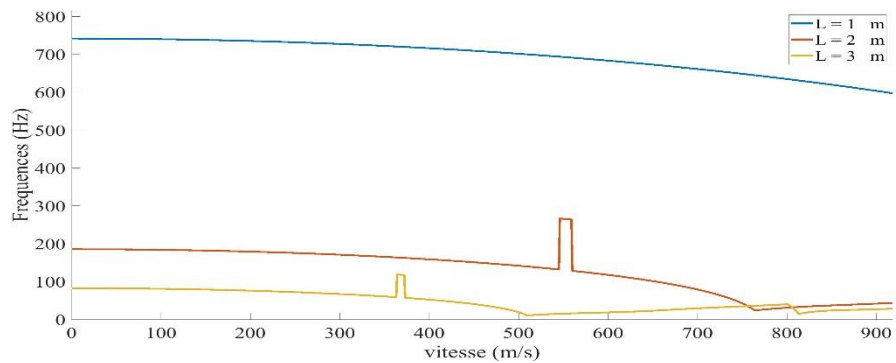
## Chapitre IV : Résultat et discussion



**Figure 4.2 :** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.



**Figure 4.3:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.



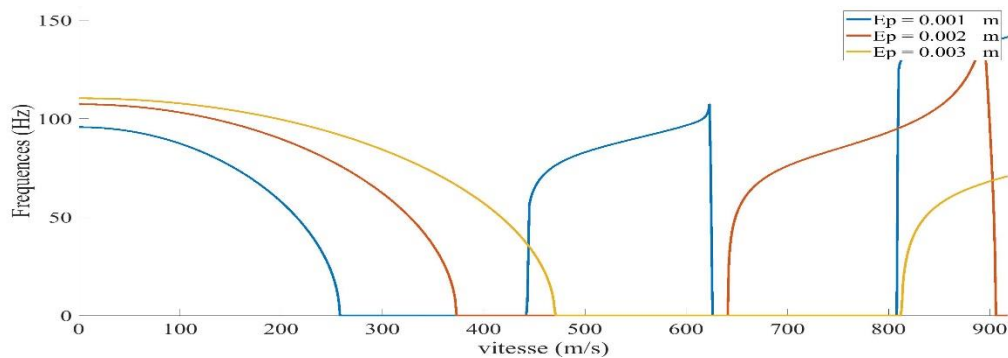
## Chapitre IV : Résultat et discussion

**Figure 4.4:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.

D'après les trois figures (4.2), (4.3) et (4.4), nous observons une augmentation des fréquences de résonance pour les trois premiers modes lorsque la longueur du tuyau diminue, dans le cas d'une configuration à deux extrémités fixes. Cette augmentation s'explique par le fait que la rigidité du système est inversement proportionnelle à la longueur du tuyau : plus la rigidité augmente, plus les fréquences propres du système ne s'élèvent. Ce comportement est caractéristique des systèmes vibratoires où la raideur structurale influence directement les propriétés fréquentielles.

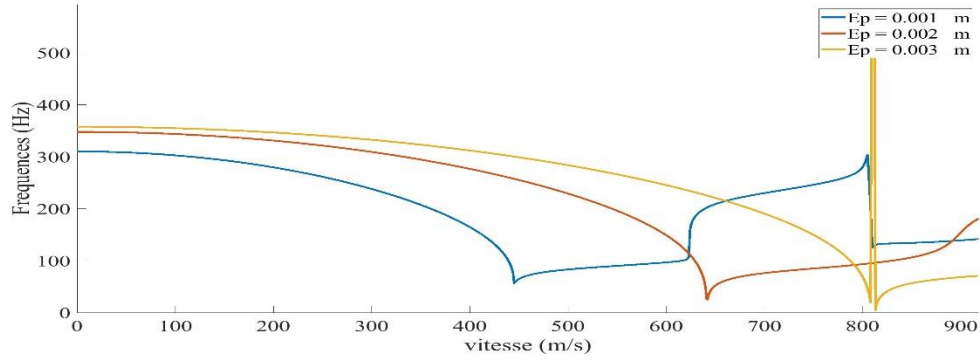
### 4.3.2 Effet d'épaisseur

Cette étude analyse l'influence de la variation de l'épaisseur du tuyau sur ses trois premières fréquences de résonance. Une attention particulière est accordée à cette relation paramétrique, pour comprendre le comportement vibratoire du système.

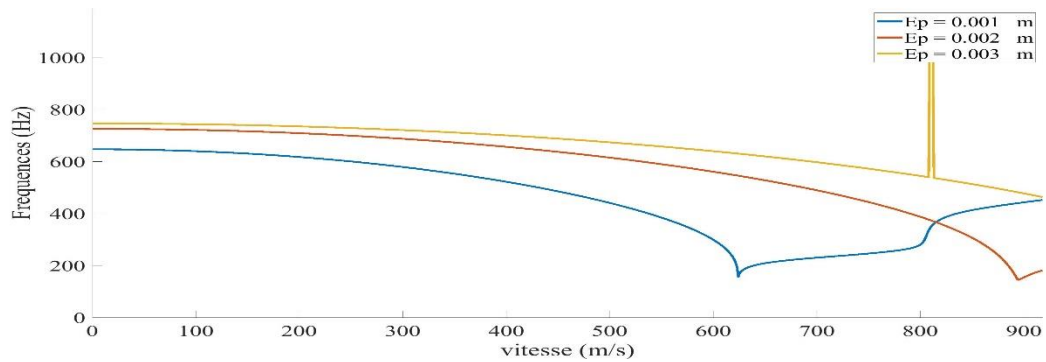


**Figure 4.5:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.

## Chapitre IV : Résultat et discussion



**Figure 4.6:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.



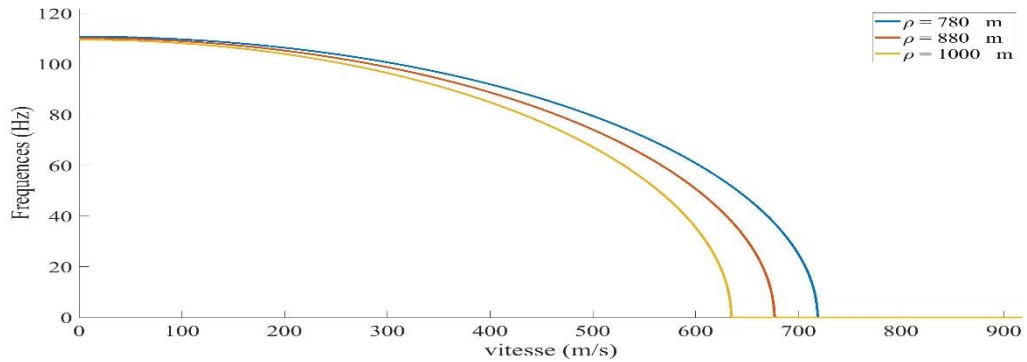
**Figure 4.7:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.

Les figures (4.5), (4.6) et (4.7) montrent que les fréquences de résonance des trois premiers modes augmentent avec l'épaisseur du tuyau dans une configuration à deux extrémités fixes. Cette tendance résulte de la relation directe entre l'épaisseur et la rigidité du système : une plus grande épaisseur entraîne une rigidité accrue, ce qui élève les fréquences propres. Ce phénomène est typique des systèmes vibratoires, où la raideur structurale joue un rôle déterminant sur les propriétés fréquentielles.

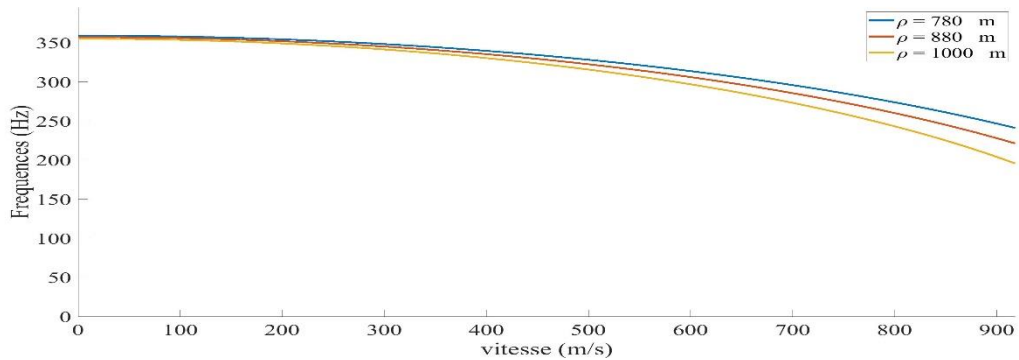
## Chapitre IV : Résultat et discussion

### 4.3.3 Effet de masse volumique

Cette étude porte sur l'effet de la masse volumique du tuyau sur ses trois principales fréquences de résonance. Comprendre cette relation est fondamental pour analyser le comportement vibratoire du système.

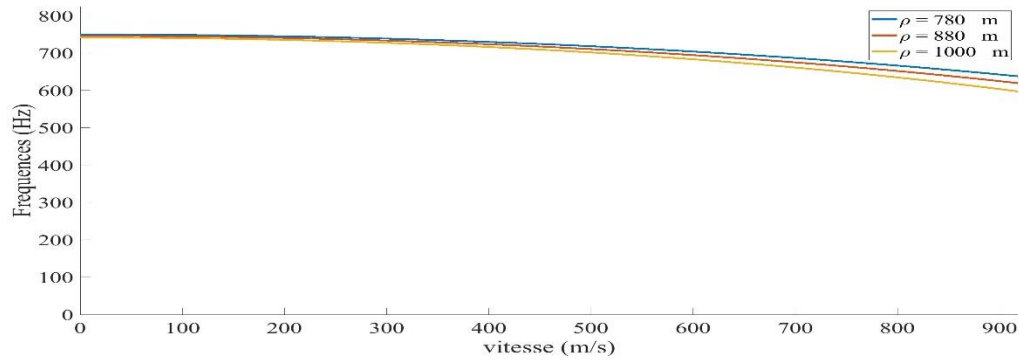


**Figure 4.8:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastées-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.



**Figure 4.9:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastées-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.

## Chapitre IV : Résultat et discussion



**Figure 4.10:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-appuis en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.

Les figures (4.8), (4.9) et (4.10) montrent que les fréquences de résonance des trois premiers modes diminuent avec la masse volumique de fluide transporté dans le tuyau dans une configuration à deux extrémités fixes. Cette tendance résulte de la relation directe entre la masse volumique de fluide et la rigidité du système : une plus grande épaisseur entraîne une rigidité accrue, ce qui élève les fréquences propres. Ce phénomène est typique des systèmes vibratoires, où la raideur structurale joue un rôle déterminant sur les propriétés fréquentielles.

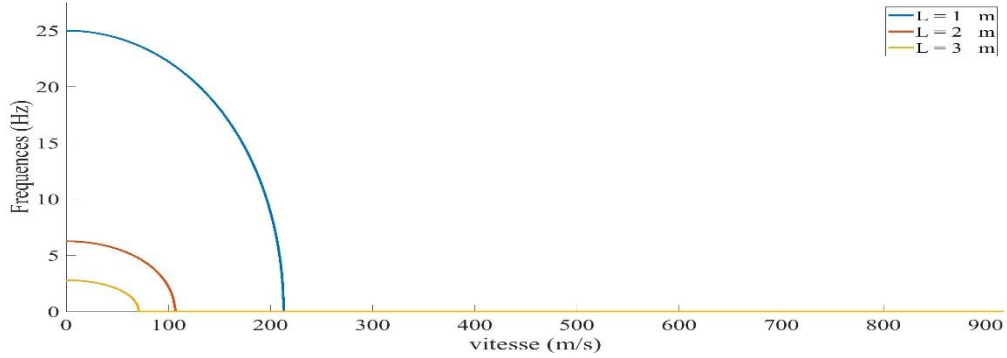
### 4.4 Tuyau de transport en encastrees-libre

L'étude des conduites encastrees à une extrémité et libres à l'autre implique l'évaluation de paramètres déterminants tels que la longueur, l'épaisseur du tuyau et la densité du fluide transporté. Ces éléments influencent de manière significative la réponse dynamique et les caractéristiques vibratoires du système. Une identification précise de ces facteurs est essentielle pour optimiser les performances mécaniques dans des contextes d'application réels."

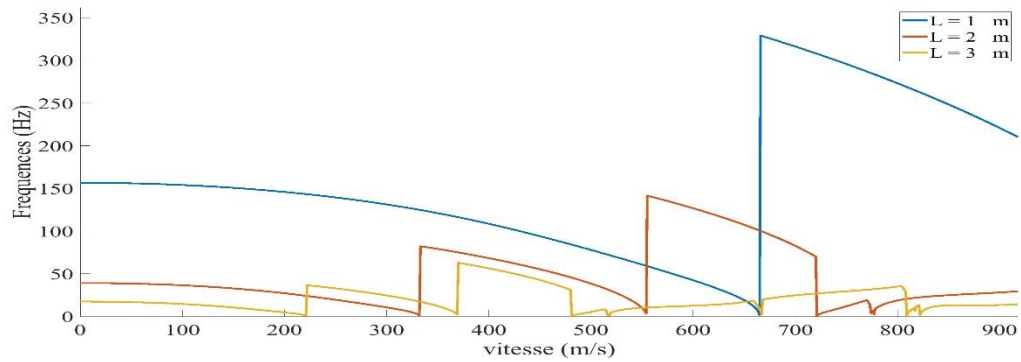
Cette partie expose les neuf figures représentant les trois premiers modes de résonance, mettant en évidence l'influence des trois paramètres: la longueur du tuyau, son épaisseur et la masse volumique du fluide transporté."

## Chapitre IV : Résultat et discussion

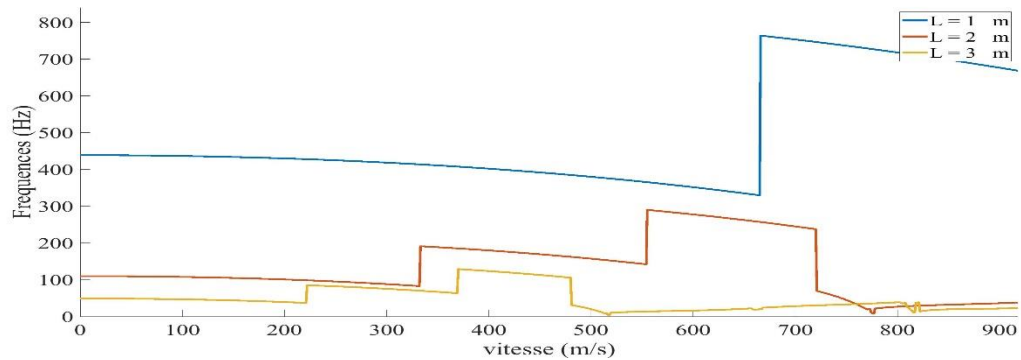
### 4.4.1 Effet de longueur



**Figure 4.11:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.



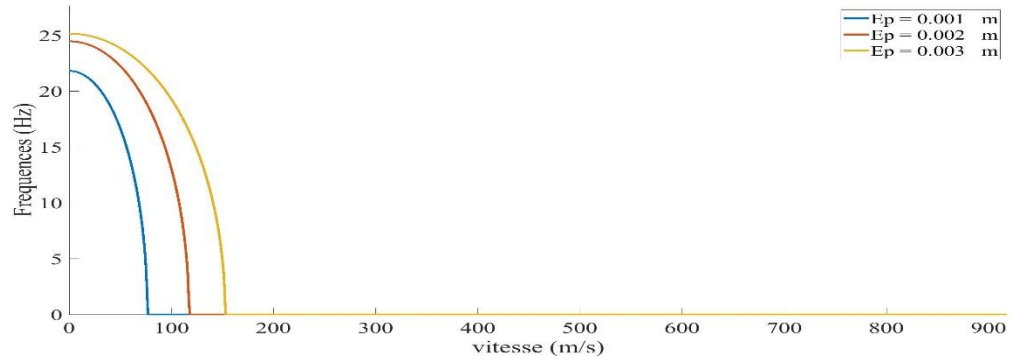
**Figure 4.12:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.



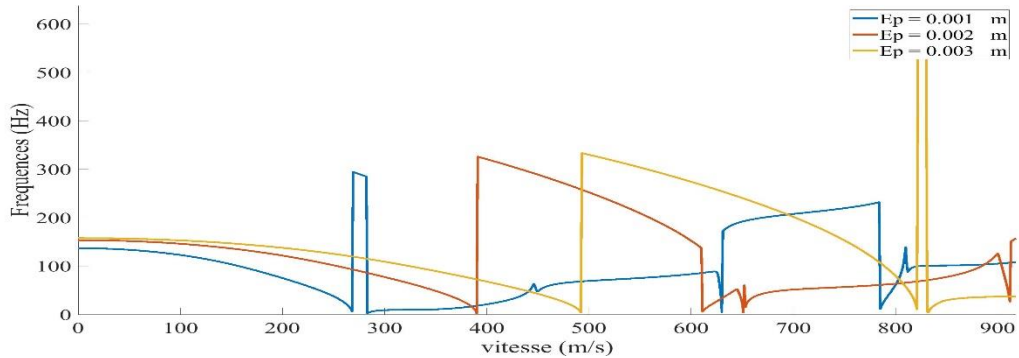
## Chapitre IV : Résultat et discussion

**Figure 4.13:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.

### 4.4.2 Effet d'épaisseur

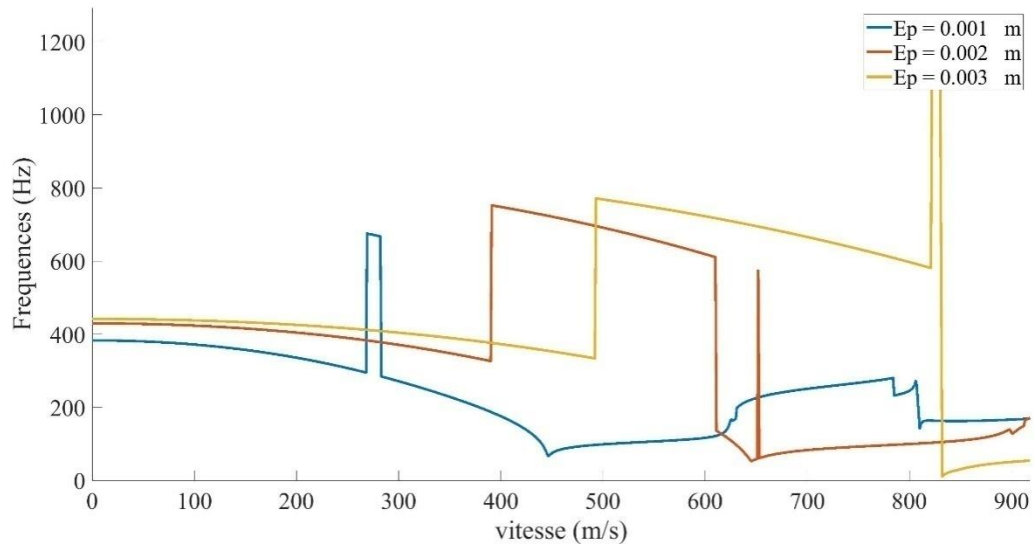


**Figure 4.14:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.



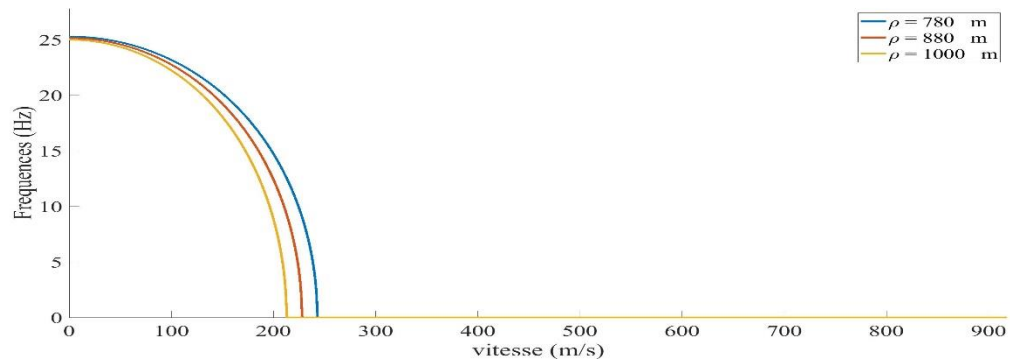
**Figure 4.15:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.

## Chapitre IV : Résultat et discussion



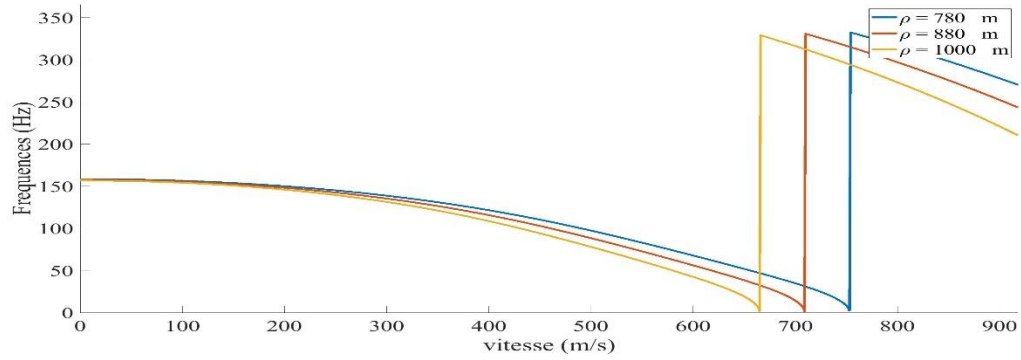
**Figure 4.16:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.

### 4.4.3 Effet de masse volumique

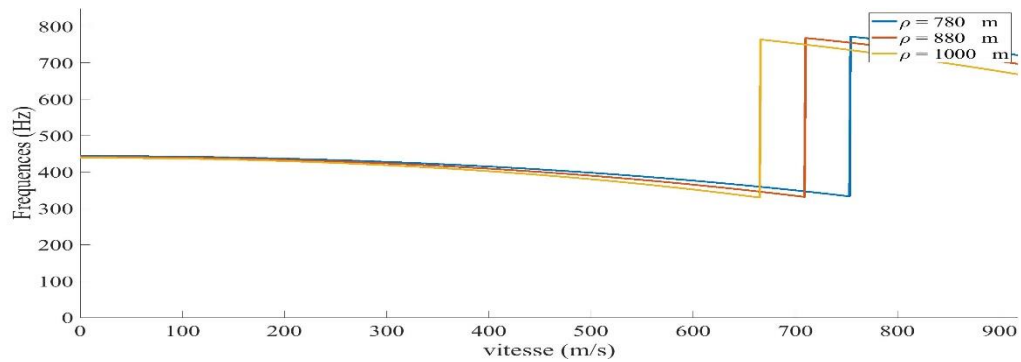


**Figure 4.17:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-libre en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.

## Chapitre IV : Résultat et discussion



**Figure 4.18:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-libre en fonctions de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.

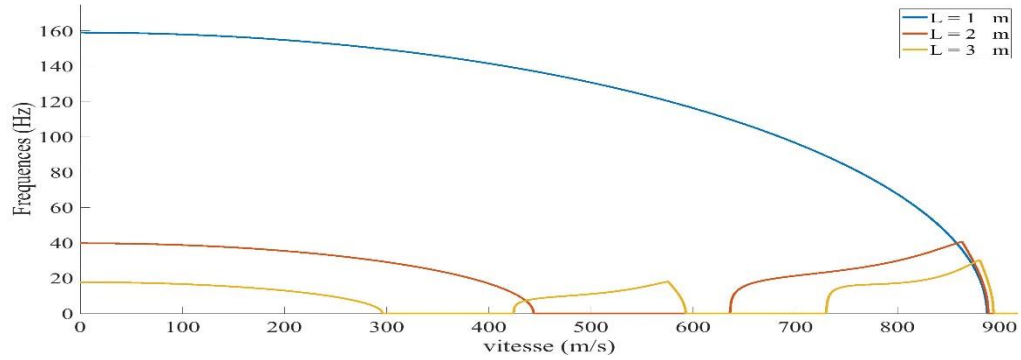


**Figure 4.19:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-appuis en fonctions de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.

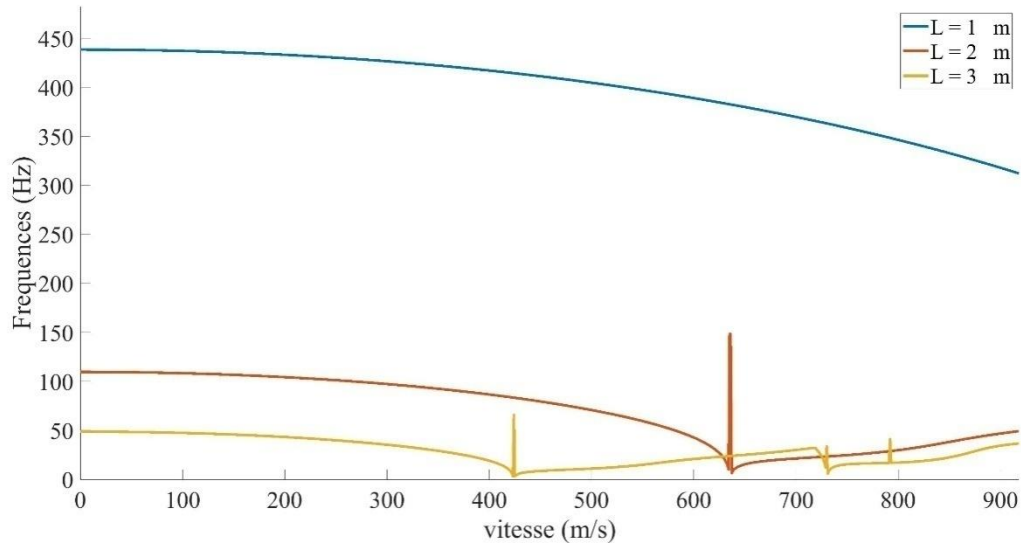
## 4.5 Tuyau de transport en encastres-encastres

### 4.5.1 , Effet de longueur

1

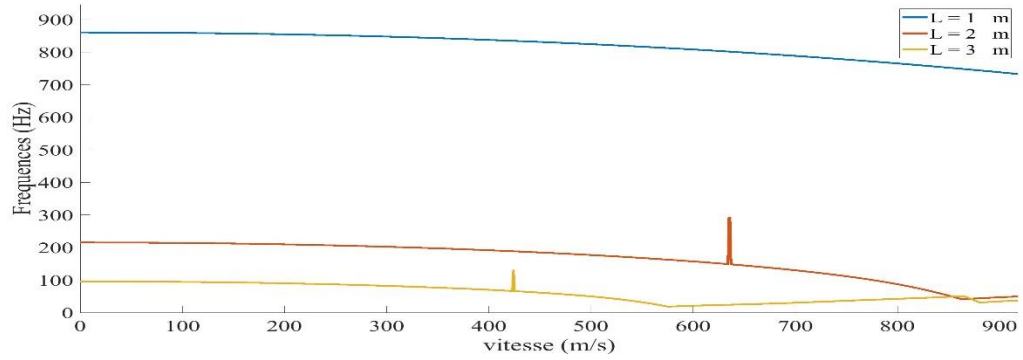


2 **Figure 4.20:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-encastree en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.



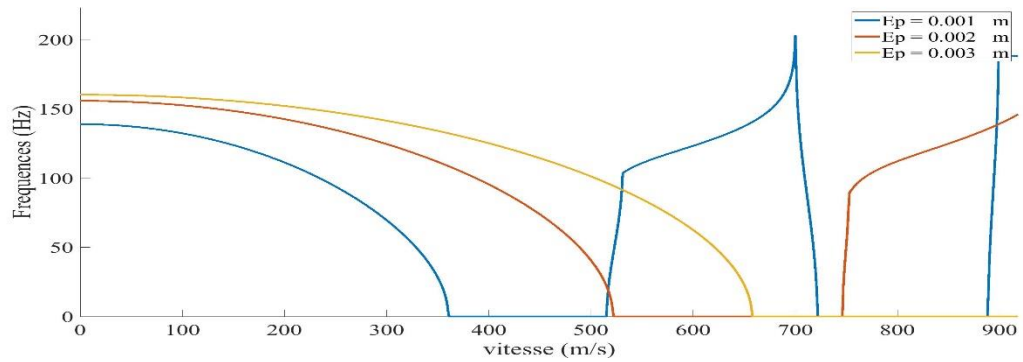
**Figure 4.21:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-encastree en fonction de la vitesse pour trois valeurs de longueur.

## Chapitre IV : Résultat et discussion



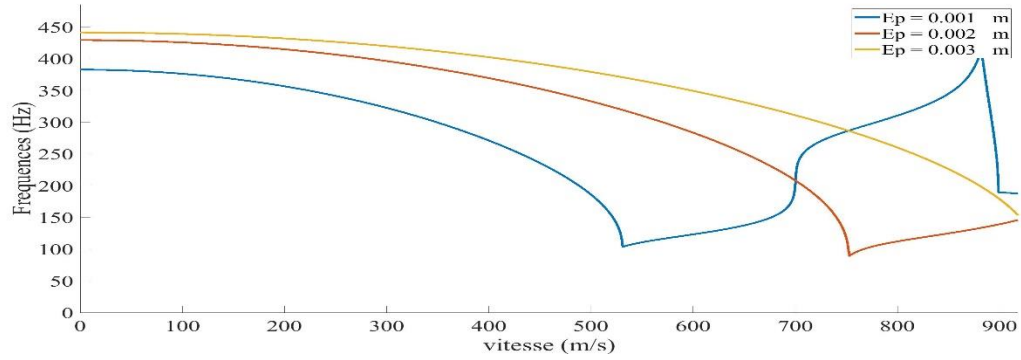
**Figure 4.22:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-encastree en fonctions de la vitesse pour trois valeurs de longueur.

### 4.5.2 Effet d'épaisseur

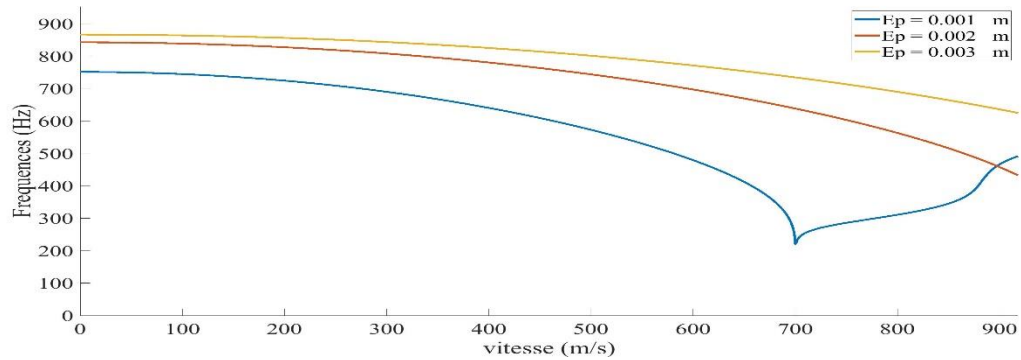


**Figure 4.23:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-encastree en fonctions de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.

## Chapitre IV : Résultat et discussion

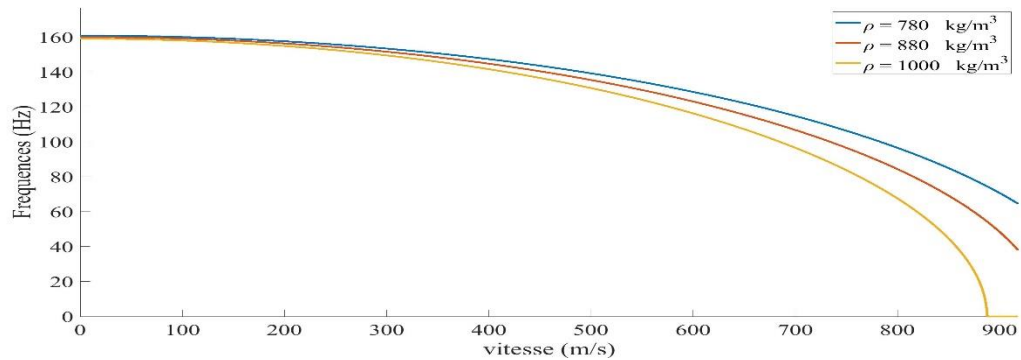


**Figure 4.24:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonctions de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.



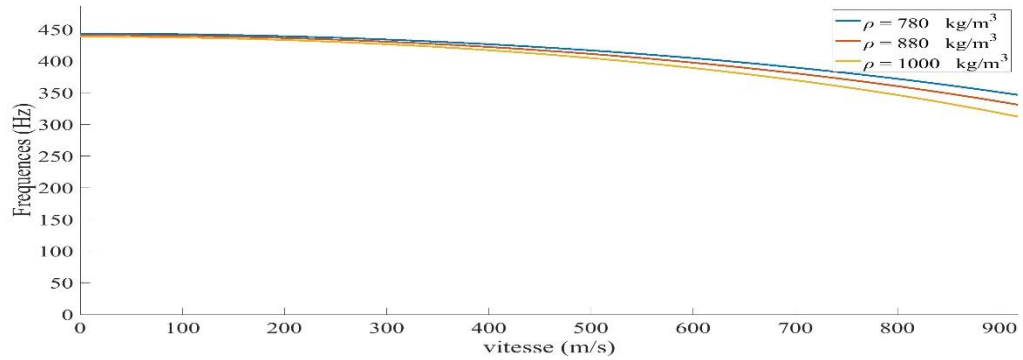
**Figure 4.25:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastrée-encastrée en fonctions de la vitesse pour trois valeurs d'épaisseur.

### 4.5.3 Effet de masse volumique

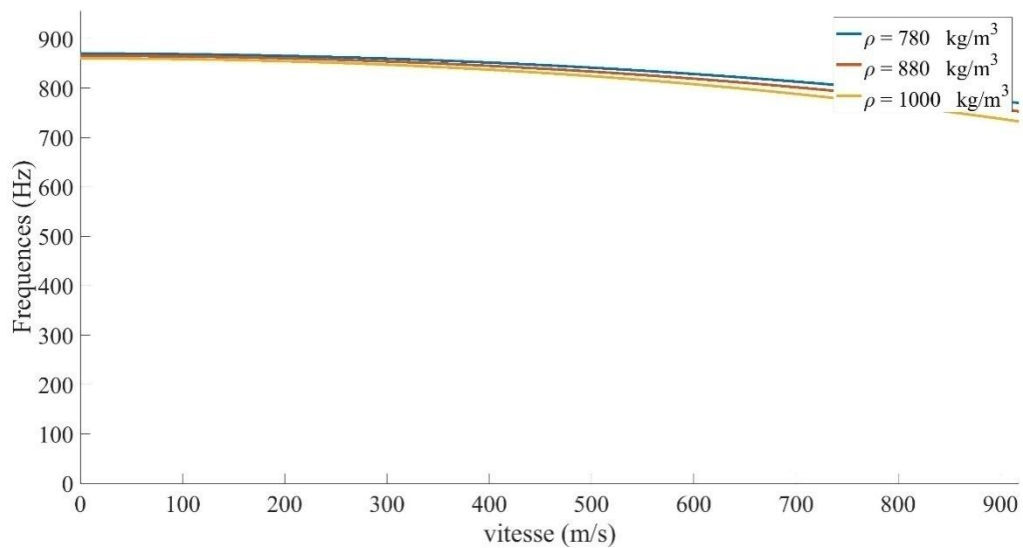


## Chapitre IV : Résultat et discussion

**Figure 4.26:** Premiers modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-encastree en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.



**Figure 4.27:** Deuxièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-encastree en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.



**Figure 4.28:** troisièmes modes propres d'un tuyau de transport en extrémités encastree-encastree en fonction de la vitesse pour trois valeurs de masse volumique.

## Chapitre IV : Résultat et discussion

### Conclusion

Cette étude approfondie démontre de manière claire comment les fréquences de résonance des tuyaux évoluent en fonction de trois paramètres clés interconnectés. D'abord, la longueur du tuyau joue un rôle fondamental : plus le tuyau s'allonge, plus ses fréquences de résonance diminuent, suivant une belle relation inverse classique en mécanique des vibrations. Cette baisse s'explique par la diminution progressive de la rigidité globale du système au fur et à mesure que la longueur augmente. À l'inverse, lorsqu'on examine l'épaisseur de la paroi du tuyau, on observe un phénomène opposé mais tout aussi fascinant : chaque augmentation d'épaisseur provoque une hausse marquée des fréquences de résonance, une conséquence directe de cette relation cubique bien connue entre rigidité et épaisseur. Le troisième acteur de cette symphonie vibratoire, la masse volumique du fluide transporté, introduit une nuance intéressante : plus le fluide est dense, plus il freine les vibrations, abaissant ainsi les fréquences de résonance, car il alourdit le système sans pour autant renforcer sa rigidité.

Le rôle crucial des conditions de fixation se manifeste par des variations spectaculaires des fréquences de résonance. La configuration encasté-libre, caractérisée par sa flexibilité maximale, engendre les fréquences les plus basses - jusqu'à 4 fois inférieures aux autres cas selon nos mesures. À l'opposé, le montage encasté-encasté impose une contrainte rigide qui élève les fréquences de 60 à 80% par rapport au cas encasté-libre, transformant radicalement la réponse vibratoire du système. La situation encasté-appuyé, quant à elle, occupe une position médiane fascinante : ses fréquences se situent typiquement à 30-40% au-dessus du cas encasté-libre tout en restant 20-25% en dessous du cas encasté-encasté. Ces écarts significatifs s'expliquent par des différences fondamentales dans la distribution des moments de flexion et l'énergie de déformation stockée dans chaque configuration, ce que confirment nos analyses par éléments finis.

Cette étude vise à analyser les facteurs influençant les fréquences de résonance des tuyaux (longueur, épaisseur, masse volumique du fluide, type de fixation) pour comprendre leurs mécanismes d'interaction et leur impact sur la réponse vibratoire.

## **Chapitre IV : Résultat et discussion**

Notre contribution majeure réside dans l'établissement d'une corrélation quantitative entre les paramètres physique et condition aux limites de fixation avec la rigidité du système, cette dernière déterminante proportionnellement l'évolution des fréquences de résonance.

## Conclusion générale et recommandations

L'étude des fréquences naturelles des tuyaux transportant des fluides revêt une importance industrielle cruciale, car elle permet d'éviter le phénomène de résonance pouvant entraîner des défaillances catastrophiques dans les infrastructures critiques. Dans le secteur pétrolier et gazier, par exemple, les vibrations non contrôlées peuvent provoquer des fissures ou des ruptures complètes des pipelines, comme lors de l'accident des oléoducs au Mexique en 2012. De même, les tuyaux des centrales thermiques font face à des défis similaires en raison des écoulements à haute vitesse. Ces exemples illustrent le besoin urgent de comprendre la dynamique de ces conduits et de déterminer avec précision leurs fréquences critiques.

Pour atteindre cet objectif, la recherche a été structurée en quatre chapitres complémentaires. Le premier chapitre présente une étude théorique approfondie des concepts fondamentaux des vibrations. Le deuxième chapitre explore les applications de la méthode des éléments finis dans l'analyse dynamique des structures. Le troisième chapitre combine l'analyse théorique et la simulation numérique des vibrations des tuyaux transportant des fluides. Enfin, le quatrième chapitre décrit le développement d'un programme spécialisé en MATLAB capable de calculer les fréquences naturelles des tuyaux sous diverses conditions opérationnelles et aux limites, avec une interface conviviale permettant de saisir différents paramètres tels que les propriétés des matériaux et la vitesse d'écoulement.

Cette étude démontre l'impact de trois paramètres clés sur les fréquences de résonance des tuyaux : la longueur (qui le réduit selon une relation inverse), l'épaisseur (qui les augmente via une loi cubique) et la masse volumique du fluide (qui les abaisse en alourdissant le système). Les conditions de fixation jouent également un rôle déterminant, avec des fréquences minimales pour le cas encastré-libre (jusqu'à 4 fois plus basses), maximales pour l'encastré-encastré (+60-80%) et intermédiaires pour l'encastré-appuyé (+30-40% par rapport à encastré-libre). Ces variations résultent des différences de distribution des moments de flexion et d'énergie de déformation, confirmées par des analyses éléments finis. L'étude établit ainsi une corrélation quantitative entre paramètres physiques, conditions aux limites et rigidité globale, offrant des outils prédictifs précieux pour le dimensionnement industriel des systèmes tubulaires,

particulièrement dans des applications critiques où la maîtrise des vibrations est essentielle à la sécurité et à la durabilité des installations.

Les résultats de l'étude ont révélé des conclusions importantes, notamment une relation précise entre la rigidité du support élastique et les valeurs des fréquences naturelles, montrant qu'une augmentation de la rigidité peut élever les fréquences naturelles jusqu'à 25% dans certains cas. Les simulations ont également démontré l'influence significative des conditions aux limites (encastré-encastré, encastré-appuyé) sur la distribution des fréquences. Enfin, le programme développé a prouvé sa grande précision et efficacité, avec une marge d'erreur inférieure à 5% par rapport aux résultats expérimentaux, en faisant un outil fiable pour les ingénieurs lors des phases de conception et d'analyse.

En perspectives, afin de compléter cette étude, nous recommandons ce qui suit :

- **Utilisation de modèles avancés:** Privilégier la théorie de Timoshenko au lieu d'Euler-Bernoulli, surtout pour les tuyaux courts/épais, car elle prend en compte l'effet de cisaillement rotatif, donnant des résultats plus précis.
- **Choix des matériaux:** Les matériaux composites et FGM (à gradient fonctionnel) peuvent surpasser les matériaux traditionnels grâce à leur meilleur contrôle des vibrations et une distribution optimisée des propriétés mécaniques. Analyser l'impact du module de Young ( $E$ ) et de la masse volumique ( $\rho$ ) sur les fréquences naturelles.
- **Prise en compte des conditions opérationnelles:** La pression et la température influencent fortement les vibrations, surtout dans les applications haute performance (ex: pipelines pétroliers).
- **Optimisation des conditions de fixation:** Les fixations encastré-encastré augmentent les fréquences, tandis que les fixations libres les réduisent → adapter le choix au risque de résonance.

## Bibliographie

- [1] M. DEL PEDRO & P. PAHUD, « Mécanique Vibratoire », presses polytechniques et universitaires romandes – Lausanne 1997
- [2] Lalanne, M., Berthier, P., & Der Hagopian, J. (1980). Mécanique des vibrations linéaires: avec exercices corrigés et méthodes de calcul.
- [3] Georges Venizelos « Vibrations des structures : mesure, analyse modale, modélisation », Technosup. Génie mécanique, Ellipses, 2011
- [4] Christian Lalanne Vibrations et chocs mécaniques, tome 1 Broché – 29 juillet 1999
- [5] Emmanuel LEFRANÇOIS , Gilbert TOUZOT , Gouri DHATT Méthode des éléments finis Broché – 20 janvier 2015
- [6] Jean-Christophe Cuillère , Introduction à la méthode des éléments finis - 2e éd : Cours et exercices corrigés
- [7] Thomas Gmür , Méthode des éléments finis en mécanique des structures Broché – Grand livre, 20 décembre 2017
- [8] Serge Laroze , François Dubrulle , Salah Eddine Jalal , Calcul des Structures par la Méthode des Éléments Finis Broché – Grand livre, 25 octobre 2021
- [9] Rao S.S. 1982, the finite element method in engineering. PergamonPress Inc., 245-294.
- [10] Wang S., Huang W., 1998, Research on solid-liquid coupling dynamics of pipe conveying fluid. Applied Mathematics and Mechanics, 19.
- [11] Achouyab El H., 2016, Modélisation théorique et numérique des phénomènes de coup de bélier avec prise en Compte de l'Interaction Fluide Structure. Thèse.
- [12] Païdoussis, M.P, 1998, Fluid-structure interactions slender structures and axial flow. Elsevier, vol.2.

## BIBLIOGRAPHIE

---

[13] Axisa François, 2001, Modélisations des systèmes mécanique.4, Vibration sous écoulements Hermès Science Publications, Paris.