MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : **Modélisation, Contrôle et Optimisation**

THEME :

Sur la Positivité d'une Certaine Classe de Systèmes Bidimensionnels Linéaires Fractionnaires Hybrides

Présentée par : « **BENHAMDI Hayat** »

Présidente : « **KAÏSSERLI Zineb** **UMAB-MCB**»
Examinateur : « **EL OSMANI Aïssa Omar** **USTO-MAA**»
Encadrant : « **GHEZZAR Mohammed Amine** **UMAB-MAA**»

Année Universitaire 2016/2017

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous allons introduiser un système bidimentionnel linéaire fractionnaire hybride et nous allons donner sa solution. Ainsi, nous allons présenter des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel système soit positif.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes chers parents, que nulle dédicace ne puisse exprimer mes sincères sentiments, pour leur patience illimitée, leur encouragement contenu, leur aide, en témoignage de mon profond amour et respect pour leurs grands sacrifices.

Mes chers frères, Fatima, Ismail, Imane, Manel et Reda, sans oublier ma belle sœur Amel, pour leur grand amour et leur soutien qu'ils trouvent ici l'expression de ma haute gratitude.

Mes chères amies qui m'ont encouragé, à toute ma famille et à tous ceux que j'aime.

Mlle BENHAMDI Hayat

Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma profonds gratitude à M.GHEZZAR Med Amine de m'avoir encadré dans mon mémoire de fin d'étude, et pour son temps, son aide et ses conseils.

Je tiens à remercier ma famille pour son soutien aussi moral que financier et pour son sacrifice.

Je remercie les membres du jury :

Présidente : Mme. KAÏSSERLI Zineb

Examinateur : M. El OSMANI Aïssa Omar

Vous me faites un grand honneur en acceptant de juger ce travail.

Je dois un remerciement à tous les enseignants du département Mathématique.

Je tiens également à remercier tous mes amies et tous les étudiants de Master 2 Mathématique-M.C.O.

Table des matières

Introduction **i**

1 Généralités et notions de base **2**

1.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo 2

1.2 La transformée de Laplace 5

1.2.1 Propriétés de la transformée de Laplace 5

1.2.2 Transformée de Laplace inverse 7

1.2.3 Propriétés de la transformée de Laplace inverse 7

1.3 La transformée en Z 8

1.3.1 Propriétés de la transformée en Z 8

1.3.2 Transformée en Z inverse 10

1.3.3 Propriétés de la transformée en Z inverse 10

1.4 Quelques matrices particulières 11

1.4.1 Matrices non-négatives 11

1.4.2 Matrices positives 11

1.4.3 Matrices strictement positives 11

1.4.4 Matrices de Metzler 11

2 Le modèle et les solutions **13**

2.1 Le modèle 13

2.1.1 Système linéaire 2D fractionnaire hybride 13

2.2 Solutions du système 14

3 Positivité du système **26**

3.1 Rappel 26

3.2 Définition générale de la positivité d'un système linéaire 2D fractionnaire hybride 27

3.3 Caractérisation de la positivité 27

4 Application **30**

Conclusion **34**

Bibliographie **35**

NOTATIONS

$\mathbb{N}$	:	Corps des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Corps des nombres réels non-négatifs.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace des vecteurs à n entiers réelles.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	:	Espace des matrices réelles de dimension $n \times m$.
$\mathbb{C}$	:	Corps des nombres complexes.
I_n	:	Matrice identité d'ordre n.
$\mathbb{R}_+^n$	:	Espace des vecteurs à n entrées réelles non-négatifs.
$\mathbb{R}_+^{n\times m}$	:	Espace des matrices à entrées réelles non-négatifs.
C^n	:	Espace des fonctions continûment dérivable n fois.
M_n	:	Espace des matrices de Metzler de dimension $n \times n$.
$\mathcal{L}[f(t)] := F(s)$	:	Transformée de Laplace de la fonction f.
$Z[x(n)] := X(z)$	:	Transformée en Z de la fonction $x(n)$.

INTRODUCTION

Une classe importante des systèmes dynamiques bidimensionnels est représentée par des modèles hybrides, leur comportement dépend de deux variables, une continue et l'autre discrète. Les systèmes hybrides ou continus-discrets permettent de modéliser les systèmes discrets qui évoluent dans un environnement continu.

Dans cette classe des systèmes (systèmes bidimensionnels linéaires hybrides), nous introduisons une catégorie des systèmes linéaires 2D fractionnaires positifs. Les systèmes d'ordre fractionnaires hybrides sont des systèmes continus-discrets décrits par des équations différentielles où leurs dérivées d'ordre fractionnaires (non entier), et qui sont positifs si et seulement si leurs trajectoires à partir d'un état initial non négatif restent éternellement dans l'orthèse positive pour toutes les entrées non négatives.

Récemment, nous pouvons trouver des systèmes 2D linéaires fractionnaires positifs hybride dans les différents domaines (Ingénierie, science de la gestion, médecine,...etc) ; donc, l'avancement des recherches dans le domaine du contrôle avancé est orienté vers l'utilisation des systèmes linéaires 2D fractionnaires hybrides positifs afin d'améliorer les performances de la boucle de commande.

Les scientifiques, particulièrement les mathématiciens se sont intéressés à étudier ce type des systèmes.

Le but de ce mémoire d'étudier une classe de modèle 2D hybride fractionnaire introduite par T. KACZOREK dans [5], où nous donnons sa solution et nous allons étudier sa positivité.

Ce travail est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre est un rappel introductif sur la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, et nous exposons une synthèse de la transformée de Laplace et la transformée en Z comme outil servant à répondre à notre problématique, enfin, nous donnons des définitions de quelques matrices particulières.

Le deuxième chapitre traite du modèle linéaire 2D fractionnaire hybride et sa solution.

Le troisième chapitre traite la positivité de notre système présenté et des conditions nécessaires et suffisantes seront établies pour qu'un tel système soit positif.

Le quatrième chapitre et le dernier introduit un exemple concret d'un système bidimensionnel linéaire fractionnaire hybride.

Chapitre 1

Généralités et notions de base

Dans ce chapitre nous introduisons quelques définitions et propriétés qui vont être utilisées dans notre travail.

1.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, nous définissons l'**intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville** d'ordre α de la fonction f par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du$$

avec

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{x-1} dt. \qquad ; \quad \mathrm{Re}(x) > 0$$

c'est la fonction gamma d'euler.

Définition 1.1.2 *Soient f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $n-1 < \alpha < n$, nous définissons la **dérivée fractionnaire au sens de Caputo** qui nous notons ${}^*D_a^\alpha f(t)$ par :*

$$\begin{aligned} {}^*D_a^\alpha f(t) &= \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = I^{n-\alpha} D^n f(t) \qquad (1.1.1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \qquad ; n = [\alpha]+1 \end{aligned}$$

avec

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = f^{(n)}(t)$$

c'est la dérivée normale d'ordre n de la fonction f.

Exemple 1.1.1 *Nous calculons la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction suivante :*

$$f(t) = t^\beta \qquad , \ t > 0$$

Nous avons

$$\begin{aligned} D^n f(t) &= (t^\beta)^{(n)} \\ &= \beta(\beta-1)...(\beta-n+1)t^{\beta-n} \end{aligned}$$

qui nous donne

$$\begin{aligned} I^{n-\alpha} D^n f(t) &= I^{n-\alpha}[\beta(\beta-1)...(\beta-n+1)t^{\beta-n}] \\ &= \beta(\beta-1)...(\beta-n+1) I^{n-\alpha}(t^{\beta-n}) \\ &= \frac{\beta(\beta-1)...(\beta-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

car

$$I^\alpha(t^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} t^{\beta+\alpha}$$

donc

$$^*D_a^\alpha(t^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \qquad , \beta > -1$$

Exemple 1.1.2 *Si au lieu de prendre $f(t) = t^\beta$ avec $t > 0$, nous prenons $f(t) = (t-a)^\beta$ avec $t \geqslant a$, alors*

$$^*D_a^\alpha((t-a)^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \qquad , \beta > -1$$

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction canstante $f(t) = Cte$, alors sa dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo est nulle.*

$$^*D_a^\alpha f(t) = 0$$

Preuve. Nous avons par définition

$$^{*}D_a^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t)$$

donc, si $f(t) = Cte$ nous avons

$$\begin{array}{rcl} D^n f(t) & = & 0 \\ \Rightarrow \quad I^{n-\alpha} D^n f(t) & = & 0 \end{array}$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 1.1.2 *Soit f une fonction qui admet une dérivée au sens de Caputo, alors*

$$I_a^{\alpha *} D_a^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$$

c'est le reste intégrale du developpement de Taylor de f au voisinage du point "a" à l'ordre n.

Preuve. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} I_a^{\alpha *} D_a^{\alpha} f(t) & = & I_a^{\alpha} I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\ & = & I_a^{n} D^n f(t) \end{array}$$

car d'après la propriété du semi-groupe pour les intégrales fractionnaires, nous avons pour $\alpha, \beta > 0$:

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) \qquad \square$$

Proposition 1.1.3 ***"Noyau de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo"***
Soient $\alpha > 0$ et $f \in C^n([a,b])$, alors nous avons

$$\begin{array}{rcl} ^{*}D_a^{\alpha} f(t) & = & 0 \\ \Rightarrow \; f(t) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i \qquad , c_i \in \mathbb{R} \quad , n = [\alpha] + 1 \end{array}$$

1.2 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est largement utilisée pour l'étude des systèmes linéaires, continus et invariants. Elle permet de manipuler aisément les équations différentielles, les systèmes des équations différentielles ordinaires et d'obtenir les principales performances des systèmes sans calculer la réponse temporelle.

Définition 1.2.1 *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite* ***causale*** *si* $f(t) = 0,\ \forall t \in \left]-\infty, 0\right[$.

Définition 1.2.2 *Soit f une fonction causale de la variable t (le temps) de $\mathbb{R}_+$ dans $\Bbbk$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) continue par morceaux,et elle est d'ordre exponentielle c.à.d : $\exists M > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$|f(t)| < M \exp(\alpha t), \qquad \forall t > 0$$

alors la ***transformée de Laplace*** *de telle fonction définie par*

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) \exp(-st)dt \qquad ; s \in \mathbb{C}$$

tel que $\int_0^\infty f(t) \exp(-st)dt$ *converge pour tout s vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Exemple 1.2.1 *Soit la fonction constante définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} a & si \ \ t \geqslant 0 \\ 0 & si \ \ t < 0 \end{cases}$$

alors sa transformée de Laplace notée $F(s)$ est :

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty a \exp(-st)dt = \frac{a}{s}$$

1.2.1 Propriétés de la transformée de Laplace

1. **Linéarité :** Soit f , $g : \mathbb{R}_+ \to \Bbbk$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ et $\mathcal{L}(g(t)) = G(s)$ et soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$; alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t)) \qquad (1.2.1) \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s) \end{aligned}$$

2. **Dérivée :** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{k}$, nous supposons que $f \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{k})$; donc la transformée de Laplace de la dérivée première de f définie par :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \mathcal{L}(\frac{df(t)}{dt}) = sF(s) - f(0)$$

Dans le cas général nous avons

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = \mathcal{L}(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

3. **Transformée de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo :** Soit f une fonction de classe C^n qui admet une dérivée fractionnaire au sens de Caputo, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}({}^*D_a^\alpha f(t)) &= \mathcal{L}(I^{n-\alpha} D^n f(t)) \\
&= \mathcal{L}(I^{[\alpha]+1-\alpha} D^{[\alpha]+1} f(t)) \\
&= s^{-([\alpha]-\alpha+1)} \mathcal{L}(D^{[\alpha]+1} f(t)) \\
&= s^{-([\alpha]-\alpha+1)} [s^{[\alpha]+1} F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} s^{[\alpha]-k} f^{(k)}(0)]
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}({}^*D_a^\alpha f(t)) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \tag{1.2.2}$$

4. **Transformée du produit de convolution :**

Définition 1.2.3 ***Le produit de convolution*** *est un opérateur bilinéaire et un produit commutatif, généralement noté « $*$ », qui à deux fonctions f et g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{k}$ vérifiant $f(t) = g(t) = 0$ pour $t < 0$, fait correspondre une autre fonction « $f * g$ » qui est définie par :*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \tag{1.2.3}$$

Proposition 1.2.1 *La transformée de Laplace du produit de convolution définie par :*

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = F(s)G(s) \tag{1.2.4}$$

5. **Transformée de Laplace de** t^{α} :

$$\mathcal{L}(t^{\alpha}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \tag{1.2.5}$$

1.2.2 Transformée de Laplace inverse

Définition 1.2.4 *La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, sa bijection inverse existe qui est la fonction $f(t)$. Elle est unique et nous l'appelons originale de $F(s)$, tel que*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) \tag{1.2.6}$$

1.2.3 Propriétés de la transformée de Laplace inverse

1. **Linéarité :** Soit $F(s)$ et $G(s)$ les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$, respectivement, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux constantes ; alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\lambda F(s) + \mu G(s)) &= \lambda \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + \mu \mathcal{L}^{-1}(G(s)) \\ &= \lambda f(t) + \mu g(t) \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

2. **Transformée inverse de transformée du produit de convolution :** Si

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = F(s)G(s)$$

en appliquant la transformée inverse de Laplace sur produit de convolution, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)) * \mathcal{L}^{-1}(G(s)) \\ &= (f*g)(t) \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

3. **Transformée inverse de $\frac{1}{s^{\alpha+1}}$** : D'après la propriété (1.2.5), nous avons

$$\begin{array}{rcl} t^{\alpha} & = & \mathcal{L}^{-1}(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}) \\ \Rightarrow \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & = & \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^{\alpha+1}}) \end{array}$$

d'où

$$\mathcal{L}^{-1}(s^{-(\alpha+1)}) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{1.2.9}$$

1.3 La transformée en Z

La transformée en Z est l'équivalent discret de la transformée de Laplace.

Définition 1.3.1 *Nous appelons* ***transformée en Z*** *d'une fonction causale $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction de la variable complexe z définie par :*

$$X(z) = Z(x(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{1.3.1}$$

où la variable n représente en général le temps discrétisé.

Exemple 1.3.1 *Soit $x(n) = 1$, pout tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

nous retrouvons une série géométrique de raison $\frac{1}{z}$, elle converge pour $|z| > 1$ et

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

1.3.1 Propriétés de la transformée en Z

1. **Linéarité :** La transformée en Z d'une combinaison linéaire de deux fonctions $x(n)$ et $y(n)$, $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$Z(\alpha x(n) + \beta y(n)) = \alpha Z(x(n)) + \beta Z(y(n)) \tag{1.3.2}$$

2. **Théorème de retard :**

$$Z(x(n-m)) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-n}$$

effectuons le changement de variable $k = n - m$, nous avons

$$\begin{aligned} Z(x(n-m)) &= \sum_{k=-m}^{\infty} x(k) z^{-k-m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k-m} \\ &= z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \end{aligned}$$

d'où

$$Z(x(n-m)) = z^{-m} X(z) \tag{1.3.3}$$

3. **Théorème d'avance :**

$$\begin{aligned} Z(x(n+m)) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m) z^{-n} \\ &= z^{m}[Z(x(n)) - \sum_{k=0}^{m-1} x(n) z^{-k}] \end{aligned}$$

cas particulier : pour $m = 1$ nous avons

$$Z(x(n+1)) = z[Z(x(n)) - x(0)] \tag{1.3.4}$$

4. **Théorème de convolution :**

Définition 1.3.2 ***Le produit de convolution*** *de deux fonctions $x(n)$ et $y(n)$, $n \in \mathbb{N}$, (le produit de convolution dans le cas discret) défini par :*

$$(x * y)(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} x(n-m) y(m) \tag{1.3.5}$$

Proposition 1.3.1 *La transformée en Z du produit de convolution est*

$$\begin{aligned} Z((x * y)(n)) &= Z(x(n))Z(y(n)) \\ &= X(z)Y(z) \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

1.3.2 Transformée en Z inverse

Définition 1.3.3 *Soit $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$ une fonction causale admet une transformée en Z, tel que*

$$Z(x(n)) = X(z)$$

alors, sa transformée inverse en Z existe et elle est unique, définie par :

$$Z^{-1}(X(z)) = x(n) \tag{1.3.7}$$

tel que, $x(n)$ est appelée originale de la fonction $X(z)$.

1.3.3 Propriétés de la transformée en Z inverse

1. **Linéarité** : Soit $X(z)$ et $Y(z)$ les transformées en Z de $x(n)$ et $y(n)$, $n \in \mathbb{N}$, respectivement, et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\begin{aligned} Z^{-1}(\lambda X(z) + \mu Y(z)) &= \lambda Z^{-1}(X(z)) + \mu Z^{-1}(Y(z)) \\ &= \lambda x(n) + \mu y(n) \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

2. **Transformée en Z inverse de la transformée du produit de convolution** : d'après (1.3.6), en appliquant la transformée en Z inverse nous obtenons

$$\begin{aligned} Z^{-1}(X(z)Y(z)) &= Z^{-1}(X(z)) * Z^{-1}(Y(z)) \\ &= (x * y)(n) \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

1.4 Quelques matrices particulières

D'après la thèse [1], nous avons les définitions de quelques matrices particulières.

Soit $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice à coéfficients réels.

1.4.1 Matrices non-négatives

Définition 1.4.1 *A est une matrice **non-négative** si toutes ses entrées sont non négatives, i.e : $\forall i, j = 1, ..., n : a_{i,j} \geqslant 0$.*

Nous noterons une telle matrice par : $A \geqslant 0$ ou encore, $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$.

1.4.2 Matrices positives

Définition 1.4.2 *A est une matrice **positive** si toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée strictement positive, i.e : $\exists k, \exists l \in \{1, ..., n\} : a_{k,l} > 0$.*

Nous noterons une telle matrice par : $A > 0$.

1.4.3 Matrices strictement positives

Définition 1.4.3 *A est une matrice **strictement positive** si toutes ses entrées sont strictement positives, i.e : $\forall i, j = 1, ..., n : a_{i,j} > 0$.*

Nous noterons une telle matrice par : $A >> 0$.

1.4.4 Matrices de Metzler

Définition 1.4.4 *Une matrice réelle A est dite de **Metzler**, si toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives, i.e :$\forall i, j = 1, ..., n,\ i \neq j : a_{ij} \geqslant 0$.*

Nous noterons l'espace des matrices de Metzler par : M_n.

Exemple 1.4.1 *La matrice A suivante est une matrice de Metzler*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Proposition 1.4.1 *A est une matrice de Metzler si est seulement si $\forall t \geqslant 0$, $\exp(At) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, i.e*

$$A \in M_n \Longleftrightarrow \exp(At) \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \qquad ,\forall t \geqslant 0 \tag{1.4.1}$$

Preuve.

Nécessité :

Supposons que A est une matrice de Metzler, nous pouvons trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $(A + \lambda I_n) > 0$. Sachant que

$$(A + \lambda I_n) + (-\lambda I_n) = (-\lambda I_n) + (A + \lambda I_n)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \exp[(A + \lambda I_n)t + (-\lambda I_n)t] \\ &= \exp(A + \lambda I_n)t \exp(-\lambda I_n)t \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \end{aligned}$$

du fait que $\exp(A + \lambda I_n)t \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $\exp(-\lambda I_n)t \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$

Suffisance :

Supposons que $\forall t \geqslant 0$, $\exp(At) \geqslant 0$. Ainsi, puisque

$$A = \frac{d}{dt}(\exp(At))_{t=0} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\exp(At) - I}{t}$$

Prenons comme e_j le $j^{ième}$ vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t\to 0_+} \frac{\langle \exp(At)e_j - e_j, e_i\rangle}{t} \\ &= \lim_{t\to 0_+} \left\{ \frac{\langle \exp(At)e_j, e_i\rangle}{t} - \frac{\langle e_j, e_i\rangle}{t} \right\} \\ &= \lim_{t\to 0_+} \frac{\langle \exp(At)e_j, e_i\rangle}{t} \geqslant 0 \end{aligned}$$

puisque $\langle e_j, e_i\rangle = 0$. Dés lors, $a_{ij} \geqslant 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc une matrice de Metzler.$\square$

Chapitre 2

Le modèle et les solutions

Dans ce chapitre nous introduisons un système linéaire 2D fractionnaire hybride, puis nous allons donner sa solution.

2.1 Le modèle

2.1.1 Système linéaire 2D fractionnaire hybride

D'après l'article [5], nous considérons le système linéaire 2D fractionnaire hybride défini par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} {}^*D^\alpha x(t,i+1) & = & A_0x(t,i) + A_1\frac{d^\alpha x(t,i)}{dt^\alpha} + A_2x(t,i+1) \\ & & +Bu(t,i) \\ & & \\ y(t,i) & = & Cx(t,i)+Du(t,i) \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} 0<\alpha<1 \\ t\in\mathbb{R} \\ i\in\mathbb{N} \end{array} \tag{2.1.1}$$

où, ${}^*D$ c'est la dérivée d'ordre α fractionnaire au sens de Caputo définie par :

$${}^*D^\alpha x(t,i+1) = \frac{d^\alpha x(t,i+1)}{dt^\alpha}$$

et

$x(t,i)\in\mathbb{R}^n$	:	vecteur d'état.
$u(t,i)\in\mathbb{R}^m$	:	vecteur de la commande (ou l'entré du système).
$y(t,i)\in\mathbb{R}^p$	:	vecteur de la sortie.
$A_k \in\mathbb{R}^{n\times n}$, $k=0,1,2$	:	matrices dynamiques.
$B \in\mathbb{R}^{n\times m}$	:	matrice du contrôle.
$C \in\mathbb{R}^{p\times n}$	:	matrice de la sortie.
$D \in\mathbb{R}^{p\times m}$	:	matrice du contrôle.

Avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} x(t,0) &\in \mathbb{R}^n \qquad ,t\in\mathbb{R} \\ x(0,i) &\in \mathbb{R}^n \qquad ,i\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

2.2 Solutions du système

Dans cette section nous allons nous intéresser à résoudre notre système (2.1.1).

Nous avons l'équation :

$$\frac{d^\alpha x(t,i+1)}{dt^\alpha} = A_0x(t,i) + A_1\frac{d^\alpha x(t,i)}{dt^\alpha} + A_2x(t,i+1) + Bu(t,i) \tag{2.2.1}$$

En utilisant la transformée de Laplace sur la variable continue t et la transformée en Z sur la variable discrète i de l'équation (2.2.1).

Notons :

$$X(s,z) = Z(\mathcal{L}(x(t,i)) \qquad , \qquad U(t,i) = Z(\mathcal{L}(u(t,i))$$

1/ En appliquant la transformée de Laplace sur le premier coté de l'équation (2.2.1) et d'après (1.2.2), nous avons

$$\mathcal{L}(\frac{d^\alpha x(t,i+1)}{dt^\alpha}) = s^\alpha X(s,i+1) - s^{\alpha-1}x(0,i+1)$$

l'application de la transformée en Z sur l'équation ci-dessus et en utilisant les propriétés (1.3.2) et (1.3.4), nous avons

$$\begin{aligned} Z[s^\alpha X(s,i+1) - s^{\alpha-1}x(0,i+1)] &= s^\alpha[zX(s,z) - zX(s,0)] \\ &\quad -s^{\alpha-1}[zX(0,z) - zx(0,0)] \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

2/ Par le même raisonnement pour le deuxième coté de l'équation (2.2.1) nous avons

$$\begin{aligned} Z\{\mathcal{L}[A_0x(t,i) + A_1\frac{d^\alpha x(t,i)}{dt^\alpha} + A_2x(t,i+1) + Bu(t,i)]\} &= A_0X(s,z) \\ &+A_1s^\alpha X(s,z) + A_2zX(s,z) \\ &-A_1s^{\alpha-1}X(0,z) - A_2zX(s,0) \\ &+BU(s,z) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Donc, selon les équations (2.2.2) et (2.2.3), nous avons

$$\begin{aligned} s^\alpha zX(s,z) - s^\alpha zX(s,0) - s^{\alpha-1}zX(0,z) + s^{\alpha-1}zx(0,0) &= A_0X(s,z) + A_1s^\alpha X(s,z) \\ &+A_2zX(s,z) - A_1s^{\alpha-1}X(0,z) \\ &-A_2zX(s,0) + BU(s,z) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (I_ns^\alpha z - A_0 - A_1s^\alpha - A_2z)X(s,z) &= (I_ns^\alpha z - A_2z)X(s,0) \\ &+(I_ns^{\alpha-1}z - A_1s^{\alpha-1})X(0,z) \\ &-I_ns^{\alpha-1}zx(0,0) + BU(s,z) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

nous devisons l'équation (2.2.4) sur $s^\alpha z$, on obtient

$$\begin{aligned} (I_n - A_0s^{-\alpha}z^{-1} - A_1z^{-1} - A_2s^{-\alpha})X(s,z) = \; & (I_n - A_2s^{-\alpha})X(s,0) \\ & +(I_ns^{-1} - A_1s^{-1}z^{-1})X(0,z) \\ & -I_ns^{-1}x(0,0) + Bs^{-\alpha}z^{-1}U(s,z) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} X(s,z) = \; & (I_n - A_0s^{-\alpha}z^{-1} - A_1z^{-1} - A_2s^{-\alpha})^{-1} \\ & \times[(I_n - A_2s^{-\alpha})X(s,0) \\ & +(I_ns^{-1} - A_1s^{-1}z^{-1})X(0,z) \\ & -I_ns^{-1}x(0,0) + Bs^{-\alpha}z^{-1}U(s,z)] \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Nous posons

$$(I_n - A_0s^{-\alpha}z^{-1} - A_1z^{-1} - A_2s^{-\alpha})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l} \tag{2.2.6}$$

Nous prenons en considération que :

$$
\begin{aligned}
& (I_n - A_0 s^{-\alpha} z^{-1} - A_1 z^{-1} - A_2 s^{-\alpha})(\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-k\alpha} z^{-l}) \\
= \; & (\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-k\alpha} z^{-l})(I_n - A_0 s^{-\alpha} z^{-1} - A_1 z^{-1} - A_2 s^{-\alpha}) = I_n
\end{aligned}
\tag{2.2.7}
$$

En distribuant le premiér membre de l'équation (2.2.7), nous avons

$$
\begin{aligned}
& (I_n - A_0 s^{-\alpha} z^{-1} - A_1 z^{-1} - A_2 s^{-\alpha})(\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-k\alpha} z^{-l}) \\
= \; & I_n T_{0,0} + I_n T_{0,1} z^{-1} + I_n T_{0,2} z^{-2} + ... + I_n T_{1,0} s^{-\alpha} + I_n T_{1,1} s^{-\alpha} z^{-1} + I_n T_{1,2} s^{-\alpha} z^{-2} \\
& + ... + I_n T_{2,0} s^{-2\alpha} + I_n T_{2,1} s^{-2\alpha} z^{-1} + I_n T_{2,2} s^{-2\alpha} z^{-2} + ... - A_0 T_{0,0} s^{-\alpha} z^{-1} \\
& - A_0 T_{0,1} s^{-\alpha} z^{-2} - A_0 T_{0,2} s^{-\alpha} z^{-3} - ... - A_0 T_{1,0} s^{-2\alpha} z^{-1} - A_0 T_{1,1} s^{-2\alpha} z^{-2} \\
& - A_0 T_{1,2} s^{-2\alpha} z^{-3} - ... - A_0 T_{2,0} s^{-3\alpha} z^{-1} - A_0 T_{2,1} s^{-3\alpha} z^{-2} - A_0 T_{2,2} s^{-3\alpha} z^{-3} - ... \\
& - A_1 T_{0,0} z^{-1} - A_1 T_{0,1} z^{-2} - A_1 T_{0,2} z^{-3} - ... - A_1 T_{1,0} s^{-\alpha} z^{-1} - A_1 T_{1,1} s^{-\alpha} z^{-2} \\
& - A_1 T_{1,2} s^{-\alpha} z^{-3} - ... - A_1 T_{2,0} s^{-2\alpha} z^{-1} - A_1 T_{2,1} s^{-2\alpha} z^{-2} - A_1 T_{2,2} s^{-2\alpha} z^{-3} - ... \\
& - A_2 T_{0,0} s^{-\alpha} - A_2 T_{0,1} s^{-\alpha} z^{-1} - A_2 T_{0,2} s^{-\alpha} z^{-2} - ... - A_2 T_{1,0} s^{-2\alpha} - A_2 T_{1,1} s^{-2\alpha} z^{-1} \\
& - A_2 T_{1,2} s^{-2\alpha} z^{-2} - ... - A_2 T_{2,0} s^{-3\alpha} - A_2 T_{2,1} s^{-3\alpha} z^{-1} - A_2 T_{2,2} s^{-3\alpha} z^{-2} - ... \\
= \; & I_n
\end{aligned}
$$

de même,

$$\begin{aligned}
&(\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l})(I_n - A_0s^{-\alpha}z^{-1} - A_1z^{-1} - A_2s^{-\alpha})\\
= \;& T_{0,0}I_n + T_{0,1}I_nz^{-1} + T_{0,2}I_nz^{-2} + ... + T_{1,0}I_ns^{-\alpha} + T_{1,1}I_ns^{-\alpha}z^{-1} + T_{1,2}I_ns^{-\alpha}z^{-2}\\
& +... + T_{2,0}I_ns^{-2\alpha} + T_{2,1}I_ns^{-2\alpha}z^{-1} + T_{2,2}I_ns^{-2\alpha}z^{-2} + ... - T_{0,0}A_0s^{-\alpha}z^{-1}\\
& -T_{0,1}A_0s^{-\alpha}z^{-2} - T_{0,2}A_0s^{-\alpha}z^{-3} - ... - T_{1,0}A_0s^{-2\alpha}z^{-1} - T_{1,1}A_0s^{-2\alpha}z^{-2}\\
& -T_{1,2}A_0s^{-2\alpha}z^{-3} - ... - T_{2,0}A_0s^{-3\alpha}z^{-1} - T_{2,1}A_0s^{-3\alpha}z^{-2} - T_{2,2}A_0s^{-3\alpha}z^{-3} - ...\\
& -T_{0,0}A_1z^{-1} - T_{0,1}A_1z^{-2} - T_{0,2}A_1z^{-3} - ... - T_{1,0}A_1s^{-\alpha}z^{-1} - T_{1,1}A_1s^{-\alpha}z^{-2}\\
& -T_{1,2}A_1s^{-\alpha}z^{-3} - ... - T_{2,0}A_1s^{-2\alpha}z^{-1} - T_{2,1}A_1s^{-2\alpha}z^{-2} - T_{2,2}A_1s^{-2\alpha}z^{-3} - ...\\
& -T_{0,0}A_2s^{-\alpha} - T_{0,1}A_2s^{-\alpha}z^{-1} - T_{0,2}A_2s^{-\alpha}z^{-2} - ... - T_{1,0}A_2s^{-2\alpha} - T_{1,1}A_2s^{-2\alpha}z^{-1}\\
& -T_{1,2}A_2s^{-2\alpha}z^{-2} - ... - T_{2,0}A_2s^{-3\alpha} - T_{2,1}A_2s^{-3\alpha}z^{-1} - T_{2,2}A_2s^{-3\alpha}z^{-2} - ...\\
= \;& I_n
\end{aligned}$$

d'après l'équation (2.2.7) et en comparant les coéfficients de la même puissance des variables $s^{-k\alpha}$ et z^{-l}, nous obtenons

$$\begin{array}{ccc}
I_nT_{0,0} = T_{0,0}I_n = I_n & \Rightarrow & T_{0,0} = I_n \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} I_nT_{0,1} - A_1T_{0,0} = 0_n \\ T_{0,1}I_n - T_{0,0}A_1 = 0_n \end{array}\right. & \Rightarrow & T_{0,1} = A_1T_{0,0} = T_{0,0}A_1 \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} I_nT_{1,0} - A_2T_{0,0} = 0_n \\ T_{1,0}I_n - T_{0,0}A_2 = 0_n \end{array}\right. & \Rightarrow & T_{1,0} = A_2T_{0,0} = T_{0,0}A_2 \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} I_nT_{1,1} - A_0T_{0,0} - A_1T_{1,0} - A_2T_{0,1} = 0_n \\ T_{1,1}I_n - T_{0,0}A_0 - T_{1,0}A_1 - T_{0,1}A_2 = 0_n \end{array}\right. & \Rightarrow & \begin{array}{c} T_{1,1} = A_0T_{0,0} + A_1T_{1,0} + A_2T_{0,1} \\ = T_{0,0}A_0 + T_{1,0}A_1 + T_{0,1}A_2 \end{array} \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} I_nT_{0,2} - A_1T_{0,1} = 0_n \\ T_{0,2}I_n - T_{0,1}A_1 = 0_n \end{array}\right. & \Rightarrow & T_{0,2} = A_1T_{0,1} = T_{0,1}A_1 \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} I_nT_{2,0} - A_2T_{1,0} = 0_n \\ T_{2,0}I_n - T_{1,0}A_2 = 0_n \end{array}\right. & \Rightarrow & T_{2,0} = A_2T_{1,0} = T_{1,0}A_2 \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} I_nT_{2,2} - A_0T_{1,1} - A_1T_{2,1} - A_2T_{1,2} = 0_n \\ T_{2,2}I_n - T_{1,1}A_0 - T_{2,1}A_1 - T_{1,2}A_2 = 0_n \end{array}\right. & \Rightarrow & \begin{array}{c} T_{2,2} = A_0T_{1,1} + A_1T_{2,1} + A_2T_{1,2} \\ = T_{1,1}A_0 + T_{2,1}A_1 + T_{1,2}A_2 \end{array} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

en terminant les calculs nous allons trouver les matrices de transitions $T_{k,l}$ qui sont définies par :

$$T_{k,l} = \begin{cases} I_n & \text{(matrice identité)} & \textit{pour} & k = l = 0 \\ A_0 T_{k-1,l-1} + A_1 T_{k,l-1} + A_2 T_{k-1,l} = T_{k-1,l-1} A_0 & \textit{pour} & k, l \in \mathbb{N} \\ \quad +T_{k,l-1} A_1 + T_{k-1,l} A_1 & & k + l > 0 \\ 0_n & \text{(matrice nulle)} & \textit{pour} & k < 0 \; et/ou \; l < 0 \end{cases} \tag{2.2.8}$$

En remplaçant l'équation (2.2.6) dans la formule qui nous avons trouvé dans (2.2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} X(s,z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-k\alpha} z^{-l} [(I_n - A_2 s^{-\alpha}) X(s,0) \\ &\quad + (I_n s^{-1} - A_1 s^{-1} z^{-1}) X(0,z) - I_n s^{-1} x(0,0) + B s^{-\alpha} z^{-1} U(s,z)] \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, la transformée en Z inverse et théorème de convolution sur l'équation (2.2.9), nous avons

$$\begin{aligned} x(t,i) &= Z^{-1}[\mathcal{L}^{-1} X(s,z)] \\ &= Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-k\alpha} z^{-l} \times [(I_n - A_2 s^{-\alpha}) X(s,0) \\ &\quad + (I_n s^{-1} - A_1 s^{-1} z^{-1}) X(0,z) - I_n s^{-1} x(0,0) \\ &\quad + B s^{-\alpha} z^{-1} U(s,z)]]\} \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

d'après les propriétés des transformées inverse (1.2.7) et (1.3.8), nous avons

$$\begin{aligned}
Z^{-1}[\mathcal{L}^{-1}X(s,z)] &= Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l}(I_n - A_2 s^{-\alpha})X(s,0)]\} \\
&+Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-(k\alpha+1)}z^{-l}X(0,z)]\} \\
&-A_1 Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-(k\alpha+1)}z^{-l}z^{-1}X(0,z)]\} \\
&-Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-(k\alpha+1)}z^{-l}x(0,0)]\} \\
&+BZ^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-(k+1)\alpha}z^{-l}z^{-1}U(s,z)]\}
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Nous développons les parties de l'équation (2.2.11).

a/ Dans un premier temps, nous avons l'expression :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l}(I_n - A_2 s^{-\alpha})X(s,0)$$

en appliquant la transformée de Laplace inverse, en raison du calcul et d'après la propriété (1.2.7) nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l}(I_n - A_2 s^{-\alpha})X(s,0)] &= \mathcal{L}^{-1}[\sum_{l=0}^{+\infty}T_{0,l}z^{-l}X(s,0) + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l}X(s,0)] \\
&-A_2\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-(k+1)\alpha}z^{-l}X(s,0)] \\
&= \sum_{l=0}^{+\infty}T_{0,l}z^{-l}\mathcal{L}^{-1}[X(s,0)] + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}z^{-l}\mathcal{L}^{-1}[s^{-k\alpha}X(s,0)] \\
&-A_2\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}z^{-l}\mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}X(s,0)]
\end{aligned}$$

selon la définition de la transformée de Laplace inverse et les propriétés (1.2.8) et (1.2.9), nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l}(I_n-A_2s^{-\alpha})X(s,0)] &= \sum_{l=0}^{+\infty}T_{0,l}z^{-l}x(t,0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}z^{-l}[\frac{t^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)}*x(t,0)]\\ &-A_2\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}z^{-l}[\frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}*x(t,0)]\end{aligned}$$

d'aprés la définition du produit de convolution (1.2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l}(I_n-A_2s^{-\alpha})X(s,0)] &= \sum_{l=0}^{+\infty}T_{0,l}z^{-l}x(t,0)\\ &+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}z^{-l}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)}x(\tau,0)d\tau\\ &-A_2\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}z^{-l}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}x(\tau,0)d\tau\end{aligned}$$

en appliquant la transformée en Z inverse sur l'équation ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l}(I_n-A_2s^{-\alpha})X(s,0)]\} &= Z^{-1}\{\sum_{l=0}^{+\infty}T_{0,l}z^{-l}x(t,0)\\ &+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}z^{-l}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)}x(\tau,0)d\tau\\ &-A_2\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}z^{-l}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}x(\tau,0)d\tau\}\end{aligned}$$

selon la définition (1.3.7) et la propriété (1.3.8), nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned}Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}T_{k,l}s^{-k\alpha}z^{-l}(I_n-A_2s^{-\alpha})X(s,0)]\} &= T_{0,i}x(t,0)\\ &+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{T_{k,i}}{\Gamma(k\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{k\alpha-1}x(\tau,0)d\tau\\ &-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{T_{k,i}A_2}{\Gamma((k+1)\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{(k+1)\alpha-1}x(\tau,0)d\tau\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Concernant les expressions qui reste nous allons faire le même travail.

b/ Nous avons l'expression suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}s^{-(k\alpha+1)}z^{-l}X(0,z)$$

en appliquant la transformée $\mathcal{L}^{-1}$, d'après les propriétés (1.2.7) et (1.2.9) nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}s^{-(k\alpha+1)}z^{-l}X(0,z)] &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}z^{-l}X(0,z)\mathcal{L}^{-1}[s^{-(k\alpha+1)}] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}z^{-l}X(0,z)\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\end{aligned}$$

selon les propriétés (1.3.8) et (1.3.9), l'application de la transformée Z^{-1} sur la formule précédente nous donne

$$\begin{aligned}Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}s^{-(k\alpha+1)}z^{-l}X(0,z)]\} &= Z^{-1}\{\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}z^{-l}X(0,z)\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}Z^{-1}[\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}z^{-l}X(0,z)] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}[T_{k,i} * x(0,i)]\end{aligned}$$

et d'après la définition du produit de convolution (1.3.5), nous avons

$$Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}s^{-(k\alpha+1)}z^{-l}X(0,z)]\} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{T_{k,i-l}t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}x(0,l) \tag{2.2.13}$$

c/ Nous avons

$$A_1\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}s^{-(k\alpha+1)}z^{-l}z^{-1}X(0,z)$$

du même raisonnement dans la partie b/, l'application de $\mathcal{L}^{-1}$ sur l'expression ci-dessus nous donne

$$A_1\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}s^{-(k\alpha+1)}z^{-l}z^{-1}X(0,z)] = A_1\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l}z^{-l}z^{-1}X(0,z)\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$$

ensuite, en appliquant la transformée Z^{-1} et d'après les propriétés (1.3.8) et (1.3.9) nous avons

$$\begin{aligned}
A_1 Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k\alpha+1)} z^{-l} z^{-1} X(0,z)]\} &= A_1 Z^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l} z^{-1} X(0,z)\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}] \\
&= A_1 \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} Z^{-1}[z^{-1}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l} X(0,z)] \\
&= A_1 \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} Z^{-1}[z^{-1}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l}] * Z^{-1}[X(0,z)]
\end{aligned}$$

selon la propriété (1.3.3), nous avons

$$\begin{aligned}
Z^{-1}[z^{-1}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l}] &= Z^{-1}[z^{-1} Z(T_{k,i})] \\
&= T_{k,i-1}
\end{aligned}$$

donc ; d'après la définition (1.3.5) nous obtenons

$$A_1 Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k\alpha+1)} z^{-l} z^{-1} X(0,z)]\} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l-1} A_1 t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,l) \qquad (2.2.14)$$

d/ En appliquant le $\mathcal{L}^{-1}$ sur l'expression suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k\alpha+1)} z^{-l} x(0,0)$$

et en utilisant les propriétés (1.2.7) et (1.2.9), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k\alpha+1)} z^{-l} x(0,0)] &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l} x(0,0) \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k\alpha+1)}] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l} x(0,0) \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}
\end{aligned}$$

Nous appliquons la transformée Z^{-1} sur la formule précédente, selon la définition de la transformée en Z et la propriété (1.3.8) nous obtenons

$$\begin{aligned}
Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k\alpha+1)} z^{-l} x(0,0)]\} &= Z^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l} x(0,0) \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,0) Z^{-1}[\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l}]
\end{aligned}$$

d'où

$$Z^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k\alpha+1)} z^{-l} x(0,0)]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i} t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,0) \tag{2.2.15}$$

e/ De même, nous avons l'expression :

$$B\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k+1)\alpha} z^{-l} z^{-1} U(s,z)$$

en appliquant la transformée $\mathcal{L}^{-1}$, d'après les propriétés (1.2.7), (1.2.8), (1.2.9) et la définition de produit de convolution (1.2.3) nous avons

$$\begin{aligned} B\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k+1)\alpha} z^{-l} z^{-1} U(s,z)] &= B\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l} z^{-1} \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha} U(s,z)] \\ &= B\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l} z^{-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)} u(\tau,z) d\tau \end{aligned}$$

l'application de la transformée Z^{-1} sur la formule ci-dessus et selon la propriété (1.3.8), nous avons

$$\begin{aligned} BZ^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k+1)\alpha} z^{-l} z^{-1} U(s,z)]\} &= BZ^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l} z^{-1} \\ &\quad \times \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)} u(\tau,z) d\tau] \\ &= B\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \\ &\quad \times Z^{-1}[z^{-1}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} z^{-l} u(\tau,z) d\tau] \end{aligned}$$

d'après ce qui précède ; en plus, en utilisant la propriété (1.3.9) et la définition (1.3.5) nous obtenons

$$\begin{aligned} BZ^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} T_{k,l} s^{-(k+1)\alpha} z^{-l} z^{-1} U(s,z)]\} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l-1} B}{\Gamma((k+1)\alpha)} \\ &\quad \times \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} u(\tau,l) d\tau \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Donc, en remplaçant (2.2.12), (2.2.13), (2.2.14), (2.2.15) et (2.2.16) dans l'équation (2.2.10), nous obtenons la solution :

$$\begin{aligned}
x(t,i) &= T_{0,i}x(t,0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{T_{k,i}}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1} x(\tau,0)d\tau \\
&\quad - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i}A_2}{\Gamma((k+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} x(\tau,0)d\tau \\
&\quad + \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l}t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,l) - \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l-1}A_1 t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,l) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i}t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,0) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l-1}B}{\Gamma((k+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} u(\tau,l)d\tau
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Nous remarquons que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l}t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,l) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i}t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,0) + \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l}t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,l)$$

d'où, en rempalçant dans (2.2.17) nous obtenons

$$\begin{aligned}
x(t,i) &= T_{0,i}x(t,0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{T_{k,i}}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1} x(\tau,0)d\tau \\
&\quad - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i}A_2}{\Gamma((k+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} x(\tau,0)d\tau \\
&\quad + \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l}t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,l) - \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l-1}A_1 t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x(0,l) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{T_{k,i-l-1}B}{\Gamma((k+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} u(\tau,l)d\tau
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Par conséquent, le théorème suivant a été prouvé.

Théorème 2.2.1 *La solution de l'équation (2.2.1) avec des conditions initiales (2.1.2) a la forme (2.2.18), où les matrices de transition $T_{k,l}$ sont définies par (2.2.8).*

Chapitre 3

Positivité du système

Dans ce chapitre nous allons étudier la positivité de notre système (2.1.1).

3.1 Rappel

Définition 3.1.1 *Soit $C_{nd}(t)$ l'ensemble des fonctions continues croissantes.*
La fonction $f(t) \in C_{nd}(t)$ si et seulement si pout tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $t_1 \geqslant t_2$ on a $f(t_1) \geqslant f(t_2)$.

Lemme 3.1.1 *Soit $f(t) \in C_{nd}(t)$ et il existe $\frac{d^\alpha x(t,i)}{dt^\alpha}$ pour $0 < \alpha < 1$, donc*

$$\frac{d^\alpha x(t,i)}{dt^\alpha} \geqslant 0 \quad pour \quad t \geqslant 0 \tag{3.1.1}$$

Preuve. Il est clair que le produit de convolution de deux fonctions continues non-négatives $f_1(t)$, $f_2(t)$

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

il est aussi une fonction continue non-négative.

Alors, d'après ça et en utilisant (1.1.1) nous obtenons

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \geqslant 0 \quad \text{pour } t \geqslant 0$$

car $\Gamma(1-\alpha) > 0$, $(t-\tau)^{-\alpha} \geqslant 0$ pour $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ et $f'(\tau)d\tau \geqslant 0$ pour $f(t) \in C_{nd}(t)$.
Il est entendu que $x(t,0)$ dans (2.1.2) est une fonction croissante de t, i.e

$$x(t,0) \in C^n_{nd}(t) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0 \qquad \square$$

3.2 Définition générale de la positivité d'un système linéaire 2D fractionnaire hybride

Définition 3.2.1 *Le système (2.1.1) est dit (internement) positif si pour toutes conditions initiales*

$$\begin{aligned} x(t,0) &\in \mathbb{R}^n_+, \quad x(t,0) \in C^n_{nd}(t) \\ x(0,i) &\in \mathbb{R}^n_+ \quad, i \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

et tout contrôle $u(t,i) \in \mathbb{R}^m_+$, $t \geqslant 0$, $i \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} x(t,i) &\in \mathbb{R}^n_+ \quad, y(t,i) \in \mathbb{R}^p_+ \\ \textit{pour} \qquad t &\geqslant 0, \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

3.3 Caractérisation de la positivité

Nous allons alors caractériser la positivité du système linéaire 2D fractionnaire hybride (2.1.1).

Théorème 3.3.1 *Le système (2.1.1) est positif si et seulement si :*
i) $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$, $A = A_0 + A_1A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}_+$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}_+$.
ii) A_2 *est une matrice de Metzler.*

Preuve.

I/ L'équation (2.2.1) peut être écrit de la forme

$$\frac{d^\alpha x(t,i+1)}{dt^\alpha} = A_2 x(t,i+1) + F(t,i) \qquad ,t \geqslant 0, \qquad i \in \mathbb{N} \tag{3.3.1}$$

où

$$F(t,i) = A_0 x(t,i) + A_1 \frac{d^\alpha x(t,i)}{dt^\alpha} + Bu(t,i) \tag{3.3.2}$$

de (3.3.1) et (3.3.2) pour $i = 0$ nous avons

$$\frac{d^\alpha x(t,1)}{dt^\alpha} = A_2 x(t,1) + F(t,0) \tag{3.3.3}$$

où

$$F(t,0) = A_0 x(t,0) + A_1 \frac{d^\alpha x(t,0)}{dt^\alpha} + Bu(t,0) \tag{3.3.4}$$

$F(t,0) \in \mathbb{R}_+^n$ si les conditions initiales (3.2.1) sont vérifées et les matrices A_0, A_1, B doivent satisfaire la condition suivante

$$A_0, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \qquad , B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$$

II/ Nous considérons l'équation (3.3.3) comme une équation d'un système linéaire 1D fractionnaire continu par rapport à la variable t.

D'après [5], la solution d'une telle équation s'écrit sous la forme suivante

$$x(t,1) = \Phi_0(t)x(0,1) + \int_0^t \Phi(t-\tau)F(\tau,0)d\tau$$

où

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_2^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \tag{3.3.5}$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_2^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \tag{3.3.6}$$

pour que ce système 1D soit positif, nous allons utiliser le faite que

$$\Phi_0(t),\ \Phi(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \qquad \text{pour } t \geqslant 0 \Longleftrightarrow A_2 \in M_n \tag{3.3.7}$$

De (3.3.7), la condition ii) est vérifée.

III/ De l'équation

$$y(t,i) = Cx(t,i) + Du(t,i)$$

d'après la définition de la positivité, nous avons $x(t,i) \in \mathbb{R}_+^n$ et $u(t,i) \in \mathbb{R}_+^m$ pour tout $t \geqslant 0$, $i \in \mathbb{N}$ et comme $y(t,i) \in \mathbb{R}_+^p$ cela implique nécéssairement que $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.
En utilisant (3.3.2) pour $i = 1$ et (3.3.3) nous obtenons

$$\begin{aligned}
F(t,1) &= A_0 x(t,1) + A_1 \frac{d^\alpha x(t,1)}{dt^\alpha} + Bu(t,1) \\
&= A_0 x(t,1) + A_1 A_2 x(t,1) + A_1 F(t,0) + Bu(t,1) \\
&= (A_0 + A_1 A_2) x(t,1) + A_1 F(t,0) + Bu(t,1) \\
&= Ax(t,1) + A_1 F(t,0) + Bu(t,1) \in \mathbb{R}_+^n \qquad\qquad , t \geqslant 0
\end{aligned}$$

nous savons que $A_1 F(t,0) \in \mathbb{R}_+^n$ et $Bu(t,1) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geqslant 0$, et comme $F(t,1) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geqslant 0$,en déduisant que $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.
Par récurrence, nous montrons que $x(t,i) \in \mathbb{R}_+^n$, $F(t,i-1) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $t \geqslant 0$ et $i \geqslant 1$ si et seulement si i) et ii) sont vérifiées. $\square$

Chapitre 4

Application

Nous considérons un système bidimensionnel linéaire fractionnaire hybride avec l'équation différentielle

$$\begin{aligned}\frac{d^{\alpha}x(t,i+1)}{dt^{\alpha}} &= A_0x(t,i)+A_1\frac{d^{\alpha}x(t,i)}{dt^{\alpha}}+A_2x(t,i+1)+Bu(t,i) \\ \text{avec} \quad t &\geqslant 0 \quad , \quad i\in\mathbb{N}\end{aligned} \tag{4.0.1}$$

pour $\alpha = 0.5$ et avec les matrices

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.0.2}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

l'entré du système

$$u(t,i) = 1 \quad pour \quad t \geqslant 0, \quad i\in\mathbb{N} \tag{4.0.3}$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} x(t,0) &= \begin{bmatrix} \exp(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad t\geqslant 0 \\ x(0,i) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad i\in\mathbb{N}\end{aligned} \tag{4.0.4}$$

En utilisant (4.0.1) et (2.2.8), nous allons trouver les matrices de transition suivantes

$$T_{k,l} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ pour \quad k=1,\ l=0 \text{ et } k=l+1,\ l=1,2,... \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ pour \quad k=0,\ l=1 \text{ et } l=k+1,\ k=1,2,... \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad pour \quad k=l=0,1,2,... \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Par\ ailleurs \end{cases} \tag{4.0.5}$$

En remplaçant (4.0.5), (4.0.3) et (4.0.4) dans (2.2.18) nous obtenons la solution désirée $x(t,i)$

$$\begin{aligned} x(t,i) &= \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} \\ &= \left(1 - \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} + \sum_{l=0}^{i-1} \frac{t^{(i-l+1)\alpha}}{\Gamma[(i-l+1)\alpha+1]}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \left(\sum_{l=0}^{i-2} \frac{t^{(i-l-1)\alpha}}{\Gamma[(i-l-1)\alpha+1]} - \frac{t^{(i-1)\alpha}}{\Gamma[(i-1)\alpha+1]}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{l=0}^{i-1} \frac{t^{(i-l)\alpha}}{\Gamma[(i-l)\alpha+1]} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.0.6}$$

Les graphes des variables d'état en (4.0.6) se montrent dans les figures suivantes

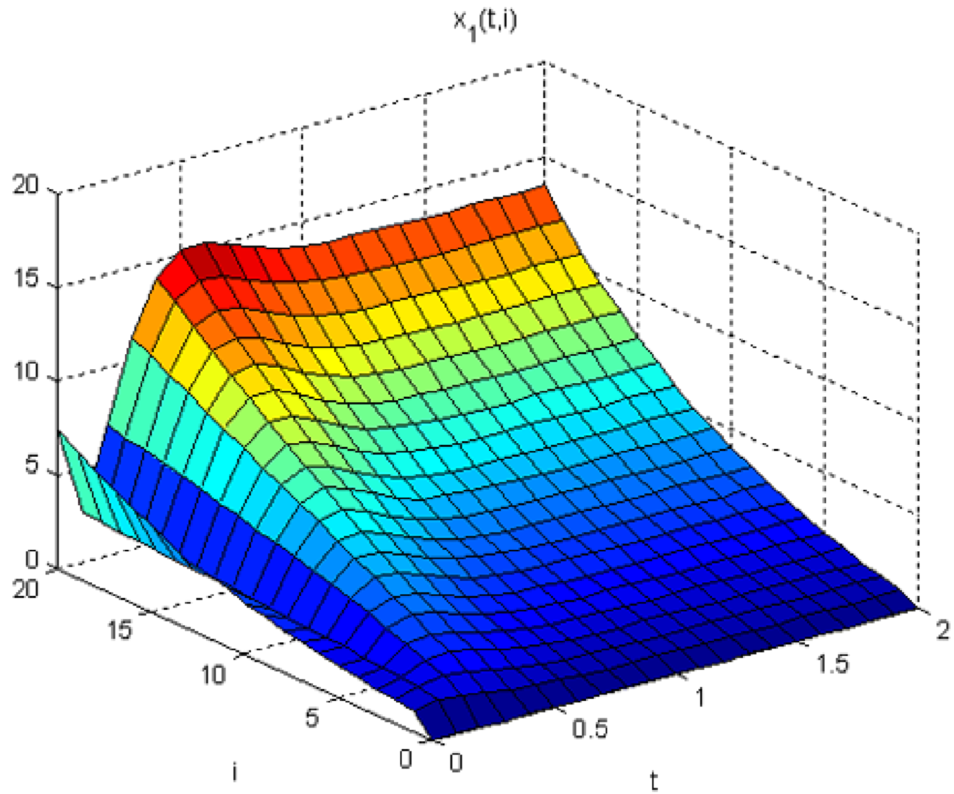

Figure 1

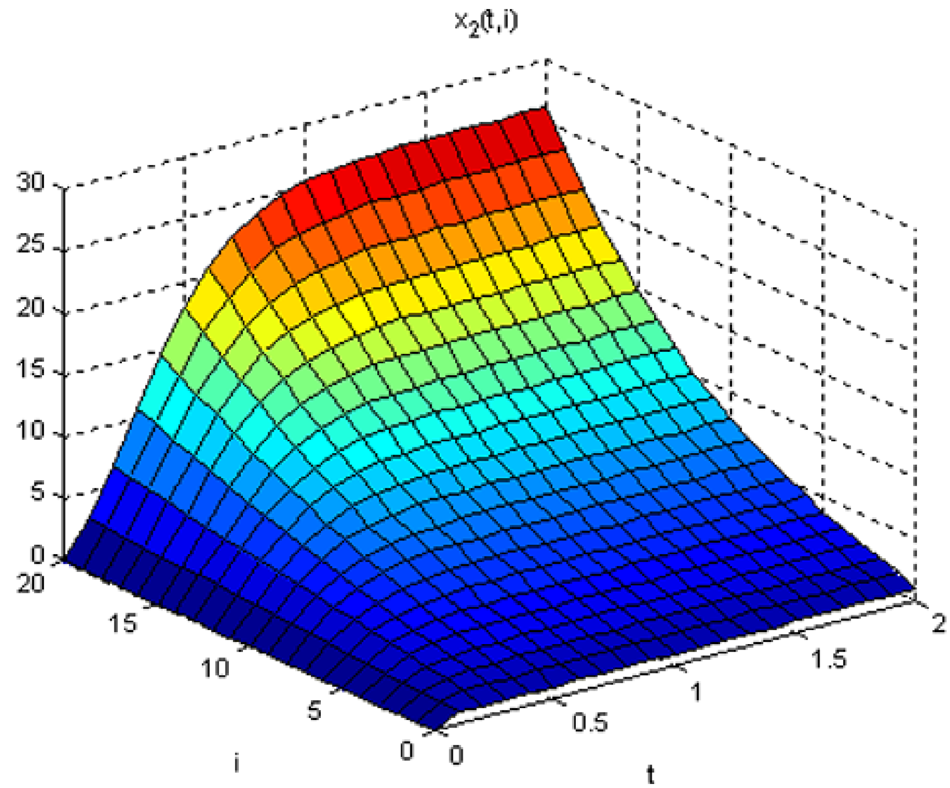

Figure 2

CONCLUSION

Une nouvelle classe des systèmes linéaires positifs 2D fractionnaires continus-discrets a été introduite.

Les équations d'état d'un système linéaire bidimensionnel fractionnaire hybride ont été données par l'équation (2.1.1), et leurs solutions ont été obtenues en utilisant la transformée de Laplace, la transformée en Z et le théorème de convolution avec des conditions initiales (2.1.2).

Pour la positivité d'un tel système, des conditions nécessaires et suffisantes ont été établies.

Le calcul de la solution du système a été illustré par un exemple numérique.

Un problème ouvert est l'analyse de la stabilité pour les systèmes linéaires 2D fractionnaires hybrides.

Bibliographie

[1] D. Bouagada, " Systèmes Différentiels Singuliers positifs et LMIs ", Thèse, CISAMA-UCL. Louvain-La-Neuve- Belgique, (2007).

[2] L. Farina and S. Rinaldi, " Positive Linear Systems ; Theory and Applications ". J. Wiley, New York, (2000).

[3] T. Kaczorek, " Selected Problems of Fractional System Theory ". Springer Verlag, London, (2011).

[4] T. Kaczorek, " Positive fractional 2D hybrid linear systems ". Bull. Pol. Ac. : Tech. 56 (3), 273-277, (2008).

[5] T. Kaczorek, " Positive fractional 2D continuous-discrete linear systems ", TECHNICAL SCIENCES, 59(4), 575, (2011), doi : 10.2478/v10175-011-0071-5.

[6] L. Sajewski, " Solution of 2D singular hybrid linear systems ". Kybernetes (38) (7/8), 1079-1992, (2009).