

# République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID BEN BADIS MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

**THESE DE DOCTORAT LMD**

Option : Optimisation, Ondelette et Calcul Fractionnaire

---

Intitulée

**APPLICATION DE LA THEORIE**

**DES OPERATEURS AU CALCUL FRACTIONNAIRE**

---

**Présentée par : ABDELLAOUI Mohammed Amin**

**Thèse Soutenue, le 27/06/2016, devant le Jury Composé de :**

Président : BELAIDI Benharrat, Prof., UMAB de Mostaganem

Examineur : BENDOUKHA Berrabah, Prof., Université de Naama

Examinatrice : BELARBI HAMANI Samira, MCA, UMAB de Mostaganem

Co-Encadreur : OULD ALI Mohand, MCA, UMAB de Mostaganem

Encadreur : DAHMANI Zoubir, Prof., UMAB de Mostaganem

**Année Universitaire : 2015 – 2016**

## Dedicace

**Ce travail est dédié à :**

A ma chère mère qui m'a beaucoup soutenue,

A mon très cher père, qui était toujours présent,

A ma grand mère ravie à mon affection.

A mes oncles, à mes tantes, à mon frère, à mes sœurs et à toute ma famille,

A toute personne qui m'a soutenue, aidé ou contribué de près ou de loin  
dans ce travail.

---

## Remerciements

*Au nom d'ALLAH Clément et Miséricordieux!*

*Louange à ALLAH le Tout Puissant de m'avoir donné la force, le courage et la volonté d'accomplir ce travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à mon Directeur de thèse, Monsieur Dahmani Zoubir, professeur à l'Université de Mostaganem, pour m'avoir proposé le sujet, encouragé, orienté, aidé et guidé, pour son soutien et son encouragement, sa confiance en moi tout au long de ce travail.*

*J'adresse aussi mes sincères remerciements à mon Co-Directeur de thèse, Monsieur Ould Ali Mohand, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, pour m'avoir proposé le sujet, encouragé, aidé et guidé, pour son soutien et son encouragement.*

*J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Belaidi Benharrat, Professeur à l'Université de Mostaganem, pour l'honneur qu'il me fait de présider le Jury de cette thèse.*

*Mes remerciements vont également à tous les membres du Jury, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être dans le Jury de ma thèse, en l'occurrence :*

*Examineur : Bendoukha Berrabah, professeur à l'Université de Naama.*

*Examinatrice : Hamani Belarbi Samira, MCA à l'Université de Mostaganem.*

*Je voudrais également exprimer mes grands remerciements à tous les enseignants et personnel administratif du Département de Mathématiques-Informatique de l'Université de Mostaganem.*

*Je remercie encore mes parents, mes sœurs et mon frère pour m'avoir encouragé durant ces années d'études.*

*Je remercie aussi tous mes collègues et mes amis.*

## Abstract :

This thesis deals with operator theory and fractional calculus. We begin by introducing new generalized metric spaces. Then, we prove some important properties of such new structures. We also apply fixed point theory to establish some new results on contraction operators over the introduced generalized spaces. After that, we investigate the fractional calculus theory, where we will use integro-differential operators as well as the differential ones. We prove some recent results on the existence and uniqueness of solutions for some classes of fractional differential equations and systems that have not been studied. Some generalized Fourier and Laplace transforms are also proved. Some analytic and numerical studies for fractional equations are also discussed.

## Résumé :

Dans cette thèse, on va s'intéresser aux opérateurs contractants, intégral-différentiels et à leurs applications au calcul fractionnaire. On commence par introduire de nouvelles structures généralisant les espaces métriques. Sur ces structures, on va démontrer certains résultats liés à la théorie des points fixes et aux opérateurs contractants. Ensuite, on abordera le côté calcul fractionnaire où on fera appel aux opérateurs différentiels, intégral-différentiels ; ceci par le biais de deux approches fractionnaires. On démontrera ainsi certains résultats sur l'existence et l'unicité des solutions pour certains problèmes d'ordre de dérivation (ou intégration) arbitraire. On s'intéressera aussi à certaines transformations intégrales et à leurs applications (analytiques, numériques) au calcul fractionnaire et en particulier aux équations et aux systèmes fractionnaires fortement non linéaires.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notions de calcul Fractionnaire</b>	<b>7</b>
1.1	Rappels . . . . .	7
1.2	Quelques propriétés des fonctions Gamma et Bêta . . . . .	8
1.3	Approche Intégrale de Riemann-Liouville . . . . .	9
1.4	Propriété de semi-groupe . . . . .	11
1.5	Dérivée Fractionnaire au Sens de Caputo . . . . .	12
1.6	Propriété . . . . .	13
1.7	Dérivée Fractionnaire au Sens de Riemann-Liouville . . . . .	13
1.8	Riemann-Liouville et Caputo . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Espaces Généralisés et Opérateurs Contractants</b>	<b>18</b>
2.1	Introduction . . . . .	18
2.2	L'Espace $(X, S^*)$ . . . . .	18
2.3	Propriétés Topologique de $(X, S^*)$ . . . . .	20
2.4	Résultats Auxiliaires . . . . .	20
2.5	Points Fixes et Opérateurs Contractants . . . . .	23
2.6	Résultats Principaux . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Systèmes Différentiels et Calcul Fractionnaire</b>	<b>27</b>
3.1	Introduction . . . . .	27
3.2	Rappels . . . . .	27
3.3	Théorèmes des Points Fixes et d'Ascoli-Arzela . . . . .	28
3.4	Systèmes Couplés . . . . .	29
3.5	Conditions Suffisantes . . . . .	32
	3.5.1 Existence et Unicité : . . . . .	33
	3.5.2 Deux Autres Résultats : . . . . .	35
3.6	Exemples Illustratifs . . . . .	41
3.7	Systèmes à Séries . . . . .	42
3.8	Résultats Principaux . . . . .	44
	3.8.1 Premier Résultat . . . . .	46
	3.8.2 Deuxième Résultat . . . . .	49
3.9	Deux Exemples . . . . .	53

---

<b>4</b>	<b>Transformations Intégrales et Applications aux EDFs</b>	<b>55</b>
4.1	Transformation de Fourier . . . . .	55
4.2	Propriétés . . . . .	55
4.3	Résultats Principaux . . . . .	57
4.4	D'autres Résultats . . . . .	58
4.5	Transformation de Laplace . . . . .	61
4.6	Propriétés . . . . .	62
4.7	Résultats Principaux . . . . .	64
4.8	D'autres Résultats . . . . .	65
4.9	Applications aux EDFs . . . . .	68
4.9.1	Applications Numériques . . . . .	69
	<b>Bibliographie</b>	<b>73</b>

# INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. Ce concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini au 19<sup>e</sup> siècle par Riemann et Liouville, leur but était de prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers.

L'objectif principal de ce travail est de présenter une contribution sur la théorie des opérateurs avec des applications sur le calcul fractionnaire.

Ce projet se compose d'une introduction et de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on va rappeler quelques définitions et résultats relatifs au calcul fractionnaire dont on aura besoin dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre, on démontre certains résultats liés aux points fixes et aux opérateurs contractants définis sur des structures généralisées.

Dans le troisième chapitre, on abordera l'existence et l'unicité des solutions des systèmes différentiels fractionnaires. On démontrera des résultats assurant l'existence et l'unicité / l'existence pour des problèmes différentiels avec conditions intégrales. Les démonstrations seront basées sur la théorie des opérateurs combinées avec celle des points fixes.

Enfin, le quatrième chapitre portera sur des transformations de types Fourier et Laplace. On présentera des nouvelles transformations avec quelques résultats et applications numériques sur les équations différentielles fractionnaires.

# Chapitre 1

## Notions de calcul Fractionnaire

Ce chapitre contient des rappels, des définitions et des propriétés essentielles correspondantes à la notion de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire dont on aura besoin dans les autres chapitres. Pour plus de détails, voir ([1], [4], [6 – 9], [12 – 15]).

### 1.1 Rappels

**Définition 1.1.1** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite causale si  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

**Définition 1.1.2** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$ . On définit le produit de convolution dans  $\mathbb{R}$  de  $f$  et  $g$  par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt. \quad (1.1)$$

**Exemple 1.1.1** Calculons maintenant le produit de convolution de deux fonctions causales  $f$  et  $g$ . On a donc  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $g(x-t) = 0$  pour  $t > x$ . Le domaine d'intégration est donc restreint à l'intervalle  $[0, t]$  dans le cas de fonctions causales

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt. \quad (1.2)$$

On remarque que  $f * g$  est elle-même causale, le produit de convolution donné par la formule (1.2) est appelé le produit de convolution de Laplace.

**Définition 1.1.3** Soit une fonction  $f(x), x > 0$ . On dit que  $f$  appartient à  $C_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ), s'il existe un nombre réel  $p > \mu$  telle que  $f(x) = x^p f_1(x)$ , où  $f_1(x) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ .

**Définition 1.1.4** Soit une fonction  $f(x), x > 0$ . On dit que  $f$  appartient à  $C_\mu^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), si  $f^{(n)} \in C_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ .

**Définition 1.1.5** Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p < \infty$ . On définit les espaces de Lebesgue  $L_p([a, b], \mathbb{R})$  et  $L_\infty([a, b], \mathbb{R})$  par

- (1)  $L_p([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ } f \text{ est mesurable sur } [a, b] \text{ et } \int_a^b |f(x)|^p dx\} < \infty.$
- (2)  $L_\infty([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ } f \text{ est mesurable et bornée sur } [a, b]\}.$

Ainsi les normes  $\|f\|_{L_p([a,b],\mathbb{R})}$  et  $\|f\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R})}$  sont :

$$(3) \|f\|_{L_p([a,b],\mathbb{R})} := \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$(4) \|f\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R})} := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

**Définition 1.1.6** Les fonctions d'Euler Gamma et Bêta sont définies respectivement par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \quad \alpha > 0, \quad (1.3)$$

et

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p, q > 0. \quad (1.4)$$

## 1.2 Quelques propriétés des fonctions Gamma et Bêta

Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels strictement positifs. Alors, on a

$$(1) \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$(2) \Gamma(n+1) = n!, \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

(3) Pour tout entier  $n$  on a  $n < x < n+1$ , tel que  $n \neq -1, -2, -3, \dots$ , on a

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}.$$

$$(4) \beta(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1} dt.$$

$$(5) \beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt.$$

$$(6) \beta(x, y) \Gamma(x+y) = \Gamma(x) \Gamma(y).$$

$$(7) \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

### 1.3 Approche Intégrale de Riemann-Liouville

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Une primitive de  $f$  est donnée par :

$$F_1(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive d'ordre 2, on a

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \int_a^t F_1(x) dx = \int_a^t \left( \int_a^x f(\tau) d\tau \right) dx \\ &= \int_a^t (t-x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Puis par récurrence, on obtient

$$F_n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx.$$

où  $\Gamma(n) = (n-1)!$   $n \geq 1$ . Si on note  $J^n(f(t)) = F_n(t)$ , on va avoir :

$$J^n(f(t)) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.5)$$

**Définition 1.3.1** L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \geq 0$ , pour une fonction  $f \in C_\mu([a, b], \mathbb{R})$ , ( $\mu \geq -1$ ) est défini par :

$$\begin{cases} J_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau & ; \alpha > 0, \\ J_a^0 f(t) = f(t). \end{cases} \quad (1.6)$$

#### Remarques 1.3.1

(i) Si  $a = 0$ , donc  $J_0^\alpha f(t) = (f * \varphi_\alpha)(t)$ , avec  $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$  pour  $t > 0$  et  $\varphi_\alpha(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ , et  $\varphi_\alpha \rightarrow \delta(t)$  quand  $\alpha \rightarrow 0$ , où  $\delta(t)$  est la fonction Delta

(ii) Il est clair que l'opérateur d'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est un opérateur linéaire.

**Exemple 1.3.1** Calculons l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f(x) = x^\gamma$ , où  $\gamma > -1$  et  $x > 0$ .

On a

$$J_0^\alpha (x^\gamma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \tau)^{\alpha-1} \tau^\gamma d\tau.$$

On effectue le changement de variable  $\tau = xy$ , on va avoir

$$\begin{aligned} J_0^\alpha x^\gamma &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - xy)^{\alpha-1} (xy)^\gamma x dy \\ &= \frac{x^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - y)^{\alpha-1} (y)^\gamma dy \\ &= \frac{x^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \gamma + 1). \end{aligned}$$

Comme les fonctions d'Euler Gamma et Bêta sont reliées par la relation suivante

$$\beta(\alpha, \gamma) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}. \quad (1.7)$$

Alors, on trouve

$$J_0^\alpha (x^\gamma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}. \quad (1.8)$$

**Exemple 1.3.2** Considérons la fonction  $f(x) = (x - a)^\gamma$  avec  $x > a$ , on a

$$J_a^\alpha (f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\gamma d\tau = \frac{\beta(\alpha, \gamma+1)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\gamma+\alpha}.$$

Cela implique

$$J_a^\alpha ((x - a)^\gamma) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} (x - a)^{\gamma+\alpha}. \quad (1.9)$$

**Exemple 1.3.3** Soit  $f(x) = \exp(\lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ , calculons l'intégrale fractionnaire au sens de Rieman-Liouville de cette fonction :

$$\begin{aligned} J_0^\alpha \exp(\lambda x) &= J_0^\alpha \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} J_0^\alpha (x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k+1+\alpha)} x^{k+\alpha} = \lambda^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+1+\alpha)}. \end{aligned}$$

## 1.4 Propriété de semi-groupe

### Proposition 1.4.1

Soit  $f$  une fonction de l'espace  $C_{-1}([a, b], \mathbb{R})$ . Alors, on a

$$J_a^\alpha [J_a^\gamma (f(x))] = J_a^{\alpha+\gamma} (f(x)), \quad (1.10)$$

pour tout  $\alpha > 0$  et  $\gamma > 0$ .

**Démonstration :** En effet,

$$\begin{aligned} J_a^\alpha [J_a^\gamma (f(x))] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} J_a^\gamma (f(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \left[ (x-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau-t)^{\gamma-1} f(t) dt \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \int_a^\tau ((x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-t)^{\gamma-1} f(t)) dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \left( f(t) \int_t^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-t)^{\gamma-1} d\tau \right) dt. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable  $\tau = t + (x-t)y$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_t^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-t)^{\gamma-1} d\tau &= \int_0^1 (x-t - (x-t)y)^{\alpha-1} (t + (x-t)y - t)^{\gamma-1} (x-t) dy \\ &= (x-t)^{\alpha+\gamma-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} (y)^{\gamma-1} dy \\ &= \beta(\alpha, \gamma) (x-t)^{\alpha+\gamma-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J_a^\alpha [J_a^\gamma (f(x))] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \left( f(t) \int_t^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-t)^{\gamma-1} d\tau \right) dt \\ &= \frac{\beta(\alpha, \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x (f(t) (x-t)^{\alpha+\gamma-1}) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_a^x ((x-t)^{\alpha+\gamma-1} f(t)) dt = J_a^{\alpha+\gamma} f(x). \end{aligned}$$

On donne une application numérique sur la propriété de semi-groupe

**Exemple 1.4.3** Si on prend :  $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$  et  $f(x) = x$ , on trouve

$$J_0^\alpha [(J_0^\gamma)(f(x))] = (J_0^\alpha) \left[ \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\gamma+2)} x^{\gamma+1} \right] = \frac{1}{2} x^2.$$

D'autre part, on a

$$J_0^{\alpha+\gamma}(f(x)) = (J_0^1)(f(x)) = \int_0^x t dt = \frac{1}{2} x^2.$$

Dans ce paragraphe, on va exposer brièvement deux approches des dérivées fractionnaires, on cite par exemple : l'approche de Caputo et l'approche de Riemann-Liouville.

## 1.5 Dérivée Fractionnaire au Sens de Caputo

**Définition 1.5.1** Soit  $f \in C_{-1}^m([a, b], \mathbb{R})$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . On définit la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha \geq 0$  de  $f$  par :

$$D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau & ; m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x) & ; \alpha = m. \end{cases} \quad (1.11)$$

**Remarque 1.5.1** On peut facilement déduire que l'opérateur de la dérivation fractionnaire au sens de Caputo est un opérateur linéaire.

**Exemple 1.5.1** Dérivée fractionnaire de la fonction  $f(x) = (x-a)^\gamma$  avec  $x > a$  et  $\gamma > -1$ , au sens de Caputo

$$\begin{aligned} D_a^\alpha(f(x)) &= (J_a^{m-\alpha}) \left( \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right) \\ &= (J_a^{m-\alpha}) \left( \frac{\Gamma(\gamma+m-\alpha+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (x-a)^{\gamma-\alpha} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+m-\alpha+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (J_a^{m-\alpha}) (x-a)^{\gamma-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (x-a)^{\gamma-\alpha}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.5.1** La dérivée de Caputo d'une fonction constante est nulle. En effet

$$D_a^\alpha (f(x)) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau = 0.$$

## 1.6 Propriété

**Proposition 1.6.1** Soit  $\alpha$  un nombre réel strictement positif.

(1) Si  $f \in C_{-1}^n([a, b], \mathbb{R})$ ,  $n = [\alpha]$  alors, on a

$$D_a^\alpha (J_a^\alpha f) = f .$$

(2) En général, on n'a pas

$$J_a^\alpha (D_a^\alpha f) = f.$$

## 1.7 Dérivée Fractionnaire au Sens de Riemann-Liouville

**Définition 1.7.1** On définit la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  au sens de Riemann-Liouville d'une fonction  $f \in C_{-1}^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  par :

$$({}^{RL}D_a^\alpha)(f(x)) = \begin{cases} \frac{d^m}{dx^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), & \alpha = m. \end{cases} \quad (1.12)$$

On peut écrire la relation (1.12) sous la forme équivalente suivante :

$$({}^{RL}D_a^\alpha)(f(x)) = \begin{cases} \frac{d^m}{dx^m} [(J_a^{m-\alpha})(f(x))] , & m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), & \alpha = m. \end{cases} \quad (1.13)$$

**Exemple 1.7.1** Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha = \frac{1}{2}$  au sens de Riemann Liouville de la fonction  $f : x \mapsto x - a$ ,

On a

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\right)(f(x)) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_a^x (x-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau d\tau \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \left(J_a^{\frac{1}{2}}\right)((x-a)) \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} (x-a)^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} (x-a)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

**Exemple 1.7.2** Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha = \frac{1}{2}$  au sens de Riemann Liouville de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}, x > 0$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)(f(x)) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\frac{1}{2}+1-1}} d\tau \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{1}{(1+\tau)\sqrt{x-\tau}} d\tau \right] \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $\sqrt{x-\tau} = y$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right)(f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{(1+x-y^2)} dy \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\sqrt{x+1}} \int_0^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}-y} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+y} \right) dy \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\sqrt{x+1}} \left[ \ln \frac{y+\sqrt{x+1}}{-y+\sqrt{x+1}} \right]_0^{\sqrt{x}} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\sqrt{x+1}} \ln \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \right] \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \left[ \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \right]. \end{aligned}$$

**Remarque 1.7.1** *La dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle. Cette "anomalie troublante" est donnée par*

$$\left({}^{RL}D_a^\alpha\right)(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D_a^\alpha\right)(c) &= \frac{d^m}{dx^m} \left[ \frac{c}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} d\tau \right] \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

**Proposition 1.7.1**

1. Pour tout  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$  et pour deux fonctions quelconques  $f$  et  $g : C_{-1}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ , on a

$$\left({}^{RL}D_a^\alpha\right)(\mu f(x) + \lambda g(x)) = \mu \left({}^{RL}D_a^\alpha\right)(f(x)) + \lambda \left({}^{RL}D_a^\alpha\right)(g(x)),$$

2. En général, la propriété de semi groupe n'est pas vérifiée, on n'a pas toujours :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha_1}\right)\left({}^{RL}D_a^{\beta_1}\right)f(t) = \left(D_a^{\alpha_1+\beta_1}\right)f(t)$$

3. Il en est de même de la propriété de commutativité :  $\exists \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0, g \in C_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  ( $\mu \geq -1$ ) tels que :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha_2}\right)\left({}^{RL}D_a^{\beta_2}\right)g(t) \neq \left({}^{RL}D_a^{\beta_2}\right)\left({}^{RL}D_a^{\alpha_2}\right)g(t)$$

**Démonstration 1.** Soient  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ , et soient  $f$  et  $g \in C_{-1}^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ , on a

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D_a^\alpha\right)(\mu f(x) + \lambda g(x)) &= \frac{d^m}{dx^m} \left( (J_a^{m-\alpha})(\mu f(x) + \lambda g(x)) \right) \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \left( \mu (J_a^{m-\alpha})(f(x)) + \lambda (J_a^{m-\alpha})(g(x)) \right) \\ &= \mu \frac{d^m}{dx^m} \left( (J_a^{m-\alpha})(f(x)) \right) + \lambda \frac{d^m}{dx^m} \left( (J_a^{m-\alpha})(g(x)) \right) \\ &= \mu \left({}^{RL}D_a^\alpha\right)(f(x)) + \lambda \left({}^{RL}D_a^\alpha\right)(g(x)) \end{aligned}$$

Dans (2), on prend  $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$  et  $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$ . On a alors :

$$\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)f(t) = 0, \quad \left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right)f(t) = 0.$$

On remarque aussi que :

$$\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right) f(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$$

Dans (3), on pose  $g(t) = t^{\frac{1}{2}}$  et  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_2 = \frac{3}{2}$ . Donc

$$\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right) g(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right) g(t) = \left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right) \left(t^{\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

Tandis que

$$\left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right) \left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right) g(t) = 0, \quad \left({}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\right) \left({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\right) g(t) = -\frac{1}{4}t^{\frac{3}{2}}.$$

**Lemme 1.7.1** Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$  vérifiant  $\left({}^{RL}D_a^\alpha\right) f(x) = 0$ , avec  $\alpha \in ]m-1, m[$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-m+i+1)} (x-a)^{\alpha-m+i},$$

où les  $b_i$  sont des constantes arbitraires.

**Démonstration** D'après la formule (1.13), on a :

$$\left({}^{RL}D_a^\alpha\right) f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left(J_a^{m-\alpha} f(x)\right) = 0.$$

Donc

$$J_a^{m-\alpha} f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i (x-a)^i.$$

Par application de  $J_a^\alpha$ , on va avoir :

$$J_a^m f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i J_a^\alpha (x-a)^i = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha+i+1)} (x-a)^{\alpha+i}.$$

Cela voudra dire que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha+i+1)} \frac{d^m}{dx^m} (x-a)^{\alpha+i}.$$

Mais comme,

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} (x-a)^{\alpha+i} &= (\alpha+i)(\alpha+i-1)\dots(\alpha+i-m+1)(x-a)^{\alpha+i-m} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+i+1)}{\Gamma(\alpha+i-m+1)} (x-a)^{\alpha+i-m}, \end{aligned}$$

alors, le lemme 1.7.1 en découle.

## 1.8 Riemann-Liouville et Caputo

La relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo est donnée par la proposition suivante

**Proposition 1.8.1** *Pour tout  $\alpha \in ]m-1, m[$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in C_{-1}^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  on a :*

$$({}^{RL}D_a^\alpha) f(t) = (D_a^\alpha) f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a). \quad (1.14)$$

**Démonstration** On a :

$$({}^{RL}D_a^\alpha) f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_a^\alpha) f(t) &= \frac{d^m}{\Gamma(m-\alpha)dt^m} \left( \frac{(t-a)^{m-\alpha}}{m-\alpha} f(a) + \frac{(t-a)^{m-\alpha+1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)} f'(a) + \frac{(t-a)^{m-\alpha+2}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)} f''(a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(t-a)^{m-\alpha+3}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)(m-\alpha+3)} f^{(3)}(a) + \dots + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha+n-1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)\dots(m-\alpha+n-1)} f^{(m)}(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_a^\alpha) f(t) &= \sum_{k=1}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{d^m}{\Gamma(m-\alpha)dt^m} \left( \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha+n-1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)\dots(m-\alpha+n-1)} f^{(m)}(\tau) d\tau \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left( \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$({}^{RL}D_a^\alpha) f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + (D_a^\alpha) f(t),$$

donc

$$({}^{RL}D_a^\alpha) \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] = (D_a^\alpha) f(t).$$

# Chapitre 2

## Espaces Généralisés et Opérateurs Contractants

### 2.1 Introduction

Les espaces métriques sont un outil très important en mathématiques pures et appliquées. Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à présenter des extensions et des généralisations liées à ces espaces.

A titre d'exemple, Dhage [5] et Gähler [23] ont introduit les espaces généralisés de type  $D^*$ . Dans [33], Mustafa et Sims ont introduit les  $G$ -espaces généralisés comme étant une généralisation des espaces métriques usuels.

Récemment, Sedghi et al. [25], [29], [31] ont étudié les travaux de recherches de cet axe aux espaces généralisés de type  $D^*$ . Ces résultats ont permis de généraliser certains théorèmes de [5]. D'autres travaux de recherche sur ces nouvelles structures peuvent être trouvés dans [10, 31, 31, 33].

Dans ce chapitre, on va introduire les  $S^*$ -espaces métriques. On va démontrer certains résultats pour ces structures, puis on démontre certains théorèmes de points fixes pour des opérateurs définis sur ces espaces. Ces résultats peuvent être considérés comme une généralisation de [29].

### 2.2 L'Espace $(X, S^*)$

Dans ce chapitre, on considère  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $n \geq 2$ , (voir [16]).

Définitions et propriétés :

**Définition 2.2.1** Soit  $X$  un ensemble non vide. La distance  $S^* : X^n \rightarrow [0, +\infty[$  est une fonction qui satisfait les conditions suivantes : Pour chaque  $x_1, x_2, \dots, x_n, a \in X$  :

- (1)  $S^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ ,  
 (2)  $S^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  si et seulement si  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ,  
 (3)  $S^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq S^*(x_1, x_1, \dots, x_1, a) + S^*(x_2, x_2, \dots, x_2, a) + \dots + S^*(x_n, x_n, \dots, x_n, a)$ .  
 Donc le couple  $(X, S^*)$  est un espace métrique.

**Remarque 2.2.1** Dans la définition 2.2.1, si  $n = 3$  on obtient le résultat cité dans [30].

**Lemme 2.2.1** Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique. Alors pour tout  $x_1, x_2 \in X$ , on a

$$S^*(x_1, x_1, \dots, x_1, x_2) = S^*(x_2, x_2, \dots, x_2, x_1).$$

**Démonstration :** D'après la troisième propriété de la définition 2.2.1, on obtient pour tout  $x_1, x_2, a \in X$ ,

$$\begin{aligned} S^*(x_1, x_1, \dots, x_1, x_2) &\leq (n-1)S^*(x_1, x_1, \dots, x_1, a) \\ &\quad + S^*(x_2, x_2, \dots, x_2, a). \end{aligned}$$

En particulier, pour  $a = x_1$ , on trouve

$$\begin{aligned} S^*(x_1, x_1, \dots, x_1, x_2) &\leq (n-1)S^*(x_1, x_1, \dots, x_1, x_1) \\ &\quad + S^*(x_2, x_2, \dots, x_2, x_1). \end{aligned}$$

Donc

$$S^*(x_1, x_1, \dots, x_1, x_2) \leq S^*(x_2, x_2, \dots, x_2, x_1). \quad (2.1)$$

De même, on trouve

$$S^*(x_2, x_2, \dots, x_2, x_1) \leq S^*(x_1, x_1, \dots, x_1, x_2). \quad (2.2)$$

D'après (2.1) et (2.2), on obtient

$$S^*(x_1, x_1, \dots, x_1, x_2) = S^*(x_2, x_2, \dots, x_2, x_1).$$

**Définition 2.2.2** Soient  $(X, S^*)$  un espace métrique,  $r$  un nombre réel positif et soit  $x \in X$ . On appelle boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$B_{S^*}(x_0, r) = \{x \in X : S^*(x, x, \dots, x, x_0) < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$\overline{B}_{S^*}(x_0, r) = \{x \in X : S^*(x, x, \dots, x, x_0) \leq r\}.$$

**Exemple 2.2.1** On définit sur  $\mathbb{R}$  la distance  $S^*$  par  $S^*(x, y, z) = |x - y| + |x - 2z|$ .

$$\begin{aligned} B_{S^*}(1, \sqrt{2}) &= \{x \in \mathbb{R} : S^*(x, x, 1) < \sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < \sqrt{2}\} \\ &= ]2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}[. \end{aligned}$$

## 2.3 Propriétés Topologique de $(X, S^*)$

**Définition 2.3.1** Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique et  $A \subset X$ . Si pour tout  $x \in A$  il existe  $r > 0$  telle que  $B_{S^*}(x, r) \subset A$ , alors  $A$  est un ouvert de  $X$ .

**Définition 2.3.2** Une partie  $A$  de  $X$  est dite bornée, s'il existe une constante  $M > 0$  telle que  $S^*(x, x, \dots, x, y) \leq M$  pour tout  $x, y \in A$ .

**Définition 2.3.3** Une suite  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  de l'espace métrique  $(X, S^*)$  convergente vers  $x$  si et seulement si :  $S^*(x_p, x_p, \dots, x_p, x) \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow +\infty$ , on écrit  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = x$ . Où

$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p \geq p_0$ ,  $S^*(x_p, x_p, \dots, x_p, x) < \varepsilon$ .

Une suite  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  d'un espace métrique  $(X, S^*)$  est une suite de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p, q \geq n_0$ , on a  $S^*(x_p, x_p, \dots, x_p, x_q) < \varepsilon$ .

**Définition 2.3.4** L'espace métrique  $(X, S^*)$  est dite complet si toute suite de Cauchy dans cet espace est convergente.

## 2.4 Résultats Auxiliaires

**Lemme 2.4.1** Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique. Si  $r > 0$  et  $x \in X$ , alors la boule  $B_{S^*}(x, r)$  est un ouvert de  $X$ .

**Démonstration :** Soit  $y \in B_{S^*}(x, r)$  donc  $S^*(y, y, \dots, y, x) < r$ .

On pose  $\delta = S^*(x, x, \dots, x, y)$  et  $r' = \frac{r - \delta}{n - 1}$ , et on prouve que  $B_{S^*}(y, r') \subset B_{S^*}(x, r)$ . Soit  $z \in B_{S^*}(y, r')$ , donc  $S^*(z, \dots, z, y) < r'$ . Par la troisième propriété de la définition 2.2.1, on obtient  $S^*(z, \dots, z, x) \leq S^*(z, \dots, z, y) + \dots + S^*(z, \dots, z, y) + S^*(x, \dots, x, y) < (n - 1)r' + \delta$ , ce qui implique que  $B_{S^*}(y, r') \subset B_{S^*}(x, r)$ .

**Lemme 2.4.2** Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique. Si la suite  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  de  $X$  converge vers  $x$ , alors  $x$  est unique.

**Démonstration :** Soit  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  une suite converge vers  $x$  et  $y$ . Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_1 \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } p \geq p_1 \Rightarrow S^*(x_p, \dots, x_p, x) < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_2 \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } p \geq p_2 \Rightarrow S^*(x_p, \dots, x_p, y) < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}.$$

Posons  $p_0 = \max\{p_1, p_2\}$  pour tout  $p \geq p_0$ , on trouve

$$\begin{aligned} S^*(x, \dots, x, y) &\leq (n-1)S^*(x, \dots, x, x_p) + S^*(y, \dots, y, x_p) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(n-1)} < \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S^*(y, \dots, y, x) &\leq (n-1)S^*(y, \dots, y, x_p) + S^*(x, \dots, x, x_p) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(n-1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$S^*(x, \dots, x, y) = S^*(y, \dots, y, x) = 0.$$

Donc,

$$x = y.$$

**Lemme 2.4.3** Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique et soit  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de  $X$  converge vers  $x$ , alors  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.

**Démonstration :** On a  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = x$  c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_1 \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } p \geq p_1 \Rightarrow S^*(x_p, \dots, x_p, x) < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_2 \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } q \geq p_2 \Rightarrow S^*(x_q, \dots, x_q, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons  $p_0 = \max\{p_1, p_2\}$ , donc pour tout  $p, q \geq p_0$ , on trouve

$$\begin{aligned} S^*(x_p, \dots, x_p, x_q) &\leq (n-1)S^*(x_p, \dots, x_p, x) + S^*(x_q, \dots, x_q, x) \\ &< \frac{(n-1)\varepsilon}{2(n-1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy.

**Lemme 2.4.4** Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique, s'il existe deux suites  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  et  $\{y_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  de  $X$  telles que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = x$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} y_p = y$ , alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} S^*(x_p, \dots, x_p, y_p) = S^*(x, \dots, x, y).$$

**Démonstration :** Soient  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = x$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} y_p = y$ , alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_1 \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } p \geq p_1 \Rightarrow S^*(x_p, \dots, x_p, x) < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_2 \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } p \geq p_2 \Rightarrow S^*(y_p, \dots, y_p, y) < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}.$$

Posons  $p_0 = \max\{p_1, p_2\}$ , donc pour chaque  $p \geq p_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} S^*(x_p, \dots, x_p, y_p) &\leq (n-1)S^*(x_p, \dots, x_p, x) + S^*(y_p, \dots, y_p, x) \\ &\leq (n-1)[S^*(x_p, \dots, x_p, x) + S^*(y_p, \dots, y_p, y)] + S^*(x, \dots, x, y) \\ &< \frac{(n-1)\varepsilon}{2(n-1)} + \frac{(n-1)\varepsilon}{2(n-1)} + S^*(x, \dots, x, y). \end{aligned}$$

Donc

$$S^*(x_p, \dots, x_p, y_p) - S^*(x, \dots, x, y) < \varepsilon. \quad (2.3)$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned} S^*(x, \dots, x, y) &\leq (n-1)S^*(x, \dots, x, x_p) + S^*(y, \dots, y, x_p) \\ &< (n-1)[S^*(x, \dots, x, x_p) + S^*(y, \dots, y, y_p)] + S^*(x_p, \dots, x_p, y_p) \\ &\leq \frac{(n-1)\varepsilon}{2(n-1)} + \frac{(n-1)\varepsilon}{2(n-1)} + S^*(x_p, \dots, x_p, y_p) \\ &< \varepsilon + S^*(x_p, \dots, x_p, y_p). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$S^*(x, \dots, x, y) - S^*(x_p, \dots, x_p, y_p) < \varepsilon. \quad (2.4)$$

D'après (2.3) et (2.4), on trouve

$$|S^*(x, \dots, x, y) - S^*(x_n, \dots, x_n, y_n)| < \varepsilon.$$

D'où

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} S^*(x_p, \dots, x_p, y_p) = S^*(x, \dots, x, y).$$

**Définition 2.4.1** Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique et soit  $F : X \rightarrow X$  une application. On dit que  $F$  est contractante s'il existe une constante  $0 < L < 1$  telle que

$$S^*(F(x), \dots, F(x), F(y)) \leq LS^*(x, \dots, x, y), \text{ pour tout } x, y \in X.$$

## 2.5 Points Fixes et Opérateurs Contractants

Maintenant, on va donner un lemme montrant le lien entre la continuité et la contraction.

**Lemme 2.5.1** Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique et soit  $F : X \rightarrow X$ , une application contractante, alors  $F$  est continue.

**Démonstration :** On suppose qu'il existe une constante  $0 < L < 1$ , telle que

$$S^*(F(x), \dots, F(x), F(y)) \leq LS^*(x, \dots, x, y), \text{ pour tout } x, y \in X,$$

et soit  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de  $X$  converge vers  $x$ , donc  $S^*(x_p, \dots, x_p, x) \rightarrow 0$ , quand  $p \rightarrow +\infty$ , ce qui implique que  $S^*(F(x_p), \dots, F(x_p), F(x)) \rightarrow 0$ , donc  $F(x_p) \rightarrow F(x)$ , quand  $p \rightarrow +\infty$ . D'où la continuité de  $F$ .

On définit par récurrence la suite  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} x_{p+1} = F(x_p), & \text{si } p = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 \in X. \end{cases}$$

On utilise le principe de contraction de Banach, on obtient les résultats suivants :

## 2.6 Résultats Principaux

**Théorème 2.6.1** [16] Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique complet, et soit  $F : X \rightarrow X$ , une application contractante. Alors  $F$  a un unique point fixe  $x^* \in X$ , i.e.;

$$F(x^*) = x^*.$$

**Démonstration :**

1) **Existence :** On démontre par récurrence que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$P(p) : S^*(x_{p+1}, \dots, x_{p+1}, x_p) \leq L^p S^*(x_1, \dots, x_1, x_0). \quad (2.5)$$

la propriété  $P(1)$  est évidente.

On suppose que  $P(p)$  est vraie et on montre que  $P(p+1)$  est aussi vraie pour tout  $p \geq 1$ .

Pour tout  $p \geq 1$ , on trouve

$$\begin{aligned} S^*(x_{p+2}, \dots, x_{p+2}, x_{p+1}) &= S^*(F(x_{p+1}), \dots, F(x_{p+1}), F(x_p)) \\ &\leq L S^*(x_{p+1}, \dots, x_{p+1}, x_p) \\ &\leq L^{p+1} S^*(x_1, \dots, x_1, x_0). \end{aligned}$$

D'où  $P(p+1)$  est vraie, par le principe du raisonnement par récurrence on déduit que (2.5) est vraie.

On montre que la suite  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy. Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , avec  $q > p > 0$ , on pose  $r = q - p$ , on trouve

$$\begin{aligned} S^*(x_q, \dots, x_q, x_p) &= S^*(x_{p+r}, \dots, x_{p+r}, x_p) \\ &\leq (n-1) \sum_{i=p}^{p+r-1} S^*(x_{i+1}, \dots, x_{i+1}, x_i) \\ &\leq (n-1) S^*(x_1, \dots, x_1, x_0) \sum_{i=p}^{p+r-1} L^i \\ &\leq (n-1) S^*(x_1, \dots, x_1, x_0) \frac{(1-L^r) L^p}{1-L} \\ &\leq \frac{(n-1) L^p}{1-L} S^*(x_1, \dots, x_1, x_0). \end{aligned}$$

Comme  $L \in [0, 1[$  et la série géométrique de terme général  $L^i$  convergente et majorée par  $\frac{1}{1-L}$ , donc

$$S^*(x_q, \dots, x_q, x_p) \leq \frac{(n-1) L^p}{1-L} S^*(x_1, \dots, x_1, x_0) \rightarrow 0, \text{ quand } p \rightarrow +\infty.$$

Par conséquence, la suite  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy et comme  $X$  est un espace complet, il existe  $x^* \in X$  avec  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = x^*$ . D'après Lemme 2.5.1, on trouve

$$x^* = \lim_{p \rightarrow +\infty} x_{p+1} = \lim_{p \rightarrow +\infty} F(x_p) = F(x^*).$$

**2) Unicité :** On suppose qu'il existe  $x^*, y^* \in X$  avec  $x^* = F(x^*)$  et  $y^* = F(y^*)$ . Alors

$$S^*(F(x^*), \dots, F(x^*), F(y^*)) \leq LS^*(x^*, \dots, x^*, y^*),$$

ce qui implique que

$$S^*(x^*, \dots, x^*, y^*) \leq LS^*(x^*, \dots, x^*, y^*).$$

Or

$$(1 - L) S^*(x^*, \dots, x^*, y^*) \leq 0.$$

Contradiction avec  $L = 1$ , donc  $S^*(x^*, \dots, x^*, y^*) = 0$ . D'où  $x^* = y^*$ .

**Exemple 2.6.1** On prend  $X = \mathbb{R}$ ,  $n = 4$  et  $S^*(x, y, z, t) = |x - y| + |x - z| + |x - t|$ , on définit sur  $\mathbb{R}$  l'application  $F$  par  $F(x) = \frac{1}{4} \arctan x$ . on obtient

$$\begin{aligned} S^*(F(x), F(x), F(x), F(y)) &= \left| \frac{1}{4} \arctan x - \frac{1}{4} \arctan y \right| \\ &\leq \frac{1}{4} S^*(x, x, x, y), \quad L = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Il est clair que les conditions du théorème précédent sont vérifiées, donc il existe un unique point  $x^* \in \mathbb{R}$  vérifiant  $F(x^*) = x^*$  (on remarque que  $0 = F(0)$ ).

**Théorème 2.6.2** [16] *Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique compact et soit  $G : X \rightarrow X$  une application vérifiante*

$$S^*(G(x), \dots, G(x), G(y)) < S^*(x, \dots, x, y), \text{ pour tout } x, y \in X, x \neq y.$$

Alors,  $F$  a un unique point fixe dans  $X$ .

**Démonstration :**

### 1) Existence

Il est clair que  $x_0 = G(x_0) \in X$  est un minimum de l'application

$$x \mapsto S^*(x, \dots, x, G(x)),$$

car  $X$  est un espace compact. Alors on a  $x_0 = G(x_0)$  en effet

$$S^*(G(G(x_0)), \dots, G(G(x_0)), G(x_0)) < S^*(G(x_0), \dots, G(x_0), x_0) = S^*(x_0, \dots, x_0, G(x_0)).$$

Contradiction.

## 2) Unicité

Supposons qu'il existe  $x_0, y_0 \in X$  avec  $x_0 = G(x_0)$  et  $y_0 = G(y_0)$ . Alors

$$S^*(G(x_0), \dots, G(x_0), G(y_0)) < S^*(x_0, \dots, x_0, y_0)$$

ce qui équivaut à

$$S^*(x_0, \dots, x_0, y_0) < S^*(x_0, \dots, x_0, y_0).$$

Contradiction, d'où,  $x_0 = y_0$ .

Du Théorème 2.6.1, on peut déduire ce Corollaire

**Corollaire 2.6.1** *Soit  $(X, S^*)$  un espace métrique complet et soit la boule ouverte*

$$B_{S^*}(x_0, r) = \{x \in X : S^*(x, \dots, x, x_0) < r\}, \text{ avec } x_0 \in X \text{ et } r > 0.$$

*On suppose que  $F : B_{S^*}(x_0, r) \rightarrow X$  est une application contractante avec*

$$S^*(F(x_0), \dots, F(x_0), x_0) < (1 - L) \frac{r}{n - 1}.$$

*Alors,  $F$  a un unique point fixe dans  $B_{S^*}(x_0, r)$ .*

**Démonstration** On suppose qu'il existe  $r_0$  tel que  $0 < r_0 < r$  avec

$$S^*(F(x_0), \dots, F(x_0), x_0) < (1 - L) \frac{r_0}{n - 1}$$

et montrons que  $F : \overline{B_{S^*}(x_0, r_0)} \rightarrow \overline{B_{S^*}(x_0, r_0)}$ . Soit  $x \in \overline{B_{S^*}(x_0, r_0)}$ , alors on trouve

$$\begin{aligned} S^*(x_0, \dots, x_0, F(x)) &\leq (n - 1) S^*(x_0, \dots, x_0, F(x_0)) + S^*(F(x_0), \dots, F(x_0), F(x)) \\ &\leq (n - 1) (1 - L) \frac{r_0}{n - 1} + L S^*(x_0, \dots, x_0, x) \leq r_0. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.6.1, on déduit que  $F$  a un point fixe unique dans  $B_{S^*}(x_0, r_0) \subset B_{S^*}(x_0, r)$ .

# Chapitre 3

## Systemes Différentiels et Calcul Fractionnaire

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente des résultats d'existence et d'unicité pour des systèmes différentiels, en faisant intervenir le calcul fractionnaire. Les démonstrations de nos résultats seront basées sur la théorie des opérateurs ( contraction, compacité, continuité,...) et celle de points fixes ( Banach, Schaeffer, Krasnoselskii).

### 3.2 Rappels

Dans ce qui suit, on présente quelques définitions et résultats fondamentaux qui seront utilisés dans ce chapitre.

**Définition 3.2.1** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, de norme  $\|\cdot\|_E$ . Une application  $f$  de  $E$  dans  $E$  est dite contractante s'il existe un nombre positif  $K \in ]0, 1[$ , tel que pour tout  $x, y \in E$ , on a

$$\|f(x) - f(y)\|_E \leq K \|x - y\|_E.$$

**Définition 3.2.2** Soient  $E$  un espace vectoriel normé, de norme  $\|\cdot\|_E$  et  $(u_n)$  une suite de  $E$ . On dit que  $(u_n)$  est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \|u_{n+p} - u_n\|_E \leq \varepsilon.$$

**Définition 3.2.3 :** On dit que  $E$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_E$  si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

**Définition 3.2.4 :** Soit  $E$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_E$  et  $T$  une application de  $E$  dans  $E$ . On dit qu'un élément  $x$  de  $E$  est un point fixe de  $T$  si

$$Tx = x.$$

### 3.3 Théorèmes des Points Fixes et d'Ascoli-Arzelà

Dans cette partie, on donne quelques théorèmes des points fixes qui seront utilisés dans ce chapitre.

#### Théorème de Banach

**Théorème** Soit  $E$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_E$  et soit  $X$  un sous-ensemble fermé de  $E$  et  $T : X \rightarrow X$  une application contractante sur  $X$ . Alors :

Il existe un point unique  $z \in X$  tel que  $Tz = z$ . De plus si  $x_0 \in X$  et  $x_n = Tx_{n-1}$  pour  $n = 1, 2, \dots$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = z$ ,

et on a

$$\|x_n - z\|_E \leq k^n (1 - k)^{-1} \|x_1 - x_0\|_E,$$

pour  $n = 1, 2, \dots$

#### Théorème de Schaeffer

**Théorème** Soient  $E$  un espace de Banach et  $T : E \rightarrow E$  un opérateur complètement continu.

Si l'ensemble

$$\Omega = \{y \in E : y = \lambda Ty \text{ pour un certain } \lambda \in [0, 1]\}$$

est borné. Alors  $T$  possède au moins un point fixe dans  $E$ .

### Théorème de Krasnoselskii

**Théorème** Soit  $X$  un sous-ensemble fermé, borné et convexe de  $E$ . On suppose que les opérateurs  $R$  et  $S$  vérifient :

i)  $Rx + Sx \in X$  pour tout  $x \in X$ .

ii)  $S$  est continu et  $\overline{S(X)}$  est compact.

iii) Il existe un nombre  $0 < k < 1$  tel que  $\|Rx - Ry\|_E \leq k \|x - y\|_E$  pour tout  $x, y \in X$ .

Alors, il existe au moins un élément  $z \in X$  tel que  $Rz + Sz = z$ .

### Théorème d'Ascoli-Arzela

**Théorème** Soit  $K$  un compacte de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ). Alors un ensemble  $S \subset C(K)$  est relativement compact dans  $C(K)$  si et seulement si les fonctions dans  $S$  sont uniformément bornées et équicontinues sur  $K$ .

## 3.4 Systèmes Couplés

On considère le problème suivant (voir [17]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha u(t) = f_1(t, v(t), D^{\alpha-1}v(t)), t \in [0, 1], \\ D^\beta v(t) = f_2(t, u(t), D^{\beta-1}u(t)), t \in [0, 1], \\ u(0) = v(0) = 0, \\ u'(0) = \gamma I^p u(\eta), \eta \in ]0, 1[, \\ v'(0) = \delta I^q v(\zeta), \zeta \in ]0, 1[. \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

où  $p, q$  sont deux nombres réels positifs,  $1 < \alpha < 2$ ,  $1 < \beta < 2$ ,  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  et  $f_1, f_2 \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

Pour étudier le système couplé (I), on a besoin des lemmes suivants (voir [1]) :

**Lemme 3.4.1** Soit  $f \in C_\mu([a, b], \mathbb{R})$ , ( $\mu \geq -1$ ), alors pour tout  $t \in [a, b]$ , on a

i)  $J_a^r J_a^s f(t) = J_a^{r+s} f(t)$ , pour  $r, s > 0$ .

ii)  $D_a^s J_a^s f(t) = f(t)$ , pour  $s > 0$ .

iii)  $D_a^r J_a^s f(t) = J_a^{s-r} f(t)$ , pour  $s > r > 0$ .

**Lemme 3.4.2** [26] Pour  $n - 1 < \alpha < n$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ , la solution générale de l'équation

$$D^\alpha x(t) = 0$$

est donnée par

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

**Lemme 3.4.3** Soit  $n - 1 < \alpha < n$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors, pour  $f \in C_{-1}^n([0, 1], \mathbb{R})$  on a

$$J^\alpha (D^\alpha) f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $n = [\alpha] + 1$ .

Passons maintenant à démontrer :

**Lemme 3.4.4** [17] Soit  $\gamma \neq \frac{(p+2)}{\eta^{p+1}}$ , et soit  $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Alors la solution de l'équation différentielle fractionnaire

$$D^\alpha x(t) = g(t), \quad 1 < \alpha < 2$$

avec les conditions

$$x(0) = 0,$$

$$x'(0) = \gamma I^p x(\eta), \quad \eta \in ]0, 1[,$$

est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \\ &+ \frac{\gamma \Gamma(p+2) t}{\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} g(s) ds. \end{aligned} \tag{3.1}$$

**Démonstration :** D'après les lemmes 3.4.2- 3.4.3, on a

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau - c_0 - c_1 t. \tag{3.2}$$

Ainsi,

$$x'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} g(\tau) d\tau - c_1.$$

En utilisant la première condition du lemme 3.4.4 , on obtient,

$$c_0 = 0,$$

En appliquant Lemme 3.4.1 sur la formule 3.2 avec  $c_0 = 0$ , on trouve,

$$J^p x(t) = \frac{1}{\Gamma(p+\alpha)} \int_0^t (t-s)^{p+\alpha-1} g(s) ds - c_1 \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} s ds.$$

En utilisant la deuxième condition du lemme 3.4.4, on obtient,

$$c_1 = -\frac{\gamma\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+2) - \gamma\eta^{p+1}} I^{p+\alpha} g(\eta).$$

On remplace  $c_1$  dans (3.2), on aura

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \\ &\quad + \frac{\gamma\Gamma(p+2)t}{\Gamma(p+2) - \gamma\eta^{p+1}} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} g(s) ds. \end{aligned}$$

Maintenant, on introduit les espaces,

$$X = \{u \in C([0, 1], \mathbb{R}^+), \text{ telle que } D^{\alpha-1}u \in C([0, 1], \mathbb{R}^+)\}$$

et

$$Y = \{v \in C([0, 1], \mathbb{R}^+), \text{ telle que } D^{\beta-1}v \in C([0, 1], \mathbb{R}^+)\}.$$

Pour  $1 < \alpha < 2$ , on définit la norme  $\|u\|_1$  dans  $X$  par

$$\|u\|_1 := \max(\|u\|, \|D^{\alpha-1}u\|),$$

où,

$$\|u\| = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|, \text{ et } \|D^{\alpha-1}u\| = \sup_{t \in [0,1]} |D^{\alpha-1}u(t)|.$$

Pour  $1 < \beta < 2$ , on définit la norme  $\|u\|_{1*}$  dans  $Y$  par

$$\|v\|_{1*} := \max(\|v\|, \|D^{\beta-1}v\|),$$

où,

$$\|v\| = \sup_{t \in [0,1]} |v(t)|, \|D^{\beta-1}v\| = \sup_{t \in [0,1]} |D^{\beta-1}v(t)|.$$

Puis, on définit la norme  $\|(u, v)\|_2$  dans  $X \times Y$ , par

$$\|(u, v)\|_2 = \max(\|u\|_1, \|v\|_{1*}).$$

Il est clair que  $(X \times Y, \|\cdot\|_2)$  est un espace de Banach.

### 3.5 Conditions Suffisantes

On présente les quantités suivantes ( voir [17]) :

$$m = \max(m_1, m_2), n = \max(n_1, n_2),$$

$$M_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{|\gamma| \Gamma(p + 2)}{|\Gamma(p + 2) - \gamma \eta^{p+1}|},$$

$$M'_1 = 1 + \frac{|\gamma| \Gamma(p + 2) \eta^{p+\alpha}}{|\Gamma(p + 2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(3 - \alpha) \Gamma(p + \alpha + 1)}$$

$$M_2 = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{|\delta| \Gamma(q + 2)}{|\Gamma(q + 2) - \delta \zeta^{q+1}|}$$

$$M'_2 = 1 + \frac{|\delta| \Gamma(q + 2) \zeta^{q+\beta}}{|\Gamma(q + 2) - \delta \zeta^{q+1}| \Gamma(3 - \beta) \Gamma(q + \beta + 1)}.$$

En outre, on considère les hypothèses suivantes :

(H1) : Il existe des nombres réels positifs  $m_i, n_i, i = 1, 2$ , tels que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$|f_1(t, u_2, v_2) - f_1(t, u_1, v_1)| \leq m_1 |u_2 - u_1| + m_2 |v_2 - v_1|,$$

$$|f_2(t, u_2, v_2) - f_2(t, u_1, v_1)| \leq n_1 |u_2 - u_1| + n_2 |v_2 - v_1|.$$

(H2) : Les fonctions  $f_1, f_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues.

(H3) : Il existe deux constantes positives  $L_1$  et  $L_2$ , telles que

$$|f_1(t, u, v)| \leq L_1, |f_2(t, u, v)| \leq L_2, \text{ pour tout } t \in [0, 1], u, v \in \mathbb{R}.$$

Notre premier résultat est basé sur le théorème de point fixe de Banach :

### 3.5.1 Existence et Unicité :

**Théorème 3.5.1** [17] Soient  $\gamma \neq \frac{\Gamma(p+2)}{\eta^{p+1}}$  et  $\delta \neq \frac{\Gamma(q+2)}{\zeta^{q+1}}$ . On suppose que l'hypothèse (H1) est vérifiée. Si

$$\max(m, n) \max(M'_1, M'_2) < \frac{1}{2}, \quad (3.3)$$

alors le problème (I) admet une solution unique dans  $X \times Y$ .

**Démonstration :** On considère l'opérateur  $T : X \times Y \rightarrow X \times Y$  défini par

$$T(u, v)(t) = (T_1(v)(t), T_2(u)(t)),$$

où,

$$\begin{aligned} T_1v(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s, v(s), D^{\alpha-1}v(s)) ds \\ &+ \frac{\gamma\Gamma(p+2)t}{\Gamma(p+2)-\gamma\eta^{p+1}} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} f_1(t, v(s), D^{\alpha-1}v(s)) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_2u(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_2(s, u(s), D^{\beta-1}u(s)) ds \\ &+ \frac{\delta\Gamma(q+2)t}{\Gamma(q+2)-\delta\zeta^{q+1}} \int_0^\zeta \frac{(\zeta-s)^{q+\beta-1}}{\Gamma(q+\beta)} f_2(s, u(s), D^{\beta-1}u(s)) ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} D^{\alpha-1}T_1v(t) &= \int_0^t f_1(s, v(s), D^{\alpha-1}v(s)) ds \\ &+ \frac{\gamma\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+2)-\gamma\eta^{p+1}} \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} f_1(s, v(s), D^{\alpha-1}v(s)) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D^{\beta-1}T_2u(t) &= \int_0^t f_2(s, u(s), D^{\beta-1}u(s)) ds \\ &+ \frac{\delta\Gamma(q+2)}{\Gamma(q+2)-\delta\zeta^{q+1}} \frac{t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \int_0^\zeta \frac{(\zeta-s)^{q+\beta-1}}{\Gamma(q+\beta)} f_2(s, u(s), D^{\beta-1}u(s)) ds. \end{aligned}$$

On va démontrer que  $T$  est une application contractante. Soit  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in X \times Y$ . Donc pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} &|T_1v_2(t) - T_1v_1(t)| \\ &\leq \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds + \frac{|\gamma|\Gamma(p+2)t}{|\Gamma(p+2) - \gamma\eta^{p+1}|} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} ds \right\} \\ &\quad \times \sup_{0 \leq s \leq 1} |f_1(s, v_2(s), D^{\alpha-1}v_2(s)) - f_1(s, v_1(s), D^{\alpha-1}v_1(s))|. \end{aligned}$$

D'après (H1), on peut écrire

$$\begin{aligned} & |T_1 v_2(t) - T_1 v_1(t)| \\ & \leq \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{|\gamma| \Gamma(p + 2) \eta^{p+\alpha}}{|\Gamma(p + 2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(p + \alpha + 1)} \right) \\ & \quad (m_1 \|v_2 - v_1\| + m_2 \|D^{\alpha-1}(v_2 - v_1)\|). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient,

$$\|T_1 v_2 - T_1 v_1\|_1 \leq 2M_1 m \|v_2 - v_1\|_1.$$

De même, on trouve

$$\|T_2 u_2 - T_2 u_1\|_{1*} \leq 2M_2 n \|u_2 - u_1\|_1.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & |D^{\alpha-1}(T_1 v_2(t) - T_1 v_1(t))| \\ & \leq \int_0^t |f_1(t, v_2(t), D^{\alpha-1}v_2(t)) - f_1(t, v_1(t), D^{\alpha-1}v_1(t))| ds \\ & \quad + \frac{|\gamma| \Gamma(p + 2)}{|\Gamma(p + 2) - \gamma \eta^{p+1}|} \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} \\ & \quad \times \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p + \alpha)} |f_1(t, v_2(t), D^{\alpha-1}v_2(t)) - f_1(t, v_1(t), D^{\alpha-1}v_1(t))| ds \\ & \leq \left( 1 + \frac{|\gamma| \Gamma(p + 2) \eta^{p+\alpha}}{|\Gamma(p + 2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(3 - \alpha) \Gamma(p + \alpha + 1)} \right) \\ & \quad (m_1 \|v_2 - v_1\| + m_2 \|D^{\alpha-1}(v_2 - v_1)\|). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient,

$$\|D^{\alpha-1}(T_1 v_2(t) - T_1 v_1(t))\| \leq 2M'_1 m \|v_2 - v_1\|_1.$$

Avec les mêmes arguments, on obtient,

$$\|D^{\beta-1}(T_2 u_2(t) - T_2 u_1(t))\| \leq 2M'_2 n \|u_2 - u_1\|_1.$$

Et comme  $M_i < M'_i$ , ( $i = 1, 2$ ), on déduit alors que

$$\|T_1 v_2(t) - T_1 v_1(t)\|_1 \leq 2M'_1 m \|v_2 - v_1\|_1.$$

On a aussi,

$$\|T_2 u_2(t) - T_2 u_1(t)\|_{1*} \leq 2M'_2 n \|v_2 - v_1\|_1.$$

Ce qui implique que

$$\|T(u_2, v_2) - T(u_1, v_1)\|_2 \leq$$

$$2 \max(m, n) \max(M'_1, M'_2) \|(u_2 - u_1), (v_2 - v_1)\|_2.$$

D'après la condition (3.3), on déduit que  $T$  est une application contractante, et d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe un point fixe unique qui est une solution de problème (I).

### 3.5.2 Deux Autres Résultats :

**Théorème 3.5.2** [17] *Soient  $\gamma \neq \frac{\Gamma(p+2)}{\eta^{p+1}}$  et  $\delta \neq \frac{\Gamma(q+2)}{\zeta^{q+1}}$ . On suppose que (H2) et (H3) sont vérifiées. Alors le problème (I) admet au moins une solution dans  $X \times Y$ .*

**Démonstration :** On utilise le théorème de Schaefer pour montrer que  $T$  admet au moins un point fixe dans  $X \times Y$  :

**1) :** La continuité de  $T$  :

grâce à la continuité des fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , on déduit que l'opérateur  $T$  est continue.

**2) :** L'opérateur  $T$  est borné sur  $X \times Y$  :

Soit  $\sigma = \max(L_1 M'_1, L_2 M'_2) < \infty$ , on prend  $(u, v) \in B_\sigma$  telle que

$$B_\sigma = \{(u, v) \in X \times Y; \|(u, v)\|_2 \leq \sigma\}.$$

D'après (H3), on a

$$\begin{aligned} |T_1 v(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_1(s, v(s), D^{\alpha-1}v(s))| ds \\ &+ \frac{|\gamma| \Gamma(p+2) t}{|\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}|} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} |f_1(t, v(s), D^{\alpha-1}v(s))| ds, \end{aligned}$$

$$\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L_1 |\gamma| \Gamma(p+2) \eta^{p+\alpha}}{|\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(p+\alpha+1)}.$$

Donc,

$$\|T_1 v\| \leq L_1 M_1$$

et de plus,

$$\begin{aligned} |D^{\alpha-1} T_1 v(t)| &\leq \int_0^t |f_1(t, v(t), D^{\alpha-1} v(t))| ds \\ &\quad + \frac{\gamma \Gamma(p+2)}{\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}} \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\ &\quad \times \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} |f_1(t, v(t), D^{\alpha-1} v(t)) - f_1(t, v(t), D^{\alpha-1} v(t))| ds \\ &\leq \left( 1 + \frac{|\gamma| \Gamma(p+2) \eta^{p+\alpha}}{|\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(3-\alpha) \Gamma(p+\alpha+1)} \right). \end{aligned}$$

D'où,

$$\|T_1 v\|_1 \leq L_1 M'_1.$$

De même, on trouve

$$\|T_2 u\|_{1*} \leq L_2 M'_2.$$

Ce qui implique que

$$\|T(u, v)\|_2 \leq \sigma.$$

Donc  $T$  est borné sur  $B_\sigma$ .

**3) : L'équicontinuité :**

Soient  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ,  $t_1 < t_2$  et  $(u, v) \in B_\sigma$ . On a

$$\begin{aligned} &|T_1 v(t_2) - T_1 v(t_1)| \\ &\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)} |t_2^\alpha - t_1^\alpha| + \frac{L_1 |\gamma| \Gamma(p+2) \eta^{p+\alpha} |t_2 - t_1|^\alpha}{|\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(p+\alpha+1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

et

$$|D^{\alpha-1} T_1 v(t_2) - T_1 v(t_1)| \leq M'_1 (t_2 - t_1). \quad (3.5)$$

Avec le même raisonnement, on a

$$|T_2u(t_2) - T_2u(t_1)| \leq \tag{3.6}$$

$$\frac{L_2}{\Gamma(\beta+1)} |t_2^\beta - t_1^\beta| + \frac{L_2 |\gamma| \Gamma(q+2) \zeta^{q+\beta} |t_2 - t_1|^\beta}{|\Gamma(q+2) - \delta \zeta^{q+1}| \Gamma(q+\beta+1)}$$

et

$$|D^{\beta-1}T_2u(t_2) - T_2u(t_1)| \leq M'_2(t_2 - t_1). \tag{3.7}$$

Quand  $t_2 \rightarrow t_1$  les second membres de (3.4) – (3.7) tendent vers zéro. Puis, par suite des étapes 1.2 et 3, et d'après le théorème d'Ascoli-Arzela, on déduit que  $T$  est complètement continu.

**4) :** L'ensemble

$$\Omega = \{(u, v) \in X \times Y, (u, v) = \lambda T(u, v), 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit  $(u, v) \in \Omega$ , donc  $(u, v) = \lambda T(u, v)$ , avec  $0 < \lambda < 1$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$u(t) = \lambda T_1v(t), v(t) = \lambda T_2u(t).$$

D'après (H3) et on suit les même étape précédentes, on obtient,

$$\|u(t)\| \leq \lambda L_1 M_1, \quad \|v(t)\| \leq \lambda L_2 M_2.$$

De même,

$$\|D^{\alpha-1}u(t)\| \leq \lambda L_1 M'_1, \quad \|D^{\beta-1}v(t)\| \leq \lambda L_2 M'_2.$$

Par Conséquent,

$$\|u\|_1 \leq \lambda L_1 M'_1, \quad \|v\|_{1*} \leq \lambda L_2 M'_2.$$

D'où

$$\|(u, v)\|_2 \leq \lambda \max(L_1 M'_1, L_2 M'_2).$$

Ce qui montre que l'ensemble  $\Omega$  est borné.

Comme conséquence du Théorème de point fixe de Schaefer, on déduit que  $T$  admet au moins un point fixe dans  $X \times Y$ , qui est une solution de (I).

Le troisième résultat est basé sur le théorème de Krasnoselskii :

**Théorème 3.5.3** [17] Soient  $\gamma \neq \frac{\Gamma(p+2)}{\eta^{p+1}}$ ,  $\delta \neq \frac{\Gamma(q+2)}{\zeta^{q+1}}$ . On suppose que (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées. Si

$$\max(m, n) < \frac{1}{2}, \quad (3.8)$$

alors, le problème (I) admet au moins une solution dans  $X \times Y$ .

**Démonstration :** Soit  $\theta \geq \max(L_1 M'_1, L_2 M'_2)$ . On considère l'ensemble suivant

$$B_\theta = \{(u, v) \in X \times Y, \|(u, v)\|_2 \leq \theta\}.$$

On définit l'opérateur  $R$  par :

$$R(u, v)(t) = (R_1(v)(t), R_2(u)(t)),$$

où,

$$R_1 v(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s, v(s), D^{\alpha-1}v(s)) ds,$$

$$R_2 u(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_2(s, u(s), D^{\beta-1}u(s)) ds.$$

On définit aussi l'opérateur  $S$  par :

$$S(u, v)(t) = (S_1(v)(t), S_2(u)(t)),$$

où,

$$S_1 v(t) = \frac{\gamma \Gamma(p+2)t}{\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} f_1(t, v(s), D^{\alpha-1}v(s)) ds,$$

$$S_2 u(t) = \frac{\delta \Gamma(q+2)t}{\Gamma(q+2) - \delta \zeta^{q+1}} \int_0^\zeta \frac{(\zeta-s)^{q+\beta-1}}{\Gamma(q+\beta)} f_2(s, u(s), D^{\beta-1}u(s)) ds.$$

Alors, pour tout  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in B_\theta$ , on a

$$\begin{aligned} & |R_1 v_1(t) + S_1 v_2(t)| \\ & \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_1(s, v_1(s), D^{\alpha-1}v_1(s))| ds \\ & \quad + \frac{|\gamma| \Gamma(p+2)t}{|\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}|} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} |f_1(t, v_2(s), D^{\alpha-1}v_2(s))| ds. \end{aligned}$$

D'après (H3), on trouve,

$$\|R_1 v_1 + S_1 v_2\| \leq L_1 M_1,$$

et

$$\|D^{\alpha-1}(R_1v_1 + S_1v_2)\| \leq L_1M'_1.$$

De même, on trouve,

$$\|R_2u_1 + S_2u_2\| \leq L_2M_2$$

et

$$\|D^{\beta-1}(R_2u_1 + S_2u_2)\| \leq L_2M'_2.$$

Par conséquent, pour tout  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2) \in B_\theta$ , on obtient

$$\|R(u_1, v_1) + S(u_2, v_2)\|_2 \leq \max(L_1M'_1, L_2M'_2) \leq \theta < \infty.$$

Ce qui donne la stabilité de l'opérateur  $R(u_1, v_1) + S(u_2, v_2)$  dans  $B_\theta$ .

Maintenant, on va montrer la contraction de  $R$  : En utilisant (H1) et les mêmes arguments que le théorème 3.5.1, on trouve

$$\|R_1v_2 - R_1v_1\| \leq \frac{2m}{\Gamma(\alpha + 1)} \|v_2 - v_1\|_1,$$

$$\|R_2u_2 - R_2u_1\| \leq \frac{2n}{\Gamma(\beta + 1)} \|u_2 - u_1\|_{1*},$$

$$\|D^{\alpha-1}(R_1v_2 - R_1v_1)\| \leq 2m \|v_2 - v_1\|_1$$

et

$$\|D^{\beta-1}(R_2u_2 - R_2u_1)\| \leq 2n \|u_2 - u_1\|_{1*}.$$

Donc,

$$\|R(u_2, v_2) - R(u_1, v_1)\|_2 \leq 2 \max(m, n) \|(u_2 - u_1, v_2 - v_1)\|_2.$$

D'après la condition (3.8), on déduit que  $R$  est une application contractante.

La continuité de l'opérateur  $S$  : de La continuité des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  on déduit la continuité de l'opérateur  $S$ .

La compacité de l'opérateur  $S$  : Soient  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ,  $t_1 < t_2$  et soit  $(u, v) \in B_\theta$ , alors on a

$$|S_1v(t_2) - S_1v(t_1)| \leq \frac{L_1 |\gamma| \Gamma(p+2) \eta^{p+\alpha} (t_2 - t_1)}{|\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(p+\alpha+1)},$$

$$|S_2 u(t_2) - S_2 u(t_1)| \leq \frac{L_2 |\gamma| \Gamma(q+2) \zeta^{q+\beta} (t_2 - t_1)}{|\Gamma(q+2) - \delta \zeta^{q+1}| \Gamma(q+\beta+1)}$$

$$|D^{\alpha-1} S_1 v(t_2) - S_1 v(t_1)| \leq \frac{L_1 |\gamma| \Gamma(p+2) \eta^{p+\alpha} (t_2 - t_1)}{|\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(p+\alpha+1) \Gamma(3-\alpha)}$$

et

$$|D^{\beta-1} S_2 u(t_2) - S_2 u(t_1)| \leq \frac{L_2 |\gamma| \Gamma(q+2) \zeta^{q+\beta} (t_2 - t_1)}{|\Gamma(q+2) - \delta \zeta^{q+1}| \Gamma(q+\beta+1) \Gamma(3-\beta)}.$$

Donc,

$$\|S_1 v - S_1 v\|_1 \leq \frac{L_1 |\gamma| \Gamma(p+2) \eta^{p+\alpha} (t_2 - t_1)}{|\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(p+\alpha+1) \Gamma(3-\alpha)},$$

et

$$\|S_2 u - S_2 u\|_{1*} \leq \frac{L_2 |\gamma| \Gamma(q+2) \zeta^{q+\beta} (t_2 - t_1)}{|\Gamma(q+2) - \delta \zeta^{q+1}| \Gamma(q+\beta+1) \Gamma(3-\beta)}.$$

D'où,

$$\|S(u, v) - S(u, v)\|_2$$

(3.9)

$$\leq (t_2 - t_1) \max \left( \frac{L_1 |\gamma| \Gamma(p+2) \eta^{p+\alpha}}{|\Gamma(p+2) - \gamma \eta^{p+1}| \Gamma(p+\alpha+1) \Gamma(3-\alpha)}, \frac{L_2 |\gamma| \Gamma(q+2) \zeta^{q+\beta}}{|\Gamma(q+2) - \delta \zeta^{q+1}| \Gamma(q+\beta+1) \Gamma(3-\beta)} \right).$$

Le second membre de (3.9) est indépendant de  $(u, v)$  et tend vers zéro lors que  $t_1 \rightarrow t_2$ . Par conséquent,  $S$  est équicontinu ainsi  $S(B_\theta)$  est relativement compact et d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, l'opérateur  $S$  est compact. En conclusion du théorème de Krasnoselskii, on déduit que le problème  $(I)$  admet au moins une solution dans  $X \times Y$ .

### 3.6 Exemples Illustratifs

#### Exemple 3.6.1

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{\frac{3}{2}}u(t) = \frac{\exp(-t^2)|v(t)|}{16+\exp(t)} + \frac{\sin(D^{\frac{1}{2}}v(t))}{32(\pi t^2+1)}, t \in [0, 1], \\ D^{\frac{3}{2}}v(t) = \frac{|u(t)|+|D^{\frac{1}{2}}u(t)|}{e(\pi t+20)(1+|u(t)|+|D^{\frac{1}{2}}u(t)|)}, t \in [0, 1], \\ u(0) = 0, u'(0) = 4I^{\frac{1}{2}}u\left(\frac{2}{5}\right), \\ v(0) = 0, v'(0) = -8^3 I^{\frac{3}{2}}v\left(\frac{4}{5}\right) ds. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Dans cet exemple, on a  $\alpha = \beta = \frac{3}{2}$ ,  $p = \frac{1}{2}$ ,  $q = \frac{3}{2}$ ,  $\gamma = 4$ ,  $\delta = -8^3$ ,  $\eta = \frac{2}{5}$ ,  $\zeta = \frac{4}{5}$ . Alors pour tout  $u, v \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, 1]$ , on a,

$$f_1(t, u, v) = \frac{e^{-t^2}|u|}{16+e^t} + \frac{\sin v}{32(\pi t^2+1)},$$

$$f_2(t, u, v) = \frac{|u|+|v|}{e(\pi t+20)(1+|u|+|v|)}.$$

Donc,

$$|f_1(t, u_2, v_2) - f_1(t, u_1, v_1)| \leq \frac{1}{16} (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|),$$

$$|f_2(t, u_2, v_2) - f_2(t, u_1, v_1)| \leq \frac{1}{20} (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|).$$

Ainsi, on trouve,

$$M_1 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{24\sqrt{\pi}-16}, \quad M'_1 = 1 + \frac{3}{12\sqrt{\pi}-8},$$

$$M_2 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{30\sqrt{\pi}-32\sqrt{2}}, \quad M'_2 = 1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{15\sqrt{\pi}+16\sqrt{2}}.$$

Il est clair que la condition (3.3) est vérifiée. Alors, d'après le théorème 3.5.1, le problème (3.10) admet une solution unique.

### Exemple 3.6.2

Soit le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{\frac{5}{4}}u(t) = \frac{\exp(-t)}{16+|\sin(v(t))|+|\cos(D^{\frac{1}{4}}v(t))|}, \quad t \in [0, 1], \\ D^{\frac{9}{7}}v(t) = \frac{\exp\{-2t\}\sin(u(t))}{16+\cos(D^{\frac{2}{7}}v(t))}, \quad t \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = J^3u(\eta), \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = J^2v'(\zeta). \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Dans cet exemple, on a  $\alpha = \frac{5}{4}$ ,  $\beta = \frac{9}{7}$ ,  $p = 3$ ,  $q = 2$ ,  $\gamma = \delta = 1$ ,  $\eta = \frac{1}{5}$ ,  $\zeta = \frac{4}{5}$ , alors pour tout  $u, v \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, 1]$ , on a

$$|f_1(t, u, v)| = \frac{\exp(-t)}{16 + |\sin u| + |\cos v|}, \quad |f_2(t, u, v)| = \frac{\exp\{-2t\}\sin u}{16 + \cos v},$$

Il est clair que  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions continues et bornées, ainsi les conditions du théorème 3.5.2 sont vérifiées, donc le problème (3.11) admet au moins une solution.

## 3.7 Systèmes à Séries

Considérons le système suivant ( voir [19]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha u(t) = f_1(t, u(t), v(t)) + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \varphi_i(s) g_i(s, u(s), v(s)) ds, \quad t \in [0, 1] \\ D^\beta v(t) = f_2(t, u(t), v(t)) + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_i-1}}{\Gamma(\beta_i)} \phi_i(s) h_i(s, u(s), v(s)) ds, \quad t \in [0, 1] \\ \sum_{k=0}^{n-2} (|u^{(k)}(0)| + |v^{(k)}(0)|) = 0, \\ u^{(n-1)}(0) = \gamma J^p u(\eta), \quad \eta \in ]0, 1[, \\ v^{(n-1)}(0) = \delta J^q v(\zeta), \quad \zeta \in ]0, 1[, \end{array} \right. \quad (II)$$

où  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n-1 < \beta < n$  avec  $n \geq 1$ , ( $\alpha_i \geq 1$ ,  $\beta_i \geq 1$ ) et  $p, q$  sont des nombres réels positifs,  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions qui seront indiquées plus tard,  $\varphi_i, \phi_i, g_i$  et  $h_i$  sont des suites de fonctions qui seront indiquées aussi plus tard.

On suppose que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \|\varphi_i\|_{\infty} \|g_i\|_{\infty} < +\infty$$

et

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\beta_i + 1)} \|\phi_i\|_{\infty} \|h_i\|_{\infty} < +\infty$$

sont deux séries normalement convergentes.

Pour étudier le système couplé (II), on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.7.1** [19] *Soit  $x \in C_{-1}^n([0, 1], \mathbb{R})$ . La solution du problème*

$$D^{\alpha} x(t) = f(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \varphi_i(s) g_i(s) ds, \quad n-1 < \alpha < n, \quad \alpha_i \geq 1$$

avec les conditions,

$$\sum_{k=0}^{n-2} |x^{(k)}(0)| = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = \gamma I^p x(\eta)$$

est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds + \\ &\sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_i+\alpha)} \varphi_i(s) g_i(s) ds + \\ &+ \frac{\gamma \Gamma(p+n) t^{n-1}}{\Gamma(n)(\Gamma(p+n) - \gamma \eta^{p+n-1})} \\ &\times \left( \int_0^{\eta} \frac{(\eta-s)^{\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha+p)} f(s) ds + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^{\eta} \frac{(\eta-s)^{\alpha_i+\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i+p)} \varphi_i(s) g_i(s) ds \right), \end{aligned}$$

tel que  $\gamma \neq \frac{\Gamma(p+n)}{\eta^{p+n-1}}$ .

**Démonstration :** D'après le lemme 3.4.3, on trouve

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_i+\alpha)} \varphi_i(s) g_i(s) ds \\ &- c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_{n-1} t^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Alors, on a pour  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ,

$$x^{(k)}(0) = -k!c_k.$$

En utilisant le fait que  $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0$ , on obtient

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{n-2} = 0.$$

D'après le Lemme 3.4.1, on peut écrire

$$\begin{aligned} I^p x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + p)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+p-1} f(s) ds + \\ &\quad \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i+\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha_i + \alpha + p)} \varphi_i(s) g_i(s) ds - c_{n-1} \frac{\Gamma(n) t^{p+n-1}}{\Gamma(p+n)}. \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième condition du lemme 3.7.1, on obtient

$$c_{n-1} = -\frac{\gamma \Gamma(p+n)}{\Gamma(n)(\Gamma(p+n) - \gamma \eta^{p+n-1})} \left( I^{\alpha+p} f(\eta) + I^{\alpha+\alpha_i+p} \frac{\varphi_i(\eta) g_i(\eta)}{\Gamma(\alpha_i + p + 1)} \right).$$

En substituant  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  dans (3.12), on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds + \\ &\quad \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_i + \alpha)} \varphi_i(s) g_i(s) ds + \\ &\quad + \frac{\gamma \Gamma(p+n) t^{n-1}}{\Gamma(n)(\Gamma(p+n) - \gamma \eta^{p+n-1})} \\ &\quad \times \left( \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha+p)} f(s) ds + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha_i+\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha + \alpha_i + p)} \varphi_i(s) g_i(s) ds \right). \end{aligned}$$

### 3.8 Résultats Principaux

On impose les hypothèses suivantes :

(h1) : Il existe des nombres réels positifs  $m_j, m'_j, n_j, n'_j$  ( $j = 1, 2$ ) tels que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$|f_1(t, u_2, v_2) - f_1(t, u_1, v_1)| \leq m_1 |u_2 - u_1| + m_2 |v_2 - v_1|,$$

$$|f_2(t, u_2, v_2) - f_2(t, u_1, v_1)| \leq n_1 |u_2 - u_1| + n_2 |v_2 - v_1|,$$

$$|g_i(t, u_2, v_2) - g_i(t, u_1, v_1)| \leq m'_1 |u_2 - u_1| + m'_2 |v_2 - v_1|,$$

$$|h_i(t, u_2, v_2) - h_i(t, u_1, v_1)| \leq n'_1 |u_2 - u_1| + n'_2 |v_2 - v_1|,$$

(h2) : Les deux séries

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \|\varphi_i\|_\infty < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \|\phi_i\|_\infty < +\infty$$

sont normalement convergentes.

(h3) : Les fonctions

$$f_1, f_2, g_i, h_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

et les suites des fonctions

$$\varphi_i, \phi_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

sont continues et bornées.

(h4) : Les fonctions  $f_1, f_2, g_i$  et  $h_i$  sont bornées, i.e., il existe des nombres réels positifs  $L_1, L_2, L'_1$  et  $L'_2$ , tels que

$$|f_1(t, u, v)| \leq L_1, |f_2(t, u, v)| \leq L_2, |g_i(t, u, v)| \leq L'_1,$$

$$|h_i(t, u, v)| \leq L'_2, \text{ pour tout } t \in [0, 1], (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

On pose

$$\omega_1 = \frac{\gamma \Gamma(p+n)}{\Gamma(n)(\Gamma(p+n) - \gamma \eta^{p+n-1})}, \quad \omega_2 = \frac{\delta \Gamma(q+n)}{\Gamma(n)(\Gamma(q+n) - \delta \zeta^{q+n-1})},$$

$$M_1 : = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|\omega_1|}{\Gamma(\alpha+p+1)} + \sum_{i=1}^{+\infty} \left( \frac{\|\varphi_i\|_\infty}{\Gamma(\alpha+\alpha_i+1)} + \frac{|\omega_1| \|\varphi_i\|_\infty}{\Gamma(\alpha+\alpha_i+p+1)} \right)$$

et

$$M_2 : = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{|\omega_2|}{\Gamma(\beta + q + 1)} + \sum_{i=1}^{+\infty} \left( \frac{\|\phi_i\|_\infty}{\Gamma(\beta + \beta_i + 1)} + \frac{|\omega_2| \|\phi_i\|_\infty}{\Gamma(\beta + \beta_i + q + 1)} \right),$$

ainsi

$$\bar{L} = \max \{m_j, n_j, m'_j, n'_j\} \quad (j = 1, 2).$$

Notre premier résultat est donné par le théorème suivant :

### 3.8.1 Premier Résultat

**Théorème 3.8.1** [19] *Soient  $\gamma \neq \frac{\Gamma(p+n)}{\eta^{p+n-1}}$  et  $\delta \neq \frac{\Gamma(q+n)}{\zeta^{q+n-1}}$ . On suppose que les hypothèses (h1) et (h2) sont vérifiées avec*

$$\bar{L}(M_1 + M_2) < \frac{1}{2}. \quad (3.13)$$

*Alors, le système (II) admet une unique solution.*

**Démonstration :** Posons

$$X := C_{-1}^n([0, 1], \mathbb{R}),$$

cet espace équipé de la norme  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty$  définie par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in [0, 1]\},$$

est un espace de Banach. En outre, l'espace de produit  $(X \times X, \|(u, v)\|_{X \times X})$  muni de la norme  $\|(u, v)\|_{X \times X} = \|u\|_X + \|v\|_X$  est un espace de Banach.

On considère maintenant l'opérateur  $\Psi : X \times X \rightarrow X \times X$  défini par

$$\Psi(u, v)(t) = \left( \Psi_1(u, v)(t), \Psi_2(u, v)(t) \right),$$

où

$$\Psi_1(u, v)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s, u(s), v(s)) ds$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i)} \varphi_i(s) g_i(s, u(s), v(s)) ds \\
& + \omega_1 t^{n-1} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha+p)} f_1(s, u(s), v(s)) ds + \\
& + \omega_1 t^{n-1} \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha+\alpha_i+p-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i+p)} \varphi_i(s) g_i(s, u(s), v(s)) ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Psi_2(u, v)(t) & = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_2(s, u(s), v(s)) ds \\
& + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta+\beta_i-1}}{\Gamma(\beta+\beta_i)} \phi_i(s) h_i(s, u(s), v(s)) ds \\
& + \omega_2 t^{n-1} \int_0^\zeta \frac{(\zeta-s)^{\beta+q-1}}{\Gamma(\beta+q)} f_2(s, u(s), v(s)) ds \\
& + \omega_2 t^{n-1} \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^\zeta \frac{(\zeta-s)^{\beta+\beta_i+q-1}}{\Gamma(\beta+\beta_i+q)} \phi_i(s) h_i(s, u(s), v(s)) ds.
\end{aligned}$$

On prouve que  $\Psi$  est un opérateur contractant :

Soit  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in X \times X$ . Alors pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned}
& |\Psi_1(u_2, v_2)(t) - \Psi_1(u_1, v_1)(t)| \leq \\
& \left( \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds + |\omega_1| \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha+p)} ds \right) \\
& \times \sup_{0 \leq s \leq 1} |f_1(s, u_2(s), v_2(s)) - f_1(s, u_1(s), v_1(s))| \\
& + \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \left( \sup_{0 \leq s \leq 1} |\varphi_i(s)| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i)} ds + |\omega_1| \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha+\alpha_i+p-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i+p)} ds \right) \right) \\
& \times \sup_{0 \leq s \leq 1} |g_i(s, u_2(s), v_2(s)) - g_i(s, u_1(s), v_1(s))|.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout  $t \in [0, 1]$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& |\Psi_1(u_2, v_2)(t) - \Psi_1(u_1, v_1)(t)| \leq \\
& \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{|\omega_1|}{\Gamma(\alpha + p + 1)} \right) \\
& \times \sup_{0 \leq s \leq 1} |f_1(s, u_2(s), v_2(s)) - f_1(s, u_1(s), v_1(s))| \\
& + \sum_{i=1}^{+\infty} \left( \frac{\|\varphi_i\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \alpha_i + 1)} + \frac{|\omega_1| \|\varphi_i\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \alpha_i + p + 1)} \right) \\
& \times \sup_{0 \leq s \leq 1} |g_i(s, u_2(s), v_2(s)) - g_i(s, u_1(s), v_1(s))|
\end{aligned}$$

D'après (h1) et (h2), on peut écrire

$$\begin{aligned}
& |\Psi_1(u_2, v_2)(t) - \Psi_1(u_1, v_1)(t)| \leq \\
& \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{|\omega_1|}{\Gamma(\alpha + p + 1)} \right) \\
& \times \bar{L} \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} |u_2(t) - u_1(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |v_2(t) - v_1(t)| \right) \\
& + \sum_{i=1}^{+\infty} \left( \frac{\|\varphi_i\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \alpha_i + 1)} + \frac{|\omega_1| \|\varphi_i\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \alpha_i + p + 1)} \right) \\
& \times \bar{L} \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} |u_2(t) - u_1(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |v_2(t) - v_1(t)| \right),
\end{aligned}$$

on trouve,

$$|\Psi_1(u_2, v_2)(t) - \Psi_1(u_1, v_1)(t)| \leq$$

$$2M_1 \bar{L} (\|u_2 - u_1\|_X + \|v_2 - v_1\|_X),$$

où  $\bar{L}$  est la plus grande constante Lipschitzienne de fonctions  $f_1$  et  $f_2$  respectivement de suites de fonctions  $g_i$  et  $h_i$ .

Par conséquent, on a

$$\|\Psi_1(u_2, v_2) - \Psi_1(u_1, v_1)\|_X \leq$$

$$2\bar{L}M_1 \|(u_2 - u_1, v_2 - v_1)\|_{X \times X}. \quad (3.14)$$

De même, on trouve

$$\|\Psi_2(u_2, v_2) - \Psi_2(u_1, v_1)\|_X \leq 2\bar{L}M_2 \|(u_2 - u_1, v_2 - v_1)\|_{X \times X}. \quad (3.15)$$

Finalement, en utilisant (3.14) et (3.15), on déduit que

$$\|\Psi(u_2, v_2) - \Psi(u_1, v_1)\|_{X \times X} \leq 2\bar{L}(M_1 + M_2) \|(u_2 - u_1, v_2 - v_1)\|_{X \times X}.$$

D'après (3.13), on déduit que  $\Psi$  est un opérateur contractant, et d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe un point fixe unique qui est une solution de système (II).

### 3.8.2 Deuxième Résultat

**Théorème 3.8.2** [19] Soient  $\gamma \neq \frac{\Gamma(p+n)}{\eta^{p+n-1}}$  et  $\delta \neq \frac{\Gamma(q+n)}{\zeta^{q+n-1}}$ . On suppose que les hypothèses (h2), (h3) et (h4) sont vérifiées. Alors le système (II) admet au moins une solution.

**Démonstration :** Tout d'abord, on va prouver que l'opérateur  $\Psi$  est complètement continu. On peut déduire que  $\Psi$  est continu sur  $X \times X$  grâce à la continuité des fonctions  $f_1, f_2$  et la convergence normale des séries des fonctions

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i)} \varphi_i(s) g_i(s, u(s), v(s)) ds,$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta+\beta_i-1}}{\Gamma(\beta+\beta_i)} \phi_i(s) h_i(s, u(s), v(s)) ds$$

ce qui implique la convergence uniforme qui entraîne la continuité des séries des fonctions.

On procède en deux étapes

(1) : On prend  $r > C > 0$  où

$$C = L(M_1 + M_2),$$

$$L = \max \{L_j, L'_j\} (j = 1, 2),$$

et soit

$$B_r := \{(u, v) \in X \times X; \|(u, v)\|_{X \times X} \leq r\}.$$

Maintenant, on suppose que les hypothèses (h2) et (h4) sont vérifiées, alors pour  $(u, v) \in B_r$ , on a

$$\begin{aligned} |\Psi_1(u, v)(t)| &\leq \left( \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\eta^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} \right) \sup_{0 \leq t \leq 1} |f_1(t, u(t), v(t))| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{+\infty} \left( \frac{\|\varphi_i\|_\infty t^{\alpha+\alpha_i}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i+1)} + \frac{\|\varphi_i\|_\infty \eta^{\alpha+\alpha_i+p}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i+p+1)} \right) \sup_{0 \leq t \leq 1} |g_i(t, u(t), v(t))|. \end{aligned}$$

Pour tout  $t \in [0, 1]$  et d'après (h4), on obtient

$$\|\Psi_1(u, v)\|_X \leq LM_1 < +\infty. \quad (3.16)$$

De même, on trouve,

$$\|\Psi_2(u, v)\|_X \leq LM_2 < +\infty. \quad (3.17)$$

Alors, d'après (3.16) et (3.17), on déduit que,

$$\|T(u, v)\|_{X \times X} \leq C. \quad (3.18)$$

D'où,

$$\Psi(B_r) \subset B_r.$$

**(2) :** Soit  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ,  $t_1 < t_2$  et  $(u, v) \in B_r$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} &| \Psi_1(u, v)(t_2) - \Psi_1(u, v)(t_1) | \leq \\ &| \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s, u(s), v(s)) ds \\ &\quad - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s, u(s), v(s)) ds | \\ &+ | \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha+\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i)} \varphi_i(s) g_i(s, u(s), v(s)) ds \\ &\quad - \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha+\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i)} \varphi_i(s) g_i(s, u(s), v(s)) ds | \\ &+ |\omega_1| (t_2^{n-1} - t_1^{n-1}) | \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha+p)} f_1(s, u(s), v(s)) ds | \\ &+ |\omega_1| (t_2^{n-1} - t_1^{n-1}) \sum_{i=1}^{+\infty} | \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha+\alpha_i+p-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha_i+p)} \varphi_i(s) g_i(s, u(s), v(s)) ds | . \end{aligned}$$

D'après (h4), on trouve

$$\begin{aligned}
& | \Psi_1(u, v)(t_2) - \Psi_1(u, v)(t_1) | \leq \\
& \frac{L_1 (t_2^\alpha - t_1^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
& + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{L'_1 \|\varphi_i\|_\infty (t_2^{\alpha+\alpha_i} - t_1^{\alpha+\alpha_i} + (t_2 - t_1)^{\alpha+\alpha_i})}{\Gamma(\alpha + \alpha_i + 1)} \\
& + \frac{|\omega_1| L_1 (t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{\Gamma(\alpha + p + 1)} \\
& + |\omega_1| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{L'_1 \|\varphi_i\|_\infty (t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{\Gamma(\alpha + \alpha_i + p + 1)}
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned}
& | \Psi_2(u, v)(t_2) - \Psi_2(u, v)(t_1) | \leq \frac{L_2 (t_2^\beta - t_1^\beta + (t_2 - t_1)^\beta)}{\Gamma(\beta + 1)} \\
& + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{L_2 \|\phi_i\|_\infty (t_2^{\beta+\beta_i} - t_1^{\beta+\beta_i} + (t_2 - t_1)^{\beta+\beta_i})}{\Gamma(\beta + \beta_i + 1)} \\
& + \frac{|\omega_2| L_2 (t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{\Gamma(\beta + q + 1)} \\
& + |\omega_2| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{L'_2 \|\phi_i\|_\infty (t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{\Gamma(\beta + \beta_i + q + 1)}
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
& | \Psi(u, v)(t_2) - \Psi(u, v)(t_1) | \leq \\
& \frac{L_1 (t_2^\alpha - t_1^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{|\omega_1| L_1 (t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{\Gamma(\alpha + p + 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{L'_1 \|\varphi_i\|_\infty (t_2^{\alpha+\alpha_i} - t_1^{\alpha+\alpha_i} + (t_2 - t_1)^{\alpha+\alpha_i})}{\Gamma(\alpha + \alpha_i + 1)} \\
& + |\omega_1| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{L'_1 \|\varphi_i\|_\infty (t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{\Gamma(\alpha + \alpha_i + p + 1)} \\
& + \frac{L_2 (t_2^\beta - t_1^\beta + (t_2 - t_1)^\beta)}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{|\omega_2| L_2 (t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{\Gamma(\beta + q + 1)} \\
& + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{L'_2 \|\phi_i\|_\infty (t_2^{\beta+\beta_i} - t_1^{\beta+\beta_i} + (t_2 - t_1)^{\beta+\beta_i})}{\Gamma(\beta + \beta_i + 1)} \\
& + |\omega_2| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{L'_2 \|\phi_i\|_\infty (t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{\Gamma(\beta + \beta_i + q + 1)}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Quand  $t_2 \rightarrow t_1$ , le second membre de (3.19) tend vers zéro. Puis, par suite des étapes 1, 2 et d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, on déduit que  $\Psi$  est complètement continu.

On considère maintenant, l'ensemble

$$\Omega = \{(u, v) \in X \times X / (u, v) = \lambda T(u, v), 0 < \lambda < 1\}$$

et on prouve qu'il est borné.

Soit  $(u, v) \in \Omega$ , donc  $(u, v) = \lambda \Psi(u, v)$ , tel que  $0 < \lambda < 1$ . Par conséquent, pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$u(t) = \lambda \Psi_1(u, v)(t), v(t) = \lambda \Psi_2(u, v)(t).$$

Donc,

$$\|(u, v)\|_{X \times X} = \lambda \|\Psi(u, v)\|_{X \times X}.$$

D'après (h2) et (h4), on obtient

$$\|(u, v)\|_{X \times X} \leq \lambda C.$$

On déduit que l'ensemble  $\Omega$  est borné.

Comme conclusion du théorème de point fixe de Schaefer, on déduit que  $\Psi$  a au moins un point fixe, qui est une solution de système (II).

### 3.9 Deux Exemples

#### Exemple 3.9.1

Considérons le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{\frac{1}{2}} u(t) = \frac{\sin(u(t)+v(t))}{64(t+1)} + \sqrt{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s) \exp(-ks)}{\Gamma(2) k^2} \left( \frac{\sin(u(s)+v(s))}{66(k!(s^2+1)} \right) ds, t \in [0, 1], \\ D^{\frac{1}{2}} v(t) = \frac{\sin u(t)+\sin v(t)}{64(t^2+1)} + \sqrt{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s) \exp(-ks^2)}{\Gamma(2) k^2} \left( \frac{\sin u(s)+\sin v(s)}{66(k!)\sqrt{k}(s \exp(ks^2)+1)} \right) ds, t \in [0, 1], \\ u(0) = \gamma J^p u\left(\frac{1}{4}\right), \quad v(0) = \delta J^q v\left(\frac{1}{4}\right), \end{array} \right. \quad (3.20)$$

où,  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_k = \beta_k = 2$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ),  $\eta = \zeta = \frac{1}{4}$ ,  $p = q = \frac{3}{2}$ ,  $\gamma = \delta = 2\sqrt{\pi}$  et

$$\begin{aligned} f_1(t, u, v) &= \frac{\sin(u+v)}{64(t+1)} + \sqrt{2}, \quad f_2(t, u, v) = \frac{\sin u + \sin v}{64(t^2+1)} + \sqrt{3}, \\ g_k(t, u, v) &= \frac{\sin(u+v)}{66(k!)(t^2+1)}, \quad h_k(t, u, v) = \frac{\sin u + \sin v}{66(k!)\sqrt{k}(t \exp(kt^2)+1)}, \\ \varphi_k(t) &= \frac{\exp(-kt)}{k^2}, \quad \phi_k(t) = \frac{\exp(-ks^2)}{k^2}. \end{aligned}$$

Pour tout  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} |f_1(t, u_2, v_2) - f_1(t, u_1, v_1)| &\leq \frac{1}{64} (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|), \\ |f_2(t, u_2, v_2) - f_2(t, u_1, v_1)| &\leq \frac{1}{64} (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|), \\ |g_k(t, u_2, v_2) - g_k(t, u_1, v_1)| &\leq \frac{1}{66} (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|), \\ |h_k(t, u_2, v_2) - h_k(t, u_1, v_1)| &\leq \frac{1}{66} (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|) \end{aligned}$$

on trouve

$$M_1 = M_2 = 10.889.$$

$$\bar{L} = \max(m_j, m'_j)_{j=1,2} = \frac{1}{64}.$$

Donc,

$$2\bar{L}(M_1 + M_2) = 4 \times \frac{10.889}{64} = 0.68 < 1.$$

Il est clair que toutes les hypothèses du Théorème 3.8.1 sont vérifiées. Par conséquent, le problème (3.20) a une unique solution.

### Exemple 3.9.2

On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{\frac{17}{4}} u(t) = \frac{\cos(u(t)+v(t))}{\pi+t^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^3}{\Gamma(4)} \frac{\cosh(-ks)}{k^4} \frac{e^{-ks} \cos(u(s) \times v(s))}{k^2+2} ds, \quad t \in [0, 1], \\ D^{\frac{21}{5}} v(t) = \frac{\sin(u(t)+v(t))}{5+t^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^3}{\Gamma(4)} \frac{\sinh(-s^2)}{k^2\sqrt{k}} \frac{e^{-s} \sin(u(s) \times v(s))}{k\sqrt{k}} ds, \quad t \in [0, 1], \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \quad u^{(3)}(0) = \gamma J^p u\left(\frac{1}{4}\right), \\ v(0) = v'(0) = v''(0) = 0, \quad v^{(3)}(0) = \delta J^q u\left(\frac{1}{4}\right). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Pour cet exemple, nous avons  $\alpha = \frac{17}{4}$ ,  $\beta = \frac{21}{5}$ ,  $\alpha_k = \beta_k = 4$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ),  $\gamma = \delta = 2$ ,  $\eta = \zeta = \frac{1}{4}$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ , et  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\varphi_k(t) = \frac{\cosh(-kt)}{k^4}, \quad \phi_k(t) = \frac{\sinh(-s^2)}{k^2\sqrt{k}}, \quad f_1(t, u, v) = \frac{\cos(u+v)}{\pi+t^2},$$

$$f_2(t, u, v) = \frac{\sin(u+v)}{5+t^2}, \quad g_k(t, u, v) = \frac{e^{-kt} \cos(u \times v)}{k^2+2},$$

et

$$h_k(t, u, v) = \frac{e^{-t} \sin(u \times v)}{k^{1.5}}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \|\varphi_k(t)\|_{\infty} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left\| \frac{\cosh(-kt)}{k^4} \right\|_{\infty} < +\infty, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \|\phi_k(t)\|_{\infty} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left\| \frac{\sinh(-s^2)}{k^2\sqrt{k}} \right\|_{\infty} < +\infty, \end{aligned}$$

Il est clair que toutes les hypothèses du théorème 3.8.2 sont vérifiées, donc le problème (3.21) admet au moins une solution.

# Chapitre 4

## Transformations Intégrales et Applications aux EDFs

Dans ce chapitre, on présente des nouveaux résultats sur les transformations intégrales de type Fourier et Laplace, voir ([3, 11, 20]).

### 4.1 Transformation de Fourier

**Définition 4.1.1** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) une fonction dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . La transformée de Fourier  $\mathcal{F}(f)$  de  $f$  est définie par

$$\mathcal{F}\{f(x), \omega\} = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega x} f(x) dx, \quad \omega \in \mathbb{R}^n,$$

où  $\omega x = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On rappelle le théorème d'inversion de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$  :

**Théorème 4.1.1** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) une fonction dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\omega} \hat{f}(\omega) d\omega, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

### 4.2 Propriétés

**Proposition 4.2.1** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f}$  est une fonction continue, bornée,  $\hat{f}(\omega)$  tend vers 0 quand  $\omega \rightarrow \pm\infty$  et

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

**Proposition 4.2.2** (Linéarité) *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions appartenant à  $L^1(\mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Alors*

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x); \omega\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x); \omega\} + \beta \mathcal{F}\{g(x); \omega\}.$$

**Proposition 4.2.3** (Translation) *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Alors*

$$\mathcal{F}\{f(x - c); \omega\} = \exp(i\omega c) \widehat{f}(\omega).$$

**Proposition 4.2.4** (Modulation) *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . Alors*

$$\mathcal{F}\{\exp(i\omega_0 x) f(x); \omega\} = \widehat{f}(\omega - \omega_0).$$

**Proposition 4.2.5** (Changement d'échelle) *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}^*$ . Alors*

$$\mathcal{F}\{f(cx); \omega\} = \frac{1}{|c|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

**Proposition 4.2.6** (Conjugué complexe) *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\mathcal{F}\{\overline{f(x)}; \omega\} = \overline{\widehat{f}(-\omega)}.$$

**Proposition 4.2.7** (Transformée d'une dérivée) *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Supposons que  $f$  est une fonction dérivable et  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\mathcal{F}\{f'(x); \omega\} = i\omega \widehat{f}(\omega).$$

*Si  $f$  est une fonction  $k$ -fois dérivable et  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors*

$$\mathcal{F}\{f^{(k)}(x); \omega\} = (i\omega)^k \widehat{f}(\omega).$$

**Proposition 4.2.8** *Si  $f$  est une fonction admet des dérivés à l'ordre  $k$  qui sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors*

$$\widehat{f}(\omega) \leq \frac{C}{|\omega|^k}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 4.2.9** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Si  $xf \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{f}$  est une fonction dérivable et

$$\frac{d\widehat{f}(\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}\{-ixf(x); \omega\}.$$

Si  $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{f}$  est une fonction  $k$  fois dérivable et

$$\frac{d^k \widehat{f}(\omega)}{d\omega^k} = \mathcal{F}\{(-ix)^k f(x); \omega\},$$

et pour  $k = 1, 2, \dots$ , on a

$$\left| \frac{d^k \widehat{f}(\omega)}{d\omega^k} \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x^k f(x)| dx.$$

**Proposition 4.2.10** (Transformée d'un produit de convolution) Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  et

$$\mathcal{F}\{f * g(x); \omega\} = \mathcal{F}\{f(x); \omega\} \times \mathcal{F}\{g(x); \omega\}.$$

### 4.3 Résultats Principaux

**Définition 4.3.1** [20] Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) une fonction appartient à  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . La transformée de Fourier généralisée est définie par la formule suivante :

$$\mathcal{F}_a\{f(x); \omega\} = \widehat{f}_a(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} a^{-i\omega x} f(x) dx,$$

où  $a \in ]1, +\infty[$ .

On démontre le théorème d'inversion de Fourier généralisée (voir [20]) :

**Théorème 4.3.1** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (or  $\mathbb{C}$ ) une fonction appartient à  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Si  $\widehat{f}_a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors, on a

$$f(x) = \left(\frac{\ln a}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} a^{ix\omega} \widehat{f}_a(\omega) d\omega,$$

où  $\omega, x \in \mathbb{R}^n$ .

**Démonstration :** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Alors, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_a\{f(x); \omega\} &= \int_{\mathbb{R}^n} a^{-i\omega x} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega x \ln a} f(x) dx.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Posons  $t = x \ln a$  et  $|J| = (\ln a)^n$ , où  $J$  est le Jacobien, dans (4.1), on trouve

$$\mathcal{F}_a\{f(x); \omega\} = \mathcal{F}\{g(t); \omega\},$$

où,  $g(t) = \left(\frac{1}{\ln a}\right)^n f\left(\frac{t}{\ln a}\right)$ . On voit que  $\widehat{f}_a = \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . En appliquant la transformée de Fourier inverse, on obtient

$$g(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\omega} \widehat{g}(\omega) d\omega.$$

Donc,

$$f(x) = \left(\frac{\ln a}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} a^{ix\omega} \widehat{f}_a(\omega) d\omega.$$

## 4.4 D'autres Résultats

**Proposition 4.4.1** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{f}_a$  est une fonction continue, bornée,  $\widehat{f}_a(\omega)$  tend vers 0 quand  $\omega \rightarrow \pm\infty$  et

$$\|\widehat{f}_a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

**Démonstration :** En utilisant le changement de variable  $t = x \ln a$  et la proposition 4.2.1, on obtient la preuve de la proposition 4.4.1.

**Proposition 4.4.2** (Linéarité) Soient  $f$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Alors,

$$\mathcal{F}_a\{\alpha f(x) + \beta g(x); \omega\} = \alpha \mathcal{F}_a\{f(x); \omega\} + \beta \mathcal{F}_a\{g(x); \omega\}.$$

**Démonstration :** Grâce à la linéarité de l'intégrale, on déduit la linéarité de la transformation  $\mathcal{F}_a$ .

**Proposition 4.4.3** (Translation) Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\mathcal{F}_a\{f(x - c); \omega\} = a^{(i\omega c)} \widehat{f}_a(\omega).$$

**Démonstration :** Evidente.

**Proposition 4.4.4** (Modulation) *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . Alors,*

$$\mathcal{F}_a \{ a^{i\omega_0 x} f(x); \omega \} = \widehat{f}_a(\omega - \omega_0).$$

**Proposition 4.4.5** (Changement d'échelle) *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}^*$ . Alors,*

$$\mathcal{F}_a \{ f(cx); \omega \} = \frac{1}{|c|} \widehat{f}_a\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

**Démonstration :** Evidente.

**Proposition 4.4.6** (Conjugué complexe) *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors,*

$$\mathcal{F}_a \{ \overline{f(x)}; \omega \} = \overline{\widehat{f}_a(-\omega)}.$$

**Démonstration :** Evidente.

**Proposition 4.4.7** *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Supposons que  $f$  une fonction dérivable et  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\mathcal{F}_a \{ f'(x); \omega \} = (i\omega \ln a) \widehat{f}_a(\omega).$$

*Si  $f$  est  $k$ -fois-dérivable qui sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors*

$$\mathcal{F}_a \{ f^{(k)}(x); \omega \} = (i\omega \ln a)^k \widehat{f}_a(\omega), \text{ où } k \in \mathbb{N}.$$

**Démonstration :** En utilisant le changement de variable  $t = x \ln a$  et la proposition 4.2.7, nous obtenons la preuve de la proposition 4.4.7.

**Proposition 4.4.8** *Si  $f$  est une fonction  $k$ -fois dérivable qui sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors*

$$\widehat{f}_a(\omega) \leq \frac{C}{|\omega|^k}, \quad C \in \mathbb{R}_+.$$

**Proposition 4.4.9 :** *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $xf \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\frac{d\widehat{f}_a(\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}_a \{ (-ix \ln a) f(x); \omega \}.$$

Si  $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\frac{d^k \widehat{f}_a(\omega)}{d\omega^k} = \mathcal{F}_a \left\{ (-ix \ln a)^k f(x); \omega \right\},$$

et pour  $k = 1, 2, \dots$ , on a

$$\left| \frac{d^k \widehat{f}_a(\omega)}{d\omega^k} \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |(x \ln a)^k f(x)| dx.$$

**Démonstration :** En utilisant le changement de variable  $t = x \ln a$  et la proposition 4.2.9, on obtient la preuve de la proposition 4.4.9.

**Proposition 4.4.10** Soit  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  et

$$\mathcal{F}_a \{f * g(x); \omega\} = \mathcal{F}_a \{f(x); \omega\} \mathcal{F}_a \{g(x); \omega\}.$$

**Démonstration :** En utilisant le changement de variable  $t = x \ln a$  et la proposition 4.2.10, on obtient la preuve de la proposition 4.4.10.

**Théorème 4.4.2** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $(\mathbb{C})$ , et  $A, \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions dérivables et vérifient  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \pm\infty$ . Si  $f \circ A^{-1} \in L^1(\mathbb{R})$  or  $(fA' \in L^1(\mathbb{R}))$ , alors on a

$$F_{A,\phi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} A'(x) e^{-iA(x)\phi(\omega)} f(x) dx.$$

Si  $F_{A,\phi} \circ \phi^{-1} \in L^1(\mathbb{R})$  or  $(F_{A,\phi}\phi' \in L^1(\mathbb{R}))$ , alors, la fonction originale  $f$  est donnée par la formule suivante

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(\omega) e^{iA(x)\phi(\omega)} F_{A,\phi}(\omega) d\omega.$$

**Démonstration :** Soit  $f \circ A^{-1} \in L^1(\mathbb{R})$  or  $fA' \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors, on a

$$F_{A,\phi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} A'(x) e^{-iA(x)\phi(\omega)} f(x) dx.$$

Posons  $t = A(x)$ , donc

$$\begin{aligned} F_{A,\phi}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\phi(\omega)} f(A^{-1}(t)) dt \\ &= \mathcal{F} \{f(A^{-1}(t)); \phi(\omega)\}. \end{aligned}$$

Si on pose  $y = \phi(\omega)$ , on obtient

$$F_{A,\phi}(\phi^{-1}(y)) = \mathcal{F} \{f(A^{-1}(t)); y\}.$$

Comme  $F_{A,\phi} \circ \phi^{-1} \in L^1(\mathbb{R})$  or  $(F_{A,\phi}\phi' \in L^1(\mathbb{R}))$ , en appliquant le théorème d'inversion de Fourier au point  $y$ , on trouve

$$f(A^{-1}(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ity} F_{A,\phi}(\phi^{-1}(y)) dy,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iA(x)y} F_{A,\phi}(\phi^{-1}(y)) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(\omega) e^{iA(x)\phi(\omega)} F_{A,\phi}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Dans le théorème 4.2.2, si on prend  $\phi(\omega) = \omega$ , alors on obtient le corollaire suivant

**Corollaire 4.4.1** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $(\mathbb{C})$ , et  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable et vérifie  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) = \pm\infty$ . Si  $f \circ A^{-1} \in L^1(\mathbb{R})$  or  $(fA' \in L^1(\mathbb{R}))$ , alors on a

$$F_A(\omega) = \int_{\mathbb{R}} A'(x) e^{-iA(x)\omega} f(x) dx,$$

Si  $F_A \in L^1(\mathbb{R})$ , alors la fonction originale  $f$  est donnée par la formule suivante

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iA(x)\omega} F_A(\omega) d\omega.$$

**Remarque 4.4.1** La transformation donnée dans le Théorème 4.4.2, généralise plusieurs transformations, (voir [2]), et pour voir aussi des applications de la transformée donnée dans le corollaire 4.4.1 aux équations différentielles fractionnaires aux dérivées partielles (voir [2]).

## 4.5 Transformation de Laplace

**Définition 4.5.1** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) une fonction dans  $L^1_{loc}([0, +\infty[)$ . Si l'intégrale

$$\mathcal{L}\{f(x); p\} = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \quad (4.2)$$

existe, alors la fonction  $\mathcal{L}\{f(x); p\}$  (où  $F(p)$ ) de la variable complexe  $p$  s'appelle transformée de Laplace de  $f$ .

### Remarque 4.5.1

i) Si l'intégrale (4.2) converge pour tout  $p$  tel que  $\text{Re}(p) = \sigma_0$ , alors elle converge pour tout  $p$  tel que  $\text{Re}(p) \geq \sigma_0$ .

ii) Si l'intégrale (4.2) diverge pour tout  $p$  tel que  $\operatorname{Re}(p) = \sigma_0$ , alors elle diverge pour tout  $p$  tel que  $\operatorname{Re}(p) < \sigma_0$ .

**Définition 4.5.2** Soit  $f \in L_{loc}^1([0, +\infty[)$ . Le nombre

$$\sigma_0 = \inf \{ \sigma \in \mathbb{R} : f(x) e^{-\sigma x} \in L_{loc}^1([0, +\infty[) \}$$

s'appelle l'abscisse de convergence absolue de la fonction  $f$ . Le demi plan de convergence

$$\{p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > \sigma_0\}$$

est le domaine de sommabilité sur lequel  $F(p)$  est définie.

**Théorème 4.5.1** (Théorème d'inversion de Laplace) Soit  $F(p) = F(\sigma + i\omega)$  une fonction holomorphe de la variable complexe  $p$  dans le demi plan  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_0\}$ . Supposons que  $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} F(p) = 0$  pour  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$  et la fonction  $\omega \in \mathbb{R} \mapsto F(\sigma + i\omega) \in L^1(\mathbb{R})$  pour tout  $\sigma > \sigma_0$ . Alors, l'original  $f$  de  $F$  est donné par la formule de Bromwich-Wagner suivante

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{+px} F(p) dp, \quad \sigma > \sigma_0.$$

## 4.6 Propriétés

**Proposition 4.6.1** (Linéarité) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux et d'ordre exponentiel à l'infini ( $i; e$ ; s'il existe des constantes  $M_1, M_2 \geq 0$ , et des nombres réels  $\sigma_0, \varsigma_0$  tels que  $|f(x)| \leq M_1 e^{\sigma_0 x}$ ,  $|g(x)| \leq M_2 e^{\varsigma_0 x}$  pour  $x \geq x_0$ ). Alors

$$\mathcal{L} \{ \alpha f(x) + \beta g(x); p \} = \alpha \mathcal{L} \{ f(x); p \} + \beta \mathcal{L} \{ g(x); p \},$$

où  $\operatorname{Re}(p) > \max \{ \sigma_0, \varsigma_0 \}$ .

**Proposition 4.6.2** (Translation) Si  $\mathcal{L} \{ f(x); p \} = F(p)$ , alors

$$\mathcal{L} \{ f(x - c); p \} = \exp(pc) F(p),$$

où  $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 4.6.3** (Modulation) Si  $\mathcal{L} \{ f(x); p \} = F(p)$ , alors

$$\mathcal{L} \{ \exp(-\alpha x) f(x); p \} = F(p + \alpha),$$

où  $\alpha$  un nombre complexe tel que  $\operatorname{Re}(p + \alpha) > \sigma_0$ .

**Proposition 4.6.4** (Changement d'échelle) Si  $\mathcal{L}\{f(x); p\} = F(p)$ , alors

$$\mathcal{L}\{f(cx); p\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right),$$

où,  $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$  et  $c > 0$ .

**Proposition 4.6.5** (Conjugué) Si  $\mathcal{L}\{f(x); p\} = F(p)$ , alors

$$\mathcal{L}\{\overline{f}(x); p\} = \overline{F}(\overline{p}),$$

où,  $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$ .

**Proposition 4.6.6** Si  $F(p)$  est la transformée de Laplace d'une fonction  $f$ , alors  $F(p)$  est une fonction holomorphe sur le demi plan

$$\{p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > \sigma_0\},$$

et on a,

$$F^{(k)}(p) = (-1)^k \mathcal{L}\{x^k f(x); p\}.$$

**Proposition 4.6.7** Soit  $f$  une fonction localement sommable. Supposons que pour  $x > 0$ ,  $f(x)$  est continue,  $f', \dots, f^{(k-1)}$  existent et sont continues par morceaux et s'il existe une constante  $M > 0$ ,  $\sigma_0$  tel que  $|f(x)| \leq Me^{\sigma_0 x}$ , pour tout  $x \geq x_0$ , alors

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(x); p\} =$$

$$p^k F(p) - p^{k-1} f(0^+) - p^{k-2} f'(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+),$$

où,  $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$ .

**Proposition 4.6.8** Si  $\mathcal{L}\{f(x); p\} = F(p)$  et  $\mathcal{L}\{g(x); p\} = G(p)$ , alors

$$\mathcal{L}\{f * g(x); p\} = F(p) G(p),$$

où,  $\operatorname{Re}(p) > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$ .

**Proposition 4.6.9** Si  $\mathcal{L}\{f(x); p\} = F(p)$ , alors

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt; p\right\} = \frac{F(p)}{p},$$

où,  $\operatorname{Re}(p) > \max\{0, \sigma_0\}$ .

**Proposition 4.6.10** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux et d'ordre exponentiel à l'infini (i.e.  $|f(x)| \leq M_1 e^{\sigma_0 x}$  pour  $M_1 \geq 0$ ,  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ , et  $x \geq x_0$ ). Si  $\mathcal{L}\{f(x); p\} = F(p)$ , alors, pour tout  $p$  tel que  $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$ , on a

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

## 4.7 Résultats Principaux

**Définition 4.7.1** [20] Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) une fonction intégrable. La transformée de Laplace généralisée est définie par la formule suivante

$$\mathcal{L}_a\{f(x); p\} = \int_0^{+\infty} a^{-px} f(x) dx, \text{ où } a \in ]1, \infty[$$

pourvu que cette intégrale existe.

**Remarque 4.7.1** Soit  $f$  une fonction continue et d'ordre exponentiel ( $|f(x)| \leq M \exp(\sigma_0 x)$  pour  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$ , et  $x \geq x_0$ ), la transformée de Laplace généralisée est bien définie sur le demi plan  $\{p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > \frac{\sigma_0}{\ln a}\}$

**Theorem 4.7.1** [20] Soit  $F_a(p) = F_a(\sigma + i\omega)$  une fonction holomorphe de la variable complexe  $p$  dans le demi plan  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \frac{\sigma_0}{\ln a}\}$ . Supposons que  $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} F_a(p) = 0$  pour  $\operatorname{Re} p > \frac{\sigma_0}{\ln a}$  et pour tout  $\sigma > \frac{\sigma_0}{\ln a}$  la fonction  $\omega \in \mathbb{R} \mapsto F_a(\sigma + i\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors, l'original  $f$  de  $F_a$  est donnée par la formule suivante

$$f(x) = \frac{\ln a}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} a^{+px} F_a(p) dp.$$

**Démonstration** Soit  $\operatorname{Re}(p) > \frac{\sigma_0}{\ln a}$ , donc

$$\begin{aligned} |F_a(p)| &\leq \int_0^{+\infty} |a^{-px} f(x)| dx \\ &= \int_0^{+\infty} |e^{-\sigma x \ln a} f(x)| dx < +\infty, \end{aligned}$$

où,  $|f(x)| \leq M \exp(\sigma_0 x)$  avec  $\sigma_0$  est une constante,  $M > 0$  et pour tout  $x \geq x_0$ ). Ainsi

$$\begin{aligned} F_a(p) &= \int_0^{+\infty} a^{-px} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-px \ln a} f(x) dx. \end{aligned}$$

Posons  $t = x \ln a$  et  $g(t) = \frac{1}{\ln a} f\left(\frac{t}{\ln a}\right)$ , on trouve

$$F_a(p) = G(p),$$

où  $G(p)$  est la transformée de Laplac de  $g$ . On voit que la fonction  $G(p)$  satisfait les conditions du théorème 4.5.1, donc l'original  $g(x)$  est donnée par

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{+pt} G(p) dp.$$

Ce qui donne

$$f(x) = \frac{\ln a}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} a^{+px} F_a(p) dp.$$

## 4.8 D'autres Résultats

**Proposition 4.8.1** (Linéarité) *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux et d'ordre exponentiel à l'infini telles que  $|f(x)| \leq M_1 e^{\sigma_0 x}$ ,  $|g(x)| \leq M_2 e^{\varsigma_0 x}$  avec  $M_1, M_2 \geq 0$ ,  $\sigma_0, \varsigma_0 \in \mathbb{R}$ , pour  $x \geq x_0$ . Alors*

$$\mathcal{L}_a \{ \alpha f(x) + \beta g(x); p \} = \alpha \mathcal{L}_a \{ f(x); p \} + \beta \mathcal{L}_a \{ g(x); p \},$$

où  $\operatorname{Re}(p) > \frac{1}{\ln a} \max \{ \sigma_0, \varsigma_0 \}$ .

**Démonstration :** Grâce à la linéarité de l'intégrale, on déduit la linéarité de la transformation  $\mathcal{L}_a$ .

**Proposition 4.8.2** (Translation) *Si  $\mathcal{L}_a \{ f(x); p \} = F_a(p)$ , alors*

$$\mathcal{L}_a \{ f(x - c); p \} = a^{(pc)} F_a(p),$$

où  $\operatorname{Re}(p) > \frac{\sigma_0}{\ln a}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 4.8.3** (Modulation) *Si  $\mathcal{L}_a \{ f(x); p \} = F_a(p)$ , alors*

$$\mathcal{L}_a \{ a^{-\alpha x} f(x); p \} = F_a(p + \alpha),$$

où,  $\alpha$  un nombre complexe tel que  $\operatorname{Re}(p + \alpha) > \frac{\sigma_0}{\ln a}$ .

**Proposition 4.8.4** (Changement d'échelle) Si  $\mathcal{L}_a \{f(x); p\} = F_a(p)$ , alors

$$\mathcal{L}_a \{f(cx); p\} = \frac{1}{c} F_a\left(\frac{p}{c}\right),$$

où,  $\operatorname{Re}(p) > \frac{\sigma_0}{\ln a}$  et  $c > 0$ .

Une autre proposition est la suivante :

**Proposition 4.8.5** (Conjugué complexe) Si  $\mathcal{L}_a \{f(x); p\} = F_a(p)$ , alors

$$\mathcal{L}_a \{\overline{f}(x); p\} = \overline{F_a(\overline{p})},$$

où,  $\operatorname{Re}(p) > \frac{\sigma_0}{\ln a}$ .

**Démonstration :** Evidente.

On a aussi

**Proposition 4.8.6** Soit  $F_a(p)$  la transformée de Laplace généralisée de  $f$ . Alors  $F_a$  est une fonction holomorphe sur le demi plan

$$\left\{ p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > \frac{\sigma_0}{\ln a} \right\},$$

et

$$F_a^{(k)}(p) = (-1)^k \mathcal{L}_a \{x^k f(x); p\}.$$

**Démonstration :** En utilisant le changement de variable  $t = x \ln a$  et la proposition 4.6.6, on obtient la preuve de la proposition 4.8.6.

**Proposition 4.8.7** Soit  $f$  une fonction localement sommable. Supposons que pour  $x > 0$ ,

$f(x)$  est continue et  $f', \dots, f^{(k-1)}$  existent et sont continues par morceaux et s'il existe une constante  $M > 0$ ,  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $|f(x)| \leq M e^{\sigma_0 x}$ , pour  $x \geq x_0$ , alors

$$\mathcal{L}_a [f^{(k)}(x)](p) =$$

$$(p \ln a)^k F_a(p) - (p \ln a)^{k-1} f(0^+) - (p \ln a)^{k-2} f'(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+),$$

où  $\operatorname{Re}(p) > \frac{\sigma_0}{\ln a}$ .

**Proposition 4.8.8** Si  $\mathcal{L}_a \{f(x); p\} = F_a(p)$  et  $\mathcal{L}_a \{g(x); p\} = G_a(p)$ , alors

$$\mathcal{L}_a \{f * g(x); p\} = F_a(p) G_a(p),$$

où  $\operatorname{Re}(p) > \frac{1}{\ln a} \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$ .

**Démonstration :** En utilisant le changement de variable  $t = x \ln a$  et la proposition 4.6.8, on obtient la proposition 4.8.8.

**Proposition 4.8.9** Si  $\mathcal{L}_a\{f(x); p\} = F_a(p)$ , alors

$$\mathcal{L}_a\left\{\int_0^x f(t) dt; p\right\} = \frac{F_a(p)}{p \ln a},$$

où,  $\operatorname{Re}(p) > \frac{1}{\ln a} \max\{0, \sigma_0\}$ .

**Démonstration :** De la proposition 4.8.8, on déduit la proposition 4.8.9.

**Proposition 4.8.10** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux et d'ordre exponentiel à l'infini (i.e.  $|f(x)| \leq M_1 e^{\sigma_0 x}$  avec  $M_1 \geq 0, \sigma_0 \in \mathbb{R}$  et pour  $x \geq x_0$ ). Si  $\mathcal{L}_a\{f(x); p\} = F_a(p)$ , alors, pour  $\operatorname{Re}(p) > \frac{\sigma_0}{\ln a}$ , on a

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} F_a(p) = 0.$$

**Démonstration :** En utilisant le changement de variable  $t = x \ln a$  et la proposition 4.6.10, on obtient la proposition 4.8.10.

**Remarque 4.4.2** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  (or  $\mathbb{C}$ ) une fonction continue et d'ordre exponentiel à l'infini. Alors  $\mathcal{L}_a$  et  $\mathcal{F}_a$  sont reliés par la formule suivante

$$\mathcal{L}_a\{f(x); \sigma + i\omega\} = \mathcal{F}_a\{a^{-\sigma x} f(x); \omega\}.$$

**Exemple 4.8.1 :**

Soit  $f(x) = \exp(\alpha x)$ , où  $\alpha$  est un nombre réel positif, donc on a

$$F_a(p) = \frac{1}{p \ln a - \alpha},$$

$F_a(p)$  existe dans le demi plan  $D_1 = \{p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > \frac{\alpha}{\ln a}\}$ .

Pour  $a = e$ , donc on trouve

$$F(p) = \frac{1}{p - \alpha},$$

ainsi  $F(p)$  existe et il est défini sur le demi plan  $D_2 = \{p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > \alpha\}$ . On peut voir que

$$D_2 \subseteq D_1, \text{ pour } a \geq e,$$

et

$$D_1 \subseteq D_2, \text{ pour } a \leq e.$$

**Remarque** Il est clair que l'ensemble des fonctions transformables au sens de Laplace est beaucoup plus large que l'ensemble des fonctions transformables au sens de Fourier, et d'après l'exemple 4.8.1 au dessus, on peut élarger où contracter le domaine sur lequel la transformée de Laplace généralisée existe et bien définie en changeant la constante  $a$ .

## 4.9 Applications aux EDFs

Dans ce paragraphe, on donne des applications de la transformée de Laplace aux équations (système) différentielles fractionnaires, pour plus de détails, ( voir [24] ).

**Définition 4.9.1** On définit les fonctions de Mittag-Leffler et Mittag-Leffler généralisée respectivement pour tout  $\alpha, \beta > 0$  et  $z \in \mathbb{C}$  par

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

et

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}.$$

**Lemme 4.9.1** [24] Soit une fonction  $f \in C_\mu$  ( $\mu \geq -1$ ) tel que  $|f(x)| \leq M \exp(\sigma x)$  où  $M \geq 0$  et  $\sigma \in \mathbb{R}$ . La transformée de Laplace de l'opérateur intégrale au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  est donnée par la formule suivante

$$\mathcal{L}\{J_0^\alpha f(x), p\} = \frac{F(p)}{p^\alpha},$$

où  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x), p\}$ .

**Lemme 4.9.2** [24] Soit une fonction  $f \in C_\mu^m$  ( $\mu \geq -1$ ),  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $|f(x)| \leq M \exp(\sigma x)$  où  $M \geq 0$  et  $\sigma \in \mathbb{R}$ . La transformée de Laplace de l'opérateur de la dérivation au sens de Caputo d'ordre  $\alpha > 0$  ( $m - 1 < \alpha \leq m$ ) est donnée par la formule suivante

$$\mathcal{L}\{D_0^\alpha f(x), p\} = \frac{p^m F(p) - p^{m-1} f(0) - p^{m-2} f'(0) \dots - f^{(m-1)}(0)}{p^{m-\alpha}},$$

où  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x), p\}$ .

### 4.9.1 Applications Numériques

#### Exemple 4.9.1 [24]

On considère l'équation de Begley-Torvik suivante

$$D^2y(x) + D^{\frac{3}{2}}y(x) + y(x) = 1 + x,$$

avec les conditions :

$$y(0) = y'(0) = 1.$$

La solution est donnée par la formule suivante

$$y(x) = 1 + x.$$

#### Exemple 4.9.2

On considère l'équation différentielle fractionnaire linéaire non-homogène suivante

$$y^{(m)}(x) + D^{m-\delta}y(x) + y(x) = P_{m-1}(x), \quad \delta \in [0, 1[$$

avec les conditions :

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(m-2)}(0) = 1,$$

et  $P_{m-1}(x)$  est un polynôme de degré  $m - 1$  tel que

$$P_{m-1}(x) := 1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1}.$$

Cette équation est convertie à l'équation suivante

$$\begin{aligned} & p^m F(p) - p^{m-1}y(0) - p^{m-2}y'(0) + \dots + py^{(m-2)}(0) + y^{(m-1)}(0) \\ & + \frac{p^m F(p) - p^{m-1}y(0) - p^{m-2}y'(0) + \dots + py^{(m-2)}(0) + y^{(m-1)}(0)}{p^\delta} + F(p) \\ & = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^{m-1}} + \frac{1}{p^m}. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions initiales, on trouve

$$p^m F(p) - P_{m-1}(p) + \frac{p^2 F(p) - P_{m-1}(p)}{p^\delta} + F(p) = \frac{1}{p} P_{m-1}\left(\frac{1}{p}\right).$$

Donc,

$$F(p) (p^m + p^{m-\delta} + 1) = \frac{1}{p} P_{m-1}\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p^\delta} P_{m-1}(p) + P_{m-1}(p).$$

D'où

$$F(p) = \frac{1}{p} P_{m-1}\left(\frac{1}{p}\right).$$

On sait que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} P_{m-1}\left(\frac{1}{p}\right), x \right\} = P_{m-1}(x).$$

Finalement, la solution exacte est donnée par la formule

$$y(x) = 1 + x + \dots + x^{m-1}.$$

**Remarque 4.9.1** Dans l'exemple 4.9.2, si  $m = 2$  et  $\delta = \frac{1}{2}$ , on obtient l'équation de Beglay-Torvik.

**Exemple 4.9.3** [24]

On considère l'équation différentielle fractionnaire linéaire non-homogène suivante

$$D^\alpha y(x) + y(x) = \frac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + x^2 - x,$$

avec

$$y(0) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Donc,

$$y(x) = x^2 - x$$

est la solution exacte.

**Exemple 4.9.4** [24]

On considère l'équation différentielle fractionnaire linéaire homogène suivante

$$D^\alpha y(x) + y(x) = 0,$$

avec

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad \alpha < 2.$$

Donc la solution exacte est donnée par

$$y(x) = E_\alpha(-x^\alpha).$$

**Exemple 4.9.5** [24]

On considère l'équation différentielle fractionnaire d'oscillation suivante

$$y''(x) - a^C D^\alpha y(x) - by(x) = 8,$$

avec

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2.$$

Donc, la solution exacte est donnée par la formule suivante

$$y(x) = 8x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^n a^k x^{(2-\alpha)k+2n}}{\Gamma((2-\alpha)k+2(n+1)+1)} \binom{n+k}{k}.$$

**Exemple 4.9.6** [24]

On considère le système :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) - ty'(t) + x(t) - (1+t)y(t) = 0, \\ y(t) - \sin t = 0 \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \alpha \leq 1.$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

si  $\alpha = 1$ , alors  $x(t) = t \sin t + e^{-t}$ .

Si  $0 < \alpha < 1$ , la solution exacte est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} (k+1) t^{2k} \\ &\quad \left( \frac{t^{n\alpha+1}}{\Gamma((n+1)\alpha + 2k + 3)} + \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha + 2k + 2)} \right) + E_\alpha(-t^\alpha) \\ &= 2t^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 \right) t^k E_{\alpha, \alpha+k+2}(-t^\alpha) + E_\alpha(-t^\alpha) \end{aligned}$$

et

$$y(t) = \sin t,$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  est la partie entière d'un nombre réel.

---

## CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse de Doctorat, nous avons fait une extension sur les espaces métriques en présentant des nouvelles structures de type  $S^*$ . Puis, nous avons donné quelques nouvelles propriétés ainsi que certains résultats originaux liés à ces structures. Nous nous sommes aussi intéressés au calcul fractionnaire en présentant une étude analytique puis nous avons présenté une étude numérique. Nous avons commencé par étudier certains problèmes aux limites d'ordre arbitraire. En particulier, nous avons démontré des résultats sur l'existence et l'unicité, (ou uniquement l'existence) des solutions de ces problèmes fractionnaires au sens de Caputo avec des conditions intégrales de type Riemann-Liouville. Dans cette partie, nous avons, en premier lieu, proposé une autre équivalence intégrale pour les problèmes posés, puis nous avons établi des conditions assurant l'existence et l'unicité de solutions pour les problèmes considérés. Puis, dans une autre partie essentielle, nous avons développé d'autres conditions pour assurer l'existence d'une solution au moins. Les résultats trouvés sont basés sur les estimations intégrales d'ordre fractionnaires, la théorie des points fixes, la théorie des opérateurs ainsi et d'autres lemmes techniques due à Kilbas, Srivastava, etc... A la fin de ce projet, nous nous sommes intéressés à l'étude théorique de quelques transformations intégrales, puis nous avons présenté quelques résultats numériques sur les EDFs.

# Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J. J. Trujillo ; *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [2] A. Aghili and A. Ansari ; *Solving partial fractional differential equations using the  $\mathcal{F}_A$ -transform*, Arab Jou Math Sci 19(1) (2013), 61–71.
- [3] A. Lesfari ; *Distributions, analyse de Fourier et Transformation de Laplace*. Ellipses Edition Marketing S. A, 2012.
- [4] A. Oustaloup ; *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire, théorie et pratique*. Editions Masson, Paris, 1983.
- [5] B. C. Dhage ; *Generalized metric spaces mappings with fixed point*. Bull Calcutta Math, Soc. 84 (1992), 329–336.
- [6] G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev ; *Fractional Integral and Derivative, Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
- [7] I. Podlubny ; “*Fractional-order Systems and fractional-Order Controllers*,” UEF-03-94 Slovak Academy of Science, Kosice, 1994.
- [8] I. Podlubny ; “*Fractional Order Systems and  $PI^\lambda D^\mu$  Controllers*,” IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, N°1, 1999.
- [9] I. Podlubny ; *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [10] J. Kumar ; *Common Fixed Point Theorems of weakly compatible maps satisfying, (E.A) and (CLR) property*. Inter Jou Pure App Math. Volume 88 No. 3 2013, 363-376.
- [11] J. L, Schiff ; *The Laplace Transform Theory and Applications*, Mathematics Subject Classification (1991) : 44A10.

- 
- [12] J. M. Morel, Cachan, F. Takens, Groningen and B. Teissier, Paris; *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- [13] K. B. Oldham and J. Spanier; *The Fractional Calculus : Integrations and Differentiations of Arbitrary Order*. New York : Academic Press, 1974.
- [14] K. B. Oldham and J. Spanier; *Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [15] K. S. Miller and B. Ross; *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York : Wiley, 1993.
- [16] M. A. Abdellaoui and Z. Dahmani; *New Results on Generalized Metric Spaces*, Mal Jou Math Scie, 2016.
- [17] M. A. Abdellaoui and Z. Dahmani; *New existence results for a coupled system of nonlinear differential equations of arbitrary order*, Inter Jou Nonlinear Anal. Appl. 6 (2015) No. 2, 65-75.
- [18] M. A. Abdellaoui and Z. Dahmani; *Solvability for a coupled system of nonlinear fractional integro-differential equations*, Note Mat. 35 (2015) no. 1, 95-107.
- [19] M. A. Abdellaoui, Z. Dahmani and N. Bedjaoui; *Applications of Fixed Point Theorems for Coupled Systems of Fractional Integro-Differential Equations Involving Convergent Series*, Inter Jou Appl Math. 2015.
- [20] M. A. Abdellaoui, Z. Dahmani and M. Z. Sarikaya; *New generalized Fourier and Laplace Transforms*.
- [21] R. Chugh, T. Kadian, A. Rani and B. E. Rhoades; *Property P in G-metric spaces, Fixed Point Theory Appl*, Vol. 2010, Article ID 401684.
- [22] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg and E. M. van de Vrie; *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press 2003.
- [23] S. Gähler;  *$G^*$ -metrische Räume und ihrer topoloische Struktur*, Math. Nachr. 26 (1963), 115-148.
- [24] S. Kezem; *Exact solution of some linear fractional differential equations by Laplace transform*, Inter Jou No Sci, vol 16, 2013, pp 3-11.

- 
- [25] S. Sedghi, K. P. R. Rao and N. Shobe; *Common fixed point theorems for six weakly compatible mappings in  $D^*$ -metric spaces*, Inter Jou Math Math. Sci. 6 (2007), 225–237.
- [26] S. Zhang; *Positive Solutions for Boundary-Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations*, Electr Jou Diff Equat, 2006, No. 36, 12 pp.
- [27] S. V. R. Naidu, K. P. R. Rao and N. Srinivasa Rao; *On the topology of  $D$ -metric spaces and the generation of  $D$ -metric spaces from metric spaces*, Internat. J. Math. Math. Sci. 2004 (2004), No. 51, 2719–2740.
- [28] S. V. R. Naidu, K. P. R. Rao and N. Srinivasa Rao; *On the concepts of balls in a  $D$ -metric space*, Inter Jou Math Math Sci. 2005 (2005), 133–141.
- [29] S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche; *A generalization of fixed point theorem in  $S$ -metric spaces*, 64, 3 (2012), 258–266.
- [30] S. Sedghi, N. Shobe and H. Zhou; *A common fixed point theorem in  $D$  currency -metric spaces*, *Fixed Point Theory Appl*, Vol. 2007, Article ID 27906, 13 pages.
- [31] W. Shatanawi; *Coupled fixed point theorems in generalized metric spaces*, Hacettepe Jou Math Stat. 40 (3) (2011), 441–447.
- [32] W. Shatanawi; *Common fixed point result for two self-maps in  $G$  metric spaces*, 65, 2 (2013), 143–150 June 2013.
- [33] Z. Mustafa and B. Sims; *A new approach to generalized metric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 7 (2006), 289–297.