UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD

Option : **Modélisation Contrôle et Optimisation**

Thème :

Stabilité des systèmes linéaire de Lyapunov à temps continu

Etudiante :

‹‹ M^{elle} **DJAIT HANANE** ››

Soutenu le 15-06-2018 .

Devant les membres du jury

Président	‹‹ **M^{er}Bouagada Djilali** ››	**U.de Mostaganem**
Examinateur	‹‹ **M^{er} Fettouch Houari** ››	**U.de Mostaganem**
Encadreur	‹‹ **M^{eme} Bachaoui Khadidja** ››	**U.de Mostaganem**

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'étude a toute ma famille, notamment les parents qui m'ont toujours conseilles et pensé a moi, et qui m'ante fait au bonne éducation.

Je dédie ce travail celle qui ma soutenu avec toute sa tendresse et son affection pour ma mère

je dédié aussi à tout mes amis ainsi que la le chef de département mathématiques

Et toute la famille de département de mathématiques et ma promotion 2015 et 2016.

Remerciements

Tout d'abord, Louange A Allah, le Tout Puissant de m'avoir donné le courage et la volonté d'avoir réaliser ce travail

Je tiens à remercier mes parents qui ont toujours prié pour me voir réussir. Et à leurs conseils judicieux durant cette année.

Je tiens à remercier **M**^{me} **BECHAOUI KHADIDJA,** mon encadrante pour son aide précieuse, et ces critiques constructives.
Ainsi, je remercie du fond du coeur le président **M**^{r} **Bouagada Djilali**, et le membre du jury **M**^{r} **Fettouch Houari** d'avoir accepté de porter un jugement sur mon travail et de faire partie du jury de soutenance de ce mémoire.

J'adresse également remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien

Mes remerciements sont adressés également à tous les enseignants de département de mathématiques

En fin, je remercie tous ceux et celles qui m'ont aidé de loin ou de prés pour l'élaboration de ce travail et tout la famille de département de mathématiques. et promotion 2015 et 2016.

Table des matières

INTRODUCTION

L'analyse de la stabilité est une étape nécessaire pour l'étude de fonctionnement de plusieurs systèmes (physique, mécanique, élècotronique, ... etc), qui a fait l'objet de nombreuses recherches mathématiques, pour cette raison le dévloppement des méthodes mathématiques reste toujours nécessaire pour la résolution des problèmes complexes posés par les différents domaines de la science.

Pour étudier la stabilité d'un système on se réfère aux résultats de Lyaponuv introduits par Alexander Mikhaïlovitch Lyapunov[1857-1918] qui permettent de caractériser complètement la stabilité asymptotique pour les points d'équilibres.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la stabilité des systèmes linéaires de Lyaponuv à temps continu.

Pour ce faire, on se base sur la stabilité des systèmes linèaires standards, des conditions nécessaires et suffisantes de la stabilitè seront donc etabilies .

Le mémoire que nous présentons est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des préliminaires et notions de bases quand aurra besoin dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les systèmes linéaires à temps invariant standards dans le cas continu.

Le troisème chapitre porte sur le problème de la stabilité des systèmes linéaires standards à temps continu en utilisant les tests de Lyapunov.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des systèmes linéaires de Lyapunov dans le cas continu en basant sur les résultats donnés dans le chapitre précédent.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion qui couvre tous les élèments de ce mémoire.

.

Listes des Notations et Abréviations :

Notations :

Danc cette section ,nous définissons les notations principale utilisées dans ce mémoire :

$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	Espace des vecteurs à n entiers réels.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	L'espace des matrices carrées de dimension n à entrées dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$.
A^T	Transposée de la matrice A.
A^*	L'adjoint de la matrice A.
A^{-1}	Matrice inverse de A.
$\sigma(A)$	Ensemble des valeurs propres de la matrice A.
$\det(A)$	Déterminant de A.
$tr(A)$	Trace de la matrice carrée A.
$[a_{ij}]$	Matrice dont le coeffcient de la i-éme ligne et la j-éme colonne est a_{ij}.
I_n	Matrice identité d'ordre n.
$P > 0$	Matrice définie positive.
$P < 0$	Matrice définie négative.
$\|x\|$	Norme euclidienne.
$\otimes$	Produit de Kronecker.

Abréviations :

LTI	Linéaire invariant dans le temps.
TL	Transformation de Laplace.
TL^{-1}	Transformation de Laplace inverse.

Chapitre 1

Préliminaires et notions de bases :

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notions et résultats utilisés dans notre travail, nous basons sur le référence suivantes [3],

1.0.1 Transformation de Laplace :

La transformation de laplace est un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires en temps continu.
Nous proposerons dans ce chapitre une brève étude sur la transformée de Laplace tout en s'intéressant aux principales propriétès.

Definition 1 *Soit f une fontion réelle définie* $\forall t \geq 0$*. La transformée de Laplace de* f*, notée* $\mathcal{L}(f(t))$ *est définie :*

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t) \exp(-st) dt, \ s \in \mathbb{C}. \tag{1.0.1}$$

cette intégrale n'existe que si :

$$\exists\ k > 0, \text{ tel que } |f(x)| \leq k e^{-at}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Example 1 *Soit* f *la fonction Echlon unité :*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \ \ t \geq 0 \\ 0 & si \ t < 0 \end{cases}$$

Sa transformée de Laplace est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= F(s) = \int_{0}^{\infty} \exp(-st) f(t) dt \\ &= \int_{0}^{\infty} \exp(-st) = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Propriètés

1- Linéarité :

La transformée de Laplace est linéaire c-à-d :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\alpha\ f(t) + \beta\ g(t)\ ] &= \alpha\ \mathcal{L}[f(t)] + \beta\mathcal{L}[g(t)] \\ &= \alpha\ F(s)\ +\ \beta\ G(s).\end{aligned}$$

2- Dérivation :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \alpha F(s) + \beta F(0).$$

3- Intégration :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{+\infty} f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}.$$

1.0.2 Transformation de Laplace inverse :

Definition 2 *la Transformation de Laplace étant un opérateur bijective, sa bijection inverse existe. Elle est unique et on l'appelle originale de F, et elle est défnie par :*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(s).$$

Si $\mathcal{L}^{-1}$ désigne la transformation de Laplace invesre, on a $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$.

Propriètés :

1. **Linéarité :** La transformée de Laplace inverse est linéaire c-à-d :

$$\mathcal{L}^{-1}(C_1F(s) + C_2G(s)) = C_1f(t) + C_2g(t),$$

Où C_1 et C_2 sont des constantes et $F(s), G(s)$ les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$.

1.0.3 Tableau résumé de la transformation de Laplace de quelques fonctions :

Les fonctions	Les transformés de Laplace
a	$\frac{a}{s}$, $a \in \mathbb{R}$
at	$\frac{a}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\omega \in \mathbb{R}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

1.1 Outils d'algèbre linéaire :

1.1.1 Le polynôme caractéristique :

Definition 3 *Pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on appelle* ***polynôme caractéristique*** *de la matrice A le polynôme $P_A(\lambda)$ d'ordre n défni par :*

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Ce polynôme admet donc p racines λ_1,λ_2,. . . . . . ,λ_p qui peuvent être simples ou multiples. Ces racines sont appelées valeurs propres de A. On peut alors écrire :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p},$$

avec m_i la multiplicité (algébrique) de la valeur propre λ_i et $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$.

Example 2 *Soit la matrice A suivant :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de la matrice A sont : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = -3$.

1.1.2 Mineur principal d'une matrice carrée :

Definition 4 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice. Les mineurs principaux d'ordre k de cette matrice sont les déterminants des matrices tronquées $(a_{ij})_{1,i,j,k}$ pour k allant de 1 à n .*

Example 3 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Les mineurs principaux de la matrice A sont Δ_i, $i = 1, 2, 3$, tels que :

$$\begin{array}{lrcl}
1) & \Delta_1 & = & 2. \\
2) & \Delta_2 & = & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2. \\
3) & \Delta_3 & = & \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
 & & = & 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 & & = & 4 + 1 = 5.
\end{array}$$

1.1.3 Exponentielle d'une matrice :

Definition 5 *L'exponentielle d'une matrice carrée M de dimension n se définit par son dévloppement en série entière :*

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} M^i$$

Propriétés :
Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. Si $AB = BA$.
2. $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, e^A$ est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
3. $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.
4. $\frac{d}{dt} e^{Mt} = M e^{Mt}$.

1.1.4 Quelque méthodes de calcul de l'exponentielle d'une matrice :

Plusieurs techniques existent pour calculer e^M, parmis elles, citons les méthodes suivantes :

1) Théorème de Cayley-Hamilton :

Théorème 1.1.1 *Toute matrice carrée A satisfait son équation caractéristique :*

$$P_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots\cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0, \tag{1.1.1}$$

avec les $\alpha_i, i = 1...n$ constantes réelles.
On déduit du théorème la relation suivante :

$$\begin{aligned}
A_n &= -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \alpha_{n-2}A^{n-2} - \cdots\cdots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n \\
&= -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A^i.
\end{aligned}$$

Où les scalaires $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1}. \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^{n-1} = e^{\lambda_n}. \end{cases}$$

avec λ_i, $i = 1, \ldots n$ les valeurs propres de A.

Example 4 *On considère :*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Alors les valeurs propres de la matrice A sont :$\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -1$. D'aprés le théorème de Cayley-Hamilton
On a :

$$e^A = \alpha_0 I_2 + \alpha_1 A$$

Calcul α_0 , α_1 :
α_0 , α_1 sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} e^{-3} = \alpha_0 + \alpha_1(-3) \\ e^{-1} = \alpha_0 + \alpha_1(-1) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{2}e^{-3} + \frac{3}{2}e^{-1}. \\ \alpha_1 = \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-3}. \end{cases}$$

Donc :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 \\ e^{-t} - e^{-3} & e^{-1} \end{pmatrix}$$

2) Si A est une matrice nilpotente :

L'exponentielle d'une matrice A nilpotente se calcule directement à partir de son développement en série, puisque celui-ci ne comporte alors qu'un nombre fini de termes :

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{A^{q-1}}{(q-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{q} \frac{A^k}{k!}. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

En effet :
Si A une matrice nilpotente d'indice de nilpotence q alors $A^q = [0]$,
d'où :

$$A^m = [0], \quad \forall m \geq q. \tag{1.1.3}$$

Example 5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice A est nilpotenete d'indice de nilpotence 2, car $A^2 = [0]$.
Alors son exponentielle est :

$$\begin{aligned} e^A &= I + A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3) Si A est une matrice diagonale :

Soit A une matrice diagonale.
Si $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$, alors son exponentielle est obtenue en calculant l'exponentielle de chacun des termes de la diagonale principale :

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Example 6 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *alors* $e^A = \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^5 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$.

4) Si A est une matrice diagonalisable :

Si A une une matrice diagonalisable ($A = PDP^{-1}$, D diagonale et P inversible) alors son exponentielle est donnée par :

$$e^A = Pe^D P^{-1}. \tag{1.1.4}$$

Example 7 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

1) Pour calculer les valeurs propres de cette matrice on doit d'abord calculer son polynôme caractéristique :

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 3).$$

2) Après certains calculs (les valeurs propres et les vecteurs propres....), on obtient la matrice de passage et son inverse :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{2t} \\ e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5) Par transformation de Laplace inverse

On utilisant l'inverse de la transformation de Laplace, e^A est donnée par la formule suivante :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI_n - A)^{-1}]. \tag{1.1.5}$$

On doit suivre les étapes suivantes pour ce calcul :
1) Calcul $(sI_n - A)$.
2) Calcul $(sI_n - A)^{-1}$.
3) Calcul de la transformée de Laplace inverse de $(sI_n - A)^{-1}$.

Example 8 *Soit* $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Donc :

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= \begin{vmatrix} s+2 & 0 \\ 3 & s+1 \end{vmatrix} \\ &= (s+2)(s+1). \end{aligned}$$

On calcule l'inverse de la matrice $(sI - A)$:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} & 0 \\ \frac{3}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

Une décomposition en éléments simples nous permet d'écrire :

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} & 0 \\ -\frac{3}{(s+2)} + \frac{3}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

On appliquant TL^{-1}, on obtient :

$$e^A = \mathcal{L}^{-1}(sI - A) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -3e^{-2t} + 3e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

1.1.5 Matrices définies positives :

Definition 6 *Soit A une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A est définie positive (respectivement semi définie positive) si seulement si*

$$x^T Ax > 0 \qquad (respectivement \ \geq 0 \ ), \forall A \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Example 9 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$.
On calcul $x^T Ax$:

$$\begin{aligned} x^T Ax &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

D'où la résultat.

1.1.6 L'opérateur vec :

Definition 7 *Soit $A = [A^1, \cdots\cdots, A^p]$, une matrice $n \times p$. On définit l'opérateur* **vec** *d'empilement des colonnes par :*

$$vec(A) = \begin{bmatrix} A^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ A^p \end{bmatrix} \in \mathbb{k}^{np}.$$

Exemple 1.1.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, *alors* $vec(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Propriétés :

1. **Linéarité** : Soit A,B et C telles que $A + B$ existe, Alors :

$$vec(\alpha A + \beta B) = \alpha vec(A) + \beta vec(B).$$

2. Soit A, B et C telles que ABC existe, alors :
$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B).$$

3. **Cas particulier :**

$$vec(AB) = (I_p \otimes A)vec(B) = (B^T \otimes I_m)vec(A),$$
avec $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, et $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

1.1.7 Produit de Kronecker :

le produit de Kronecker des matrices joue un role important dans les mathématiques et dans les applications trouvées en physique théorique.

Definition 8 *Soient $A = [a_{ij}]$ une matrice $n \times m$ et $B = [b_{ij}]$ une matrice $p \times q$. Alors le produit de Kronecker de A par B est une matrice $mp \times nq$.*

$$A \otimes B = [a_{ij}B] = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & \dots & \dots & a_{1p}B \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{ij}B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & \dots & \dots & a_{np}B \end{bmatrix}.$$

Example 10 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.

Propriétés :

Les Trois premières propriétés justifient le nom de produit .

1. $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$.
2. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) = A \otimes B \otimes C$.
3. Soient A et B deux matrices du mêmes dimensions, C et D deux autres matrices de mêmes dimensions, alors :
$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D)$$
4. $I_{np} = I_n \otimes I_p = I_p \otimes I_n$.
5. $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.
6. $(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D)$.
7. Soient A,B deux matrices régulières :
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$
8. Soient A,B deux matrices carées, alors :
$$\text{trace}(A \otimes B) = \text{trace}(A)\,\text{trace}(B).$$
9. $(A \otimes B)^T = (A^T \otimes B^T)$.
10. Le produit de Kronecker n'est pas commutatif.
$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$
11. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$:
$$\det(A \otimes B) = (\det(A))^p(\det(B))^n.$$

Chapitre 2

Systèmes linéaires en temps continu :

Dans ce chapitre, nous présentons la description d'un système **LTI**.
Une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. On se place alors dans un espace d'état. Cette représentation qui peut être linéaire ou non-linéaire, nous basons pour ce faire sur les références suivantes : [1], [2].

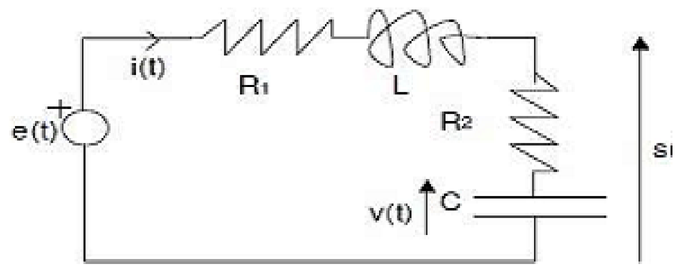
2.1 Représentation d'état d'un système :

Definition 9 *La représentation d'état d'un système LTI en temps continu est représentée par :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dx(t) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le contrôle du système appelé aussi entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système et $x(0) = x_0$.
avec :
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ sont des matrices de dimension appropriées telle que :
A : Matrice d'état.
B : Matrice de commande (d'éntrée).
C : Matrice de mesure (sortie).
D : Matrice de transfert direct.
x : vecteur d'état.
u : vecteur d'entrée.
y : vecteur de sortie.
Cette représentation d'état n'est pas unique.

Example 11 *On considère le système **RLC** présenté en figure 1 :*



L'équation physique de ce système électronique est comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = (R_1 + R_2).i_1(t) + L.\frac{di}{dt} + v(t) \\ i(t) = C.\frac{dv}{dt} \\ s(t) = R_2 i(t) + v(t) \quad . \end{cases}$$

Avec R_1, $R_2 > 0$ et L, $C > 0$.
Suit à l'application des lois physiques notamment lois de *Kirchhoff* on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -\frac{R_1+R_2}{L} x_1(t) + \frac{1}{L} x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = \frac{1}{C} x_1(t) \quad . \end{cases}$$

On pose : $x_1(t) = i(t)$ et $x_2(t) = v(t)$. Et après modélisation, il s'écrit le modèle :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_1+R_2)}{L} & \frac{1}{L} \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y(t) = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{(R_1+R_2)}{L} & \frac{1}{L} \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } D = 0.$$

2.2 Solution d'un système LTI standard en temps continu :

Plusieurs techniques sont établies pour la recherche de la solution. Parmi eux on utilisera la transformée de Laplace.
Notre système d'écrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dx(t) \end{cases}$$

telle que A, B, C, D sont des matrices constantes.
Dans un premier temps, on considére l'équation homogène correspondante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

L'application de la transformation de Laplace de cette équation donne,

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

Remarque 2.2.1 *Ici $X(s)$ représente le vecteur de $T\ L$ de x.*

On aura donc

$$(sI - A)\ X(s) = x(0)$$

Comme

$$\det(sI - A) \neq 0 \text{ pour certain } \forall s \in \mathbb{C}$$

alors

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) \tag{2.2.1}$$

Puis en appliquant la transformation de Laplace inverse sur (2.2.1)

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0)$$

Ceci implique que,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0)$$

Or

$$\exp(At) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

Qui représente la matrice de transition du système, par conséquent,

$$x(t) = \exp(At)x(0)$$

L'équation d'évolution de x sera,

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Longrightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Par la transformée inverse TL^{-1}, on trouve

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp(A(t - \tau))Bu(t)d\tau \tag{2.2.2}$$

Et la sortie sera donc,

$$y(t) = C\exp(At)x(0) + C\int_0^t \exp(A(t - \tau))Bu(t)d\tau + Du(\tau) \tag{2.2.3}$$

Chapitre 3

Stabilité des systèmes linéaires à temps continu :

3.1 Notions sur la stabilité des systèmes linéaires :

3.1.1 Concepts de stabilité :

Le but de ce chapitre est basé sur l'étude du problème de la stabilité d'un système linéaire à temps continu, des conditions nécéssaires et suffisantes de la stabilité seront donc établies. Mais tout d'abord nous citons quelques définitions de la stabilité dans le cas général, nous basons pour ce faire sur les références [4], [5].
Une notion qui est primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion du point d'équilibre. Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} . \tag{3.1.1}$$

Definition 10 *L'état x_ε est appelé état d'équilibre au point d'équilibre pour le système* (3.1.1) *si $x(t_0) = x_\varepsilon$ alors $x(t) = x_\varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$. En d'autres termes, x_ε vérife l'équation* $f(x_0) = 0$.

Definition 11 *Un système* ***stable*** *est un système pour lequel la réponse libre (*la solution générale de l'équation différentielle*) temps vers 0.*

Definition 12 *Un point d'équilibre $x(0)$ est* ***exponentiellement stable*** *s'il existe deux nombres strictement positifs α et λ tels que :*

$$\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| \exp(-\lambda t).$$

Remarque 3.1.1 *On peut toujours se ramener au cas où le point d'équilibre est l'origine* 0 *puisque si x vérifie $f(x_\varepsilon) = 0$,il suffit de considérer le changement de coordonnées $z = x - x_\varepsilon$, la dérivée de z est par :*

$$z = x = f(x) = f(z + x_\varepsilon) \overset{def}{=} g(z), \text{ et } g(0) = 0.$$

L'origine est bien un point d'équilibre du système $\dot{z} = g(z)$.

Definition 13 *Le point d'équilibre x_ε est dit **stable** si $\forall \rho > 0, \exists\, r(\rho) > 0$ tels que*

$$\text{Si} \quad \|x_0 - x_\varepsilon\| \leq r \quad alors \;\; \|x(t) - x_\varepsilon\| \leq \rho$$

si non le point d'équilibre est dit instable.

Definition 14 *L'équilibre $x_\varepsilon = 0$ du système (3.1.1) est dit **globalement attractif** si pour tout solution $x(t)$ de (3.1) on a :*

$$\lim_{t \mapsto \infty} x(t) = 0$$

Definition 15 *L'équilibre $x_\varepsilon = 0$ du système (3.1.1) est dit **exponentiellement stable** s'il existent $r > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ on ait :*

$$\|x(0)\| < r \Longrightarrow \|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Definition 16 *L'équilibre $x_\varepsilon = 0$ du système (3.1.1) est dit **globalement exponentiellement stable** s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout solution $x(t)$ de (3.1.1),*

On a

$$\|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \qquad \forall t \geq 0$$

3.2 Conditions nécessaires et suffisantes de la stabilite :

On a plusieurs tests pour étudier la stabilité des systèmes linéaires à temps continu, parmi eux on citera les suivants :

3.2.1 Test par les mineurs principaux :

Théorème 3.2.1 *Un système linéaire $\dot{X} = AX$ est **asymptotiquement stable** si et seulement si tout les mineurs principaux Δ_i, $i = 1, ..., n$ de la matrice $(-A)$ sont positifs, i.e*
Si $A = [a_{ij}]$ alors

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -a_{11} > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \det(-A) > 0 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Example 12 *On a le système :*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t). \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On va calculer les mineurs principaux de la matrice A.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -a_{11} = 2 > 0. \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0. \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 12 > 0. \end{aligned}$$

Donc le système étudié est asymptitiquement stable.

3.2.2 Test par les valeurs propres :

Théorème 3.2.2 *Soit système est* ***asymptotiquement stable*** *si et seulement si tout les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de la matrice A ont des parties réelles négatives.*

Example 13 *Le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour étudier la stabilité de ce système, on calcul les valeurs propres de la matrice A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)^2(\lambda+4). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A sont $\lambda = -2$ d'ordre de multiplicite 2 et $\lambda = -4$,d'où la stabilité du système.

3.2.3 Test de Lyapunov :

Théorème 3.2.3 *Si A satisfait $A^T P + PA = -Q$ avec $P > 0$, $(P = P^T)$, $Q > 0$ alors*

$$\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0 \text{ pour tout } \lambda_i \text{ valeur propre de } A.$$

Proof. Soit x_i vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, alors

$$\begin{aligned} -x_i^* Q x_i &= x_i^*(A^* P + PA)x_i \\ &= x_i^* P x_i(\overline{\lambda}_i + \lambda_i) \\ &= 2\operatorname{Re}(\lambda_i) x_i^* P x_i. \end{aligned}$$

Or $x_i^* Q x_i$ et $x_i^* P x_i$ sont strictement positif, donc $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. □

Théorème 3.2.4 *le système est stable s'il existe une matrice P définie positive vérifiant $P^T = P$ et qui est solution de l'éqution*

$$A^T P + PA = -Q. \tag{3.2.2}$$

Pour toute matrice Q définie positive .

Remarque 3.2.1 *Pour construire une fonction de Lyapunov pour le système $\dot{X} = AX$ il faut procéder de la manière suivant :*

1. Choisir une matrice définie positive Q (par exemple $Q = I_n$).
2. Résoudre l'équation de Lyapunov (3.2.2). Si on a choisi Q symétrique, alors P sera symétrique aussi.
3. Vérifier que P est définie positive.

Example 14 *Considérons le système suivant*

$$\dot{X} = AX$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche une matrice $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$ vérifiant $A^T P + PA = -Q$,$\forall$ Q définie postive et symétrique ?

Pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1 + p_3 & p_2 + p_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_1 + p_2 \\ p_3 & p_3 + p_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4p_1 & p_1 + 2p_2 \\ p_1 + 2p_3 & p_2 + p_3 + 2p_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par l'identification, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{c} 2p_1 = 1 \\ p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 + 2p_3 = 0 \\ p_2 + p_3 + 2p_4 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_1 = \frac{1}{2} \\ p_2 = -\frac{1}{4} \\ p_3 = -\frac{1}{4} \\ P_4 = \frac{3}{4} \end{array} \right. .$$

D'où

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

La matrice P existe, il reste à montrer qu'elle est est définie positive,
on a $p_4 > 0$, et

$$\begin{aligned} p_1 - \frac{p_2 p_3}{p_4} &= \frac{1}{2} - \frac{(-\frac{1}{4})^2}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{5}{12} > 0 \end{aligned}$$

Donc le système est stable d'après Lyapunov.

Chapitre 4

Systèmes linéaires de Lyapunov en temps continu :

Dans ce chapitre, on va étudier la stabilité des systèmes linéaires de Lyapunov en temps continu. En premier temps nous allons transformer le systèmes de Lyapunov à un système linéaire invaraint standard, nous basons pour ce faire sur les références suivantes [6], [7], [8].

Definition 17 *un système différentiel linéaire de Lyapunov est un système d'écrit par les équations :*

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + XB + FU \\ Y = CX + DU \end{cases} \tag{4.0.1}$$

telles que :
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, U \in \mathbb{R}^{m\times n}, X \in \mathbb{R}^{n\times n}, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$F \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times n}$ avec $X(t_0) = X_0$.

4.1 La solution du système :

On a

$$\dot{X} = AX + XB + FU \tag{4.1.1}$$

Par la vectorisation :

$$\begin{aligned} vec(\dot{X}) &= vec(AX + BX + FU) \\ &= vec(AX) + vec(XB) + vec(FU) \\ &= (I_n \otimes A)vec(X) + (B^T \otimes I_n)vec(X) + (I_n \otimes F)vec(U). \\ &= [(I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n)]vec(X) + (I_n \otimes F)vec(U) \end{aligned}$$

On obtient un nouveau système transformé :

$$\dot{\widetilde{X}} = \widetilde{A}\widetilde{X} + \widetilde{B}\widetilde{U} \tag{4.1.2}$$

Où

* $\widetilde{A} = (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$.
* $\widetilde{B} = I_n \otimes F \in \mathbb{R}^{n \times nm}$.

et

* $\widetilde{X} = vec(X) = \begin{bmatrix} X_1 & . & . & . & X_p \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n^2}$.
* $\widetilde{U} = vec(U) = \begin{bmatrix} U_1 & . & . & . & U_m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{nm}$.

4.2 Trajectoire d'états du système de Lyapunov en temps continu :

Proposition 4.2.1 *On appelle matrice de transition, l'unique solution du système différentiel*

$$\dot{\widetilde{X}}(t) = \widetilde{A}\widetilde{X}(t)\ ,\ avec\ \widetilde{A} = (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n). \tag{4.2.1}$$

satisfaisant la condition initiale $\widetilde{X}(t_0)$, et qui est donnée par :

$$\Phi(t, t_0) = \Phi_1(t, t_0)\Phi_2(t, t_0),$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, t_0) &= \exp\left[(I_n \otimes A)(t - t_0)\right]. \\ \Phi_2(t, t_0) &= \exp[(B^T \otimes I_n)(t - t_0)]. \end{aligned}$$

Les matrices de transition du système $\dot{\widetilde{X}}(t) = (I_n \otimes A)\widetilde{X}(t)$ et $\dot{\widetilde{X}}(t) = (B^T \otimes I_n)\widetilde{X}(t)$ respectivement, et toute solution de (4.2.1) est de la forme $\widetilde{X}(t) = \Phi(t, t_0)\widetilde{X}(t_0)$avec $\widetilde{X}(t_0)$ est un vecteur constant d'ordre n^2.

Propriétès de la matrice de transition :

La matrice de la transition Φ vérifie :

1. $\Phi(t, t) = I_n$.
2. $(\Phi(t, t_0))^{-1} = \Phi(t_0, t)$.
3. $\dot{\Phi}(t, t_0) = \widetilde{A}\Phi(t, t_0)$.
4. $\Phi(t_0, t_1)\Phi(t_1, t) = \Phi(t_0, t), \forall (t_0, t_1, t) \in \mathbb{R}^3$.

Proof. On considère

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_0) &= \dot{\Phi}_1(t, t_0)\Phi_2(t, t_0) + \Phi_1(t, t_0)\dot{\Phi}_2(t, t_0) \\ &= (I_n \otimes A)\Phi_1(t, t_0)\Phi_2(t, t_0) + (B^T \otimes I_n)\Phi_1(t, t_0)\Phi_2(t, t_0) \\ &= [I_n \otimes A + B^T \otimes I_n]\Phi_1(t, t_0)\Phi_2(t, t_0). \end{aligned}$$

Par conséquent $\dot{\Phi} = \widetilde{A}\Phi$, de plus

$$\Phi(t,t) = \Phi_1(t,t)\Phi_2(t,t) = I_{n^2}I_{n^2}. = I_{n^2}.$$

Alors Φ est la matrice de transition de (4.2.1), et chaque solution de (4.2.1) est de cette forme. □

Théorème 4.2.1 *Soit* $\Phi(t,t_0)$ *la matrice de la transition de* (4.0.1), *alors la solution unique de* (4.0.1) *satisfisant la condition initiale* $\widetilde{X}(t_0) = \widetilde{X_0}$ *est :*

$$\widetilde{X}(t) = \Phi(t,t_0)\left[\widetilde{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)(I_n \otimes F)\widetilde{u}(\tau)d\tau\right].$$

Proof. Nous passons par deux étapes

1. La solution de l'équation homogène qui est donnée par

$$\widetilde{X}(t) = \Phi(t,t_0)\widetilde{X}(t_0).$$

2. La solution de l'équation complète (non homogène)

$$\dot{\widetilde{X}}(t) = \widetilde{A}\widetilde{X}(t) + \widetilde{B}\widetilde{U}(t). \tag{4.2.2}$$

Par la méthode de la variation de la constante, on a donc

$$\widetilde{X}(t) = \Phi(t,t_0)h(t),$$

avec

$$h(t_0) = \widetilde{X}(t_0).$$

□

Par dérivation, on obtient :

$$\widetilde{X}(t) = \dot{\Phi}(t,t_0)h(t) + \Phi(t,t_0)\dot{h}(t),$$

l'équation (4.2.2) devienne :

$$(I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n)\Phi(t,t_0)h(t) + \Phi(t,t_0)\dot{h}(t_0) = \widetilde{A}\Phi(t,t_0)h(t_0) + \widetilde{B}\widetilde{U}(t).$$

Après simplification on obtient :

$$\Phi(t,t_0)\dot{h}(t) = \widetilde{B}\widetilde{U}(t)$$

d'où :

$$\dot{h}(t) = \Phi(t_0,t)\widetilde{B}\widetilde{U}(t),$$

d'après intégration, nous obtenons :

$$h(t) = h(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\widetilde{B}\widetilde{U}(t)d\tau.$$

Donc :

$$\widetilde{X}(t) = \Phi(t, t_0)\left[\widetilde{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\widetilde{B}\widetilde{U}(t)d\tau\right]. \tag{4.2.2}$$

4.3 Test de stabilité pour des systèmes linéaires de Lyapunov en temps continu :

Lemme 4.3.1 *Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, et $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ sont les valeurs propres de B, alors $\lambda_i + \mu_i$ pour $i = 1, 2, \dots n$ sont des valeurs propres de la matrice*

$$\widetilde{A} = (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n).$$

Proof. voir [7]. □

Théorème 4.3.1 *Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, et $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ sont les valeurs propres de B, alors le système est stable si et seulement si $Re(\lambda_i + \mu_i) < 0$ pour $i, j = 1, 2, \dots, n$.*

Proof. La preuve du théorème découle du **lemme (4.3.1)** et le **théorème (3.2.3).** □

Example 15 *Considérons le système de Lyapunov représenté par les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Après calcul les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

Les valeurs propres de B sont :

$$\mu_1 = -3, \mu_2 = -2$$

On a donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \mu_1 = -2, \ \lambda_1 + \mu_2 = -1 \\ \lambda_2 + \mu_1 = -4, \ \lambda_2 + \mu_2 = -3 \end{cases}$$

Le système est stable car les sommes des valeurs propres sont négatifs.

Example 16 *Soit le système de Lyapunov suivant*

$$\dot{X} = AX + XB + FU$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tester la stabilité de ce systhème, on utilise le test des mineurs principaux(**théorème 3.2.1**)

1. Calculons la matrice $\widetilde{A} = I_2 \otimes A + B^T \otimes I_2$:

$$\widetilde{A} = I_2 \otimes A + B^T \otimes I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Calculons les mineurs principaux de la matrice $(-\widetilde{A})$.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -a_{11} = 2 > 0. \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0. \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 > 0. \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 > 0. \end{aligned}$$

Comme tout les mineurs principaux de la matrice$(-\widetilde{A})$ sont positifs, alors le système étudié est asymptotiquement stable.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la stabilité des systèmes linéaires de Lyapunov pour le cas continu, en fournissant les conditions nécessaires et suffisantes pour cette étude en basant sur le test de Lyapunov (les valeurs propres de la matrice de transition), en intéressant en particulier à la stabilité asymptotique .
Pour ce faire nous avons transformé cette classe de systèmes à des systèmes linéaires standards en utilisant le produit de Kronecker des matrices et ces propiétés.
Tous ce travail est illustré par des exemples numériques.

Bibliographie

[1] D. Bouagada " à théorie de contrôle " cours de Master 1. Modélisation Contrôle et Optimisation.

[2] D. Bouagada " théorie de contrôle " cours de 3 ieme . CAS.

[3] B. Broxsom, The Kronecker product, UNF Thesis, 2006

[4] S. Barnett, Introduction to mathematical control theory, Clarenton Pressn, Oxford, 1975.

[5] Khalil, H. K.Non linear System, Third Edition, Prentic Hall, 2002.

[6] MSN. Murty, B. V. App Rao and G. Suresh Kumar, Contrôlability, Observability, and realizability of matrix Lyapunov systems , Bull Koream Math soc.43/pp 149-159, 2006.

[7] T. Kaczorek, "Vectors and Matrices in Automation and Electrotechnics". Wydawnictwo Neaukowo Technizne, Warzawa 1998 (in p olish).

[8] T.Kaczorek. Positive Conditions -Time Lineair Lyapunov systems. The international conference on "computer as tool" Warsaw, Septemper 9,12.2007.