



**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté Des Sciences Exactes et de l'Informatique

Domaine des Sciences de la Matière

Département de physique

Projet de Fin d'Etudes

Pour obtenir le diplôme de Master en Physique

Option : Modélisation et Caractérisation des Matériaux

Présenté par :

BOUSSIR Salima

Sujet :

Calcul du champ électrique de la lumière dans une structure multicouche de films minces

Soutenu le : 22/05/2017

Devant le jury composé de :

Mme. MELATI Rabia	MCB	Université de Mostaganem	Président
M. ABBASSA Hamza	MCB	Université de Mostaganem	Examineur
M. ABBES Charef	MCB	Université de Mostaganem	Encadreur

Année Universitaire: 2016/2017

Dédicaces

Je dédie ce travail

A mes parents que Dieu les gardent pour moi, qui ont éclairé mon chemin et qui m'ont encouragée et soutenue tout au long de mes études.

A mes chers sœurs et frères

A toutes mes amies

*A tous mes enseignants tout au long de mes études
et monsieur ABBES Charef*

Remerciements

Je teins tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Mes plus amples remerciements iront en premier à mon encadreur monsieur ABBES Charef pour son dévouement, son aide et la pertinence de ses conseils sans lesquels ce travail de mémoire n'aurait pu prendre forme et aboutir.

Mes remerciements iront également aux membres du jury, madame MELLATI Rabia et monsieur ABBASSA Hamza pour avoir accepté d'évaluer ce modeste travail.

Et bien sur les miens, à savoir, ma mère, mon père, mes sœurs et mes frères, qui m'ont supporté et apporté leur aide tout le long de ce travail.

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, par un geste, une parole ou un conseil

Je dis : merci.

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre I : Rappel théorique

I.1 Equation de Maxwell	3
I.2 Ondes planes électromagnétiques... ..	5
I.3 Constantes optiques	6
I.4 Etat de polarisation.....	6
I.5 Conditions limites.....	7
I.6 Coefficients de Fresnel.....	8
I.7 Méthode de Rouard	9

Chapitre II : Calcul du champ électrique

II.1 Introduction	12
II.2 Convention de notation.....	12
II.3 Polarisation S.....	13
II.3.1 Milieu d'incidence.....	13
II.3.2 Substrat.....	15
II.3.1 Phase intermédiaire.....	16
III.4 Polarisation P.....	18
II.4.1 Milieu d'incidence	19
II.4.2 Substrat.....	19
II.4.3 Phase intermédiaire.....	20

Chapitre III : Analyse numérique

III.1 Introduction.....	21
III.2 Algorithme de calcul.....	21
III.3 Deux couches sur un substrat transparent absorbant.....	22
III.4 Traitement antireflet.....	24
III.4.1.Revêtement antireflet (AR) monocouche.....	26
III.5 Miroirs diélectriques.....	31
III.6 Angle critique (Réflexion totale).....	34
Conclus générale.....	38
Bibliographie.....	39

Introduction générale

Introduction générale

La détermination des amplitudes et des intensités de la lumière réfléchie ou transmise par un film mince ou par un système de plusieurs films, repose essentiellement sur l'utilisation des équations de Maxwell et un calcul rigoureux des coefficients d'absorption et de transmission en appliquant les conditions aux limites appropriées. En pratique, les équations résultantes sont compliquées et l'évaluation des propriétés d'une combinaison donnée de films implique des calculs monstrueusement ennuyeux.

Le problème a été traité de plusieurs façons, Une variété des formalismes analytiques et des techniques numériques ont été proposées pour décrire les propriétés optiques des couches minces, leurs auteurs supposent pratiquement tous que la couche étudiée est homogène, isotrope, et limitée par deux faces planes et parallèles, c'est-à-dire parfaitement définie au point de vue optique par deux paramètres seulement, son indice n et son épaisseur d .

Le développement des méthodes d'analyse des structures multicouches est essentiel, si nous voulons comprendre leurs propriétés fondamentales. Toute exploration expérimentale des multicouches doit s'accompagner d'une analyse théorique quantitative pour que les cas les plus intéressants puissent être identifiés, les mesures expérimentales interprétées et des modèles stables, pour des dispositifs fonctionnant avec succès, soient trouvés.

Parmi les plus utilisées, on trouve la méthode matricielle et la méthode récursive. La méthode matricielle, basée sur le formalisme introduit par Abélès en 1950 [1]. Elle présente l'intérêt de réduire les temps de calcul si l'on calcule des empilements périodiques avec un nombre de périodes élevé. La méthode de Rouard [2] est une technique récursive largement utilisée dans la conception de films minces pour étendre la dérivation du coefficient de Fresnel pour une couche unique au cas des films multicouches. Dans ce travail, on fournit un aperçu sur la méthode de Rouard, car elle est plus intuitive et pédagogique.

Nous avons partagé cette étude en trois chapitres. Dans le premier chapitre on donne un rappel sur la propagation des ondes électromagnétiques et la méthode de Rouard.

Dans le deuxième chapitre, on a déduit les équations qui permettent de calculer les intensités du champ électrique de la lumière au sein d'un empilement de films minces. Les équations supposent que le milieu d'incidence et le substrat sont semi-infinis, et s'appliquent aux structures avec n'importe quel nombre de couches intermédiaires. Toutes les couches sont séparées par des limites planes et parallèles. La forme des équations est récursive et aucune

matrice n'est utilisée pour trouver la réflectance et la transmittance d'une structure multicouche.

Dans le dernier chapitre Les équations sont utilisées pour démontrer leur utilité. Les intensités du champ électrique sont déterminées en fonction de la profondeur pour une variété d'exemples de couches minces qui illustrent certaines caractéristiques de conception familières. Avec les équations en main, il faut savoir a) le champ électrique de la lumière à la première interface du milieu incident, b) l'angle d'incidence à la première interface, c) l'épaisseur de chaque élément de l'empilement et d) les constantes optiques (valeurs n et k) pour chaque élément optique, qui sont fonction de la fréquence de la lumière incidente.

Chapitre I

Rappel théorique

I.1. Equations de Maxwell

Le 19ème siècle a vu un apport considérable concernant le développement des différentes lois d'électromagnétisme et la prédiction de la propagation des ondes électromagnétiques. Des savants comme Coulomb, Laplace, Poisson, Gauss, Ampère, Ohm, Faraday, Lenz, Maxwell, Hertz, Lorentz...ont marqué par leurs travaux cette ère nouvelle de l'électricité. Les travaux de J. C. Maxwell sont particulièrement mis en relief à cause de son introduction de l'aspect purement mathématique dans l'interprétation des phénomènes électromagnétiques découverts à cette époque.

La contribution de Maxwell a débuté en 1861 par sa publication intitulée « On Physical Lines of Forces » [3] où il a introduit le concept de lignes de force, de flux, de champ...En 1864, dans son article « A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field »[4], Maxwell a introduit un groupe d'équations dont quatre furent résumées par Heaviside en 1884 et éditées sous forme vectorielle connue de nos jours.



Figure I.1: Portraits des Physiciens Ecossais J. C. Maxwell et Allemand H. R. Hertz.

La première équation de Maxwell est basée sur la Loi de Gauss et montre l'effet des charges électriques. Le champ électrique résultant en est déduit dans les configurations simples à symétrie

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dv \quad (1.1)$$

En utilisant le Théorème de la divergence, on obtient en notation différentielle :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2)$$

La deuxième équation de Maxwell exprime la notion d'absence de monopoles magnétiques et reflète la loi de Gauss en magnétisme. En termes de conservation de flux magnétique, elle montre que pour une surface fermée, le flux entrant dans le volume délimité par cette surface est égal au flux sortant :

$$\oiint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

D'où on déduit : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur cité pour la première fois par Maxwell.

La relation entre l'induction magnétique et le champ magnétique est donnée par :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.5)$$

La troisième équation se base sur la Loi de Lenz-Faraday et exprime l'unification des lois électriques et magnétiques. A travers cette équation, Maxwell montre qu'un champ électrique variable dans l'espace induit un champ magnétique et une fem induite:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (1.6)$$

Ou en notation différentielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.7)$$

Cette équation est la base de l'étude du phénomène d'induction et du fonctionnement des moteurs électriques et des générateurs. La quatrième équation de Maxwell est une généralisation du Théorème d'Ampère où Maxwell a introduit un courant fictif qu'il appela « le vecteur déplacement électrique » [4].

L'idée du vecteur déplacement électrique est née chez Maxwell en examinant le théorème d'Ampère :

$$\int \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum I = \iint \vec{J} \cdot \vec{ds} \quad (1.8)$$

En notation différentielle, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_t \quad (1.9)$$

Dans cette relation, $\vec{J}_t$ représente les différents courants traversant la courbe d'intégration : courant de conduction, d'aimantation et de polarisation qui sont tous liés aux déplacements de charges électriques réelles (électrons libres dans les conducteurs, charges liées dans les diélectriques et circuits microscopiques dans la matière aimantée). Mais qu'advient-il lorsque

la courbe n'est traversée par aucun courant réel et pourtant le champ magnétique auxiliaire $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ existent réellement ? Maxwell a conclu que lorsqu'en un point, le champ électrique est variable dans le temps, une forme de courant (invisible, non lié à un déplacement réel de charges) doit exister pour pouvoir produire le champ magnétique. Ce courant fictif est lié aux variations du champ électrique et porte le nom de « courant de déplacement de Maxwell ». En notation différentielle, cette équation se simplifie en :

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{J}_t = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.10)$$

Où J représente les densités de courant réelles. Cette relation exprime la notion de courant total et la loi d'Ampère. Les autres équations sont en fait des expressions qui lient ces différentes grandeurs et qui portent le nom de relations constitutives :

- l'équation qui montre la relation entre le vecteur déplacement électrique et le champ électrique à travers la permittivité du milieu :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.11)$$

- l'équation qui exprime la loi d'Ohm locale :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.12)$$

- l'équation qui définit la loi de conservation de la charge électrique :

$$div\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.13)$$

A travers ces équations, Maxwell a prédit l'existence des ondes électromagnétiques se propageant dans le vide à la vitesse de la lumière.

I.2.Ondes planes électromagnétiques

Afin de décrire le champ électrique de la lumière se propageant à travers n'importe quel élément optique dans un empilement de couche mince, nous utiliserons l'équation d'onde exponentielle, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, qui est une solution des équations de Maxwell [5]. Dans toutes les phases d'une structure multicouche à l'exception le substrat semi-infini, il y aura une partie transmise et une partie réfléchie.

Le champ électrique dans la couche j sera écrit comme suit:

$$\vec{E}_j = \vec{E}_j^{0(t)} e^{i(\omega t - \vec{k}_j^t \cdot \vec{r})} + \vec{E}_j^{0(r)} e^{i(\omega t - \vec{k}_j^r \cdot \vec{r})} \quad (1.14)$$

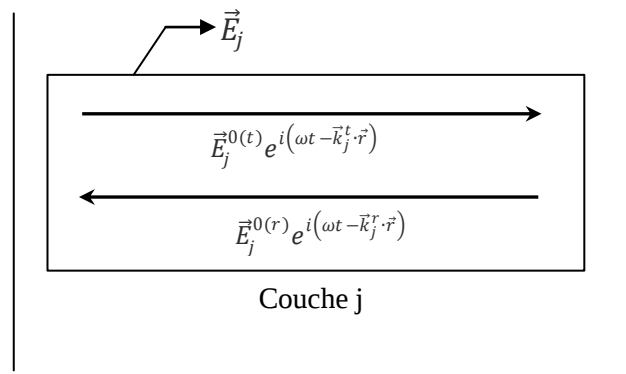


Figure I.2: Champ électrique total, composé d'une partie transmise et réfléchi.

Cette équation d'onde dépend explicitement du temps, mais dans notre traitement des équations, la dépendance du temps aura tendance à devenir sans pertinence puisque les moyennes temporelles sont calculées en prenant les carrés des valeurs absolues des quantités mesurables, donc des expressions constantes dans le temps.

I.3. Constantes optiques

Le vecteur d'onde, $\vec{k}_j$ peut être écrit comme $\vec{k}_j = \frac{2 \cdot \pi \cdot \tilde{n}_j}{\lambda_0} \cdot \vec{u}_j$, ou $\vec{u}_j$ est un vecteur unitaire dans la direction de la propagation de l'énergie de l'onde et λ est la longueur d'onde de la lumière incidente dans le vide. $\tilde{n}_j = n_j - iq_j$ est l'indice de réfraction complexe de la couche j, n_j est l'indice de réfraction caractéristique du milieu j, décrivant le comportement de la lumière et détermine la phase de l'onde alors qu'elle se propage à travers celui-ci. Le coefficient d'extinction q_j est liée au coefficient d'absorption α pour chaque longueur d'onde le coefficient d'extinction est lié au coefficient d'absorption α par la relation :

$$q_j = \frac{\alpha \cdot \lambda}{4 \cdot \pi} \quad (1.15)$$

I.4. Etat de polarisation

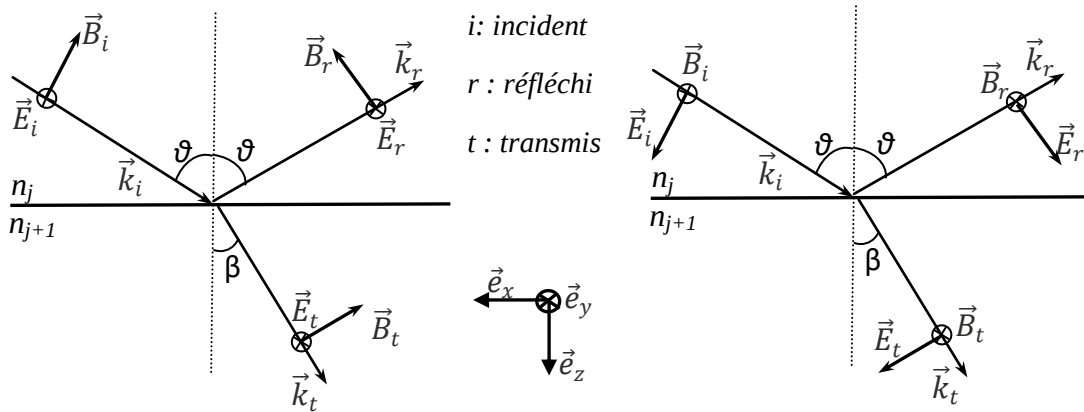
La polarisation d'une onde électromagnétique consiste à suivre l'évolution du champ électrique dans un plan normal à sa direction de propagation. L'observation se fait selon le sens opposé à celui de la propagation. La polarisation est alors définie comme le lieu géométrique qu'occupe l'extrémité du vecteur champ électrique au cours du temps.

Les ondes électromagnétiques peuvent avoir deux états de polarisation différents.

- Polarisation transversale électrique (TE), où le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence (voir figure I.3.a) ; cette polarisation est souvent appelé polarisation

S (de senkrecht, « perpendiculaire » en allemand). Le champ électrique a une seule composante tangentielle à l'interface.

- b. Polarisation transverse magnétique (TM) ; où le champ magnétique est perpendiculaire au plan d'incidence, le champ électrique est compris dans le plan d'incidence (voir figure I.3.b) ; appelé aussi polarisation P. Le champ électrique a donc deux composantes une tangentielle et l'autre normale à l'interface. Ces deux composantes nécessitent des traitements distincts.



a. Polarisation (TE)

$$\vec{E}_i = (0, E_i, 0)$$

$$\vec{E}_r = (0, E_r, 0)$$

$$\vec{E}_t = (0, E_t, 0)$$

$$\vec{B}_i = \frac{n_j E_i}{c} (-\cos \theta, 0, -\sin \theta)$$

$$\vec{B}_r = \frac{n_j E_r}{c} (\cos \theta, 0, -\sin \theta)$$

$$\vec{B}_t = \frac{n_{j+1} E_t}{c} (-\cos \beta, 0, -\sin \beta)$$

b. Polarisation (TM)

$$\vec{E}_i = (E_i \cos \theta, 0, E_i \sin \theta)$$

$$\vec{E}_r = (E_r \cos \theta, 0, E_r \sin \theta)$$

$$\vec{E}_t = (E_t \cos \beta, 0, E_t \sin \beta)$$

$$\vec{B}_i = (0, B_i, 0)$$

$$\vec{B}_r = (0, B_r, 0)$$

$$\vec{B}_t = (0, B_t, 0)$$

Figure I.3 : Etats de polarisation des ondes électromagnétiques.

I.5. Conditions aux limites

En optique nous sommes souvent amenés à la situation où la lumière se propage à travers l'interface entre deux milieux différents. Dans ce cas il est utile de réécrire les EM afin d'obtenir des conditions aux limites qui expriment la continuité ou la discontinuité des composantes normales (indice n) et tangentielles (indice t) des vecteurs de champs:

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \quad (1.16.a)$$

$$H_{2t} - H_{1t} = j_s \quad (1.16.b)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (1.16.c)$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (1.16.d)$$

On rencontre souvent des problèmes où la densité surfacique du courant électrique et la densité surfacique des charges libres sont nulles : dans ces cas les équations (1.16.a-d) expriment la continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ et des composantes normales de $\vec{D}$ et $\vec{B}$ à l'interface entre les milieux 1 et 2.

Etant donné que ces champs se propagent à travers une interface, les équations de Maxwell prédisent que la partie tangentielle des champs doit être continue à chaque l'interface. Ces conditions aux limites seront appliquées pendant la dérivation et auront des implications nettement différentes dans le traitement des polarisations S et P.

I.6.Coefficients de Fresnel

Les coefficients de Fresnel, introduits par Augustin Jean Fresnel (1788-1827), interviennent dans la description du phénomène de réflexion-réfraction des ondes électromagnétiques à l'interface entre deux milieux, dont l'indice de réfraction est différent. Ils expriment les liens entre les amplitudes des ondes réfléchies et transmises par rapport à l'amplitude de l'onde incidente. Le coefficient de réflexion r (de transmission t) en amplitude est égal au rapport entre l'amplitude du champ électrique réfléchi E_r (du champ électrique transmis E_t) et l'amplitude du champ électrique incident E_i .

Si on considère l'interface $(j-1)$ séparant le milieu $(j-1)$ et le j -ème milieu, Les coefficients de réflexion $\tilde{r}_{j-1,j}$ et de transmission $\tilde{t}_{j-1,j}$ sont définis comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_{j-1,j} = \frac{E_{j-1}^r}{E_{j-1}^t} \\ \tilde{t}_{j-1,j} = \frac{E_j^t}{E_{j-1}^t} \end{array} \right. \quad (1.17)$$

$$(1.18)$$

En utilisant les équations de Maxwell et en appliquant les conditions aux limites appropriées (La continuité des composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique à l'interface).

Dans le cas de la polarisation TE (S), les coefficients de réflexion et de transmission complexes sont définis par :

$$\begin{cases} \tilde{r}_{j-1,j} = \frac{\tau_{j-1} - \tau_j}{\tau_{j-1} + \tau_j} \\ \tilde{t}_{j-1,j} = \frac{2\tau_{j-1}}{\tau_{j-1} + \tau_j} \end{cases} \quad (1.19)$$

Et pour la polarisation TM (P), ces coefficients sont donnés par :

$$\begin{cases} \tilde{r}_{j-1,j} = \frac{\tilde{n}_j^2 \tau_{j-1} - \tilde{n}_{j-1}^2 \tau_j}{\tilde{n}_j^2 \tau_{j-1} + \tilde{n}_{j-1}^2 \tau_j} \\ \tilde{t}_{j-1,j} = \frac{2\tilde{n}_{j-1} \tilde{n}_j \tau_{j-1}}{\tilde{n}_j^2 \tau_{j-1} + \tilde{n}_{j-1}^2 \tau_j} \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\text{Où : } \tau_j = \tilde{n}_j \cos \theta_j = (\tilde{n}_j^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2}$$

Avec θ_0 , n_0 sont respectivement l'angle d'incidence et l'indice de réfraction du milieu d'incidence, θ_j est l'angle de réfraction dans couche j.

I.7.Méthode de Rouard (Structure multicouche)

Le développement de la dernière section est refait brièvement pour un cas général d'une couche quelconque. Ces équations ne s'appliquent qu'à une seule interface. Lors de l'analyse de la lumière qui se propage à travers une structure multicouche, il est nécessaire de prendre en compte la lumière qui peut se réfléchir entre les interfaces des couches, augmentant ainsi les propriétés réfléchissantes effectives de la structure. L'expression de Rouard [2] résume ces réflexions multiples et donne un coefficient unique qui représente la réflexion due à tous les films au-delà d'une interface donnée. La méthode de Rouard [6] est utilisée pour calculer exactement les coefficients de transmission et réflexion (R et T) d'un empilement de couches minces. La figure montre un empilement de j couches d'indice complexe de la forme $\tilde{n}_j = n_j - iq_j$.

Si on considère la couche du bas, c'est-à-dire la couche j, prise entre un milieu d'incidence d'indice $\tilde{n}_{j-1}$ et un milieu de transmission d'indice $\tilde{n}_{j+1}$, la somme infinie des réflexions multiples et des transmissions donne les équations suivantes pour les coefficients de réflexion et de transmission d'une couche j :

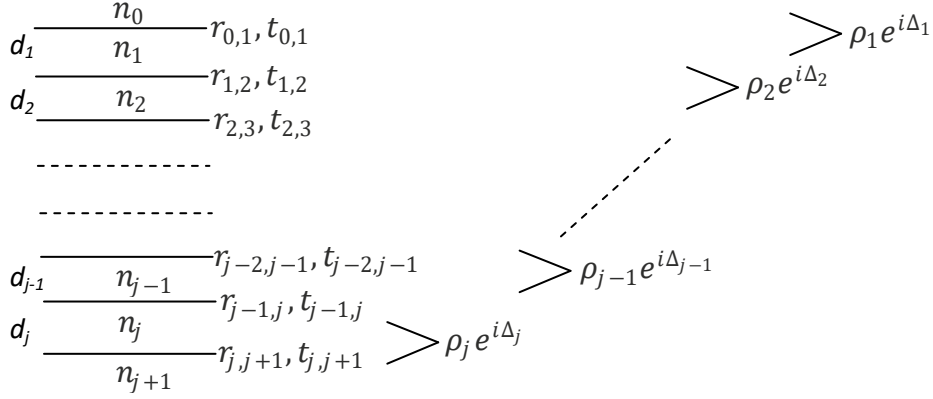


Figure I.4: Schéma de la méthode de Rouard pour le traitement d'une structure multicouche.

$$\begin{cases} \tilde{r}_j = \rho_j e^{i\Delta_j} = \frac{\tilde{r}_{j-1,j} + \tilde{r}_{j,j+1} e^{-2i\delta_j}}{1 + \tilde{r}_{j-1,j} \tilde{r}_{j,j+1} e^{-2i\delta_j}} \\ \tilde{t}_j = \frac{\tilde{t}_{j-1,j} \tilde{t}_{j,j+1} e^{-i\delta_j}}{1 + \tilde{r}_{j-1,j} \tilde{r}_{j,j+1} e^{-2i\delta_j}} \end{cases} \quad (1.23)$$

Avec ρ_j , Δ_j sont l'amplitude et la phase de la lumière, respectivement, réfléchi par la couche j , δ_j la différence de marche à la longueur d'onde λ :

$$\delta_j = \frac{2\pi n_j d_j}{\lambda} \cos \theta_j \quad (1.25)$$

$\tilde{r}_j$ désigne le coefficient "total" qui tient en compte toutes les réflexions multiples au-delà de l'interface j .

Ensuite, la méthode de Rouard fonctionne par itération des équations (1.23) et (1.24) en partant de la couche du bas et en remontant jusqu'à la surface couche par couche. Par exemple, la lumière incidente sur la couche $j-1$ voit les coefficients suivants qui tiennent compte des couches j et $j-1$:

$$\begin{cases} \tilde{r}_{j-1} = \rho_{j-1} e^{i\Delta_{j-1}} = \frac{\tilde{r}_{j-1,j} + \tilde{r}_j e^{-2i\delta_{j-1}}}{1 + \tilde{r}_{j-1,j} \tilde{r}_j e^{-2i\delta_{j-1}}} \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\begin{cases} \tilde{t}_{j-1} = \frac{\tilde{t}_{j-1,j} \tilde{t}_j e^{-i\delta_{j-1}}}{1 + \tilde{r}_{j-1,j} \tilde{r}_j e^{-2i\delta_{j-1}}} \end{cases} \quad (1.27)$$

Par cette méthode on obtient finalement les équations suivantes pour les coefficients de réflexion et de transmission de l'amplitude électromagnétique sur une multicouche :

$$\tilde{r}_1(n_0, \dots, n_{j+1}, d_1, \dots, d_j, \lambda, \theta_0) = \frac{\tilde{r}_{0,1} + \tilde{r}_2 e^{-2i\delta_1}}{1 + \tilde{r}_{0,1} \tilde{r}_2 e^{-2i\delta_1}} \quad (1.28)$$

$$\tilde{t}_1(n_0, \dots, n_{j+1}, d_1, \dots, d_j, \lambda, \theta_0) = \frac{\tilde{t}_{0,1} \tilde{t}_2 e^{-i\delta_1}}{1 + \tilde{r}_{0,1} \tilde{r}_2 e^{-2i\delta_1}} \quad (1.29)$$

$\tilde{r}_1$ sera mis en évidence lorsque nous calculons les équations pour le milieu d'incident, où nous ne se soucient pas de connaître ce qui se passe à l'intérieur de la structure, mais seulement besoin de connaître sa réflectance totale. La réflectance absolue totale de l'empilement, R , qui donne le pourcentage d'énergie réfléchie, est liée à $\tilde{r}_1$ par :

$$R = |\tilde{r}_1|^2 \quad (1.30)$$

Pour mieux comprendre la méthode, considérant le cas de la réflexion sur deux couches minces déposés sur un substrat, les trois coefficients de Fresnel $\tilde{r}_{0,1}$, $\tilde{r}_{1,2}$, $\tilde{r}_{2,3}$ et les différences de marche δ_1 , et δ_2 . La méthode de Rouard commence par le calcul de l'expression :

$$\tilde{r}_2 = \rho_2 e^{i\Delta_2} = \frac{\tilde{r}_{1,2} + \tilde{r}_{2,3} e^{-2i\delta_2}}{1 + \tilde{r}_{1,2} \tilde{r}_{2,3} e^{-2i\delta_2}} \quad (1.31)$$

Puis, en la portant dans la formule :

$$\tilde{r}_1 = \frac{\tilde{r}_{0,1} + \tilde{r}_{eff} e^{-2i\delta_1}}{1 + \tilde{r}_{0,1} \tilde{r}_{eff} e^{-2i\delta_1}} \quad (1.32)$$

Il arrive à l'expression finale :

$$\tilde{r}_1 = \frac{\tilde{r}_{0,1} + \tilde{r}_{1,2} e^{-2i\delta_1} + \tilde{r}_{2,3} e^{-2i(\delta_1 + \delta_2)} + \tilde{r}_{0,1} \tilde{r}_{1,2} \tilde{r}_{2,3} e^{-2i\delta_2}}{1 + \tilde{r}_{0,1} \tilde{r}_{1,2} e^{-2i\delta_1} + \tilde{r}_{0,1} \tilde{r}_{2,3} e^{-2i(\delta_1 + \delta_2)} + \tilde{r}_{1,2} \tilde{r}_{2,3} e^{-2i(\delta_2)}} \quad (1.33)$$

Chapitre II

Calcul du champ électrique

II.1 Introduction

Il n'est pas difficile de trouver le champ électrique pour une lumière se propageant dans un seul milieu. La tâche la plus fastidieuse dans cette dérivation est de garder une trace des intensités du champ quand la lumière parcourt chaque interface de la structure. Les coefficients de Fresnel fournissent une description mathématique des champs électriques lorsqu'ils traversent ces interfaces, des traitements séparés étant nécessaires pour les deux états de polarisation P et S. De plus, lorsqu'il s'agit d'une structure multicouche, il faut tenir compte de toutes les réflexions multiples qui peuvent se produire entre les couches. Ceci est réalisé par l'utilisation de la méthode de Rouard.

II.2 Convention de notation

Comme nous considérons un système multicouche, les conventions suivantes seront utilisées pour les interfaces et les indices optiques de chaque couche :

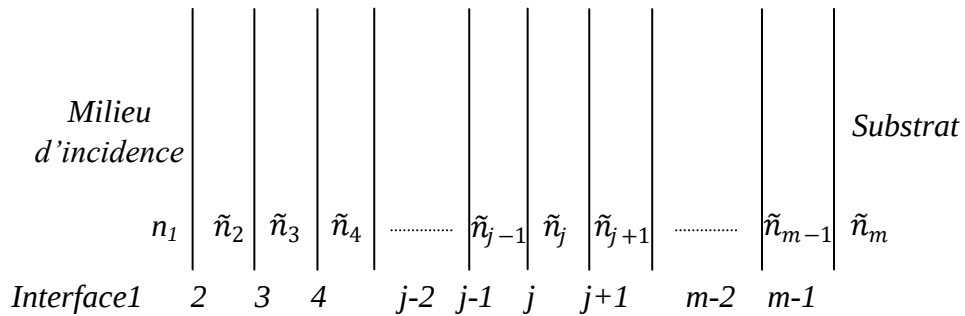


Figure II.1 : Conventions utilisées pour décrire les différents milieux et les interfaces optiques.

Dans ce travail, le milieu incident sera à gauche du substrat, de sorte que la lumière incidente se déplacera toujours de gauche à droite. Il est important de nous référer au champ électrique juste au bord d'un milieu donné. La notation qui sera utilisée pour les intensités de champ électrique aux bords des interfaces est résumée sur la figure II.2.

L'indice «t» ou «r» indique si le champ électrique est transmis où réfléchi. L'indice j se réfère au numéro d'interface, avec les «+» ou «-» indiquant les côtés «sortants» ou «entrants» de l'interface.

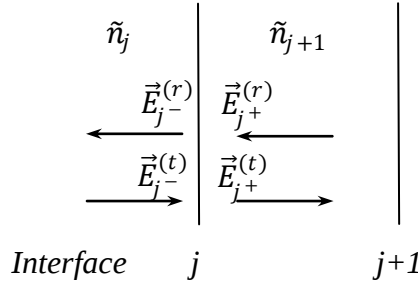


Figure II.2 : Notation utilisée pour les intensités de champ électrique aux bords des interfaces

II.3 Polarisation S

II.3.1 Milieu d'incidence

Pour le milieu d'incidence, on suppose, nécessairement et sans perte de généralité, que n_0 est réel. Il n'y a donc pas d'absorption dans ce milieu. Le champ électrique peut alors être écrit comme :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0^{0(t)} e^{i(\omega t - \vec{k}_0^t \cdot \vec{r})} + \vec{E}_0^{0(r)} e^{i(\omega t - \vec{k}_0^r \cdot \vec{r})}$$

où $\vec{E}_0^{0(r)} = \tilde{r}'_1 \vec{E}_0^{0(t)}$ et $\tilde{r}'_1 = R^{1/2} e^{i\delta}$, δ est la différence de phase.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0^{0(t)} \left(e^{i(\omega t - \vec{k}_0^t \cdot \vec{r})} + R^{1/2} e^{i\delta} e^{i(\omega t - \vec{k}_0^r \cdot \vec{r})} \right)$$

Puisque nous avons supposé que le milieu d'incidence est transparent, $\vec{E}_0$ est réel, ce qui n'est généralement pas vrai pour les couches au-delà de la première interface. Bien qu'il soit mathématiquement nécessaire que le champ électrique soit une quantité vectorielle complexe, nous nous intéresserons finalement au calcul de la partie réelle du champ, c'est-à-dire l'intensité de la lumière, que l'on peut trouver en calculant la moyenne temporelle du vecteur champ électrique qui sera noté :

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} |\vec{E}|^2$$

Dans le premier milieu :

$$\langle \vec{E}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} |\vec{E}_1|^2 = \frac{1}{2} (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1^*)$$

$$\langle \vec{E}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(e^{i(\omega t - \vec{k}_0^t \cdot \vec{r})} + R^{1/2} e^{i\delta} e^{i(\omega t - \vec{k}_0^r \cdot \vec{r})} \right) \left(e^{-i(\omega t - \vec{k}_0^t \cdot \vec{r})} + R^{1/2} e^{-i\delta} e^{-i(\omega t - \vec{k}_0^r \cdot \vec{r})} \right) \left(\vec{E}_0^{0(t)} \right)^2$$

$$\langle \vec{E}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[1 + R + R^{1/2} \left(e^{-i\delta} e^{i(\vec{k}_0^t \cdot \vec{r} - \vec{k}_0^r \cdot \vec{r})} + e^{i\delta} e^{i(\vec{k}_0^r \cdot \vec{r} - \vec{k}_0^t \cdot \vec{r})} \right) \right] \left(\vec{E}_0^{0(t)} \right)^2$$

On peut simplifier les termes exponentiels par : $\varphi = \vec{k}_0^r \cdot \vec{r} - \vec{k}_0^t \cdot \vec{r} + \delta$

$$\langle \vec{E}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[1 + R + R^{1/2} (e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}) \right] \left(\vec{E}_0^{0(t)} \right)^2$$

Mais $e^{-i\varphi} + e^{i\varphi} = 2 \cos(\varphi)$

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[1 + R + 2R^{1/2} \cos(\varphi) \right] \left(\vec{E}_0^{0(t)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + R + 2R^{1/2} \cos(\vec{k}_0^r \cdot \vec{r} - \vec{k}_0^t \cdot \vec{r} - \delta) \right] \left(\vec{E}_0^{0(t)} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\vec{k}_0^r = \frac{2\pi n_1}{\lambda} (-\sin \theta_0 \vec{e}_x - \cos \theta_0 \vec{e}_z) \text{ et } \vec{k}_0^t = \frac{2\pi n_1}{\lambda} (-\sin \theta_0 \vec{e}_x + \cos \theta_0 \vec{e}_z)$$

Ces relations peuvent être trouvées en analysant la direction du vecteur d'onde, $\vec{k}$, en fonction des vecteurs de direction que nous avons définis. La figure II.3 illustre cette analyse pour la partie transmise de l'onde.

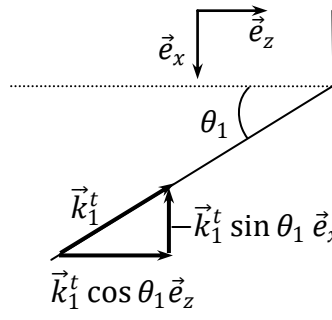


Figure II.3 : Détermination de la direction du vecteur d'onde.

$$(\vec{k}_0^r \cdot \vec{r} - \vec{k}_0^t \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} = \frac{2\pi n_1}{\lambda} (-2\cos \theta_0 \vec{e}_z) \cdot \vec{r} = \frac{-4\pi n_1}{\lambda} \cos \theta_0 z$$

$$\langle \vec{E}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[1 + R + 2R^{1/2} \cos(\varphi) \right] \left(\vec{E}_0^{0(t)} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[1 + R + 2R^{1/2} \cos\left(\frac{-4\pi n_1}{\lambda} \cos \theta_0 z + \delta\right) \right] \left(\vec{E}_0^{0(t)} \right)^2 \quad (2.1)$$

Cette équation donne la valeur moyenne temporelle du champ électrique dans le milieu d'incidence pour la polarisation S.

II.3.2 Substrat

Nous supposons que le substrat est semi-infini, donc il n'y a pas de champ réfléchi. Par conséquent, le champ électrique dans le substrat est juste :

$$\vec{E}_m = \vec{E}_m^{0(t)} e^{i(\omega t - \vec{k}_m^t \cdot \vec{r})}$$

$\vec{E}_m^{0(t)}$ est le champ électrique total transmis Juste à l'intérieur du substrat. Nous devons maintenant utiliser la transmittance totale calculée à l'aide de l'équation (1.29) qui tient en compte les réflexions multiples.

$$\vec{E}_m^{0(t)} = \tilde{t}_1 \vec{E}_1^{0(t)}$$

et la moyenne temporelle du champ électrique dans le substrat est :

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_m^2 \rangle &= \frac{1}{2} (\vec{E}_m \cdot \vec{E}_m^*) = \frac{1}{2} \left[\tilde{t}_1 \vec{E}_1^{0(t)} e^{i(\omega t - \vec{k}_m^t \cdot \vec{r})} \cdot \left(\tilde{t}_1^* \vec{E}_1^{0(t)*} e^{i(\omega t - \vec{k}_m^t \cdot \vec{r})} \right)^* \right] \\ &= \frac{1}{2} |\tilde{t}_1|^2 \left(\vec{E}_1^{0(t)} \right)^2 e^{i(\omega t - \vec{k}_m^t \cdot \vec{r})} \cdot e^{[i(\omega t - \vec{k}_m^t \cdot \vec{r})]^*} \\ \vec{k}_m &= \frac{2\pi(n_m - ik_m)}{\lambda} (\sin \theta_m \vec{e}_x + \cos \theta_m \vec{e}_z) \\ \langle \vec{E}_m^2 \rangle &= \frac{1}{2} |\tilde{t}_1|^2 \left(\vec{E}_1^{0(t)} \right)^2 e^{\frac{4\pi}{\lambda} \text{Im}(\tilde{n}_m \cos \theta_m) z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans cette équation, on voit que si $\tilde{n}_m$ a une composante imaginaire, le champ électrique décroît exponentiellement avec la profondeur dans le substrat. Cela se produit lorsque le substrat est un milieu absorbant. Si le substrat est transparent, le terme exponentiel est égal à 1,0, donc le champ dans le substrat est constant.

II.3.3 Phases intermédiaire

Considérons maintenant les couches intermédiaires entre le milieu d'incidence et le substrat. A toute interface, le champ électrique tangential, de sorte que le champ électrique total est continu à chaque interface, c'est-à-dire :

$$\vec{E}_j^{(t)} + \vec{E}_j^{(r)} = \vec{E}_{j+}^{(t)} + \vec{E}_{j+}^{(r)} \quad (2.3)$$

La composante tangentielle du champ magnétique est également continue à chaque interface, ce qui correspond à la direction x dans notre notation, donc :

$$\vec{H}_{j-x}^{(t)} + \vec{H}_{j-x}^{(r)} = \vec{H}_{j+x}^{(t)} + \vec{H}_{j+x}^{(r)}$$

Les champs sont liés par la relation :

$$\vec{H}_j = \left(\frac{\tilde{\epsilon}_j}{\tilde{\mu}_j} \right)^{1/2} \vec{S}_j \times \vec{E}_j$$

$\vec{S}_j$ est le vecteur unitaire de propagation pointant dans la direction du flux d'onde. Donc, dans le j-ème milieu.

$$\vec{H}_j = \left(\frac{\tilde{\epsilon}_j}{\tilde{\mu}_j} \right)^{1/2} (\vec{S}_j^{(t)} \times \vec{E}_j^{(t)}) + \left(\frac{\tilde{\epsilon}_j}{\tilde{\mu}_j} \right)^{1/2} (\vec{S}_j^{(r)} \times \vec{E}_j^{(r)})$$

De la géométrie des ondes incidente et réfléchie on remarque que :

$$\vec{S}_j^{(t)} = \cos \theta_j \vec{e}_z - \sin \theta_j \vec{e}_x, \quad \vec{S}_j^{(r)} = -\cos \theta_j \vec{e}_z - \sin \theta_j \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_j^{(t)} = E_j^{(t)} \vec{e}_y, \quad \vec{E}_j^{(r)} = E_j^{(r)} \vec{e}_y$$

Donc la composante tangentielle du champ H dans le j-ème milieu est donnée par :

$$H_{jx} = \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j}{\mu_j} [-E_j^{(t)} + E_j^{(r)}]$$

Pour la l'interface j, entre les milieux j et j+1 : $H_{j-x} = H_{j+x}$

$$\text{Donc : } \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j}{\mu_j} [-E_j^{(t)} + E_j^{(r)}] = \frac{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1}}{\mu_{j+1}} [-E_{j+1}^{(t)} + E_{j+1}^{(r)}]$$

Les champs électriques de chaque coté de l'interface sont égaux, ce qui permet d'écrire : $E_{j+1}^{(r)} \equiv E_{j+}^{(r)}, E_{j+1}^{(t)} \equiv E_{j+}^{(t)}$ et $E_j^{(r)} \equiv E_{j-}^{(r)}, E_j^{(t)} \equiv E_{j-}^{(t)}$

Dans cette nouvelle notation, l'indice "j" se réfère à la j-ème interface, avec j⁻ se référant au côté gauche (entrant) de l'interface, et j⁺ se référant au côté droit (sortant) de l'interface. Dans cette notation nous avons :

$$\frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j}{\mu_j} [E_{j-}^{(r)} - E_{j-}^{(t)}] = \frac{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1}}{\mu_{j+1}} [E_{j+}^{(r)} - E_{j+}^{(t)}]$$

Nous combinons ce résultat avec l'équation (2.3) pour éliminer $E_{j+}^{(r)}$ et obtenir :

$$E_{j+}^{(t)} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) E_{j-}^{(t)} + \left(1 - \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) E_{j-}^{(r)} \right] \quad (2.4)$$

De la même manière, nous pouvons éliminer $E_{j+}^{(t)}$ pour obtenir :

$$E_{j+}^{(r)} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) E_{j-}^{(t)} + \left(1 + \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) E_{j-}^{(r)} \right] \quad (2.5)$$

Ces expressions permettent de calculer le champ électrique à travers une interface si nous connaissons les champs E réfléchis et transmis sur le côté «entrant» du j-ème interface. En utilisant le fait que :

$$E_{j-}^{(r)} = \tilde{r}_j \cdot E_{j-}^{(t)}$$

Où $\tilde{r}_j$ est le coefficient de réflexion de la j-ème interface. Les équations (2.4) et (2.5) peuvent s'écrire :

$$E_{j+}^{(t)} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) + \left(1 - \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) \tilde{r}_j \right] E_{j-}^{(t)} \quad (2.6)$$

$$E_{j+}^{(r)} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) + \left(1 + \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) \tilde{r}_j \right] E_{j-}^{(t)} \quad (2.7)$$

Nous devons maintenant décrire le comportement du champ au fur et à mesure qu'il se propage à travers le j-ème milieu depuis l'interface (j-1) vers l'interface j. Le champ à l'intérieur du milieu j est composé des champs transmis et réfléchis atténués par des termes exponentiels:

$$\vec{E}_{j+1} = \vec{E}_{j+}^{(t)} e^{i(\omega t - \vec{k}_{j+1}^t \cdot \vec{r})} + \vec{E}_{j+}^{(r)} e^{i(\omega t - \vec{k}_{j+1}^r \cdot \vec{r})}$$

avec :

$$\vec{k}_{j+1}^t \cdot \vec{r} = \frac{2\pi \tilde{n}_{j+1}}{\lambda} (-x \sin \theta_{j+1} + z \cos \theta_{j+1}) \text{ et } \vec{k}_{j+1}^r \cdot \vec{r} = \frac{2\pi \tilde{n}_{j+1}}{\lambda} (-x \sin \theta_{j+1} - z \cos \theta_{j+1})$$

Après simplification et on ignorant le terme $e^{i\omega t} e^{i\frac{2\pi\tilde{n}_{j+1}}{\lambda} \cdot x \sin \theta_{j+1}}$ le champ électrique peut être écrit sous la forme :

$$\vec{E}_{j+1} = \left[(1 + \tilde{r}_j') \cos\left(\frac{2\pi\tilde{n}_{j+1}}{\lambda} \cdot z \cos \theta_{j+1}\right) - i \left(\frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) (1 - \tilde{r}_j') \sin\left(\frac{2\pi\tilde{n}_{j+1}}{\lambda} \cdot z \cos \theta_{j+1}\right) \right] \cdot E_j^{(t)} \quad (2.8)$$

Cette équation donne le champ électrique dans n'importe quelle couche intermédiaire. Cependant, il est nécessaire de connaître la partie transmise du champ électrique $E_j^{(t)}$, juste avant l'interface qui précède la couche intermédiaire souhaitée. La notation illustrée dans la figure (II.4) nous permet de tirer l'expression de $E_j^{(t)}$:

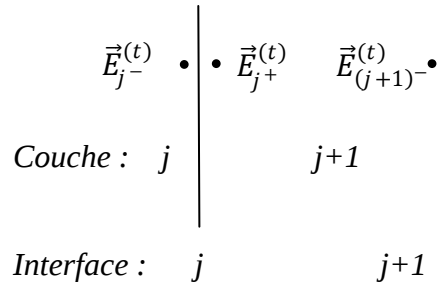


Figure II .4 : Partie transmise du champ électrique à une interface

$$E_{(j+1)-}^{(t)} = E_{j+}^{(t)} e^{\frac{2\pi\tilde{n}_{j+1}}{\lambda} d_{j+1} \cos \theta_{j+1}}$$

où d_{j+1} est l'épaisseur de la couche (j+1), et par conséquent :

$$E_{(j+1)-}^{(t)} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) + \left(1 - \frac{\tilde{n}_j \cos \theta_j \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_j} \right) \tilde{r}_j' \right] e^{\frac{2\pi\tilde{n}_{j+1}}{\lambda} d_{j+1} \cos \theta_{j+1}} E_j^{(t)} \quad (2.9)$$

II.4 Polarisation P

Pour la polarisation P, la géométrie des champs est représentée sur la figure I.3.b. Le champ électrique (incident, réfléchi, transmis) à deux composantes, une tangentielle et l'autre perpendiculaire à la surface. Les composantes tangentielles sont continues dans chaque interface, par contre les composantes normales sont discontinues. Le vecteur magnétique est continu dans toutes les interfaces car il est toujours tangentiel.

II.4.1 Milieu d'incidence

Tout d'abord, nous considérons le milieu incidence, où nous supposons encore que n_0 est réel, c'est-à-dire $k_0 = 0$. Le champ total est la somme vectorielle des ondes planes incidente et réfléchie. Nous définissons $\vec{E}_1$ comme le champ électrique total dans ce milieu et $\vec{E}_1^{0(t)}$ comme l'intensité du champ électrique incident :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^{0(t)} e^{i(\omega t - \vec{k}_0^t \cdot \vec{r})} + \vec{E}_1^{0(r)} e^{i(\omega t - \vec{k}_0^r \cdot \vec{r})}$$

Les équations qui décrivent les valeurs moyennes temporelles des composantes tangentielle et normale des champs dans le milieu d'incidence sont données par :

$$\langle \vec{E}_{1x}^2 \rangle = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_0 \left[1 + R - 2R^{1/2} \cos \left(\frac{-4\pi n_1}{\lambda} z \cdot \cos \theta_0 + \delta \right) \right] \left(\vec{E}_1^{0(t)} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$\langle \vec{E}_{1z}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \left[1 + R + 2R^{1/2} \cos \left(\frac{-4\pi n_1}{\lambda} z \cdot \cos \theta_0 + \delta \right) \right] \left(\vec{E}_1^{0(t)} \right)^2 \quad (2.11)$$

Si l'on souhaite connaître la valeur moyenne du champ total il suffit de calculer :

$$\langle \vec{E}_1^2 \rangle = \langle \vec{E}_{1x}^2 \rangle + \langle \vec{E}_{1z}^2 \rangle$$

Cette équation s'applique également au substrat et aux couches intermédiaires.

II.4.2 Substrat

Comme dans le cas de la polarisation S, nous supposons que le substrat est semi-infini, donc il n'y a pas de champ réfléchi. Par conséquent, les moyennes temporelles des composantes du champ électrique dans le substrat s'écrivent :

$$\langle \vec{E}_{mx}^2 \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{t}_1|^2 \cos^2 \theta_0 \left(\vec{E}_1^{0(t)} \right)^2 e^{\frac{4\pi}{\lambda} \text{Im}(\tilde{n}_m \cos \theta_m) z} \quad (2.12)$$

$$\langle \vec{E}_{mz}^2 \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{t}_1|^2 \sin^2 \theta_0 \left(\vec{E}_1^{0(t)} \right)^2 e^{\frac{4\pi}{\lambda} \text{Im}(\tilde{n}_m \cos \theta_m) z} \quad (2.13)$$

II.4.3 Phases intermédiaire

Comme nous l'avons fait pour la polarisation S, le développement des équations mathématiques dans le cas de la polarisation P permet de trouver facilement les formules qui régissent le comportement des composantes du champ électrique dans n'importe quelle couche intermédiaire.

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(j+1)x} = & \left[(1 - \tilde{r}_j') \cos \theta_j \cdot \cos \left(\frac{2\pi \tilde{n}_{j+1}}{\lambda} \cdot z \cos \theta_{j+1} \right) + i \left(\frac{\tilde{n}_j \cos \theta_{j+1} \cdot \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1} \cdot \mu_j} \right) (1 \right. \\ & \left. + \tilde{r}_j') \sin \left(\frac{2\pi \tilde{n}_{j+1}}{\lambda} \cdot z \cos \theta_{j+1} \right) \right] \cdot E_j^{(t)-} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(j+1)z} = & n_1 \sin \theta_1 \left[(1 + \tilde{r}_j') \left(\frac{\tilde{n}_j \mu_{j+1}}{\tilde{n}_{j+1}^2 \cdot \mu_j} \right) \cos \left(\frac{2\pi \tilde{n}_{j+1}}{\lambda} \cdot z \cos \theta_{j+1} \right) + i \left(\frac{\cos \theta_j}{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_{j+1}} \right) (1 \right. \\ & \left. - \tilde{r}_j') \sin \left(\frac{2\pi \tilde{n}_{j+1}}{\lambda} \cdot z \cos \theta_{j+1} \right) \right] \cdot E_j^{(t)-} \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec :

$$E_{(j+1)-}^{(t)} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{n}_j}{\tilde{n}_{j+1}} \left[\left(1 + \frac{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_j}{\tilde{n}_j \cos \theta_{j+1}} \right) + \left(1 - \frac{\tilde{n}_{j+1} \cos \theta_j}{\tilde{n}_j \cos \theta_{j+1}} \right) \tilde{r}_j' \right] e^{\frac{2\pi \tilde{n}_{j+1}}{\lambda} d_{j+1} \cos \theta_{j+1}} E_j^{(t)-} \quad (2.16)$$

Chapitre III

Analyse numérique

III.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons utiliser les équations déterminées dans le chapitre précédent pour voir leur utilité dans la détermination de la variation du champ électrique de quelques structures multicouches.

III.2 Algorithme de calcul

Suivant l'algorithme représenté sur la figure (III.1) nous avons développé un programme sous maple nous permettant de calculer rapidement la variation du champ électrique dans chaque couche de l'empilement par la méthode de Rouard. Les graphes ont été tracés en utilisant le logiciel Origin 9.

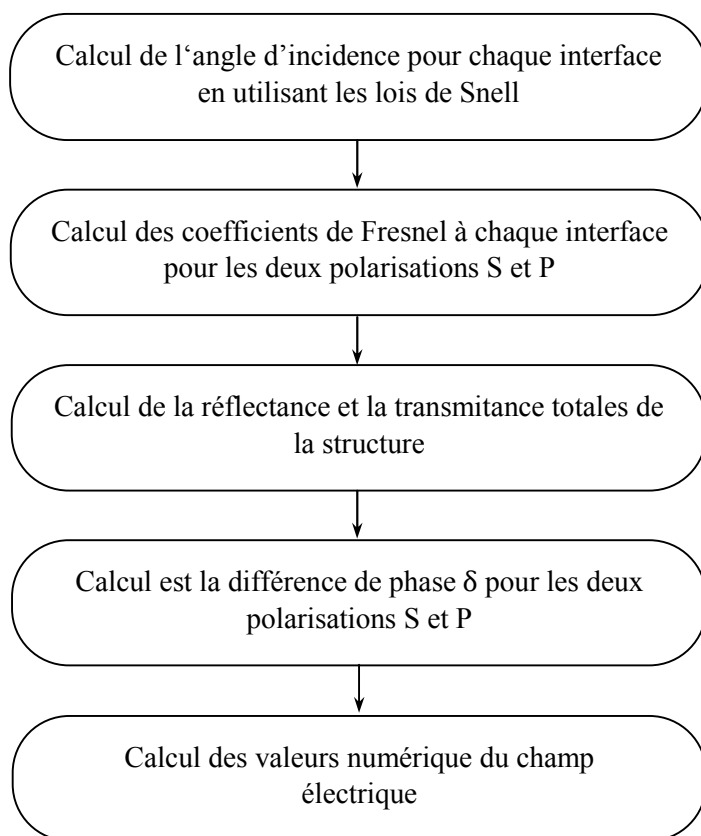


Figure III.1 : Algorithme de calcul de la variation du champ électrique dans une structure multicouche par la méthode de Rouard

III.3 Deux couches sur un substrat transparent absorbant

Considérant un film mince constitué de deux couches intermédiaire représenté sur la figure III.2. Pour une lumière monochromatique de longueur d'onde 550 nm, incidente à partir de l'air avec un angle de 45° . La première couche est le silicium cristallin d'indice $\tilde{n} = 3.9822 - i0.0334$ et d'épaisseur $d_1 = 400$ nm, la deuxième couche est Al_2O_3 d'indice $n = 1.6203$ et d'épaisseur $d_2 = 400$ nm. Le substrat est le GaAs d'indice $\tilde{n} = 4.047 - i0.324$.

Sur les figures (III.3.a) et (III.3.b) on a tracé la variation de la valeur relative du champ électrique en fonction de la profondeur, en supposant que l'intensité incidente est égale à l'unité.

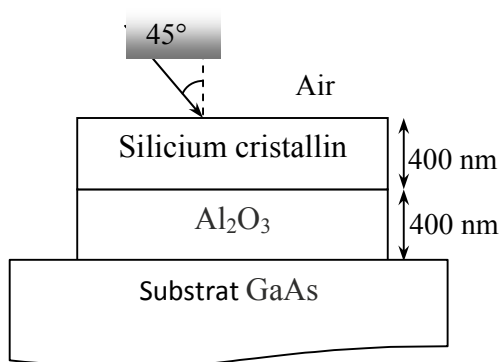


Figure III.2 : Diagramme du film

On remarque clairement que les champs électriques de la polarisation S et la composante suivant x de la polarisation P sont tous continus à l'interface, comme exigent les équations de Maxwell pour les composantes tangentielles du champ électrique. La composante suivant z de la polarisation P est discontinue.

Les oscillations de la valeur moyenne temporelle du champ électrique observées sont dues aux réflexions multiples. La courbe du champ dans la couche de silicium montre une oscillation qui diminue parce que le silicium est un matériau absorbant (le terme exponentiel dans les équations s'éteint lorsque z augmente), mais dans l'air et Al_2O_3 , qui sont transparents, la courbe ne décroît pas. Sur le substrat on ne remarque pas ces oscillations parce qu'il n'y a pas de réflexion, mais on remarque bien la décroissance du champ électrique à cause de l'absorption du GaAs.

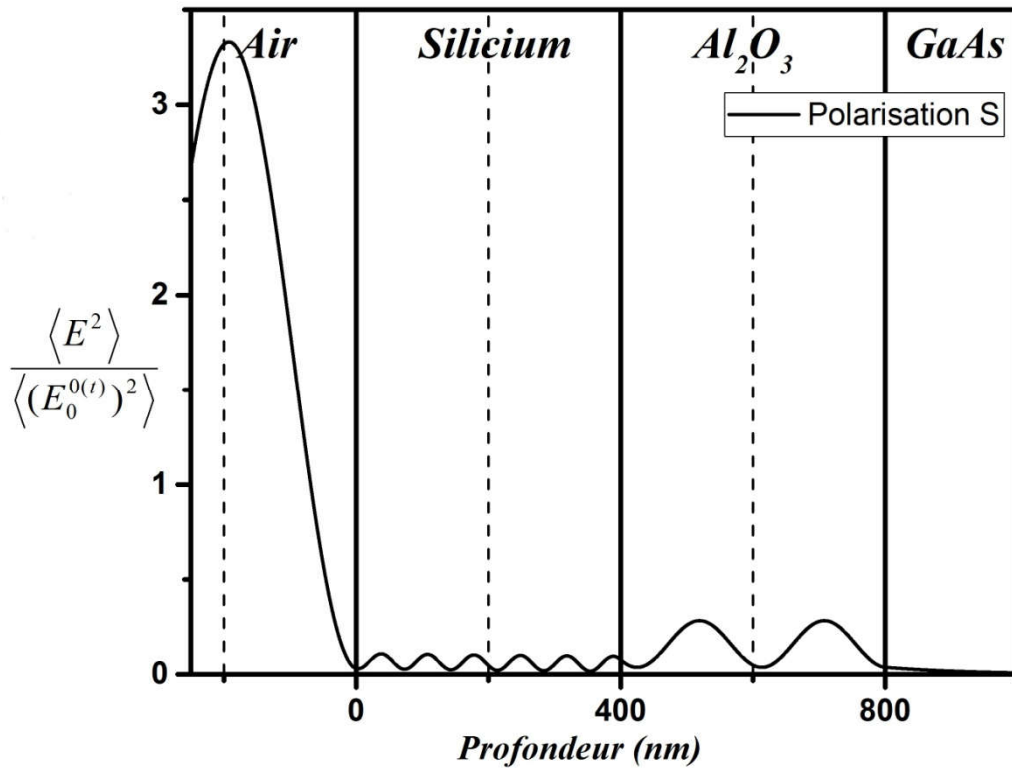


Figure III.3.a: La variation de la valeur relative du champ électrique en fonction de la profondeur de polarisation S.

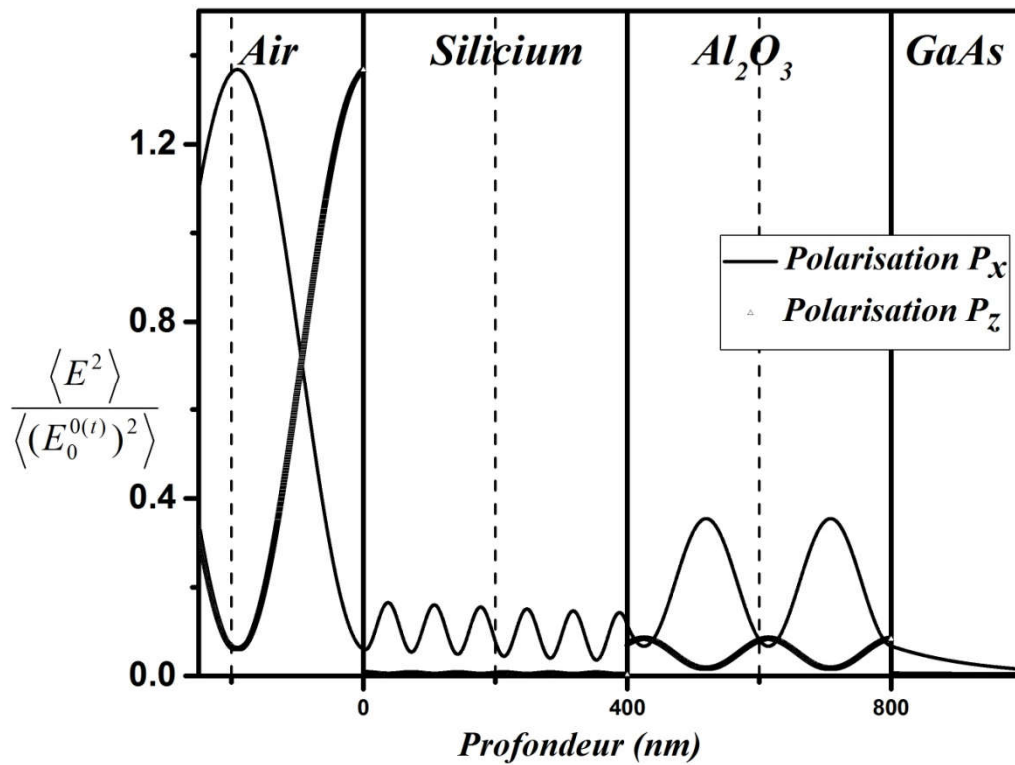


Figure III.3.b : la variation de la valeur relative du champ électrique en fonction de la profondeur de polarisation P.

III.4 Traitement antireflet

Des arrangements expérimentaux optiques sont souvent constitués un grand nombre d'élément en transmission (lentilles, lames retardatrices, polariseurs, lames séparatrices, prismes etc.). Chacun des éléments introduit alors des pertes d'intensité de l'ordre de quelques pour cent qui sont dues à la réflexion sur les deux surfaces de l'élément (interface vide-matériaux optique). On cherche donc à minimiser ces pertes par la déposition d'une ou plusieurs couches diélectriques sur la surface du matériau optique (substrat).

Dans un premier temps on considère une seule couche (n_1) déposée sur un substrat, c.-à-d. $n_0 = 1$ (vide), $n_2 = n_s$ (substrat). Il s'agit de déterminer les paramètres optimaux de la couche (épaisseur d , indice n_1) qui minimisent la réflectivité de l'ensemble sous incidence normale pour une longueur d'onde donnée. On minimise le coefficient de réflexion r donnée par l'expression :

$$r = \frac{r_{01} + r_{12} \cdot e^{-2i\delta_1}}{1 + r_{01} \cdot r_{12} \cdot e^{-2i\delta_1}}, \quad \delta_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1 \cdot d_1 \cos \theta_1}{\lambda}$$

Il suffit d'annuler le numérateur :

$$r_{01} = -r_{12} \cdot e^{-2i\delta_1}$$

$$a. \quad 2 \cdot n_1 \cdot d_1 = m\lambda : r_{01} = -r_{12} \Rightarrow \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} = -\frac{n_1 - n_s}{n_1 + n_s} \text{ pas de solution}$$

$$b. \quad 2 \cdot n_1 \cdot d_1 = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} : r_{01} = r_{12} \Rightarrow \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} = \frac{n_1 - n_s}{n_1 + n_s} \Rightarrow n_1 = \sqrt{n_s} \quad , \quad n_1 \cdot d_1 = \frac{\lambda}{4}$$

Un revêtement parfaitement antiréfléchissant pour λ consiste alors d'un film d'épaisseur $\frac{\lambda}{4}$ (couche quart d'onde) et d'indice de réfraction : $n_1 = \sqrt{n_s}$.

Avec le substrat en verre ($n_s = 1.51$) l'indice idéal de la couche serait égale à $n_1 = 1.23$, il est alors difficile de trouver un revêtement solide durable avec un indice de réfraction aussi faible, cependant, un résultat acceptable est obtenu à l'aide d'une couche de MgF_2 avec $n_1 = 1.38$, un tel film donnerait une réflectance de 1.3% (à comparer avec 4.2% du verre non traité). Effectivement, des matériaux qui se prêtent bien à la déposition en couches durables ne sont pas toujours disponibles pour un substrat donné. On peut gagner un degré de liberté supplémentaire avec un revêtement en bicouche où chacun des films à une épaisseur de $\frac{\lambda}{4}$.

$$\text{Le coefficient de réflexion est égale à : } r = \frac{n_2^2 - n_s n_1^2}{n_2^2 + n_s n_1^2}, \quad R = \left(\frac{n_2^2 - n_s n_1^2}{n_2^2 + n_s n_1^2} \right)^2$$

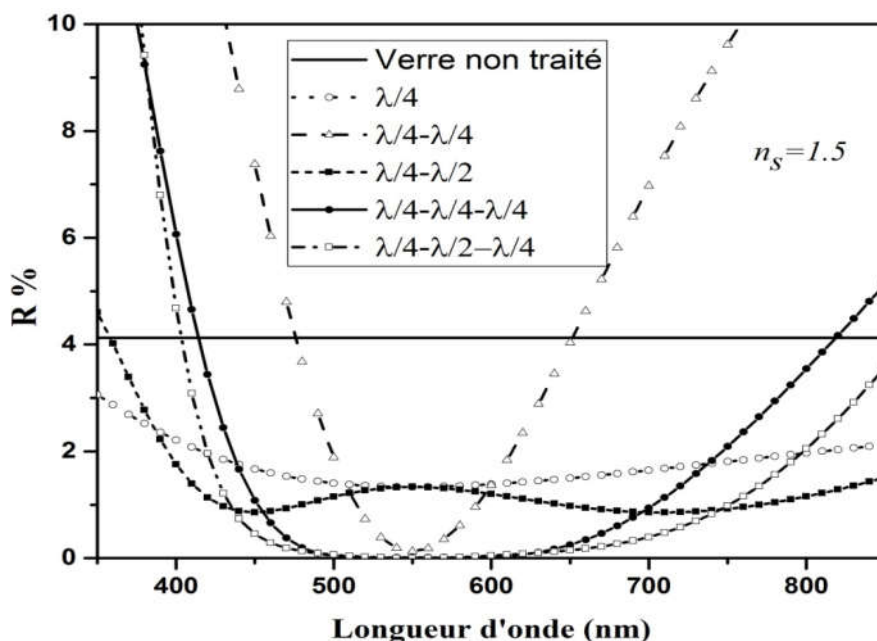


Figure III.4 : Traitement antireflet

La réflectance s'annule lorsque : $\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{n_s}$

Le cas idéal pour le substrat en verre ($\frac{n_2}{n_1} = 1.23$) est assez bien approché par la combinaison de CeF_3 ($n_1=1.65$) et ZrO_2 ($n_2=2.1$) montrée sur la figure III.4 ; on trouve $\frac{n_2}{n_1} = 1.27$ et une réflectance de 0.1%. Les pertes en réflexion sont très faibles pour la longueur d'onde choisie, par contre la puissance réfléchie croît assez rapidement lorsqu'on s'éloigne de cette longueur d'onde.

Souvent on a besoin d'un traitement antireflet qui couvre une large gamme de fréquences (par exemple toute la région de la lumière visible). Une solution de ce problème consiste à utiliser une couche à $\frac{\lambda}{4}$ en combinaison avec une couche à $\frac{\lambda}{2}$. La couche demi-onde n'a strictement aucun effet sur la réflectance à la longueur d'onde optimisée. La bicouche se comporte alors comme une seule couche quart d'onde, par contre pour les longueurs d'onde voisines la couche demi-onde aide à maintenir R à des valeurs basses (voir exemple pour $n_1=1.38$, $n_2=1.6$ sur la figure III.4).

Un choix de paramètres encore plus vaste apparaît lorsqu'on prend en compte trois couches : il est ensuite possible de maintenir la réflectance très basse dans une région spectrale assez large. Dans le cas de trois couches $\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4}$.

La condition du minimum est : $\frac{n_1 n_3}{n_2} = \sqrt{n_s}$

La réflectance se trouve encore un peu améliorée lorsqu'on considère une structure $\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$ (voir la figure III.4). La couche $\frac{\lambda}{2}$ permet d'étendre l'intervalle de la faible réflectance, par contre, elle n'a aucun effet sur la réflectance à la longueur d'onde optimisée (on obtient la formule pour la réflectance d'une bicouche $\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4}$, $R = 0.1\%$).

La figure III.4 résume tous les cas de revêtement antireflet discutés dans cette section. Les courbes ont été calculées à l'aide de la méthode de Rouard. L'épaisseur pour une couche a été choisie afin de satisfaire la condition $nd = \frac{\lambda}{4}$ ou $nd = \frac{\lambda}{2}$ pour $\lambda = 550 \text{ nm}$.

III.4.1. Revêtement antireflet (AR) monocouche

L'une des structures de film mince courantes les plus simples est un revêtement antireflet (AR) monocouche d'une épaisseur d'un quart de la longueur d'onde de la lumière incidente (interférence destructive).

$$\lambda = n_1 \lambda_1 \Rightarrow d_1 = \frac{\lambda}{4n_1}$$

λ est la longueur d'onde incidente et λ_1 la longueur d'onde dans la couche antireflet.

Les revêtements AR sont couramment utilisés sur des instruments optiques où il est important de diminuer la part de lumière réfléchie et donc augmenter la part de lumière transmise.

Sur la figure III.5, nous avons tracé la courbe du champ électrique pour un revêtement antireflet à monocouche avec les paramètres suivants : $\lambda = 550 \text{ nm}$, le milieu d'incidence est l'air ($n=1.00$), l'angle d'incidence est égale à 0° , la couche intermédiaire est HfO_2 ($n=1.916$, $d=72 \text{ nm}$), le substrat est le silicium. Dans le cas de l'incidence normale, il n'y a pas de composante suivant z de la polarisation P. En outre, la composante x devient identique à polarisation S de sorte que le graphe ne contient qu'une seule courbe. La réflectance pour cette conception est assez faible, $R = 0,17\%$, en comparaison avec un substrat de silicium non revêtu aurait une réflectance de $= 36\%$ à l'incidence normale. On a tracé sur la figure III.6, les intensités réfléchies et transmises.

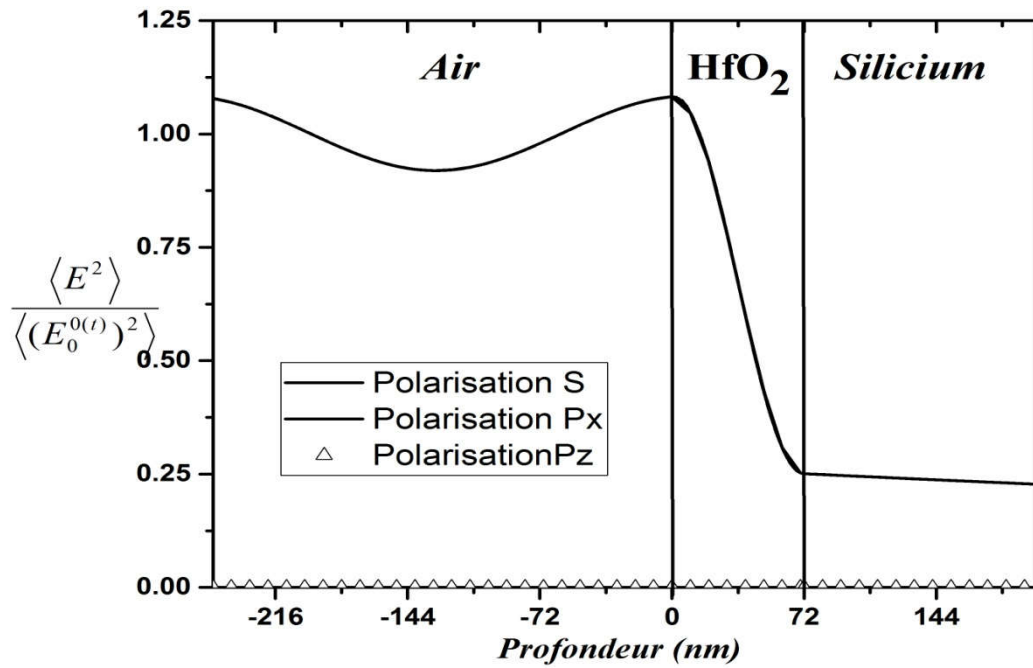


Figure III.5 : Revêtement antireflet (AR) monocouche d'une épaisseur d'un quart de la longueur d'onde, incidence normale.

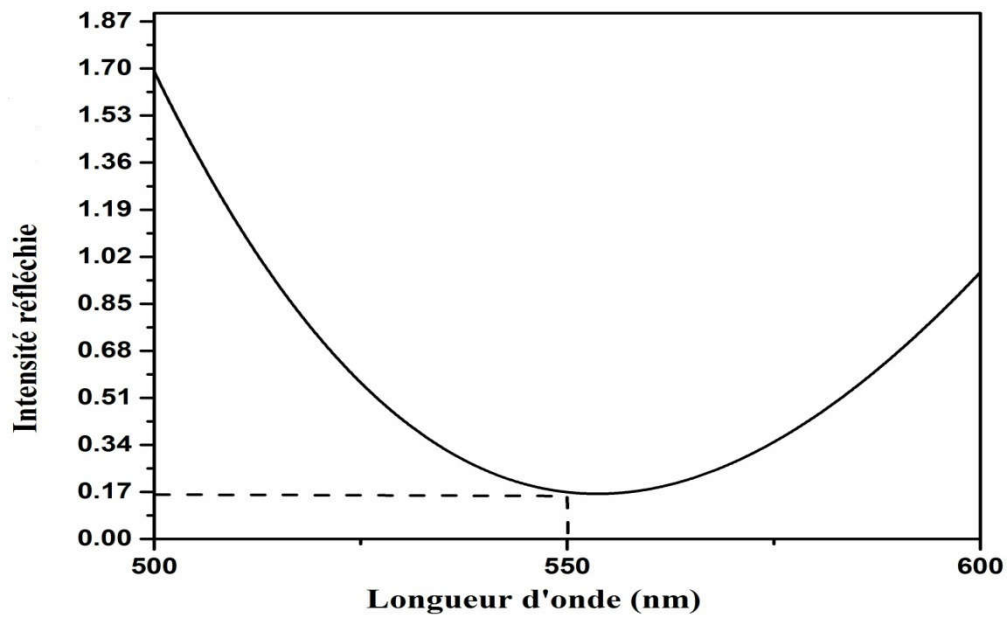


Figure III.6.a : Intensité réfléchie en fonction de la longueur d'onde

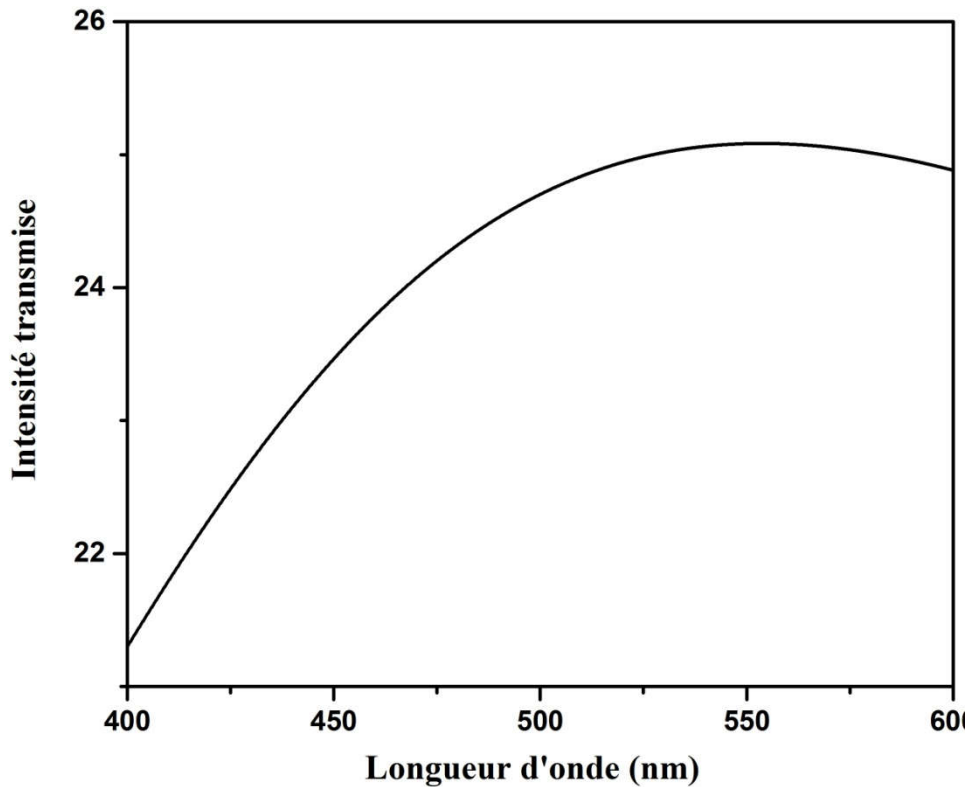


Figure III.6.b : Intensité transmise en fonction de la longueur d'onde

On note que le champ électrique dans le milieu incident oscille autour d'une valeur d'environ 1.0, qui est l'intensité incidente. Cela est logique, puisque la réflectance est suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas beaucoup de champ réfléchi pour augmenter les valeurs du champ dans l'air. Si la réflectance était très élevée, on s'attendrait à ce que le champ oscille autour d'une valeur d'environ deux, puisque ce serait la valeur de la somme des champs incident et réfléchi.

Ensuite, on utilise la même conception, mais avec un angle d'incidence égal à 30° . Ces paramètres donnent des réflectances totales de $R_s = 1,4 \%$ et $R_p = 0,74 \%$. Un substrat de silicium non revêtu aurait des réflectances de $R_s = 41,0 \%$ et $R_p = 30,6 \%$ à cet angle d'incidence.

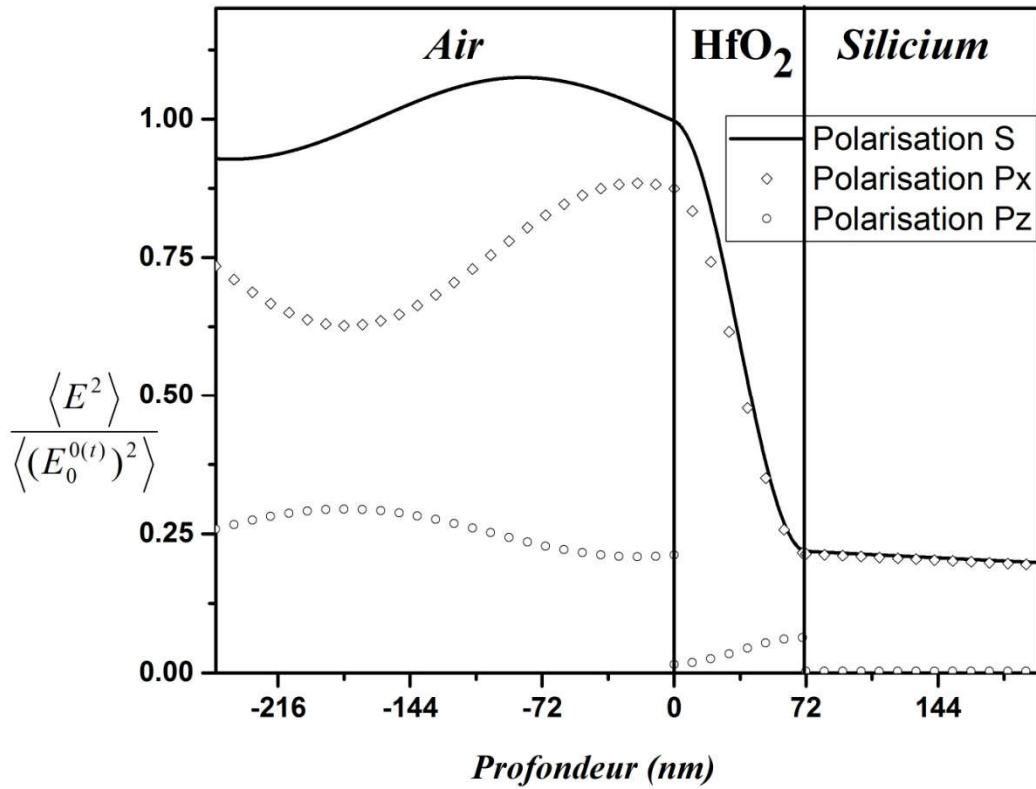


Figure III.7 : Revêtement antireflet (AR) monocouche d'une épaisseur d'un quart de la longueur d'onde, l'angle d'incidence égal à 30° , l'épaisseur de la couche HfO_2 a été fixée à 72 nm

Les propriétés anti-réfléchissantes du film deviennent beaucoup moins efficaces si l'épaisseur de couche n'est pas égale à un quart de la longueur d'onde. La figure III.8 a été réalisée avec des paramètres identiques à ceux utilisés pour produire la figure III.7, sauf que l'épaisseur de la couche a été fixée à 150 nm. Cette épaisseur est proche d'une demi-longueur d'onde, ce qui est un très mauvais modèle antireflet. Les réflectances pour cette conception sont $R_S = 41,0\%$ et $R_P = 30,6\%$, qui sont presque identiques à un substrat de silicium non revêtu.

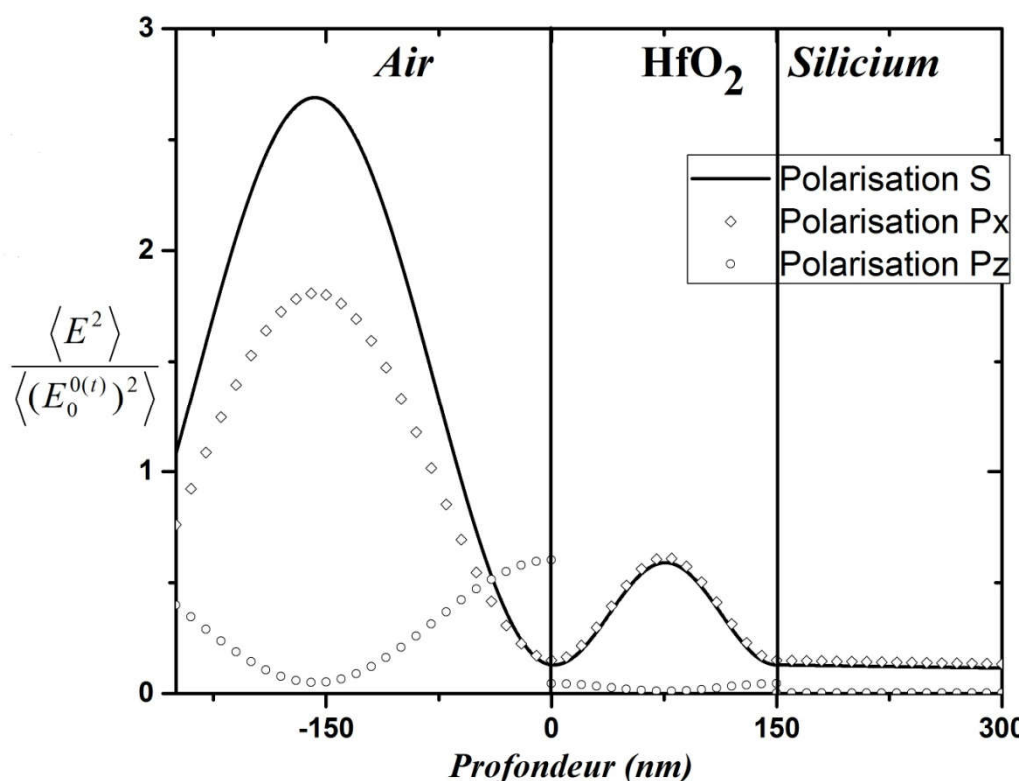


Figure III.8 : Revêtement antireflet (AR) monocouche imparfait, l'angle d'incidence égal à 30° , l'épaisseur de la couche HfO_2 a été fixée à 150 nm

En comparant cette courbe à la figure III.8, on note que le champ réfléchi est beaucoup plus élevé dans le milieu d'incidence, en raison de l'épaisseur de couche HfO_2 . Comme cette couche n'est pas un quart d'onde, les réflexions multiples ne sont pas déphasées et elles s'ajoutent, générant une grande onde réfléchie.

III.5 Miroirs diélectriques

Dans ce paragraphe, on étudiera la question si un empilement de couches déposées sur un substrat ne pourra pas augmenter la réflectance du diélectrique jusqu'à des valeurs voisines de l'unité. Lors de l'étude des couches antiréfléchissantes nous avons systématiquement trouvé la solution où une couche de faible indice est suivie par une couche de plus grand indice. Les réflexions partielles sur les interfaces sont ensuite en opposition de phase donnant naissance à l'interférence destructive. Afin d'obtenir une grande réflectance il convient d'inverser cet ordre: les réflexions partielles seront ensuite en phase et l'interférence

constructive permettra d'augmenter la puissance réfléchie. Nous allons étudier le cas d'un empilement de N bicouches identiques $\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4}$ où le premier film de la bicouche possède un grand indice de réfraction n_h et le second film possède un faible indice n_b comme montré sur le schéma suivant. Pour N bicouches le coefficient de réflexion s'exprime ensuite :

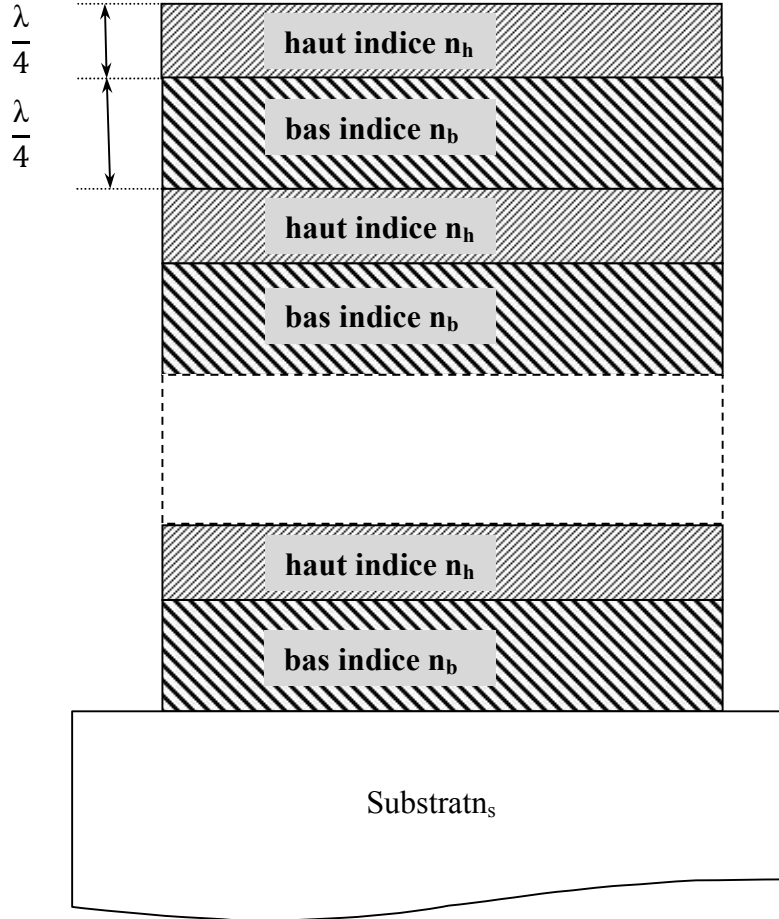


Figure III.9 : Miroir diélectrique, empilement de N bicouches identiques $\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4}$ où le premier film de la bicouche possède un grand indice de réfraction n_h et le second film possède un faible indice n_b

$$r = \frac{\left(-\frac{n_b}{n_h}\right)^N - n_s \left(-\frac{n_h}{n_b}\right)^N}{\left(-\frac{n_b}{n_h}\right)^N + n_s \left(-\frac{n_h}{n_b}\right)^N}$$

et on trouve pour la réflectance R :

$$R = \left(\frac{\left(\frac{1}{n_s}\right) \left(\frac{n_b}{n_h}\right)^{2N} - 1}{\left(\frac{1}{n_s}\right) \left(\frac{n_b}{n_h}\right)^{2N} + 1} \right)^2$$

Il est clair que R s'approche très rapidement de l'unité déjà pour un petit nombre de bicouches lorsque le rapport n_b/n_h est faible. Par exemple pour $n_b = 1.38$ (MgF_2) et $n_h = 2.35$ (ZnS) on obtient $R = 40\%$ pour $N = 1$, $R = 99.56\%$ pour $N = 6$ et $R = 99.95\%$ pour $N = 8$. Le rôle de l'indice de réfraction du substrat devient tout à fait mineur pour un grand nombre de couches. La réflectance est élevée dans une gamme de longueurs d'onde plus ou moins large au voisinage de λ . A l'extérieur de cette bande $R(\lambda)$ présente un caractère oscillatoire avec plusieurs maxima et minima. Si on néglige l'absorption et la diffusion, la transmittance de la structure est égale à :

$$T = 1 - R$$

On peut alors construire sur le même principe d'autres éléments optiques comme des filtres spectraux.

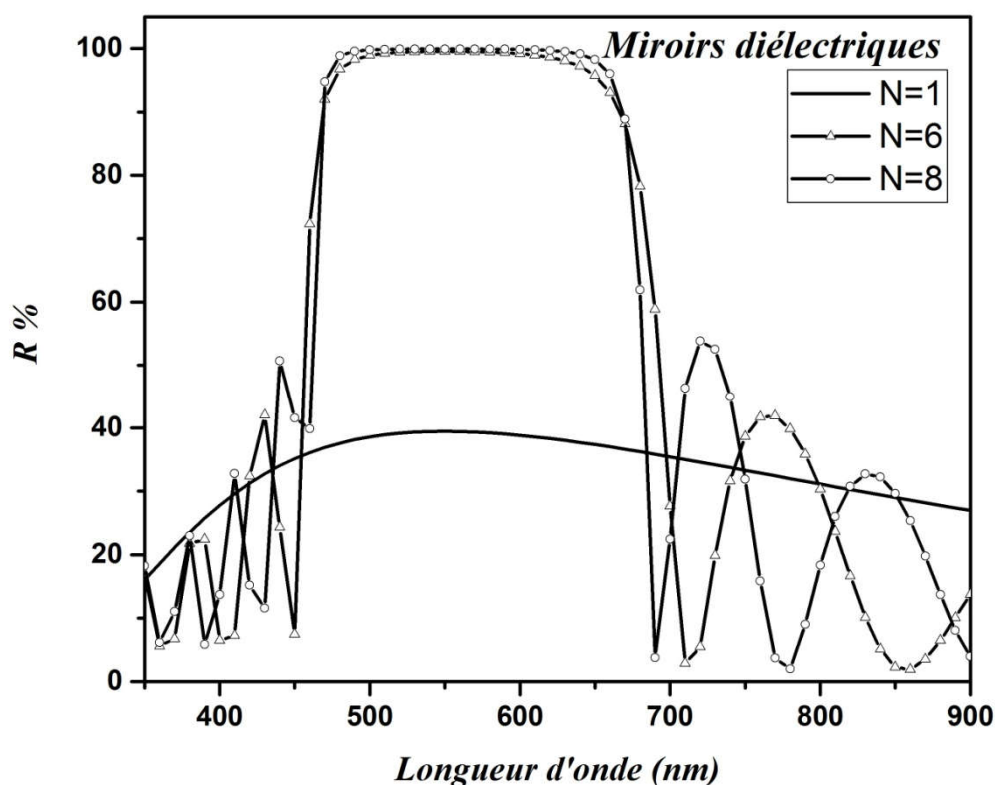


Figure. III.10 : Réflectance d'un miroir diélectrique ($N=1, N=6, N=8$)

Une application très récente des revêtements multicouches sont des miroirs diélectriques "chirpés" (chirped mirrors en anglais). Il s'agit d'un empilement de plusieurs dizaines de bicouches $n_h - n_b$. L'épaisseur optique des films (voisine de $\lambda/4$ d'une longueur d'onde centrale) varie légèrement en fonction de la profondeur. Une composante spectrale caractérisée par sa longueur d'onde λ_1 est alors réfléchi lorsqu'elle atteint l'endroit en profondeur où l'épaisseur

optique des couches est égale $\lambda_1/4$. Ainsi, différentes composantes spectrales d'une impulsion optique sont réfléchies dans des endroits différents et, par conséquent, elles parcourent des distances optiques différentes. Des miroirs chirpés bien conçus peuvent alors servir à compenser la dispersion de la vitesse de groupe des impulsions.

La figure III.11 montre le champ électrique d'un empilement à huit couches contenant des couches alternées de TiO_2 ($n = 2.2303$) et MgF_2 ($n = 1.3862$) sur un substrat en verre pour un angle d'incidence de 30° et une lumière de longueur d'onde de 550 nm. Chaque couche d'un quart de longueur d'onde d'épaisseur (60 nm pour TiO_2 et 100 nm pour MgF_2), ce qui donne des réflectances de $R_S = 95,9\%$ et $R_P = 90,4\%$ pour la longueur d'onde et l'angle d'incidence données.

Nous remarquons que le champ électrique pour la polarisation S atteint une valeur maximale près de 4,0, donc sa valeur moyenne est presque 2,0, qui sont la valeur que nous devrions obtenir pour un miroir parfait.

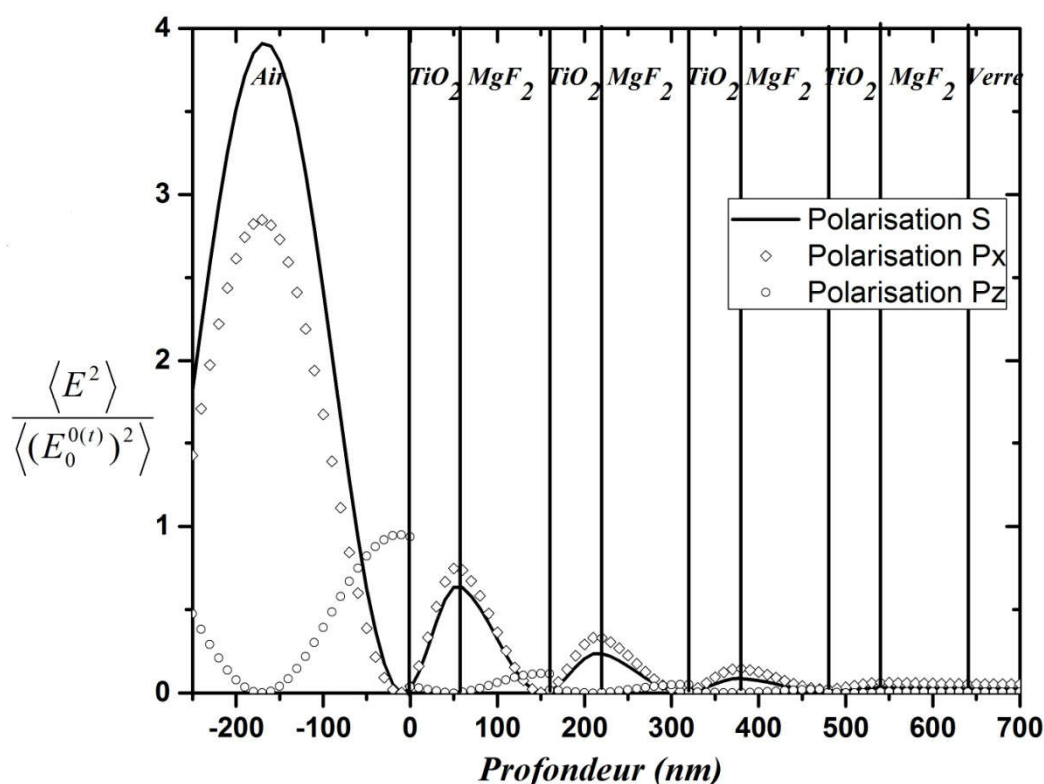


Figure III.11 : Structure à haute réflexion, huit couches alternées (TiO_2 , MgF_2) d'épaisseurs quarts de longueur d'onde.

III.6 Angle critique (Réflexion totale) :

Lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu plus dense à un milieu moins dense, le rayon réfracté s'éloigne de la normale, soit l'angle de réfraction est plus grand que l'angle d'incidence. En effet, la variation entre les deux angles n'est pas linéaire, l'angle de réfraction varie plus rapidement que l'angle d'incidence, comme prédit par la loi de Snell-Descartes. Il peut donc arriver que le rayon réfracté soit perpendiculaire à la normale, soit avec un angle de 90° . L'angle d'incidence qui provoque cette situation est appelé « l'angle critique ». Lorsque l'angle d'incidence est supérieur à l'angle critique, le faisceau est "piégé" à l'intérieur du milieu d'incidence d'indice supérieur (figure III.12), et ne passe pas par l'interface, mais présente plutôt une réflexion interne totale. Ce phénomène est à la base des communications par fibre optique.

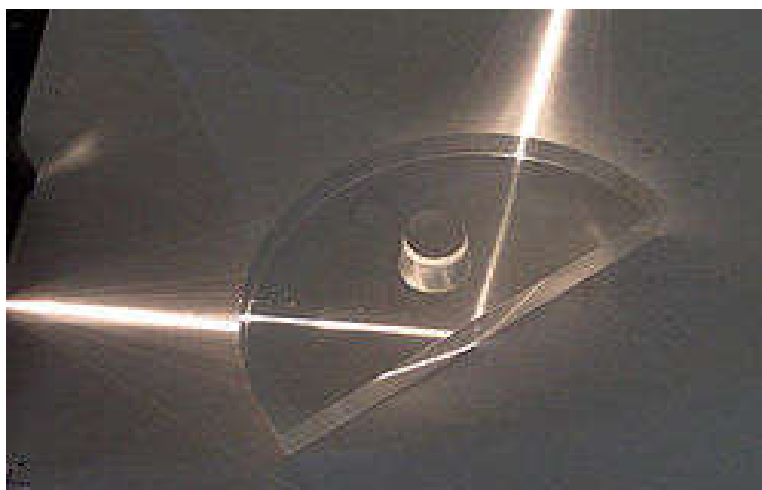


Figure III.12: Le faisceau de lumière d'angle supérieur à l'angle critique est totalement réfléchi.

Considérons un rayon se propageant dans un milieu d'indice n , par exemple du verre $n=1.5$), et rencontrant un dioptré séparant ce milieu de l'air, avec une longueur d'onde incidente de 550 nm (dans l'air). Premièrement, la figure III.13 montre graphiquement la réflectance de la lumière tracée par rapport à l'angle d'incidence. La réflectance passe à 1.0 à l'angle critique de 41.8° .

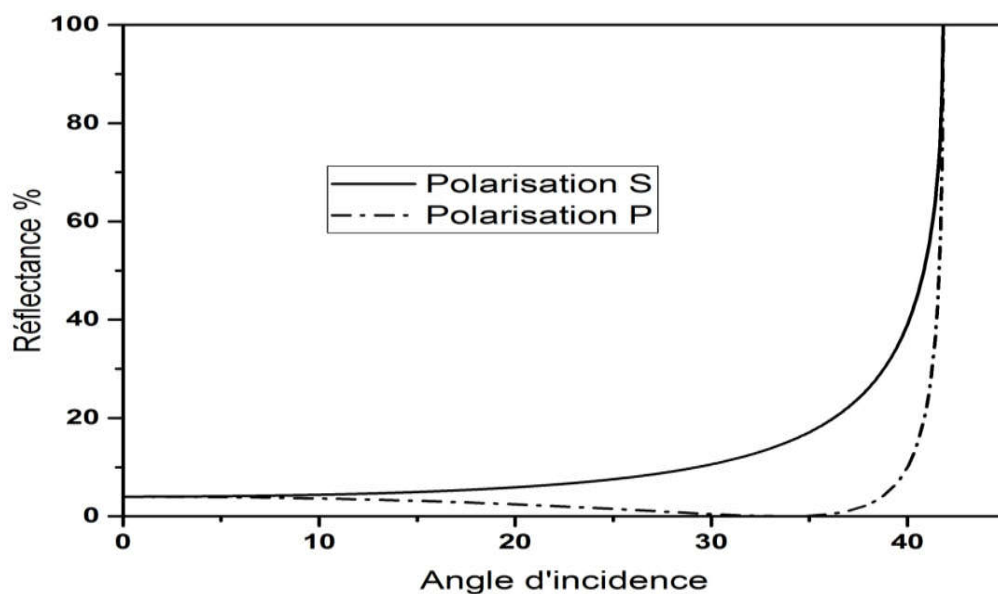


Figure III.13 : Réflectance en fonction de l'angle d'incidence de la lumière passant du verre à l'air

La figure III.14, représente les intensités du champ électrique à un angle d'incidence de 40° , ce qui est juste inférieur à l'angle critique. Notons que le champ électrique est constant car il n'y a qu'un champ transmis, sans champ réfléchi qui provoque des oscillations. Il n'y a pas non plus d'absorption dans le substrat.

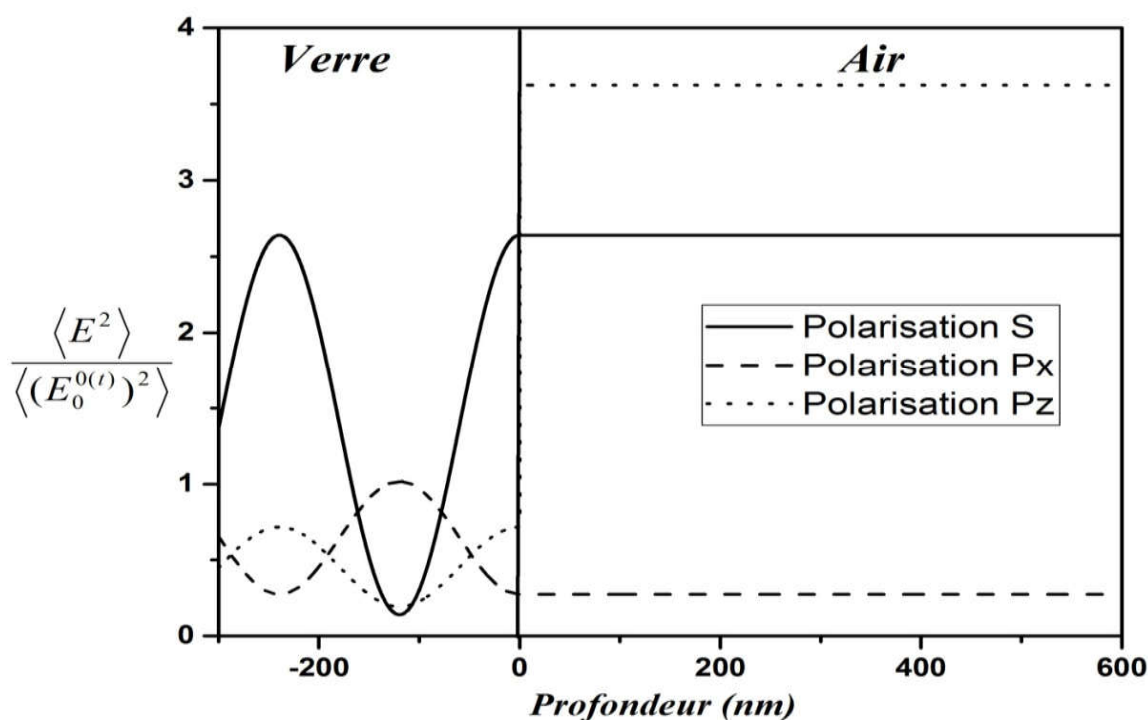


Figure III.14 : Variation du champ électrique pour un angle d'incidence ($\theta_0 = 40^\circ$) légèrement inférieur à l'angle critique, $\lambda = 550 \text{ nm}$

Pour la figure III.15, les paramètres sont identiques, sauf que l'angle d'incidence est de 45° . Ceci qui est plus grand que l'angle critique, de sorte que la lumière est entièrement réfléchie. Dans le milieu d'incidence, l'intensité du champ pour la polarisation S a un maximum de 4.0 exactement, ce qui nous indique que la valeur moyenne du champ est 2.0.

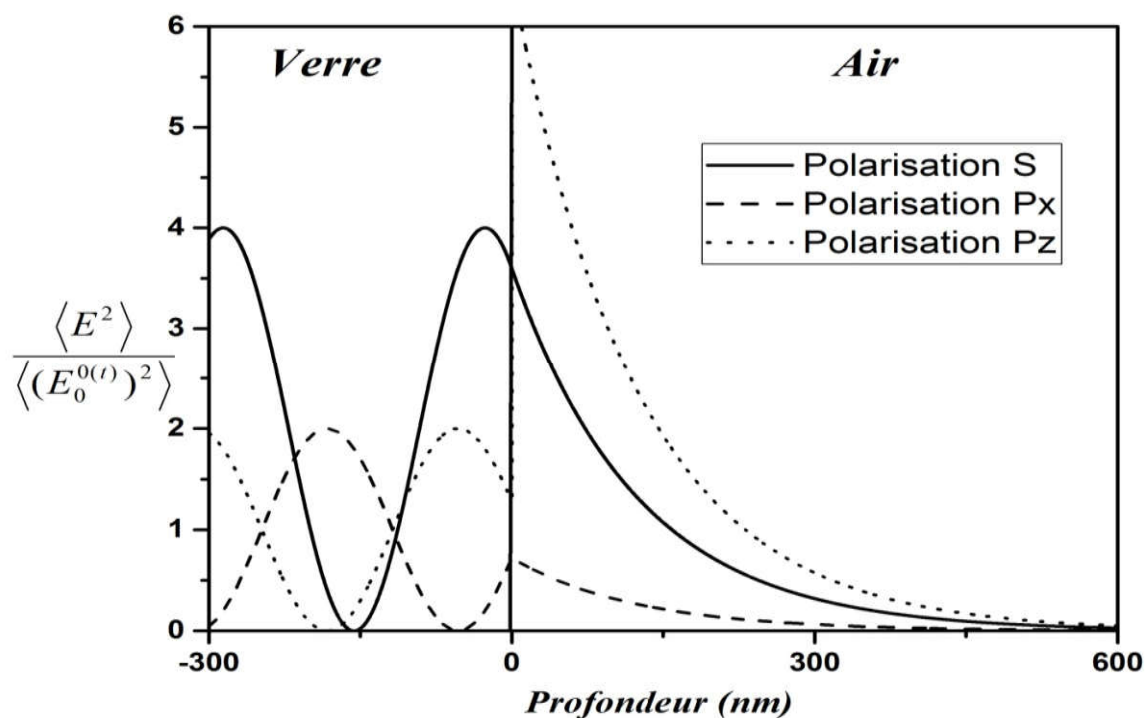


Figure III.15 : Variation du champ électrique pour un angle d'incidence ($\theta_0 = 45^\circ$) supérieur à l'angle critique, $\lambda = 550 \text{ nm}$

Cela correspond à une réflexion de 100%. De plus, la somme des composants dans le cas de la polarisation P est également deux, de sorte que la réflexion est également 100%.

Dans le substrat, on remarque que le champ décroît de manière exponentielle et tend vers zéro au-delà de l'interface, même si l'air est un support transparent. Mathématiquement, cela se produit parce que l'angle réfraction est imaginaire, donc l'argument du terme exponentiel dans les équations du substrat n'est pas nul. Mais dans ce cas, la partie imaginaire de l'argument n'est pas une conséquence des propriétés physiques du substrat, mais résulte des relations géométriques qui se produisent en raison de la réfraction de la lumière

La présence du champ dans le substrat n'est pas évidente, car la réflexion à l'interface est de 100%. Mais l'énergie est conservée car aucune énergie ne se propage loin de l'interface.

L'énergie dans le substrat se propage parallèlement à l'interface et est donc présente comme une sorte de "champ fantôme".

Enfin, on note que la composante z du champ électrique de la polarisation P est très élevée sur le côté sortant de l'interface, dépassant une valeur de 6.5 dans notre exemple. Les concepteurs de films minces doivent être conscients de cela en travaillant avec des conceptions destinées à des applications à haute intensité, comme les lasers à haute énergie. Des problèmes peuvent survenir à l'interface de plusieurs façons. Par exemple, s'il existe une impureté des particules dans le film près de l'interface, comme une poussière, les champs élevés à l'angle critique peuvent vaporiser la particule dans un «flash» d'énergie, endommageant peut-être le film. Les dommages peuvent également être amplifiés si le film contient des fissures ou des rayures, puisque les champs électriques sont encore augmentés par "effets de bord".

Conclusion

Dans ce travail, nous avons déterminé les équations qui permettent le calcul du champ électrique dans une structure de film mince multicouches. Nous avons utilisé plusieurs principes physiques pour motiver la dérivation, en particulier les coefficients de réflexion et de transmission aux interfaces et les relations de continuité ou de discontinuité des champs électrique et magnétique. Les équations simplifiées, sont récursives et peuvent être utilisées pour n'importe quel nombre arbitraire de couches intermédiaires. Ils sont sous une forme bien adaptée à l'analyse numérique avec un ordinateur.

Une fois que les équations ont été dérivées, elles ont été utilisées pour calculer les champs pour une variété de modèles de films minces, montrant le comportement du champ électrique dans plusieurs situations intéressantes. Nous avons étudié le revêtement antireflet et les miroirs diélectriques. Nous avons vu le champ qui existe au-delà d'une interface qui présente une réflexion interne totale pour la lumière incidente à des angles supérieurs à l'angle critique.

L'analyse numérique dans ce travail est un éventuel accès dans l'énorme domaine des applications de conception optique à film mince. Les exemples inclus dans ce travail ont été choisis pour illustrer quelques cas simples qui utilisent les équations dérivées, mais ne représentent pas une étude approfondie de l'optique des films minces. Alors que le travail principal était de dériver les équations «à partir de zéro», ces équations représentent un outil utile pour étudier les problèmes les plus profonds et les plus intéressants de la conception de films minces.

1. F. Abélès, Recherches sur la propagation des ondes électromagnétiques sinusoïdales dans les milieux stratifiés. Application aux couches minces, *Ann. de Physique* 5, 596–639 (1950).
2. Heavens, O. S. *Optical Properties of Thin Solid Films*. Dover Publications, New York, p 288 (1991).
3. J. C. Maxwell, On Physical Lines of Force, *Philosophical Magazine and Journal of Science*, London (1861).
4. J. C. Maxwell, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155, 459512 (1865).
5. Jackson, John David, *Classical Electrodynamics, Second Edition*; John Wiley and Sons: New York, p. 271 (1975).
6. Rouard P. 2014 *Ann. Physique*, 7, 291 (1937).