

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

## Mémoire de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Présenté à  
L'Université de Mostaganem



Par

Melle Sarra BOUHENNI

Intitulé

L'existence et l'unicité de la solution stricte d'un  
problème aux limites et de transmission sur un domaine  
avec couche mince

Soutenue le 26 Juin 2012

Devant le jury :

Mr. A. MEDEGHRI	UMAB	Professeur	Président
Mr. H. HAMMOU	UMAB	M.A.B	Examineur
Mr. O. BELHAMITI	UMAB	M.C.A	Encadreur

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Rappels et lemmes techniques</b>	<b>6</b>
1.1 Les espaces de Hölder . . . . .	6
1.1.1 Cas d'un intervalle de $\mathbb{R}$ . . . . .	6
1.1.2 Cas d'un ouvert quelconque non vide de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
1.2 Les espaces d'interpolation . . . . .	8
1.3 Lemmes techniques . . . . .	9
<b>2 Problème de transmission</b>	<b>11</b>
2.1 Problème de transmission : cas scalaire . . . . .	12
2.1.1 La résolution du problème $(P)$ : cas scalaire . . . . .	14
2.1.2 Résolution du problème sur le domaine $[0, \delta]$ . . . . .	16
2.1.3 L'opérateur d'impédance . . . . .	16
2.1.4 Résolution du problème sur le domaine $[-1, 0]$ . . . . .	17
2.2 Problème de transmission : cas abstrait . . . . .	19
2.2.1 Représentation de la solution du problème sur $[0, \delta]$ . . . . .	20
2.2.2 L'opérateur d'impédance . . . . .	27
2.2.3 Représentation de la solution du problème sur $[-1, 0]$ . . . . .	29
<b>3 L'existence et l'unicité des solutions strictes</b>	<b>34</b>
3.1 L'unicité des solutions . . . . .	34
3.2 Les conditions nécessaires et suffisantes pour $(P_+^\delta)$ . . . . .	34
3.3 Les conditions nécessaires et suffisantes pour $(P_-^\delta)$ . . . . .	44
<b>4 Exemple</b>	<b>45</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>

# Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord DIEU le tout puissant qui nous a donné durant toutes ces années la santé, le courage et la foi en nous même pour arriver à ce jour.

Je nous saurais, réellement, trouver les expressions éloquentes que mérite mon encadreur Mr O. BELHAMITI, afin de le remercier pour sa sympathie, ses encouragements, son aide, ses moyens nécessaires pour le travail et sa présence totale, au cours de cette modeste étude.

J'adresse mon remerciement aux membres de jury, le président Mr A. MEDEGHRI et l'examineur Mr H. HAMMOU, qui m'ont fait l'honneur d'évaluer, examiner, et enrichir mon modeste travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants et les responsables de notre département.

En fin, j'exprime mon remerciement à mes chers parents qui m'ont soutenu durant mon existence et mon scolarité.

# Introduction

L'objectif de ce travail et la résolution de l'équation opérationnelle donnée par

$$(u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x) \quad \text{sur } ]-1, \delta[ \quad (1)$$

avec les conditions aux limites et de transmission non homogènes

$$\begin{cases} u^\delta(-1) = f_-, & (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta; \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+), & p_-(u^\delta)'(0^-) = p_+(u^\delta)'(0^+), \end{cases}$$

où  $A$  est un opérateur linéaire fermé de domaine  $D(A)$ , non nécessairement dense dans un espace de Banach complexe  $E$ ,  $g^\delta$  est donnée dans  $C([-1, \delta]; E)$ ,  $f_-, f_+^\delta$  sont donnés dans  $E$ ,  $\delta$  est un petit paramètre fixé dans  $]0, 1]$  et  $p_-, p_+$  sont des coefficients positifs de conductivité des corps  $[-1, 0]$  et  $[0, \delta]$  respectivement, dépendant de  $\delta$ .

On supposera l'unique hypothèse d'ellipticité suivante :

$$\rho(A) \supset [0, +\infty[ \quad \text{et} \quad \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0; \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|}, \quad (2)$$

où  $\rho(A)$  est l'ensemble résolvant de  $A$ .

Plusieurs auteurs se sont penchés sur des problèmes de transmission. On mentionne, par exemple, K. Lemrabet [8] et [7] dans le cadre Hilbertien. A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, S. Maingot [4] dans les espaces  $L^p$ . O. Belhamiti [2] a résolu le problème avec les conditions non homogènes dans le cadre des espaces de Hölder.

Notre travail consiste à une synthèse de l'article de O. Belhamiti, R. Labbas, K. Lemrabet et A. Medeghri [3], dans cette article les auteurs ont utilisé la notion d'impédance caractérisée par un opérateur  $T_\delta$  obtenu en décomposant le problème en deux problèmes intermédiaires  $(P_+^\delta)$  et  $(P_-^\delta)$  ayant pour solution  $u_+^\delta$  et  $u_-^\delta$ .

Ce mémoire comporte quatre chapitres

**Le chapitre 1** est consacré aux rappels et définitions. On commencera par des résultats sur les espaces d'interpolations et on donnera aussi la définition des espaces de Hölder. On terminera ce chapitre par quelques lemmes techniques, très utiles pour la suite.

**Au chapitre 2** ce chapitre contient la construction de la solution et il est divisé en deux parties :

1. L'étude dans le cas scalaire du problème

$$\begin{cases} (u^\delta)''(x) + zu^\delta(x) = g^\delta(x) \quad \text{sur } ]-1, \delta[ \\ z \in S_{\beta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| > \beta_0\}, \quad \beta_0 \in ]0, \pi[ \\ \begin{cases} u^\delta(-1) = f_-, & (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta; \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+), & p_-(u^\delta)'(0^-) = p_+(u^\delta)'(0^+). \end{cases} \end{cases}$$

Elle permettra d'obtenir une représentation explicite de la solution, dans le cas abstrait avec le calcul fonctionnel de Dunford.

2. L'étude dans le cas abstrait du problème(1), où  $A$  vérifie l'hypothèse d'ellipticité.

**Le chapitre 3** contient les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une solution stricte du problème précédemment décrit résumés par les théorèmes suivantes

**Théorème 0.1** Soient  $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$  avec  $0 < 2\alpha_0 < 1$ ,  $\psi \in D(A)$  et  $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$  alors la représentation de  $u_+^\delta$  est l'unique solution de  $(P_+^\delta)$  satisfaisant :

1.  $u_+^\delta \in C([0, \delta]; D(A))$  si et seulement si  $A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}$  et  $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$ ,
2.  $u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E)$  si et seulement si  $A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}$  et  $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$ .

**Théorème 0.2** Soient  $g_-^\delta \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ ,  $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$  et  $f_- \in D(A)$ ,  $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$  avec  $0 < 2\alpha_0 < 1$  alors la représentation de la solution stricte  $u_-^\delta$  a la propriété

$$u_-^\delta \in C^2([-1, 0]; E) \cap C([-1, 0]; D(A))$$

si et seulement si

$$Af_- - g_-^\delta(-1) \in \overline{D(A)}, \quad g_+^\delta(0) - g_-^\delta(0) \in \overline{D(A)} \quad \text{et} \quad (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}.$$

En fin, **le chapitre 4** contient un exemple d'application.

# Chapitre 1

## Rappels et lemmes techniques

Soit  $E$  un espace de Banach complexe, muni de la norme  $\|\cdot\|_E$  et  $L(E)$  désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés sur  $E$ .

Dans la suite de ce travail, on désigne par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1} \in L(E)\},$$

L'ensemble résolvante de l'opérateur  $A$  et

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

le spectre de  $A$ .

### 1.1 Les espaces de Hölder

Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace de Banach complexe et  $\alpha \in ]0, 1[$  un nombre fixé.

#### 1.1.1 Cas d'un intervalle de $\mathbb{R}$

Soit  $I$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.1** *On désigne par*

- $B(I; E)$ , l'espace des fonctions bornées muni de la norme

$$\|f\|_{B(I; E)} = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_E.$$

- $C(I; E)$  l'espace des fonctions continues et bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{C(I; E)} = \|f\|_{B(I; E)}.$$

- $C^k(I; E)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  sont continues et bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{C^k(I; E)} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{B(I; E)}.$$

-  $C^\infty(I; E)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiable.

**Définition 1.2** Les espaces de Hölder des fonctions continues  $C^\alpha(I; E)$  et  $C^{k+\alpha}(I; E)$  avec  $k \in \mathbb{N}$  sont définis par

$$C^\alpha(I; E) = \left\{ f \in B(I; E) : [f]_{C^\alpha(I; E)} = \sup_{x, y \in I; x > y} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{(x - y)^\alpha} < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha(I; E)} = \|f\|_{B(I; E)} + [f]_{C^\alpha(I; E)}$$

et

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(I; E)} = \{f \in C^k(I; E) : f^{(k)} \in C^\alpha(I; E)\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(I; E)} = \|f\|_{C^k(I; E)} + [f^{(k)}]_{C^\alpha(I; E)}.$$

### 1.1.2 Cas d'un ouvert quelconque non vide de $\mathbb{R}^n$

Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.3** On désigne par

-  $B(\bar{\Omega}; E)$  l'espace des fonctions bornées muni de la norme

$$\|f\|_{B(\bar{\Omega}; E)} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|f(x)\|_E.$$

-  $C(\bar{\Omega}; E)$  l'espace des fonctions continues bornées muni de la norme

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega}; E)} = \|f\|_{B(\bar{\Omega}; E)}.$$

-  $C^k(\bar{\Omega}; E)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  sont continues et bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega}; E)} = \sum_{|\beta| \leq k} \|\partial^\beta f(x)\|_{B(\bar{\Omega}; E)}$$

où  $\beta$  est un multi-indice.

-  $C^\infty(\bar{\Omega}; E)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiable.

**Définition 1.4** Les espaces de Hölder des fonctions bornées de  $\Omega$  dans  $E$ ,  $C^\alpha(\bar{\Omega}; E)$  et  $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}; E)$  avec  $k \in \mathbb{N}$  sont définis par

$$C^\alpha(\bar{\Omega}; E) = \left\{ f \in B(\bar{\Omega}; E) : [f]_{C^\alpha(\bar{\Omega}; E)} = \sup_{x, y \in \bar{\Omega}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{|x - y|^\alpha} < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega}; E)} = \|f\|_{B(\bar{\Omega}; E)} + [f]_{C^\alpha(\bar{\Omega}; E)}$$

et

$$C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}; E) = \{f \in C^k(\bar{\Omega}; E) : \partial^\beta f(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega}; E)\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}; E)} = \|f\|_{C^k(\bar{\Omega}; E)} + [\partial^\beta f(x)]_{C^\alpha(\bar{\Omega}; E)}$$

où  $\beta$  est un multi-indice.

### Quelques propriétés

1. Les espaces de Hölder sont intermédiaire entre  $B^1(\overline{\Omega}; E)$  et  $B(\overline{\Omega}; E)$  :

$$B^1(\overline{\Omega}; E) \subset C^\alpha(\overline{\Omega}; E) \subset B(\overline{\Omega}; E).$$

2. Les fonctions de  $C^\alpha(\Omega; E)$  sont uniformément continues sur  $\Omega$ .
3. Dans la définition de  $C^\alpha(\overline{\Omega}; E)$ , il suffit de supposer que  $|x - y|^\alpha \leq \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  est un nombre positif très petit, car pour  $|x - y|^\alpha \geq \varepsilon$  on a toujours

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_E &\leq 2 \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E \\ &\leq 2 \frac{|x - y|^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E \\ &\leq C |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

## 1.2 Les espaces d'interpolation

Soient  $(E_0, \|\cdot\|_0)$  et  $(E_1, \|\cdot\|_1)$  deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique séparé  $F$ . On considère les espaces  $E_0 \cap E_1$  et  $E_0 + E_1$ , munis des normes respectives

$$\begin{cases} \|\varphi\|_{E_0 \cap E_1} = \|\varphi\|_{E_0} + \|\varphi\|_{E_1} & \text{si } \varphi \in E_0 \cap E_1 \\ \|\varphi\|_{E_0 + E_1} = \inf_{\varphi_i \in E_i, \varphi_0 + \varphi_1 = \varphi} (\|\varphi_0\|_{E_0} + \|\varphi_1\|_{E_1}) & \text{si } \varphi \in E_0 + E_1, \end{cases}$$

ce sont des espaces de Banach.

**Définition 1.5** Soit  $(E_0, E_1)_{\theta, p}$  un espace intermédiaire entre  $E_0 \cap E_1$  et  $E_0 + E_1$ , avec  $p \in [1, +\infty]$  et  $\theta \in ]0, 1[$ , on dit que

$$\varphi \in (E_0, E_1)_{\theta, p}$$

si et seulement si

1.  $\forall t > 0, \exists u_0(t) \in E_0, \exists u_1(t) \in E_1$  tels que

$$\varphi = u_0(t) + u_1(t),$$

2.  $t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0)$  et  $t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1)$ .

Posons

$$\begin{cases} \|\varphi\|_{\theta, p} = \inf_{\substack{u_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow E_i, i=0,1: \\ \forall t > 0, \varphi = u_0(t) + u_1(t)}} \left( \|t^{-\theta} u_0\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0)} + \|t^{1-\theta} u_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1)} \right) \\ \text{si } \varphi \in (E_0, E_1)_{\theta, p}. \end{cases}$$

Alors

$$\left( (E_0, E_1)_{\theta, p}, \|\cdot\|_{\theta, p} \right),$$

est un espace de Banach vérifiant

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta, p} \subset E_0 + E_1,$$

(avec injections continues).

**Autre définitions**

1.  $\varphi \in (E_0, E_1)_{\theta, p} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \exists u_0(t) \in E_0, \exists u_1(t) \in E_1 : \varphi = u_0(t) + u_1(t) \\ e^{-\theta t} u_0 \in L^p(\mathbb{R}, E_0), e^{(1-\theta)t} u_1 \in L^p(\mathbb{R}, E_1) \end{cases}$
2.  $\varphi \in (E_0, E_1)_{\theta, p} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists u : \mathbb{R} \rightarrow E_0 \cap E_1 : \varphi = \int_{\mathbb{R}} u(t) dt \\ e^{-\theta t} u \in L^p(\mathbb{R}, E_0) \text{ et } e^{(1-\theta)t} u \in L^p(\mathbb{R}, E_1) \end{cases}$
3.  $\varphi \in (E_0, E_1)_{\theta, p} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E_0 \cap E_1 : \varphi = \int_{\mathbb{R}_+} u(t) \frac{dt}{t} \\ t^{-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0) \text{ et } t^{1-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1). \end{cases}$

**1.3 Lemmes techniques**

Dans cette section on va énoncer quelques lemmes techniques très utiles pour la suite de ce travail.

On considère  $A$  un opérateur linéaire fermé de domaine  $D(A)$ ,  $\gamma$  une courbe simple joignant  $\infty e^{i\theta}$  à  $\infty e^{-i\theta}$  avec  $\theta_0$  choisi entre  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  telle que  $\gamma \subset \rho(A) \setminus \mathbb{R}_+$  ( $\rho(A)$  désigne l'ensemble résolvante de  $A$ ) et le secteur

$$\sum_{\theta_0} = \{z : |z| \geq r_0 \text{ et } \theta_0 \leq \arg z \leq 2\pi - \theta_0\},$$

où  $r_0 > 0$  fixé.

**Lemme 1.1** *Pour tout complexes  $z_1$  et  $z_2$  différents de zéro, on a*

$$|z_1 + z_2| \geq (|z_1| + |z_2|) \cos\left(\frac{\arg(z_1) - \arg(z_2)}{2}\right).$$

**Lemme 1.2** *Pour tout complexe  $z$  tel que  $|\arg(z)| \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , on a*

$$|\arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z})| \leq \theta.$$

**Lemme 1.3** *Il existe une constante  $C_{\theta_0} > 0$  telle que pour tout  $z \in \sum_{\theta_0}$  on a*

$$\left|1 + e^{-\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0} = \min\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}}, 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}\right) > 0,$$

avec  $r_0$  est assez petit.

**Lemme 1.4** *Il existe une constante  $C_{\theta_0} > 0$  telle que pour tout  $z \in \sum_{\theta_0}$  on a*

$$\left|1 - e^{-\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0} = \min\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}}, 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}\right) > 0.$$

**Remarque 1.1** *Il existe une constante  $C_{\theta_0} > 0$  indépendante de  $\delta \in ]0, 1]$  telle que pour tout  $z \in \sum_{\theta_0}$  on a*

$$\left|1 \pm e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0} > 0.$$

Pour tout  $\xi \in [-1, 0]$  et  $\delta \in ]0, 1]$ , on a

$$\Delta_z(\xi, \delta) = \cosh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}\xi - p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}\xi,$$

(cette expression apparaîtra dans les chapitres suivants).

**Lemme 1.5** Pour tout  $\delta \in ]0, 1]$  et  $z \in \Sigma_{\theta_0}$  on a

$$|\Delta_z(-1, \delta)| \geq \frac{(C_{\theta_0})^2}{4} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} > 0.$$

**Remarque 1.2** Il est important de noter qu'on a aussi la minoration

$$|\Delta_z(-1, \delta)| \geq \frac{p(C_{\theta_0})^2}{4} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} > 0.$$

En fonction de la dépendance de  $p$  en fonction de  $\delta$ , on prendra l'une ou l'autre.

**Lemme 1.6** Pour tout  $\xi \in [-1, 0]$ ,  $\delta \in ]0, 1]$  et  $z \in \Sigma_{\theta_0}$  on a

$$|\Delta_z(\xi, \delta)| \leq (1+p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\xi)}$$

et

$$|\partial_\xi \Delta_z(\xi, \delta)| \leq (1+p) |z| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\xi)}.$$

**Lemme 1.7** Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right| = \left| e^{-\sqrt{-z}x} \right| \left| \frac{1+e^{-2\sqrt{-z}(\delta-x)}}{1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}} \right| \leq C e^{-x|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2)} \\ \left| \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right| = \left| e^{-\sqrt{-z}(\delta-|x|)} \right| \left| \frac{1-e^{-2\sqrt{-z}|x|}}{1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}} \right| \leq C e^{-(\delta-|x|)|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2)} \\ \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right| = \left| e^{-\sqrt{-z}(\delta-|x|)} \right| \left| \frac{1+e^{-2\sqrt{-z}|x|}}{1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}} \right| \leq C e^{-(\delta-|x|)|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2)}, \end{array} \right.$$

pour tout  $x \in [-1, \delta]$ .

**Lemme 1.8** Soit  $A$  un opérateur linéaire fermé de domaine  $D(A)$  non nécessairement dense alors :

$$\overline{D(A)} = \overline{D(\sqrt{-A})}.$$

1. Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour chaque  $z \in \gamma$  et  $r > 0$ , on a

$$|z \pm r| \geq Cr \text{ et } |z \pm r| \geq C|z|,$$

2. Soit  $v \in ]0, 1[$ , alors il existe  $C > 0$  ne dépendant que de  $\gamma$  telle que pour chaque  $r > 0$ ,

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{|z \pm r| |z|^v} |dz| \leq \frac{C}{r^v}.$$

Les preuves de ces lemmes techniques sont trouvées dans la thèse de Belhamiti [2].

# Chapitre 2

## Problème de transmission

On considère le problème aux limites et de transmission

$$\begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x) & \text{sur } ]-1, \delta[ \\ CL \begin{cases} u^\delta(-1) = f_- \\ (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{cases} \\ CT \begin{cases} u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+) \\ p_-(u^\delta)'(0^-) = p_+(u^\delta)'(0^+), \end{cases} \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $A$  est un opérateur linéaire fermé de domaine  $D(A)$ , non nécessairement dense, inclus dans un espace de Banach complexe  $E$ ,  $g^\delta$  est donnée dans  $C([-1, \delta]; E)$  et  $f_-$ ,  $f_+^\delta$  sont donnés dans  $E$  et vérifiant certaines conditions qu'on précisera dans la suite,  $\delta$  est un petit paramètre fixé dans  $]0, 1]$ ,  $p_-$ ,  $p_+$  sont des coefficients positifs de conductivité des corps  $[-1, 0]$  et  $[0, \delta]$  respectivement, dépendent de  $\delta$ , et  $g^\delta$  c'est :

$$\begin{cases} g_-^\delta = g^\delta|_{[-1, 0]} \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E) \\ g_+^\delta = g^\delta|_{[0, \delta]} \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E), \end{cases} \quad (2.2)$$

avec  $0 < 2\alpha_0 < 1$ . Notons que l'Hölerianité de  $g_-^\delta$  et  $g_+^\delta$  implique Hölerianité globale de  $g^\delta$  si et seulement si  $g_-^\delta(0) = g_+^\delta(0)$ .

Pour analyser le problème (2.1) notre méthode consiste à résoudre d'abord le problème  $(P_+^\delta)$  sur le domaine  $]0, \delta[$  :

$$(P_+^\delta) \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur } ]0, \delta[ \\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

où  $\psi$  est un donné auxiliaire dans  $E$ , la solution de ce problème nous permettra de définir formellement l'opérateur d'impédance  $T_\delta$  par

$$(u_+^\delta)'(0) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi).$$

Ensuite, résoudre le problème  $(P_-^\delta)$  sur le domaine  $]-1, 0[$

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur } ]-1, 0[ \\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = \frac{p_+}{p_-}(u_+^\delta)'(0) = \frac{p_+}{p_-}T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_+^\delta(0)). \end{cases}$$

Pour la résolution de ces deux problèmes  $(P_+^\delta)$ ,  $(P_-^\delta)$  on utilise un problème modèle

$$(P) \begin{cases} u''(x) + Au(x) = g(x) & \text{sur } ]a, b[ \\ u(a) = u_a \\ u'(b) = u_b, \end{cases}$$

avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $u_a, u_b$  sont donnés dans  $E$  et  $g \in C^{2\alpha_0}([a, b]; E)$ .

## 2.1 Problème de transmission : cas scalaire

Dans tout cette partie  $\beta_0$  est fixé dans  $]0, \pi[$  et  $\theta_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  est défini par

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_0}{2}.$$

On pose

$$\begin{cases} \Sigma_{\beta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg \lambda| > \beta_0\} \\ S_{\theta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg \lambda| < \theta_0\}. \end{cases}$$

On présente la méthode de résolution basée sur la notion d'impédance du problème à coefficient scalaire  $z \in \Sigma_{\beta_0}$ . Cette étude nous permettra de passer au cas opérateur. Pour  $z \in \Sigma_{\beta_0}$  (voir figure 2.1).

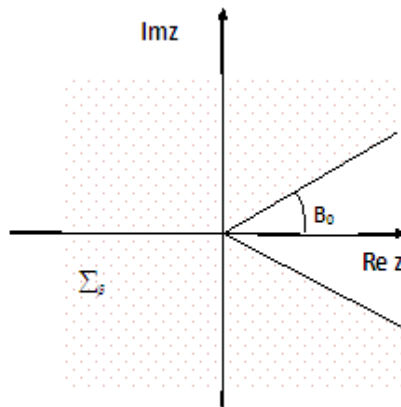


FIG. 2.1 – Le secteur  $\Sigma_{\beta_0}$

On note que  $-z \in S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg \lambda| < \pi - \beta_0\}$  (voir figure 2.2) et  $\sqrt{-z} \in S_{\theta_0}$  (voir figure 2.3).

On Considère le problème aux limites et de transmission

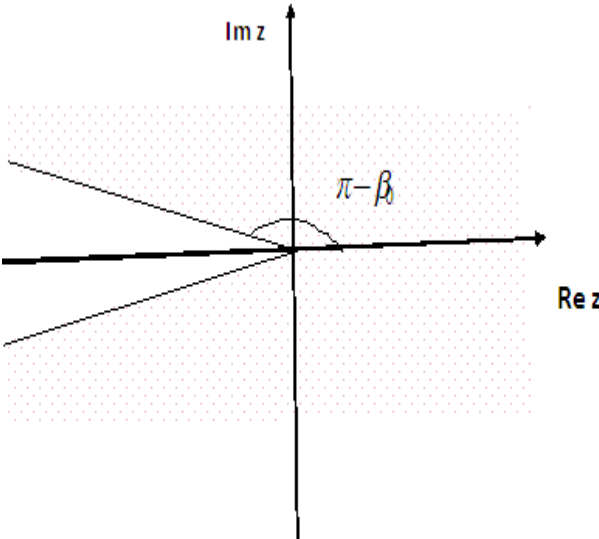


FIG. 2.2 – Le secteur  $S_1$

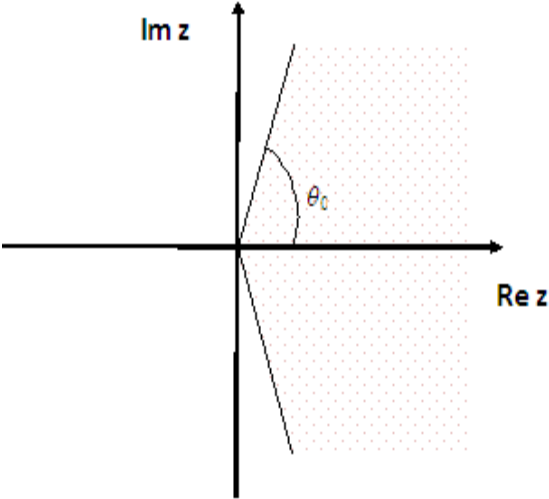


FIG. 2.3 – Le secteur  $S_{\theta_0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_-^\delta)''(x) + zu_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) \text{ sur } ]-1, 0[ \\ (u_+^\delta)''(x) + zu_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \text{ sur } ]0, \delta[ \\ CL \left\{ \begin{array}{l} u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{array} \right. \\ CT \left\{ \begin{array}{l} u_-^\delta(0) = (u_+^\delta)(0) \\ p_- (u_-^\delta)'(0) = p_+ (u_+^\delta)'(0), \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

avec  $z \in \sum_{\beta_0}$ .

### 2.1.1 La résolution du problème (P) : cas scalaire

Le problème aux limites sur  $[a, b]$  s'écrit

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} u''(x) + zu(x) = g(x) \text{ sur } ]a, b[ \\ u(a) = u_a \\ u'(b) = u_b, \end{array} \right.$$

où  $z \in \sum_{\beta_0}$ ,  $u_a$  et  $u_b$  sont données dans un espace de Banach complexe  $E$  et  $g \in C([a, b], E)$ .

La solution générale du problème (P) est de la forme

$$u(x) = Ae^{\sqrt{-z}x} + Be^{-\sqrt{-z}x}.$$

Par la méthode de la variation de la constante, on obtient

$$u(x) = A(x)e^{\sqrt{-z}x} + B(x)e^{-\sqrt{-z}x}.$$

D'autre part,

$$u'(x) = A'(x)e^{\sqrt{-z}x} + B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} + \sqrt{-z}A(x)e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z}B(x)e^{-\sqrt{-z}x}$$

et on pose que

$$A'(x)e^{\sqrt{-z}x} + B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} = 0$$

$$\begin{aligned} u''(x) &= \sqrt{-z}A'(x)e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z}B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} - zA(x)e^{\sqrt{-z}x} - zB(x)e^{-\sqrt{-z}x} \\ &= \sqrt{-z}A'(x)e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z}B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} - zu(x) \\ &= g(x) - zu(x). \end{aligned}$$

Donc on obtient ce système pour le résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} A'(x)e^{\sqrt{-z}x} + B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} = 0 \\ \sqrt{-z}A'(x)e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z}B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} = g(x), \end{array} \right.$$

alors

$$\begin{cases} A'(x) = \frac{g(x)e^{-\sqrt{-z}x}}{2\sqrt{-z}} \\ B'(x) = \frac{g(x)e^{\sqrt{-z}x}}{-2\sqrt{-z}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(x) = \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int^x e^{-\sqrt{-z}s} g(s) ds + A_0 \\ B(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_a^x e^{\sqrt{-z}s} g(s) ds + B_0. \end{cases}$$

Donc

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_a^x \sinh \sqrt{-z}(x-s) g(s) ds + A_0 e^{\sqrt{-z}x} + B_0 e^{-\sqrt{-z}x}, \quad (2.4)$$

et

$$(u)'(x) = \int_a^x \cosh \sqrt{-z}(x-s) g(s) ds + \sqrt{-z} A_0 e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z} B_0 e^{-\sqrt{-z}x}.$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} A_0 e^{\sqrt{-z}a} + e^{-\sqrt{-z}a} B_0 = u_a \\ A_0 e^{\sqrt{-z}b} - B_0 e^{-\sqrt{-z}b} = \frac{1}{\sqrt{-z}} \left( u_b - \int_a^b \cosh \sqrt{-z}(b-s) g(s) ds \right). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} A_0 = - \int_a^b \frac{e^{-\sqrt{-z}a} \cosh \sqrt{-z}(b-s)}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} g(s) ds + \frac{e^{-\sqrt{-z}a}}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_b + \frac{e^{-\sqrt{-z}b}}{2 \cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_a \\ B_0 = \int_a^b \frac{e^{\sqrt{-z}a} \cosh \sqrt{-z}(b-s)}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} g(s) ds - \frac{e^{\sqrt{-z}a}}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_b + \frac{e^{\sqrt{-z}b}}{2 \cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_a. \end{cases}$$

On remplace  $A_0$  et  $B_0$  dans (2.4) on obtient

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_a^x \sinh \sqrt{-z}(x-s) g(s) ds - \int_a^b \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a) \cosh \sqrt{-z}(b-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} g(s) ds \\ &\quad + \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-b)}{\cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_a + \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_b \\ &= I + \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-b)}{\cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_a + \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_b, \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_a^x \sinh \sqrt{-z}(x-s)g(s)ds - \int_a^b \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a) \cosh \sqrt{-z}(b-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} g(s)ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_a^x \sinh \sqrt{-z}(x-s)g(s)ds \\
&\quad - \int_a^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a) \cosh \sqrt{-z}(b-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} g(s)ds \\
&\quad - \int_x^b \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a) \cosh \sqrt{-z}(b-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} g(s)ds \\
&= - \int_a^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(s-a) \cosh \sqrt{-z}(x-b)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} g(s)ds \\
&\quad - \int_x^b \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a) \cosh \sqrt{-z}(b-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} g(s)ds.
\end{aligned}$$

Donc, la solution du problème (P) s'écrit

$$u(x) = - \int_a^b \kappa_z(x, s)g(s)ds + \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-b)}{\cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_a + \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} u_b,$$

où, le noyau de Green est donné par

$$\kappa_z(x, s) = \frac{1}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \begin{cases} \sinh \sqrt{-z}(s-a) \cosh \sqrt{-z}(x-b) & \text{si } a \leq s \leq x \\ \sinh \sqrt{-z}(x-a) \cosh \sqrt{-z}(b-s) & \text{si } x \leq s \leq b. \end{cases}$$

### 2.1.2 Résolution du problème sur le domaine $[0, \delta]$

D'après la section précédente la solution du problème ( $P_+^\delta$ ) est donnée par

$$u_+^\delta(x) = - \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x, s)g_+^\delta(s)ds + \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi + \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta,$$

avec

$$\kappa_{z,+}^\delta(x, s) = \frac{1}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} \begin{cases} \sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(x-\delta) & \text{si } 0 \leq s \leq x \\ \sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) & \text{si } x \leq s \leq \delta. \end{cases}$$

### 2.1.3 L'opérateur d'impédance

La dérivée de  $u_+^\delta$ , pour  $x \in ]0, \delta[$  est donnée par

$$\begin{aligned}
(u_+^\delta)'(x) &= - \int_0^x \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s)ds \\
&\quad - \int_x^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s)ds \\
&\quad + \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi + \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta.
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur d'impédance est définie par

$$(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \rightarrow (u_+^\delta)'(0) = T_\delta (g_+^\delta, f_+^\delta, \psi),$$

et

$$\begin{aligned} T_\delta (g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) &= - \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi + \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

### 2.1.4 Résolution du problème sur le domaine $[-1, 0]$

De même, la solution du problème  $(P_-^\delta)$  s'écrit

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= - \int_{-1}^x \frac{\cosh \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) ds - \int_x^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}} f_- + \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} p T_\delta (g_+^\delta, f_+^\delta, \psi), \end{aligned}$$

avec  $p = \frac{p_+}{p_-}$ .

En remplaçant  $T_\delta (g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)$  par son expression (2.5), on obtient

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= - \int_{-1}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(s+1) \cosh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) ds \\ &\quad - \int_x^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}s}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) + \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}} f_- \\ &\quad - \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} \psi + \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta, \end{aligned}$$

et

$$u_+^\delta(0) = u_-^\delta(0) = \psi.$$

Et

$$\begin{aligned} u_-^\delta(0) &= - \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) ds + \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}} f_- \\ &\quad - \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - \frac{p \sinh \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} \psi + \frac{p \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta, \end{aligned}$$

pour obtenir la forme finale de  $u_-^\delta(x)$ , on résoudre le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_-^\delta(0) - \psi = 0 \\ u_-^\delta(0) + \frac{p \sinh \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} \delta}{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} \psi = - \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) ds \\ \quad - \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} g_+^\delta(s) ds \\ \quad + \frac{p \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} f_+^\delta + \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}} f_-, \end{array} \right.$$

ainsi

$$\begin{aligned} u_-^\delta(0) &= \psi = - \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(s+1) \cosh \sqrt{-z} \delta}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-^\delta(s) ds \\ &\quad - \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{p \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta + \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta}{\Delta_z(-1, \delta)} f_-, \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_z(\xi, \delta) = \cosh \sqrt{-z} \xi \cosh \sqrt{-z} \delta - p \sinh \sqrt{-z} \xi \sinh \sqrt{-z} \delta \\ \text{pour } \xi \in [-1, 0[. \end{array} \right.$$

D'où

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= - \int_{-1}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(s+1) \cosh \sqrt{-z} x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) ds \\ &\quad - \int_x^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z} s}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) ds \\ &\quad - \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \int_{-1}^x \frac{p \sinh \sqrt{-z}(s+1) \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-^\delta(s) ds \\ &\quad + \int_x^0 \frac{p \sinh \sqrt{-z}(s+1) \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-^\delta(s) ds \\ &\quad + \int_0^\delta \frac{p^2 \sinh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta \Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \left[ \frac{\cosh \sqrt{-z} x}{\cosh \sqrt{-z}} - \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\cosh \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} \right] f_- \\ &\quad + \left[ \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} - \frac{p^2 \sinh \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta \Delta_z(-1, \delta)} \right] f_+^\delta, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\cosh \sqrt{-z} x}{\cosh \sqrt{-z}} - \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\cosh \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} \\ &= \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= - \int_{-1}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(s+1) \cosh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) ds \\
&\quad + \int_{-1}^x \frac{p \sinh \sqrt{-z}(s+1) \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-^\delta(s) ds \\
&= - \int_{-1}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(s+1) \Delta_z(x, \delta)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-^\delta(s) ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= - \int_x^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}s}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-^\delta(s) \\
&\quad + \int_x^0 \frac{p \sinh \sqrt{-z}(s+1) \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-^\delta(s) ds \\
&= - \int_x^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1) \Delta_z(s, \delta)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-^\delta(s) ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= - \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds \\
&\quad + \int_0^\delta \frac{p^2 \sinh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta \Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(s) ds \\
&= - \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(s) ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
u_-^\delta(x) &= - \int_{-1}^0 \kappa_{z,-}^\delta(x, s) g_-^\delta(s) ds + \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_- \\
&\quad - \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(s) ds \\
&\quad + \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} f_+,
\end{aligned}$$

avec

$$\kappa_{z,-}^\delta(x, s) = \frac{1}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} \begin{cases} \sinh \sqrt{-z}(s+1) \Delta_z(x, \delta) & \text{si } -1 \leq s \leq x \\ \sinh \sqrt{-z}(x+1) \Delta_z(s, \delta) & \text{si } x \leq s \leq 0. \end{cases}$$

## 2.2 Problème de transmission : cas abstrait

On considère le problème aux limites et de transmission

$$\begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur } ]-1, 0[ \\ (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur } ]0, \delta[ \\ CL \begin{cases} u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{cases} \\ CT \begin{cases} u_-^\delta(0) = (u_+^\delta)(0) \\ P_-(u_-^\delta)'(0) = p_+(u_+^\delta)'(0), \end{cases} \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $A$  est un opérateur linéaire fermé de domaine  $D(A)$ , non nécessairement dense, inclus dans un espace de Banach complexe  $E$ ,  $f_-$ ,  $f_+^\delta$  sont données dans  $E$ ,  $\delta$  est un petit paramètre fixé dans  $]0, 1]$ ,  $p_-$ ,  $p_+$  sont des coefficients positifs de conductivité des corps  $[-1, 0]$  et  $[0, \delta]$  respectivement, dépend de  $\delta$ , et  $g_-^\delta$ ,  $g_+^\delta$  vérifient l'hypothèse (2.2).

Comme le cas scalaire, pour la résolution du problème (2.6), on considère d'abord, le problème sur le domaine  $]0, \delta[$

$$(P_+^\delta) \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur } ]0, \delta[ \\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $\psi$  est un élément dans  $E$ , ce qui nous permettra de définir formellement l'opérateur d'impédance  $T_\delta$  par

$$(u_+^\delta)'(0) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_+^\delta(0)) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)$$

et ensuite, le problème sur le domaine  $] -1, 0[$

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur } ] -1, 0[ \\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)), \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $p = \frac{p_+}{p_-}$ .

On suppose que  $A$  vérifie l'hypothèse d'ellipticité suivante

$$\rho(A) \supset [0, +\infty[ \text{ et } \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0; \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|}, \quad (2.9)$$

cette dernière implique qu'il existe  $\theta_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $r_0 > 0$  telle que

$$\rho(A) \supset S_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leq \theta_0\} \cup \overline{B(0, r_0)},$$

et l'estimation (2.9) reste encore vraie dans  $S_{\theta_0}$ .

**Remarque 2.1** L'hypothèse (2.9) implique que  $-(-A)^{1/2}$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique pas nécessairement fortement continu en zéro [1].

### 2.2.1 Représentation de la solution du problème sur $[0, \delta]$

On considère le problème

$$(P_+^\delta) \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur } ]0, \delta[ \\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

en utilisant le calcul opérationnel de Dunford comme dans [6], [5] et [9] la solution du problème  $(P_+^\delta)$  est représentée formellement par

$$\begin{aligned}
u_+^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} \psi dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x,s) (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&= S^+(x,A) \psi + V^+(x,A) f_+^\delta + W^+(x,A, g_+^\delta),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

avec le noyan de Green

$$\kappa_{z,+}^\delta(x,s) = \frac{1}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} \begin{cases} \sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(x-\delta) & \text{si } 0 \leq s \leq x \\ \sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) & \text{si } x \leq s \leq \delta. \end{cases}$$

On rappelle que  $\gamma$  est la frontière de  $S_{\theta_0}$  orientée de  $\infty e^{i\theta}$  à  $\infty e^{-i\theta}$  (voir figure 2.4) et  $\sqrt{-z}$  est la détermination analytique définie sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .

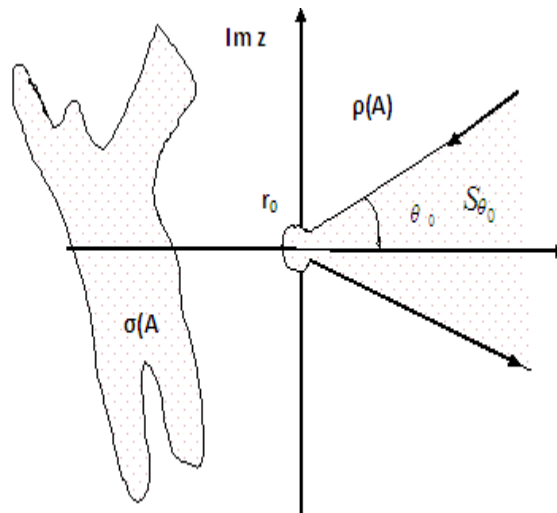


FIG. 2.4 – Le secteur  $S_{\theta_0}$  et la courbe  $\gamma$

### La convergence des intégrales

Pour la convergence absolue des intégrales

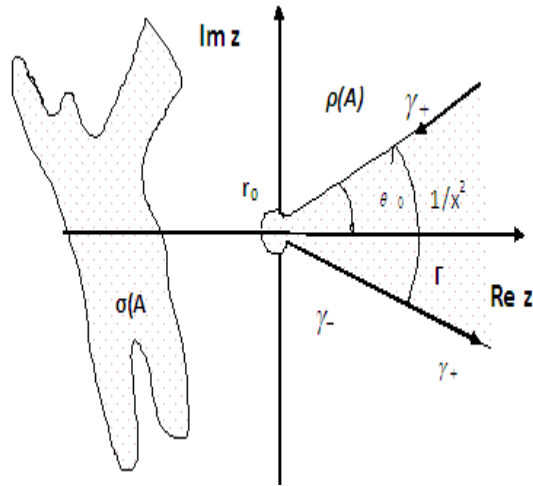
1. Soit  $\psi \in E$  et  $x \in ]0, \delta]$ , on montre la convergence de  $[S^+(x,A) \psi]$  par un découpage de  $\gamma$  en

$$\begin{cases} \gamma_+ = \{z \in \gamma : |z| \geq 1/x^2\} \\ \gamma_- = \{z \in \gamma : |z| \leq 1/x^2\}, \end{cases}$$

et on considère

$$\Gamma = \{z : |\arg(z)| \leq \theta_0 \text{ et } |z| = 1/x^2\},$$

orienté positivement (voir Figure 2.5). Alors

FIG. 2.5 – Les courbes  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ 

$$\begin{aligned}
S^+(x, A)\psi &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} \psi dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} \psi dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} \psi dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} \psi dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) - \cosh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} \psi dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup \Gamma} (A - zI)^{-1} \psi dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} \psi dz \\
&= \sum_{i=1}^4 I_i.
\end{aligned}$$

Comme  $\gamma_- \cup \Gamma$  est un contour fermé et  $(A - zI)^{-1}$  est analytique dans ce domaine,

alors  $I_3 = 0$  et

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A - zI)^{-1} \psi dz \right\|_E \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_+} \frac{|\cosh \sqrt{-z} (\delta - x)|}{|z| |\cosh \sqrt{-z} \delta|} \|\psi\|_E |dz| \quad (\text{grâce à l'hypothèse (2.9)}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0}} \int_{\gamma_+} \frac{e^{-x|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2)}}{|z|} \|\psi\|_E |dz| \quad (\text{grâce le lemme (1.7)}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0}} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\frac{\sigma^2}{x^2}} 2\sigma d\sigma \|\psi\|_E \\
&\leq C \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|\psi\|_E \\
&\leq K \|\psi\|_E,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) - \cosh \sqrt{-z} \delta}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A - zI)^{-1} \psi dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{-\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} (\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A - zI)^{-1} \psi ds dz \right\|_E \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s)}{|z|^{1/2} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} ds |dz| \|\psi\|_E \quad (\text{grâce à l'hypothèse (2.9)}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s)}}{|z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} C_{\theta_0}} ds |dz| \|\psi\|_E \quad (\text{grâce à la remarque (1.4)}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0}} \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} s}}{|z|^{1/2}} ds |dz| \|\psi\|_E \\
&\leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0}} \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{1}{|z|^{1/2}} ds |dz| \|\psi\|_E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0}} \int_{\gamma_-} \frac{x}{|z|^{1/2}} |dz| \|\psi\|_E \\
&\leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0}} \int_{r_0}^{1/x^2} \frac{x}{\rho^{1/2}} d\rho \|\psi\|_E \\
&\leq C \|\psi\|_E,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} \psi dz \right\|_E \\
&\leq \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|} \|\psi\|_E |dz| \\
&\leq \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{1/x^2} 1/x^2 d\alpha \|\psi\|_E \\
&\leq C \|\psi\|_E.
\end{aligned}$$

◆ Si  $x = 0$ , on a pas la convergence de  $S^+(x, A)\psi$  si  $\psi \in E$ , pour ce la on montre que

$$\psi \in \overline{D(A)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} S^+(x, A)\psi = \psi.$$

Pour tout  $y \in D(A)$ , on a

$$\begin{aligned}
S^+(x, A)y &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} y dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{(A - zI)^{-1} Ay}{z} dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{y}{z} dz \text{ (grâce à l'identité de la résolvante),}
\end{aligned}$$

le terme sans résolvante

$$\left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{y}{z} dz \right) = 0,$$

en effet

$$\begin{aligned}
\Gamma_R &= \gamma_R \cup C_R \\
\gamma_R &= \{z \in \gamma : |z| \leq R\} \\
C_R &= \{z \in \gamma : |z| = R\},
\end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) y}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{y}{z} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) y}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{y}{z} dz \right)$$

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) y}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{y}{z} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) y}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{y}{z} dz \right) = I_1 + I_2,$$

puisque  $\Gamma_R$  un contour fermé, alors  $I_1 = 0$  et

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) y}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{y}{z} dz = 0,$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S^+(x, A) y = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(A - zI)^{-1} Ay}{z} dz = y \quad (\text{par la formule de résidu au point } 0).$$

Pour  $\psi \in \overline{D(A)}$ , il existe  $(y_n)_n \in D(A)$  tel que

$$y_n \rightarrow \psi,$$

avec

$$\|S^+(x, A) \psi - \psi\| \leq \|S^+(x, A) \psi - S^+(x, A) y_n\| + \|S^+(x, A) y_n - y_n\| + \|y_n - \psi\| \leq \varepsilon,$$

car pour tout  $(\psi - y_n) \in E$ , on a

$$\|S^+(x, A) \psi - S^+(x, A) y_n\|_E \leq C \|\psi - y_n\|_E \leq \varepsilon,$$

d'où

$$S^+(x, A) \psi - \psi \rightarrow 0.$$

-puisque pour tout  $x \in ]0, \delta]$ ,

$$S^+(x, A) \psi \in D(A),$$

la réciproque est vraie. Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S^+(x, A) \psi = \psi \in \overline{D(A)}.$$

2. Maintenant, on regarde le terme  $V^+(x, A) f_+^\delta$ . Pour tout  $x \in [0, \delta]$  et  $f_+^\delta \in E$ ,

$$\begin{aligned} \|V^+(x, A) f_+^\delta\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \right\|_E \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|\sinh \sqrt{-z} x|}{|z|^{3/2} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} \|f_+^\delta\|_E |dz| \quad (\text{d'après l'hypothèse (2.9)}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0}} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}}{|z|^{3/2}} \|f_+^\delta\|_E |dz| \quad (\text{grâce à la remarque (1.4)}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0}} \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \leq C \|f_+^\delta\|_E. \end{aligned}$$

3. En fin, on va voir le terme  $W^+(x, A, g_+^\delta)$ .

Soit  $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ , on a (grâce à l'hypothèse (2.9) et le lemme (1.7)) pour  $z \in \gamma$  et  $\forall x \in [0, \delta]$

$$\begin{aligned}
\|W^+(x, A, g_+^\delta)\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x, s) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \right\|_E \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{|\sinh \sqrt{-z}s| |\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)|}{|z|^{3/2} |\cosh \sqrt{-z}\delta|} \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} ds |dz| \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{|\sinh \sqrt{-z}x| |\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s)|}{|z|^{3/2} |\cosh \sqrt{-z}\delta|} \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} ds |dz| \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{3/2}} \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} ds |dz| \\
&\quad + \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{3/2}} \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} ds |dz| \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} \cosh \operatorname{Re}(\sqrt{-z}s)}{|z|^{3/2}} \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} ds |dz| \\
&\quad + \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s)}{|z|^{3/2}} \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} ds |dz| \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s}}{|z|^{3/2}} \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} ds |dz| \\
&\quad + \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)}}{|z|^{3/2}} \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} ds |dz| \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^2} |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\quad + \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \frac{2 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^2} |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq K \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)}.
\end{aligned}$$

### 2.2.2 L'opérateur d'impédance

En faisant un calcul formelle de la dérivée de  $u_+^\delta$ , pour  $x \in [0, \delta]$  on a

$$\begin{aligned}
(u_+^\delta)'(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} \psi dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&= \sum_{i=1}^3 I_i.
\end{aligned}$$

Où  $I_1$  est le premier plus le deuxième terme.

1. Soit  $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$  et  $x \in [0, \delta]$  on a

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_E &\leq \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \right\|_E \\
&\quad + \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \right\|_E,
\end{aligned}$$

et d'après le lemme (1.7) et l'hypothèse (2.9)

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_E &\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|} ds |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\quad + \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|} ds |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-s)}}{|z|} ds |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\quad + \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)}}{|z|} ds |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\quad + \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \frac{2 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq K \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)}.
\end{aligned}$$

2. Si  $\psi \in D(A)$  alors pour tout  $x \in [0, \delta]$  on a d'après l'identité de la résolvante

$$I_2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} A\psi dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} \psi dz,$$

et puisque le deuxième terme est nul,

$$\begin{aligned} \|I_2\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} A\psi dz \right\|_E \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} |1 + e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}|} \|A\psi\|_E |dz| \\ &\leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0}} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2}} |dz| \|A\psi\|_E \leq C \|A\psi\|_E. \end{aligned}$$

3. Si  $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$  alors pour tout  $x \in [0, \delta]$  on a d'après l'identité de la résolvante

$$I_3 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{(-z)^{1/2} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{(-z)^{1/2} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta dz.$$

et puisque le deuxième terme est nul,

$$\begin{aligned} \|I_3\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{(-z)^{1/2} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \right\|_E \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}} |dz| \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_E \leq K \|f_+^\delta\|_{D(\sqrt{-A})}. \end{aligned}$$

-Donc l'opérateur d'impédance est définie par

$$(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \rightarrow (u_+^\delta)'(0) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi),$$

or

$$\begin{aligned} T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta dz. \end{aligned}$$

### 2.2.3 Représentation de la solution du problème sur $[-1, 0]$

On considère le problème  $(P_-^\delta)$  sur  $[-1, 0]$

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur } ]-1, 0[ \\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = p(u_+^\delta)'(0). \end{cases}$$

Comme pour le problème  $(P_+^\delta)$ , le calcul opérationnel de Dunford donne la représentation formelle de la solution de ce problème

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 \kappa_{z,-}^\delta(x, s) (A - zI)^{-1} g_-^\delta(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+ dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &= S^-(x, A) f_- + N^-(x, A, g_-^\delta) + V^-(x, A) f_+ + W^-(x, A, g_+^\delta), \end{aligned} \tag{2.11}$$

avec

$$\kappa_{z,-}^\delta(x, s) = \frac{-1}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} \begin{cases} \sinh \sqrt{-z}(s+1) \Delta_z(x, \delta) & \text{si } -1 \leq s \leq x, \\ \sinh \sqrt{-z}(x+1) \Delta_z(s, \delta) & \text{si } x \leq s \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_z(\xi, \delta) = \cosh \sqrt{-z}\xi \cosh \sqrt{-z}\delta - p \sinh \sqrt{-z}\xi \sinh \sqrt{-z}\delta \\ \text{pour } \xi \in [-1, 0]. \end{cases}$$

#### La convergence des intégrales

Pour la convergence absolue des intégrales, on a

1. ► Soit  $f_- \in E$  et  $x \in ]-1, 0]$ , pour montrer la convergence de  $[S^-(x, A) f_-]$ , comme pour  $[S^+(x, A) \psi]$  on découpe  $\gamma$  en

$$\begin{cases} \gamma_+ = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{(x+1)^2} \right\} \\ \gamma_- = \left\{ z \in \gamma : |z| \leq \frac{1}{(x+1)^2} \right\}, \end{cases}$$

et on considère

$$\Gamma = \left\{ z : |\arg(z)| \leq \theta_0 \text{ et } |z| = \frac{1}{(x+1)^2} \right\},$$

orienté positivement. Alors

$$\begin{aligned}
S^-(x, A) f_- &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z(x, \delta) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup \Gamma} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&= \sum_{i=1}^4 g_i.
\end{aligned}$$

$g_3 = 0$ , puisque  $\gamma_- \cup \Gamma$  est un contour fermé et  $(A - zI)^{-1}$  est analytique dans ce domaine, et

$$\begin{aligned}
\|g_1\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \right\|_E \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_+} \frac{|\Delta_z(x, \delta)|}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|} \|f_-\|_E |dz| \quad (\text{grâce à l'hypothèse (2.9)}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_+} \frac{(1+p) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|} \|f_-\|_E |dz| \quad (\text{d'après le lemme (1.6)}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_+} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}}{|z| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}} \|f_-\|_E |dz| \quad (\text{grâce à le lemme (1.5)}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z| > \frac{1}{(x+1)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|} |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \frac{2e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|f_-\|_E,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|g_2\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z(x, \delta) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{\partial_s \Delta_z(s, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- ds dz \right\|_E \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{|\partial_s \Delta_z(s, \delta)|}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|} \|f_-\|_E ds |dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{(1+P) |z|^{1/2} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-\delta)}}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|} ds |dz| \|f_-\|_E \quad (\text{d'après le lemme (1.6)}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{(1+P) |z|^{1/2} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-\delta)}}{|z| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} ds |dz| \|f_-\|_E \quad (\text{d'après le lemme (1.5)}) \\
&\leq \frac{(1+P)}{2\pi} \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{1/2}} ds |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq \frac{(1+P)}{2\pi} \int_{\gamma_-} \frac{x+1}{|z|^{1/2}} |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq \frac{(1+P)}{2\pi} \int_{r_0}^{1/(x+1)^2} \frac{x+1}{|z|^{1/2}} |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq \frac{(1+P)}{2\pi} \int_{r_0}^{1/(x+1)^2} \frac{x+1}{|z|^{1/2}} |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq C \|f_-\|_E,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|g_4\|_E &= \left\| -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} f_- dz \right\|_E \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|} \|f_-\|_E |dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{1} \frac{1}{(x+1)^2} d\alpha \|f_-\|_E \\
&\leq C \|f_-\|_E.
\end{aligned}$$

► Si  $x = -1$ , on a pas la convergence de  $S^-(x, A) f_-$  si  $f_- \in E$ , pour ce la on montre que

$$f_- \in \overline{D(A)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} S^-(x, A) f_- = f_-.$$

Comme dans  $S^+(\cdot, A)$ ,

$$\forall y \in D(A) : \lim_{x \rightarrow -1^+} S^-(x, A) y = y.$$

Alors pour  $f_- \in \overline{D(A)}$ , il existe  $(y_n)_n \in D(A)$  tel que

$$y_n \rightarrow f_-,$$

Avec

$$\|S^-(x, A) f_- - f_-\| \leq \|S^-(x, A) f_- - S^-(x, A) y_n\| + \|S^-(x, A) y_n - y_n\| + \|y_n - f_-\| \leq \varepsilon,$$

car pour tout  $(f_- - y_n) \in E$ , on a

$$\|S^-(x, A) \psi - S^-(x, A) y_n\|_E \leq C \|f_- - y_n\|_E \leq \varepsilon,$$

d'où

$$S^-(x, A) f_- - f_- \rightarrow 0.$$

-puisque pour tout  $x \in ]-1, 0]$ ,

$$S^-(x, A) f_- \in D(A),$$

la réciproque est vraie. Alors

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} S^-(x, A) f_- = f_- \in \overline{D(A)}.$$

2. Soit  $g_-^\delta \in C([-1, 0]; E)$ , on a pour chaque  $z \in \gamma$  et pour tout  $x \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned} \|N^-(x, A, g_-^\delta)\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 \kappa_{z,-}^\delta(x, s) (A - zI)^{-1} g_-^\delta(s) ds dz \right\|_E \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \int_{-1}^x \frac{|\Delta_z(x, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)|}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{3/2}} ds |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \int_x^0 \frac{|\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(x+1)|}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{3/2}} ds |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)}, \end{aligned}$$

et d'après les lemmes (1.5), (1.6) et l'hypothèse (2.9)

$$\begin{aligned} \|N^-(x, A, g_-^\delta)\|_E &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \int_{-1}^x \frac{4(1+p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}{(C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} |z|^{3/2}} ds |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \int_x^0 \frac{4(1+p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}{(C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} |z|^{3/2}} ds |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \int_{-1}^x \frac{4(1+p) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{3/2} (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2)} ds |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \int_x^0 \frac{4(1+p) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{3/2} (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2)} ds |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\leq \frac{2(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2) \pi} \int_\gamma \int_{-1}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\quad + \frac{2(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2) \pi} \int_\gamma \int_x^0 \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\leq \frac{2(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2) \pi} \int_\gamma \frac{2 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} - e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^2} |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\leq \frac{2(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2) \pi} \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} |dz| \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\leq C \|g_-^\delta(s)\|_{C([-1, 0]; E)}. \end{aligned}$$

3. Pour tout  $x \in [-1, 0]$  et  $f_+^\delta \in E$ , on a grâce à le lemme (1.5) et l'hypothèse (2.9)

$$\begin{aligned}
\|V^-(x, A) f_+^\delta\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \right\|_E \\
&\leq \frac{p}{2\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{3/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\
&\leq \frac{4p}{2\pi} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{3/2} (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\
&\leq \frac{4p}{2\pi (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\
&\leq \frac{4p}{2\pi (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{1}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\
&\leq C \|f_+^\delta\|_E.
\end{aligned}$$

4. Soit  $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ , pour tout  $x \in [-1, 0]$  et  $z \in \gamma$  on a

$$\|W^-(x, A, g_+^\delta)\|_E = \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \right\|_E,$$

et d'après le lemme (1.5) et l'hypothèse (2.9)

$$\begin{aligned}
\|W^-(x, A, g_+^\delta)\|_E &\leq \frac{4p}{2\pi (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)}}{|z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} ds |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{4p}{2\pi (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{4p}{2\pi (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{-e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^2} |dz| \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq C \|g_+^\delta(s)\|_{C([0, \delta]; E)}.
\end{aligned}$$

# Chapitre 3

## L'existence et l'unicité des solutions strictes

Dans ce chapitre on va étudier l'existence et l'unicité de la solution pour les deux problèmes  $(P_+^\delta)$  et  $(P_-^\delta)$ .

### 3.1 L'unicité des solutions

Pour l'unicité de la solution  $u_+^\delta(x)$ , on suppose qu'il ya deux solutions  $(u_+^\delta)_1(x)$  et  $(u_+^\delta)_2(x)$  pour le problème  $(P_+^\delta)$ , on obtient

$$(P_+^\delta)_1 - (P_+^\delta)_2 \begin{cases} ((u_+^\delta)_1 - (u_+^\delta)_2)''(x) + A((u_+^\delta)_1 - (u_+^\delta)_2)(x) = 0 & \text{sur } ]0, \delta[ \\ ((u_+^\delta)_1 - (u_+^\delta)_2)(0) = 0 \\ ((u_+^\delta)_1 - (u_+^\delta)_2)'(\delta) = 0, \end{cases}$$

donc d'après [11] l'unique solution de ce problème est 0, donc

$$((u_+^\delta)_1 - (u_+^\delta)_2)(x) = 0 \Rightarrow (u_+^\delta)_1(x) = (u_+^\delta)_2(x).$$

D'où l'unicité de la solution  $u_+^\delta(x)$ , et le même pour l'unicité de la solution  $u_-^\delta(x)$ .

### 3.2 Les conditions nécessaires et suffisantes pour $(P_+^\delta)$

Dans cette partie on donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les donnés, afin d'obtenir une unique solution stricte  $u_+^\delta$  pour le problème  $(P_+^\delta)$  telle que

$$u_+^\delta \in C([0, \delta]; D(A)) \cap C^2([0, \delta]; E).$$

**Définition 3.1** Soit  $(P)$  le problème définit comme suite :

$$(P) \begin{cases} u''(x) + Au(x) = g(x) & \text{sur } ]a, b[ \\ u(a) = u_a \\ u'(b) = u_b, \end{cases}$$

On dira que  $u \in C([a, b]; E)$  est solution stricte de problème  $(P)$  si :

$$u \in C^2([a, b]; E) \cap C([a, b]; D(A)), \text{ et vérifie le problème } (P).$$

**Théorème 3.1** Soient  $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$  avec  $0 < 2\alpha_0 < 1$ ,  $\psi \in D(A)$  et  $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$  alors  $u_+^\delta$  donnée par (2.10) est l'unique solution de  $(P_+^\delta)$  satisfaisant :

1.  $u_+^\delta \in C([0, \delta]; D(A))$  si et seulement si  $A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}$  et  $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$ ,
2.  $u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E)$  si et seulement si  $A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}$  et  $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$ .

**Preuve.** Puisque  $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ , il suffit de montrer que

$$Au_+^\delta \in C([0, \delta]; E),$$

ceci entraîne que

$$(u_+^\delta)''(x) \in C([0, \delta]; E)$$

■

1. D'abord on doit montrer que  $u_+^\delta$  donnée par la représentation (2.10) vérifie bien l'équation et les conditions aux limites du problème  $(P_+^\delta)$ .

Puisque  $\psi \in D(A)$  on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} \psi dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-\delta)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} A\psi dz.$$

D'où on vérifie aisément que  $u_+^\delta(0) = \psi$ .

On rappelle que

$$\begin{aligned} (u_+^\delta)'(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} \psi dz + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \end{aligned}$$

et comme

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} f_+^\delta dz,$$

alors

$$(u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta.$$

Il reste à montrer que

$$(u_+^\delta)''(\cdot) + Au_+^\delta(\cdot) = g_+^\delta(\cdot).$$

Puisque les deux premier termes de  $(u_+^\delta)'(x)$  ne sont pas clairement différentiables. Donc si on fait un calcul formel de leurs dérivées, on obtient

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \end{aligned}$$

ce qui n'est pas bien défini.

C'est pour cette raison, afin de calculer  $(u_+^\delta)''(x)$  on adapte la méthode utilisé par [10].

Soit  $\varepsilon$  est un nombre positif très petit tels que

$$0 < \varepsilon \leq x \leq \delta - \varepsilon < \delta.$$

Alors

$$\begin{aligned} [(u_+^\delta)']_\varepsilon(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x+\varepsilon}^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} \psi dz + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &= \sum_{i=1}^4 I_i. \end{aligned}$$

Il est clair que toutes ces intégrales sont absolument convergentes, en effet

$$\begin{aligned} \|I_3\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} \psi dz \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} A\psi dz \right\|_E \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2} C_{\theta_0}} |dz| \|A\psi\|_E \leq C \|A\psi\|_E. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|I_4\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \right\|_E \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2} C_{\theta_0}} |dz| \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_E \leq C \|f_+^\delta\|_{D((-A)^{1/2})}. \end{aligned}$$

On utilise les mêmes techniques que dans la section (2.2.1), on obtient la convergence absolue de  $I_1 + I_2$ .

$$[(u_+^\delta)']_\varepsilon(x) \rightarrow (u_+^\delta)'(x) \text{ fortement}$$

quant  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Par un calcul formel, la dérivée de  $[(u_+^\delta)']_\varepsilon(x)$  est

$$\begin{aligned}
& \left( [(u_+^\delta)']_\varepsilon \right)'(x) \\
= & \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (A\psi - g_+^\delta(0)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} f_+^\delta dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x+\varepsilon}^\delta \frac{\sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(x - \varepsilon) \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x - \varepsilon) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x + \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\
= & -S^+(x, A) (A\psi - g_+^\delta(0)) - S^+(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) - A [V^+(x, A)] f_+^\delta \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x+\varepsilon}^\delta \frac{\sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(x - \varepsilon) \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x - \varepsilon) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x + \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\
= & \sum_{i=1}^8 I_i.
\end{aligned}$$

### La convergence des intégrales

1) Les intégrales  $I_1, I_2$  et  $I_3$  sont déjà vu.

2) Grâce à les deux estimations (3.1) et (3.2) on obtient

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}{|\cosh \sqrt{-z}\delta| |z|^{1/2}} \int_0^{x-\varepsilon} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}s |s-x|^{2\alpha_0} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\varepsilon)}}{C_{\theta_0} |z|^{1/2} |z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

De même pour  $I_5$

$$\begin{aligned}
\|I_5\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) dz \right\|_E \\
&\leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

Pour  $I_6$

$$\begin{aligned}
\|I_6\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x+\varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right| \frac{\varepsilon^{2\alpha_0}}{|z|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\varepsilon} \varepsilon^{2\alpha_0}}{|1 + e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}| |z|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \varepsilon^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\varepsilon}}{|z|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

Pour  $I_7$  on fait le même, on obtient

$$\begin{aligned}
\|I_7\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-\varepsilon) \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x-\varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \right\|_E \\
&\leq C \varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

Pour  $I_8$ , on a

$$\begin{aligned}
\|I_8\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x - \varepsilon) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x + \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(x) ds dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left| \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right| \frac{1}{|z|^{1/2}} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_\gamma \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}s}}{|1 + e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}| |z|^{1/2}} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}s}}{|z|^{1/2}} |dz| ds \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \quad (\text{D'après fubini}) \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[ \int_{|z| \geq \frac{1}{s^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}s}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{s^2}} \frac{1}{|z|^{1/2}} |dz| \right] ds \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[ \int_1^{+\infty} \frac{2e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{s} d\sigma + \frac{2}{s} - 2\sqrt{r_0} \right] ds \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \frac{1}{s} ds \|g_+^\delta(x)\|_{C([0,\delta];E)} \leq C \ln \left( \frac{2x + \varepsilon}{2x - \varepsilon} \right) \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
A(u_+^\delta)'(x) - g_+^\delta(x) &= S^+(x, A) (A\psi - g_+^\delta(0)) + A(V^+(x, A) f_+^\delta) + S^+(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x, s) A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz.
\end{aligned}$$

Maintenant, on montre que  $([(u_+^\delta)']_\varepsilon)'(x) + A(u_+^\delta)'(x) - g_+^\delta(x) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned}
&([(u_+^\delta)']_\varepsilon)'(x) + A(u_+^\delta)'(x) - g_+^\delta(x) \\
&= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^{x+\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(x - \varepsilon) \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x - \varepsilon) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x + \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\
&\quad \sum_{i=1}^5 J_i.
\end{aligned}$$

On a déjà vu

$$\begin{aligned} \|J_3\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \right\|_E \\ &\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|J_4\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}(x - \varepsilon) \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \right\|_E \\ &\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|J_5\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x - \varepsilon) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x + \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \right\|_E \\ &\leq C \ln \left( \frac{2x + \varepsilon}{2x - \varepsilon} \right) \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)}. \end{aligned}$$

Donc il reste  $J_1$  et  $J_2$

1)

$$\begin{aligned} \|J_1\|_E &= \left\| -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \right\|_E \\ &\leq C \int_{\gamma} \int_{x-\varepsilon}^x \left| \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right| \frac{(x-s)}{|z|^{1/2}} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-s)}}{|1 + e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}|} \frac{(x-s)^{2\alpha_0}}{|z|^{1/2}} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_{x-\varepsilon}^x \left[ \int_{|z| \geq \frac{1}{(x-s)^{2\alpha_0}}} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-s)^{2\alpha_0}}} \frac{1}{|z|^{1/2}} |dz| \right] (x-s)^{2\alpha_0} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_{x-\varepsilon}^x (x-s)^{2\alpha_0-1} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ &\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}. \end{aligned}$$

2)  $J_2$  se traite comme  $J_1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|J_2\|_E &= \left\| -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^{x+\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \right\|_E \\ &\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $(J_i) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $i = \overline{1, 5}$ ).

Finalement,

$$[(u_+^\delta)']_\varepsilon(x) \rightarrow (u_+^\delta)'(x) \text{ fortement}$$

et

$$\left( [(u_+^\delta)']_\varepsilon \right)'(x) + A(u_+^\delta)'(x) - g_+^\delta(x) \rightarrow (u_+^\delta)''(x) + A(u_+^\delta)'(x) - g_+^\delta(x) = 0$$

quant  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2. Grâce à la section (2.2.1), il est clair que

$$u_+^\delta \in C([0, \delta]; E),$$

si  $\psi \in D(A)$  et  $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$ .

Pour tout  $x \in [0, \delta]$ , on a

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} \psi dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x,s) (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Au_+^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} A (A-zI)^{-1} \psi dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x,s) A (A-zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x,s) A (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) ds dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-\delta)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} A \psi dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x,s) A (A-zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(x-\delta)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} A (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{A (A-zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\ &= S^+(x, A) (A\psi - g_+^\delta(0)) + A (V^+(x, A) f_+^\delta) + S^+(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x,s) A (A-zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz + g_+^\delta(x). \end{aligned}$$

Grâce à l'assertion 1, la section (2.2.1), on obtient pour  $A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}$  et  $x \in [0, \delta]$

$$\|S^+(x, A) [A\psi - g_+^\delta(0)]\|_E \leq C \|A\psi - g_+^\delta(0)\|_E,$$

pour  $g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x) \in E$  et  $x \in [0, \delta]$

$$\|S^+(x, A) [g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)]\|_E \leq C \|g_+^\delta(x)\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}$$

et pour  $x \in [0, \delta[, (-A)^{1/2} f_+^\delta \in E$  (grâce à l'identité de la résolvante)

$$\begin{aligned} \|A(V^+(x, A) f_+^\delta)\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A(A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \right\|_E \\ \|d(x, A) f_+^\delta\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} w dz \right\|_E \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|} |dz| \|w\|_E \\ &\leq C \|w\|_E, \end{aligned}$$

mais pour  $x = \delta$ , on a pas la convergence de  $d(x, A) f_+^\delta$  si  $w \in E$ , donc comme pour le terme  $S^+(x, A) \psi$ , on montre que

$$w \in \overline{D(A)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \delta^-} d(x, A) w = w.$$

En effet si  $w \in \overline{D(A)}$ , il existe  $w_n \in D(A)$  telle que

$$\|w - w_n\| \leq \varepsilon \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Alors

$$d(x, A) w - w = d(x, A) w - d(x, A) w_n + (d(x, A) w_n - w_n) + (w_n - w),$$

et puisque pour  $w_n \in D(A)$  il est facile de voir que

$$(d(x, A) w_n - w_n) \rightarrow 0 \text{ quant } x \rightarrow \delta^-.$$

Réciproquement si

$$\lim_{t \rightarrow \delta^-} d(x, A) w = w$$

or  $d(x, A) w \in D(A)$  pour tout  $x \in [0, \delta[$  donc  $w \in \overline{D(A)}$ .

D'après l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} s |s - x|^{2\alpha_0} ds \\
& \leq \left[ \int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} s ds \right]^{1-2\alpha_0} \left[ \int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} s |s - x| ds \right]^{2\alpha_0} \\
& \leq \left[ \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \right]^{1-2\alpha_0} \left[ \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x - 1}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^2} \right]^{2\alpha_0} \\
& \leq \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}} \left[ \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x - 1}{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x} \right]^{2\alpha_0} \\
& \leq C \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x}{|z|^{1/2+\alpha_0}}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

et de la même manière, on a aussi

$$\int_x^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s) |s - x|^{2\alpha_0} ds \leq C \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}{|z|^{1/2+\alpha_0}}. \tag{3.2}$$

Les deux estimations précédentes nous permettent déduire la convergence absolue de

$$I = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x, s) A (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz,$$

en effet

$$\begin{aligned}
& \|I\|_E \\
& = \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \kappa_{z,+}^\delta(x, s) (A - z + z) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \right\|_E \\
& \leq C \int_\gamma \int_0^\delta |\kappa_{z,+}^\delta(x, s)| |s - x|^{2\alpha_0} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_\gamma \int_0^x \frac{|\sinh \sqrt{-z} s \cosh \sqrt{-z} (\delta - x)|}{|z|^{1/2} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} |s - x|^{2\alpha_0} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \quad + C \int_\gamma \int_x^\delta \frac{|\sinh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} (\delta - s)|}{|z|^{1/2} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} |s - x|^{2\alpha_0} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}}{|z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} \int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} s |s - x|^{2\alpha_0} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \text{ (d'après fubini)} \\
& \quad + C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x}}{|z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} \int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s) |s - x|^{2\alpha_0} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1/2} |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\quad + C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2} |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0} C_{\theta_0}} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

d'où la continuité.

### 3.3 Les conditions nécessaires et suffisantes pour $(P_-^{\delta})$

Soient  $g_-^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$  et  $g_+^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$  avec  $0 < 2\alpha_0 < 1$ .

On suppose que

$$\begin{cases} u_-^{\delta} \in C^2([-1, 0]; E) \cap C([-1, 0]; D(A)) \\ u_+^{\delta} \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A)), \end{cases}$$

alors on a nécessairement

$$g_+^{\delta}(0) - g_-^{\delta}(0) \in \overline{D(A)}.$$

En effet, si pour tout  $x \in [-1, \delta]$ ,  $u(x) \in D(A)$ , on a

$$u'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(s) - u(0)}{s} \in \overline{D(A)},$$

de même

$$u''(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(2s) - 2u(s) + u(0)}{s^2} \in \overline{D(A)},$$

donc on déduit que

$$\begin{cases} (u_-^{\delta})''(0) = g_-^{\delta}(0) - Au_-^{\delta}(0) \in \overline{D(A)} \\ (u_+^{\delta})''(0) = g_+^{\delta}(0) - Au_+^{\delta}(0) \in \overline{D(A)}, \end{cases}$$

de plus

$$\begin{aligned} u_-''(0) &= g_-^{\delta}(0) - Au_-^{\delta}(0) = u_-''(0) = g_-^{\delta}(0) - Au_+^{\delta}(0) \\ &= g_-^{\delta}(0) - g_+^{\delta}(0) + (u_+^{\delta})''(0), \end{aligned}$$

par conséquent

$$g_+^{\delta}(0) - g_-^{\delta}(0) \in \overline{D(A)}.$$

**Théorème 3.2** Soient  $g_-^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ ,  $g_+^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$  et  $f_- \in D(A)$ ,  $f_+^{\delta} \in D(\sqrt{-A})$  avec  $0 < 2\alpha_0 < 1$  alors la représentation de la solution stricte  $u_-^{\delta}$  donnée par (2.11) a la propriété

$$u_-^{\delta} \in C^2([-1, 0]; E) \cap C([-1, 0]; D(A))$$

si et seulement si

$$Af_- - g_-^{\delta}(-1) \in \overline{D(A)}, \quad g_+^{\delta}(0) - g_-^{\delta}(0) \in \overline{D(A)} \quad \text{et} \quad (-A)^{1/2} f_+^{\delta} \in \overline{D(A)}.$$

-Pour la démonstration les mêmes techniques du théorème (3.1) sont utilisées.

# Chapitre 4

## Exemple

Dans ce chapitre on applique les résultats trouvés sur un exemple concret tel que  $E = C(\bar{F})$  avec la norme sup.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{b_\delta} \operatorname{div}(b_\delta \nabla U^\delta) = G^\delta & \text{sur } \Omega^\delta \\ U^\delta = 0 & \partial\Omega^\delta \setminus \Gamma^\delta \\ \partial_\xi U^\delta = 0 & \Gamma^\delta, \end{cases}$$

où  $\delta$  est un petit paramètre donné dans  $]0, 1]$ ,  $\Omega^\delta$  est le cylindre  $] -1, \delta[ \times F$  de  $\mathbb{R}^n$  de variable  $(\xi, \eta)$ ,  $F$  est un domaine ouvert régulier de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\Gamma^\delta = \{\delta\} \times F$  et  $b_\delta$  est une fonction définie par

$$b_\delta(\xi) \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in ] -1, 0[ \\ \frac{1}{\delta} & \text{si } ] 0, \delta[. \end{cases}$$

Ce problème, représente par exemple, la propagation de la chaleur entre le corps fixe

$$\Omega_- = ] -1, 0[ \times F$$

et une couche mince

$$\Omega_+ = ] 0, \delta[ \times F.$$

On note par  $U_-^\delta$  et  $G_-^\delta$  les restrictions respectives de  $U^\delta$  et  $G^\delta$  sur  $\Omega_-$ , et par  $U_+^\delta$  et  $G_+^\delta$  les restrictions respectives de  $U^\delta$  et  $G^\delta$  sur  $\Omega_+$ .

La famille  $(P^\delta)$  est équivalente au problème aux limites et de transmission suivant

$$\begin{cases} \begin{cases} \Delta U_-^\delta = G_-^\delta & \text{sur } \Omega_- \\ \Delta U_+^\delta = G_+^\delta & \text{sur } \Omega_+ \end{cases} \\ (bc) \begin{cases} U_-^\delta = 0 & \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ U_+^\delta = 0 & \partial\Omega_+ \setminus (\Gamma^0 \cup \Gamma^\delta) \\ \partial_\xi U_+^\delta = 0 & \Gamma^\delta \end{cases} \\ (tc) \begin{cases} U_-^\delta = U_+^\delta & \Gamma^0 \\ \partial_\xi U_-^\delta = \frac{1}{\delta} \partial_\xi U_+^\delta & \Gamma^0, \end{cases} \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\Gamma^0 = \{0\} \times F$  et  $\partial\Omega_+$  sont les frontières de  $\Omega_+$ .

En utilisant les notations classiques

$$\begin{cases} u^\delta(\xi)(\eta) = U^\delta(\xi, \eta) := U^\delta(\xi)(\eta) & \text{pour } (\xi, \eta) \in ]-1, \delta[ \times F \\ g^\delta(\xi)(\eta) = G^\delta(\xi, \eta) := G^\delta(\xi)(\eta) & \text{pour } (\xi, \eta) \in ]-1, \delta[ \times F, \end{cases}$$

notre problème (4.1) peut être réécrit sous forme d'un problème abstrait suivant

$$(P^\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(\xi) + A(u^\delta)(\xi) = g^\delta(\xi) & \text{sur } ]-1, \delta[ \setminus \{0\} \\ u^\delta(-1) = 0 \text{ et } (u^\delta)'(\delta) = 0 \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+) \text{ et } (u^\delta)'(0^-) = p(u^\delta)'(0^+), \end{cases}$$

où  $p = \frac{1}{\delta}$  et  $A$  est un opérateur linéaire fermé défini par

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in C(\overline{F}) : \Delta\varphi \in C(\overline{F}) \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \partial F\} \\ (A\varphi)(\eta) = \Delta\varphi(\eta), \end{cases}$$

où  $\Delta$  est le Laplacien sur  $F$  (sur la variable  $\eta$ ). Le domaine  $D(A)$  est tel que

$$\overline{D(A)} = \{\varphi \in C(\overline{F}) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial F\} \neq E$$

Par conséquent tout nos résultats précédents s'appliquent à cet exemple avec  $f_+^\delta = f_- = 0$  et

$$\begin{cases} g_-^\delta = g^\delta|_{[-1,0]} \in C^{2\alpha_0}([-1,0]; C(\overline{F})) \\ g_+^\delta = g^\delta|_{[0,\delta]} \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]; C(\overline{F})), \quad (0 < 2\alpha_0 < 1). \end{cases}$$

On rappelle que les propriétés anisotropiques entre la fonction concrète  $G_-^\delta$  et la fonction  $g_-^\delta$  spécifié par

$$\begin{aligned} g_-^\delta &\in C^{2\alpha_0}([-1,0]; C(\overline{F})) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} G_-^\delta \in C([-1,0] \times C(\overline{F})) \text{ et} \\ G_-^\delta(., \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1,0]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{F}. \end{cases} \end{aligned}$$

La condition de compatibilité

$$g_+^\delta(0) - g_-^\delta(0) \in \overline{D(A)}$$

signifie que

$$\eta \mapsto G_+^\delta(0, \eta) - G_-^\delta(0, \eta) \in C(\overline{F}) \text{ et } G_+^\delta(0, \sigma) - G_-^\delta(0, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \in \partial F.$$

Donc on obtient le théorème suivant (correspondant au théorème (3.1) la solution  $U^\delta$  sur la couche mince) quant  $n > 0$ .

**Théorème 4.1** *On suppose*

$$G_+^\delta \in ([0, \delta] \times \overline{F}) \text{ et } G_+^\delta(., \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{F}.$$

*Alors il existe une unique solution stricte*

$$U_+^\delta \text{ sur } [0, \delta]$$

pour (4.1) telle que

$$\begin{cases} \xi \mapsto \Delta_\eta U_+^\delta(\xi, \eta) \in C([0, \delta]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{F} \\ \xi \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_+^\delta(\xi, \eta) \in C([0, \delta]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{F} \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \eta \mapsto \Delta_\eta U_+^\delta(0, \eta) - G_+^\delta(0, \eta) \in C([0, \delta]), \\ G_+^\delta(0, \sigma) = G_+^\delta(\delta, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \in \partial F. \end{cases}$$

Et le théorème correspondant à (3.2) est le suivant

**Théorème 4.2** *On suppose*

$$\begin{cases} G_-^\delta \in ([-1, 0] \times \overline{F}) \text{ et } G_-^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{F} \\ G_+^\delta \in ([0, \delta] \times \overline{F}) \text{ et } G_+^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{F}. \end{cases}$$

Alors il existe une unique solution

$$U_-^\delta \text{ sur } [-1, 0]$$

de (4.1) telle que

$$\begin{cases} \xi \mapsto \Delta_\eta U_-^\delta(\xi, \eta) \in C([-1, 0]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{F} \\ \xi \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_-^\delta(\xi, \eta) \in C([-1, 0]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{F} \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \eta \mapsto G_-^\delta(-1, \eta) \in C([0, \delta]), G_+^\delta(-1, \sigma) = 0 \text{ } \sigma \in \partial F \\ \eta \mapsto G_+^\delta(0, \eta) - G_-^\delta(0, \eta) \in C(\overline{F}) \text{ et} \\ G_+^\delta(0, \sigma) - G_-^\delta(0, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \in \partial F. \end{cases}$$

# Bibliographie

- [1] **Balakrishnan A. V.** : Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pacif. J. Math.* 10, pp 419-437, 1960.
- [2] **Belhamiti O.** : Etude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince, thèse doctorat, université de Mostaganem, 2008.
- [3] **Belhamiti O., Labbas R., Lemrabet K. and Medeghri A.** : Study of boundary value and transmission problems in the Hölder spaces, *Appl. Math. Comput* (2008), doi :10.1016/J.AMC.2008.03.003.
- [4] **Favini A., Labbas R., Lerabet K., and Maingot S.** : Study of The limite of Transmission Problems in a Thin Layer by Sum Theory of Linear Operators, *Rev Mat. Complut.* 18; Num 1, pp 143-176, 2005.
- [5] **El Haial A. and Labbas R.** : On the Ellipticity and Solvability of Abstract Second-order Differential Equation. *Electronic Journal of Differential equations*, 57 (2001), 1-18.
- [6] **Labbas R.** : Problèmes aux limites pour une équation différentielle abstraite de type elliptique, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.
- [7] **Lembrabet K.** : Etude globale d'un problème de transmission dans un polygone ou un polyèdre, Thèse 3<sup>ème</sup> cycle, Université de Nice, 1976.
- [8] **Lembrabet K.** : Régularité de la solution d'un problème de transmission, *J.Math. Pures et appl.*, 56; 1-38 (1977).
- [9] **Mezeghrani F. Z.** : Problème a deux points pour une équation différentielle opérationnelle du second ordre. Thèse de Magister, Université d'Oran, 1992.
- [10] **Tanabe H.** : Equations of Evolution, Monographs and Studies in Mathematics 6, Pitman, London-Sun Francisco-Melbourne, 1979.
- [11] **Tribel H.** : Interpolation theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland, Amsterdam (1978).