

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$



POLYCOPIÉ DE MATHÉMATIQUES 4 : ANALYSE COMPLEXE Rappel de Cours et Travaux Dirigés

Ce polycopié est destiné aux étudiants de 2^{ème} Année Licence Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Réalisé par :

Dr. Amele TAÏEB

**LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie.**

Table des matières

Table des figures	1
Introduction	2
1 Contenu	2
2 Pré-requis	2
3 Visées d'apprentissage	2
1 Ensemble des nombres complexes	4
1 Nombres complexes	4
1.1 Opérations sur les nombres complexes	4
1.2 Module d'un nombre complexe	5
2 Représentation graphique d'un nombre complexe	6
2.1 Forme polaire des nombres complexes	7
2.2 Exponentielle d'un nombre complexe	8
2.3 Formule de De Moivre	8
2.4 Racines d'un nombre complexe	9
2.5 Formule d'Euler	10
3 Notions de topologie	10
3.1 Distance Euclidienne	10
3.2 Ensembles de points	10
4 Travaux dirigés	12
4.1 Exercices résolus	12
4.2 Exercices supplémentaires	16
2 Fonction d'une variable complexe à valeurs complexes	17
1 Fonctions uniformes et multiformes	17
1.1 Fonctions inverses	18
1.2 Transformations	19
1.3 Limites	19
1.4 Continuité	20
2 Fonctions élémentaires	20
2.1 Fonctions polynômiales	20
2.2 Fractions rationnelles	21
2.3 Fonctions exponentielles	21
2.4 Fonctions trigonométriques	21
2.5 Fonctions hyperboliques	22
2.6 Fonctions logarithmiques	22
2.7 Fonctions puissances	23
2.8 Fonctions trigonométriques inverses	23
2.9 Fonctions hyperboliques inverses	23

3	Travaux dirigés	24
3.1	Exercices résolus	24
3.2	Exercices supplémentaires	29
3	Dérivation dans le domaine complexe	30
1	Fonctions analytiques	30
1.1	Dérivée d'une fonction uniforme	30
1.2	Conditions de Cauchy-Riemann	31
1.3	Expression de la dérivée	31
1.4	Dérivées d'ordre supérieur	32
1.5	Règles de dérivation	33
1.6	Règle de l'Hospital	33
2	Points singuliers	33
2.1	Pôles	34
2.2	Singularités apparentes	34
2.3	Singularités essentielles	34
3	Fonctions harmoniques	34
3.1	Définitions et notations	34
3.2	Lien Entre l'harmonicité et l'analyticité	36
4	Travaux dirigés	38
4.1	Exercices résolus	38
4.2	Exercices supplémentaires	41
4	Intégration dans le domaine complexe	43
1	Arcs, chemins et lacets	43
2	Intégration curviligne	45
2.1	Relation entre intégrales curvilignes réelles et complexes	45
2.2	Propriétés des intégrales	46
2.3	Longueur d'un chemin	46
2.4	Théorème d'estimation	47
3	Théorèmes de Cauchy	48
3.1	Primitives et indépendance du chemin d'intégration	49
4	Quelques théorèmes importants	51
4.1	Formule intégrale de Cauchy	51
4.2	Inégalité de Cauchy	52
4.3	Théorème de Liouville	52
4.4	Théorème fondamental de l'algèbre	52
4.5	Théorème du module maximum	52
4.6	Théorème de Rouché	52
5	Travaux dirigés	53
5.1	Exercices résolus	53
5.2	Exercices supplémentaires	56
5	Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent	58
1	Séries de fonctions	58
2	Séries entières	59
2.1	Critères spéciaux de convergence de séries numériques	59
2.2	Rayon de convergence	59
3	Séries de Taylor	60
3.1	Théorème de Taylor	60

3.2	Séries de Maclaurin de bases	61
4	Séries de Laurent	61
4.1	Théorème de Laurent	61
4.2	Classification des singularités	63
Pôles	63	
Singularités apparentes	64	
Singularités essentielles	64	
Singularités à l'infini	64	
5	Travaux dirigés	65
5.1	Exercices résolus	65
5.2	Exercices supplémentaires	68
6	Théorème des résidus et applications	70
1	Résidus et leurs calculs	70
1.1	Pôle simple	71
1.2	Pôle d'ordre k	71
1.3	Point singulier essentiel	72
2	Théorème des résidus	72
3	Applications des résidus au calcul des intégrales	73
3.1	Théorème particulier utilisé	73
3.2	Intégrales de fractions rationnelles	74
3.3	Intégrales de fractions rationnelles trigonométriques	75
4	Travaux dirigés	77
4.1	Exercices résolus	77
4.2	Exercices supplémentaires	84
7	Fonctions spéciales	85
1	Fonction gamma	85
1.1	Définition et propriété	85
1.2	Prolongement analytique de gamma	86
1.3	Formule des compléments	87
2	Fonction bêta	88
3	Surface de la sphère dans \mathbb{R}^D	88
4	Travaux dirigés	91
4.1	Exercices résolus	91
4.2	Exercices supplémentaires	94
	Bibliographie	95

Table des figures

1.1	(a) et (b) : Représentation géométrique des complexes	6
1.2	Représentation polaire	7
1.3	Cercle Trigonométrique sur $[0, 2\pi]$	7
1.4	Exercice 3 : Représentation géométrique	14
2.1	f est une fonction de z	17
4.1	Arc	43
4.2	Chemin	43
4.3	(a) : Chemin non fermé et simple, (b) : Chemin non fermé et non simple, (c) : Chemin fermé et simple, (d) : Chemin fermé et non simple.	44
4.4	(a) Domaine simplement connexe (b) Domaine multiplement connexe	48
4.5	Indépendance du chemin d'intégration	50
4.6	Formule intégrale de Cauchy	51
5.1	Rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$	60
5.2	Domaine pour le Théorème de Laurent	62
6.1	Lacet C contenant un nombre fini de singularités z_1, \dots, z_n	73
6.2	Γ_R est un demi cercle centré à l'origine et de rayon R	73
6.3	$C_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$ est un contour	74
6.4	Seul $z_1 = \frac{-i}{2}$ est à l'intérieur du cercle $ z = 1$	76
6.5	$C_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$	79
6.6	$C_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$	80
7.1	Variations de $\Gamma(x)$ pour x réel	85
7.2	$\Gamma(z)$ pour z complexe	86
7.3	Utilisation de coordonnées polaires sphériques pour calculer la surface de la sphère	88
7.4	Angle solide dans \mathbb{R}^3	89

Introduction

Ce polycopié est destiné aux étudiants inscrits en deuxième année licence génie mécanique (Option : construction mécanique), du domaine sciences et technologie.

La matière "Analyse Complexe" (Mathématiques 4) porte sur les concepts et les résultats fondamentaux de la théorie des fonctions complexes de variables complexes.

1 Contenu

Le polycopié est structuré en sept unités d'apprentissages, chaque unité fournit des séquences pédagogiques nécessaires pour la bonne compréhension et le développement des concepts prévus. Des activités d'apprentissages sont établies pour illustrer le cours.

L'ensemble des unités d'apprentissage est décrit ici :

1. Ensemble des nombres complexes
2. Fonction d'une variable complexe à valeurs complexes
3. Dérivation dans le domaine complexe
4. Intégration dans le domaine complexe
5. Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent
6. Théorème des résidus et applications
7. Fonctions spéciales

2 Pré-requis

Mathématiques 1, Mathématiques 2 et Mathématiques 3.

3 Visées d'apprentissage

Les compétences visées par ce polycopié, dans son ensemble, sont « d'être capable de maîtriser les différentes techniques de résolution des fonctions et intégrales à variables complexes et spéciales ». Ce sont des performances complexes, que l'étudiant va construire progressivement en maîtrisant des savoirs, en mettant en oeuvre des savoir-faire et en le faisant avec un savoir-être de professionnel.

Le cours Mathématiques 4 vise à :

En termes de savoir :

3. VISÉES D'APPRENTISSAGE

- Comprendre la dérivation complexe,
 - Comprendre le théorème de Cauchy et la formule intégrale de Cauchy,
 - Citer les propriétés de convergence des séries,
 - Connaître les fonctions Spéciales,
- afin de pouvoir les utiliser à un niveau supérieur dans les autres disciplines.

En termes de savoir-faire :

- Application des équations de Cauchy-Riemann,
- Calcul des intégrales curvilignes de fonctions complexes,
- Application des théorèmes de Taylor et de Laurent pour obtenir des développements en série.
- Classification des singularités de fonctions complexes et calcul des résidus.
- Calcul des intégrales réelles en utilisant le théorème des résidus.
- Application de la fonction gamma en mécanique quantique.

En termes de savoir-être :

Sensibiliser les étudiants à communiquer à l'écrit afin de comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres et rédiger une solution rigoureuse en relation avec leur discipline.

Chapitre 1

Ensemble des nombres complexes

Problème 1.1 [6] Trouver un nombre réel solution de l'équation algébrique

$$x^2 + 1 = 0.$$

Solution 1.1 Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation algébrique

$$x^2 + 1 = 0.$$

Pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables, on introduit l'ensemble des nombres complexes.

1 Nombres complexes

Définition 1.1 [2, 4, 6, 7, 8] Un nombre complexe z est défini par :

$$z = x + iy,$$

où x, y sont des nombres réels et i est appelée l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.

- Le nombre x est appelée la partie réelle de z , on note $x = \operatorname{Re}(z)$,
- Le nombre y est appelée la partie imaginaire de z , on note $y = \operatorname{Im}(z)$,
- Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z ,
- Si $x = \operatorname{Re}(z) = 0$, alors $z = iy = i\operatorname{Im}(z)$ est un imaginaire pure,
- Si $y = \operatorname{Im}(z) = 0$, alors $z = x = \operatorname{Re}(z)$ est un réel,
- $(x_1 + iy_1) = (x_2 + iy_2)$ si et seulement si, $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Définition 1.2 [2, 4, 6, 7, 8] L'ensemble des nombres complexes est défini par :

$$\mathbb{C} = \{z : z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2, i^2 = -1\}.$$

Remarque 1.1 Tout nombre complexe peut être représenté, de façon unique, comme un point dans le plan \mathbb{R}^2 .

1.1 Opérations sur les nombres complexes

Étant donné $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, alors on peut effectuer les opérations suivantes :

1. Addition :

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

2. Soustraction :

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

3. Multiplication :

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

4. Division : Pour $z_2 \neq 0$, on a :

$$\frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Remarque 1.2 $z_1 = z_2$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Exemple 1.1 Soient $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 1 - i$. Alors,

$$z_1 + z_2 = 3 + 2i,$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 4i,$$

$$z_1 z_2 = 5 + i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1}{2} + i \frac{5}{2}.$$

1.2 Module d'un nombre complexe

Définition 1.3 [2, 7] La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = x + iy$, est définie par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple 1.2 Soit $z = -2 + 3i$. Alors, le module de z est donné par :

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Proposition 1.1 Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, on a les propriétés suivantes :

1. $|z_1| = 0$ si et seulement si $z = 0$,
2. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$,
3. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, si $z_2 \neq 0$,
4. $|z_1| = |\bar{z}_1|$,
5. $z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2$,
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, (Inégalité triangulaire),
7. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Exercice 1.1 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $|z| = 3$.

Montrer que $|z + 4| \leq 8$ et que $\frac{1}{|z^2 - 1|} \leq \frac{1}{2}$.

Solution 1.2 En appliquant l'inégalité triangulaire (6), on obtient :

$$\begin{aligned} |z + 4| &\leq |z| + 4 \\ &\leq 3 + 4 = 7. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (7), on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z^2 - 1|} &\leq \frac{1}{||z^2| - 1|} \\ &\leq \frac{1}{9 - 1} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2 Représentation graphique d'un nombre complexe

[6] On peut représenter \mathbb{C} comme le plan (xOy) muni d'une base orthonormée où 1 est le premier vecteur de base (c'est-à-dire dirigeant l'axe (Ox)) et i est le second vecteur de base (c'est-à-dire dirigeant l'axe (Oy)).

Un nombre complexe $x + iy$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, on peut représenter de tels nombres par un point d'un plan des xy appelé plan complexe.

À chaque nombre complexe $x + iy$ correspond un point (x, y) du plan.

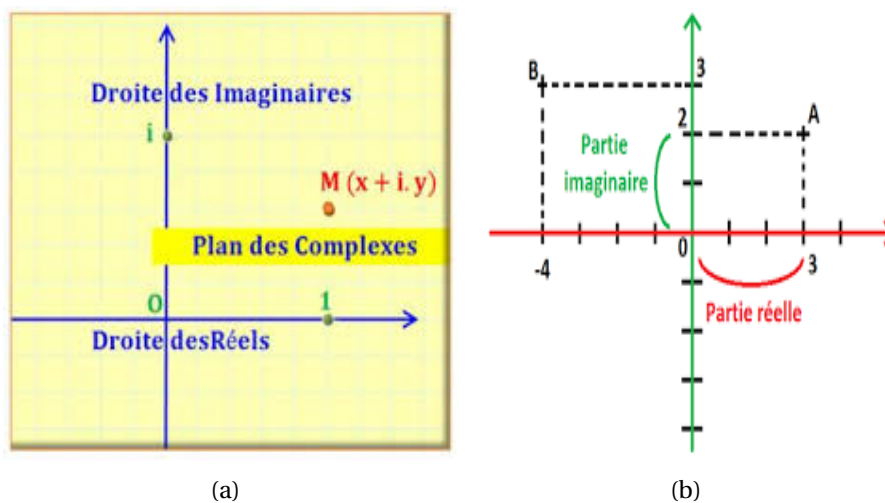


FIGURE 1.1 – (a) et (b) : Représentation géométrique des complexes

2.1 Forme polaire des nombres complexes

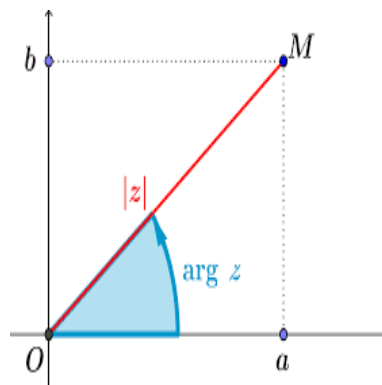


FIGURE 1.2 – Représentation polaire

Si M désigne un point du plan complexe correspondant au nombre complexe (a, b) où $z = a + ib$, on voit d'après la figure 1.2 que

$$a = r \cos \theta \quad \text{et} \quad b = r \sin \theta,$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé le *module* ou la *valeur absolue* de z , noté $|z|$. Tandis que θ appelé *l'amplitude* ou *l'argument* de z noté par $\arg z$, c'est l'angle que fait le vecteur \vec{OM} avec le demi-axe positif Ox . On en tire

$$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (1.1)$$

qui est appelée la *forme polaire* ou *forme trigonométrique* du nombre complexe z , r et θ étant les coordonnées polaires.

Si

$$-\pi < \theta \leq \pi,$$

alors l'angle θ est appelé *l'argument principal*, noté par $\text{Arg } z$. On a :

$$\arg z = \text{Arg } z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

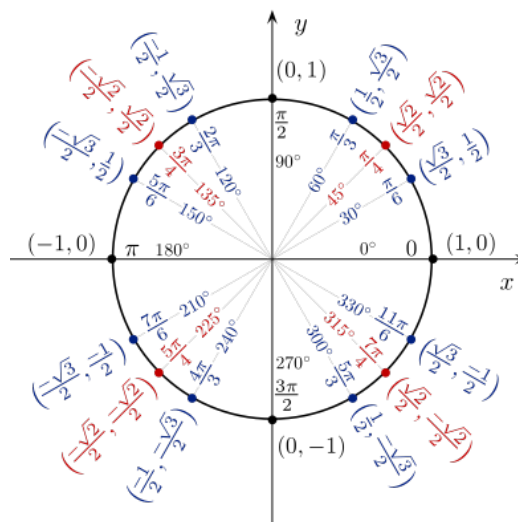


FIGURE 1.3 – Cercle Trigonométrique sur $[0, 2\pi]$

Exercice 1.2 Trouver la forme polaire de $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Solution 1.3 Le module de z , est donné par :

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

D'autre part, on a :

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc,

$$\text{Arg } z = \frac{\pi}{3}, \quad \arg z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

et

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right).$$

2.2 Exponentielle d'un nombre complexe

La formule d'Euler pour $\theta \in \mathbb{R}$ est donné par :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors e^z est défini par :

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

En utilisant la formule d'Euler dans la forme polaire (1.1), on obtient :

$$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}.$$

2.3 Formule de De Moivre

[8] Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tels que :

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

Alors,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)\}, \quad (1.2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)\}, \quad z_2 \neq 0. \quad (1.3)$$

Une généralisation de Eq. (1.2) conduit à

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \{\cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)\}. \quad (1.4)$$

Soit $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$. Alors,

$$z^n = r^n (\cos (n\theta) + i \sin (n\theta)). \quad (1.5)$$

La formule (1.5) est appelée formule de *De Moivre*.

Exercice 1.3 Calculer $z = (1 + i\sqrt{3})^6$.

Solution 1.4 D'après l'exercice 1.2, on a

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right).$$

En utilisant formule de De Moivre, on obtient :

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^6 &= 2^6 \left(\cos \frac{6\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi}{3}\right) \\ &= 2^6 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \\ &= 2^6 = 64. \end{aligned}$$

2.4 Racines d'un nombre complexe

Un nombre ω est appelé *racine n -ième* d'un nombre complexe z , si $\omega^n = z$, et on écrit $\omega = z^{\frac{1}{n}}$. D'après la formule de De Moivre, on peut montrer que si n est un entier strictement positif,

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

d'où il résulte qu'il y a n valeurs différentes pour $z^{\frac{1}{n}}$, i.e. n racines n -ièmes différentes de z pourvu que $z \neq 0$.

Exemple 1.3 Calculer les racines troisième de 1, ($z^3 = 1$).

On a :

$$\begin{aligned} z &= 1^{\frac{1}{3}} = \{\cos(0 + 2k\pi) + i \sin(0 + 2k\pi)\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\text{pour } k = 0, \quad z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\text{pour } k = 1, \quad z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{pour } k = 2, \quad z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.5 Formule d'Euler

La formule d'Euler pour $\theta \in \mathbb{R}$, est donnée par :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

On en déduit donc,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, tel que $z = x + iy$, alors e^z est défini par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

3 Notions de topologie

3.1 Distance Euclidienne

Pour les nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, on définit la distance Euclidienne par :

$$d(z_1, z_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|.$$

3.2 Ensembles de points

1. **Voisinage.** L'ensemble

$$V(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\},$$

est appelé un ϵ -voisinage du point $z_0 \in \mathbb{C}$.

2. **Points intérieurs, extérieurs et frontières.** Soit $S \subset \mathbb{C}$.

- On dit que z_0 est un point intérieur de S , s'il existe un voisinage $V(z_0, \epsilon) \subset S$.
- On dit que z_1 est un point extérieur de S , si z_1 est un point intérieur de $\mathbb{C} \setminus S$.
- On dit que $z_2 \in \partial S$ est un point frontière de S , si tout voisinage de z_2 rencontre S et $\mathbb{C} \setminus S$.

3. **Disque ouvert.** L'ensemble

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

est appelé disque ouvert (boule ouverte) de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. Tout disque ouvert est un voisinage de tous ses points.

4. **Disque unité.** Le disque

$$D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

est appelé disque unité de \mathbb{C} .

5. **Ensemble ouvert.** Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert dans \mathbb{C} , si pour tout $z \in E$, il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset E$. Si $E \subset \mathbb{C}$ et $E \cap \partial E = \emptyset$, alors E est un ouvert de \mathbb{C} . Tout disque ouvert $D(z, r)$ est un ouvert dans \mathbb{C} .

6. **Ensemble fermé.** Un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est dit fermé dans \mathbb{C} , si son complémentaire $\mathbb{C} \setminus F$ est un ouvert de \mathbb{C} . Si $F \subset \mathbb{C}$ et $\partial F \subset F$, alors F est un fermé de \mathbb{C} . Un ensemble est fermé s'il contient tous ses points de frontière. L'ensemble

$$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\},$$

est un fermé de \mathbb{C} .

7. **Adhérence ou fermeture d'un ensemble.** Soit $S \subset \mathbb{C}$. Alors l'ensemble $\bar{S} = S \cup \partial S$ est appelé l'adhérence ou la fermeture de S . L'adhérence du disque ouvert $D(z_0, r)$ est le disque fermé $\bar{D}(z_0, r)$.
8. **Ensemble borné.** Un ensemble $B \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que $|z| < M$ pour tout $z \in B$. On dit aussi que B est borné si $B \subset D(0, r)$ pour un certain $r > 0$. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 4\}$ est borné, mais $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ ne l'est pas.
9. **Ensemble compact.** Un ensemble $C \subset \mathbb{C}$ est dit compact dans \mathbb{C} , s'il est borné et fermé dans \mathbb{C} . L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4\}$ est compact, mais $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 4\}$ ne l'est pas.
10. **Ensemble connexe par arcs.** Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe par arcs si deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin qui se trouve entièrement dans S .
11. **Ensemble connexe.** Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe s'il ne peut pas s'écrire comme la réunion de deux ouverts disjoints non vides. Toute partie de \mathbb{C} connexe par arcs est connexe. Le disque unité ouvert $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et la couronne $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ sont connexes car ils sont connexes par arcs.
12. **Domaine.** Un ensemble $D \subset \mathbb{C}$ qui est non vide, ouvert et connexe est appelé un domaine ou bien une région ouverte. D est un domaine si et seulement s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides et disjoints. Le disque unité $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, le demi plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ et la couronne $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ sont des domaines, mais $\{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$ n'est pas un domaine car il n'est pas connexe.

4 Travaux dirigés

4.1 Exercices résolus

Exercice 1. Soient $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = 2 + i$. Effectuer les opérations suivantes, en écrivant les résultats sous forme $x + iy$.

$$\text{i) } \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{ii) } \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}, \quad \text{iii) } \frac{\bar{z}_1 z_2 + z_1}{z_2 \bar{z}_2}.$$

Solution. Pour écrire un quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique $x + iy$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur. On note que le conjugué de $x + iy$ est $x - iy$.

i)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 2i}{2 + i} = \frac{(3 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i,$$

ii)

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{5 - i}{1 - 3i} = \frac{(5 - i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i,$$

iii)

$$\frac{\bar{z}_1 z_2 + z_1}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(3 + 2i)(2 + i) + 3 - 2i}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{7}{5} + i.$$

Exercice 2. Déterminer le module et l'argument principal des nombres complexes suivants :

$$\text{i) } z = 2\sqrt{3} + 2i, \quad \text{ii) } z = -\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}, \quad \text{iii) } z = 1 - i.$$

Solution. Le module d'un nombre complexe $x + iy$ est défini par :

$$r = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

L'argument principal d'un nombre complexe non nul $x + iy$ est l'angle $\theta \in (-\pi, \pi]$ défini par :

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}.$$

i)

$$r = |2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4, \quad \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Alors, l'argument principale $\theta = \frac{\pi}{6}$.

ii)

$$r = \left| -\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right| = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{\pi}{10}} = 1,$$

$$\cos \theta = -\cos \frac{\pi}{10} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{10} \right) = \cos \frac{9\pi}{10},$$

$$\sin \theta = \sin \frac{\pi}{10} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{10} \right) = \sin \frac{9\pi}{10}.$$

Donc, l'argument principale $\theta = \pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$.

iii)

$$r = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où, l'argument principale $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3. Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe et identifier parmi eux les ensembles ouverts, fermés et bornés.

$$\text{i) } \{z \in \mathbb{C} / |z - i| \leq |z - 1|\}, \quad \text{ii) } \{z \in \mathbb{C} / |z + 2 - i| \leq 4\}.$$

Solution . i) Soit $z = x + iy$. Alors,

$$|z - i| < |z - 1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

En prenant le carré des deux membres, on obtient :

$$x^2 + (y - 1)^2 < (x - 1)^2 + y^2.$$

D'où

$$x - y < 0.$$

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| < |z - 1|\}$ est donc la partie au-dessus de la droite $x - y = 0$, la droite non comprise. Voir (i), la figure 1.4. On en déduit que cet ensemble est ouvert.

ii) On a

$$|z + 2 - i| \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} \leq 4.$$

D'où l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z + 2 - i| \leq 4\}$ est le disque de centre $(-2, 1)$ et de rayon $r = 4$, le cercle y compris. Voir (ii), la figure 1.4. Cet ensemble est fermé et borné.

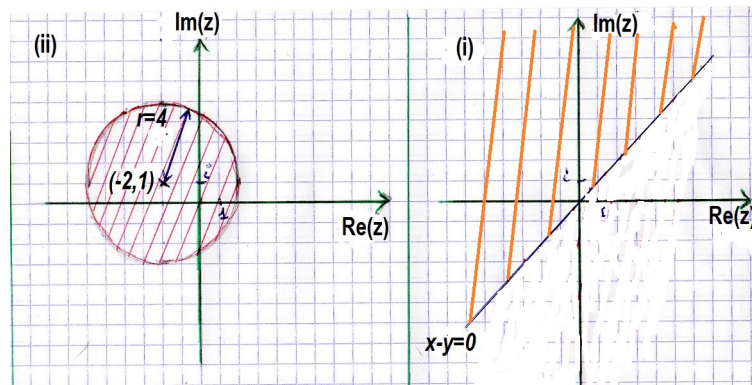


FIGURE 1.4 – Exercice 3 : Représentation géométrique

Exercice 4 . Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\text{i) } (z+1)^3 = -8, \quad \text{ii) } (z-1)^2 = 1.$$

Solution . i) On a

$$(z+1)^3 = -8.$$

En écrivant -8 sous forme polaire, on aura :

$$(z+1)^3 = -8 = 8 \{ \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi) \}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En utilisant la formule de De Moivre, on obtient :

$$z = 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \right\} - 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $k=0$,

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right\} - 1 \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} - 1 = i\sqrt{3}, \end{aligned}$$

Si $k=1$,

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \{ \cos \pi + i \sin \pi \} - 1 \\ &= -3, \end{aligned}$$

Si $k=2$,

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 \left\{ \cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3} \right\} - 1 \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} - 1 = -i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

En considérant $k = 3, 4, \dots$ aussi bien que des valeurs négatives $k = -1, -2, \dots$, on retrouve les trois valeurs de z déjà obtenues.

ii) En écrivant 1 sous forme polaire, on obtient :

$$(z - 1)^2 = 1 = \{\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'après la formule de De Moivre,

$$z = \{\cos(k\pi) + i \sin(k\pi)\} + 1, \quad k = 0, 1.$$

Si $k = 0$,

$$\begin{aligned} z_0 &= \{\cos 0 + i \sin 0\} + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Si $k = 1$,

$$\begin{aligned} z_1 &= \{\cos \pi + i \sin \pi\} + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 5 . Donner les nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$.

$$\text{i) } (1 - i)^4, \quad \text{ii) } (1 - \sqrt{3}i)^{-1}.$$

Solution . i) Sous forme polaire

$$1 - i = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

À l'aide de la formule de De Moivre, on aura :

$$(1 - i)^4 = 2^2 \{\cos(-\pi + 8k\pi) + i \sin(-\pi + 8k\pi)\} = 4 \cos(-\pi) = -4.$$

ii) Sous forme polaire

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En utilisant la formule De Moivre, on obtient

$$\begin{aligned} (1 - i\sqrt{3})^{-1} &= 2^{-1} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2k\pi\right) \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ &= \frac{1}{4} (1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

4.2 Exercices supplémentaires

Exercice 1. Soient $z_1 = -4 - 3i$, $z_2 = -1 + 2i$ et $z_3 = 2 + i$. Effectuer les opérations suivantes :

i) $z_1 + z_2$, **ii)** $z_2 + z_1$, **iii)** $(z_1 + z_2) + z_3$, **iv)** $z_1 + (z_2 + z_3)$.

Exercice 2. Écrire sous la forme $x + iy$ les nombres complexes suivants :

i) $(1 + i)^2$, **ii)** $(1 + i)^3$, **iii)** $(1 + i)^4$, **iv)** $(1 + i)^8$.

Exercice 3. Calculer les racines carrées de $-i$, $3 - 4i$.

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

i) $z^2 + 2z + 2 = 0$, **ii)** $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$.

Exercice 5. Mettre les nombres suivants sous la forme polaire :

i) 1, **ii)** i , **iii)** -1 , **iv)** $-i$.

Exercice 6. Déterminer les ensembles des points suivants :

i) $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| > |z - 1|\}$, **ii)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| \geq 3\}$, **iii)** $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z < 3\}$.

Exercice 7. Calculer la somme $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$.

Indication. Calculer $(1 - z)S_n$.

Exercice 8. Soient $z_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

i) Calculer le module et l'argument de z_1 et de z_2 ,

ii) En déduire le module et l'argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 9. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

i) $e^{i\alpha}$, **ii)** $2e^{i3\alpha}$, **iii)** $e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

Exercice 10. Soit $z \in \mathbb{C}$. Illustrer géométriquement les ensembles suivants dans le plan complexe et identifier parmi eux les ensembles ouverts, fermés, bornés et connexes.

i) $|z - 1 + i| = 2$, **ii)** $|z - 1 + i| < 2$, **iii)** $|z - 1 + i| \geq 2$,

iv) $2 < |z - 1 + i| < 4$, **v)** $\operatorname{Re}(z - 1 + i) = 2$, **vi)** $\operatorname{Im}(z - 1 + i) < 2$.

Chapitre 2

Fonction d'une variable complexe à valeurs complexes

Dans ce chapitre, on va introduire la notion d'une fonction d'une variable complexe, à valeur complexe $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Définition 2.1 [5, 8] Soient E et F deux ensembles non vides dans \mathbb{C} . Si à chaque valeur $z \in E$, il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in F$, on dit que f est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$ ou

$$f : E \rightarrow F$$

$$z \mapsto w = f(z).$$

La partie E est appelée l'ensemble de définition de f .

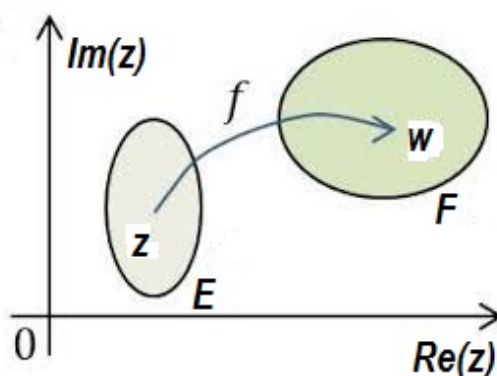


FIGURE 2.1 – f est une fonction de z

Exemple 2.1 En prenant

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z) = z^2,$$

alors, la valeur de f en $z = 3i$ est $f(3i) = (3i)^2 = -9$.

1 Fonctions uniformes et multiformes

Définition 2.2 [3, 5, 8] Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z on dira que w est une fonction uniforme de z ou que $f(z)$ est uniforme. Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z , on dira que w est une fonction multiforme de z .

Remarque 2.1 Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une branche de la fonction. On choisit habituellement un élément comme branche principale, ainsi est appelée détermination principale.

Exemple 2.2 Si l'on considère la fonction

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ z &\mapsto w = f(z) = z^2, \end{aligned}$$

à toute valeur de z il correspond une seule valeur de w . Donc, f est une fonction uniforme de z .

Exemple 2.3 Maintenant, si l'on considère la fonction

$$\begin{aligned} g &: E \rightarrow F \\ z &\mapsto w = g(z) = z^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w . Donc, g est une fonction multiforme de z . (En prenant $z = i$, on aura $w \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$).

1.1 Fonctions inverses

Si

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ z &\mapsto w = f(z), \end{aligned}$$

on peut aussi considérer z comme fonction de w , ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f^{-1} &: F \rightarrow E \\ w &\mapsto z = f^{-1}(w). \end{aligned}$$

La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f .

Exemple 2.4 La fonction inverse de la fonction :

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ z &\mapsto w = f(z) = z^2, \end{aligned}$$

est la fonction :

$$\begin{aligned} f^{-1} &: F \rightarrow E \\ w &\mapsto z = f^{-1}(w) = w^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

1.2 Transformations

Définition 2.3 Si $z = x + iy$, on peut écrire :

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Les fonctions u et v sont appelées, respectivement, partie réelle et partie imaginaire de f .

On note

$$\operatorname{Re}(f) = u(x, y), \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) = v(x, y).$$

Exemple 2.5 Soit $z = x + iy$. En considérant la fonction

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ z &\mapsto w = f(z) = z^3, \end{aligned}$$

on aura :

$$\begin{aligned} w &= f(z) = f(x + iy) \\ &= (x + iy)^3 \\ &= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \\ &= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \\ &= u(x, y) + iv(x, y), \end{aligned}$$

où

$$\operatorname{Re}(f) = u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) = v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

1.3 Limites

Définition 2.4 Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $z_0 \in D$ et f une fonction complexe, on dit que f admet une limite l en $z_0 = x_0 + iy_0$, et on note $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$, si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - l| < \epsilon.$$

Exemple 2.6 Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = z^2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\lim_{z \rightarrow 2i} f(z) = (2i)^2 = -4.$$

Exercice 2.1 Montrer que si

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = \frac{z}{\bar{z}}, \end{aligned}$$

alors, $\lim_{z \rightarrow 0} f$ n'existe pas.

Solution 2.1 Soit $z = x + iy$.

i) Pour $y = 0$ et $x \rightarrow 0$, on a :

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + i0}{x - i0} = 1,$$

ii) lorsque $x = 0$ et $y \rightarrow 0$, on obtient :

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 + iy}{0 - iy} = -1.$$

On a trouvé deux directions d'approche du point $z_0 = 0$, telles que la fonction ne tend pas vers la même limite, ce qui prouve que f n'admet pas de limite en $z_0 = 0$.

Proposition 2.1 Soient $z = x + iy$, $l = a + ib$ et $f = u + iv$ où $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ et u et v sont des fonctions réels. Alors,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = b. \end{cases}$$

Remarque 2.2 Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique. Si la fonction f est multiforme, la limite de f quand $z \rightarrow z_0$ peut dépendre de la branche choisie.

1.4 Continuité

Définition 2.5 Soit f une fonction complexe uniforme. La fonction f est dite continue en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Une fonction f est dite continue dans une région du plan complexe si elle est continue en tous les points de cette région.

Exemple 2.7 Soit f la fonction définie par :

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & \text{si } z \neq i, \\ 0, & \text{si } z = i. \end{cases}$$

Quand z tend vers i , $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$, i.e. $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = i^2 = -1$. Mais $f(i) = 0$. Donc, $\lim_{z \rightarrow i} f(z) \neq f(i)$ et la fonction f n'est pas continue en $z = i$.

Remarque 2.3 La fonction $f = u + iv$ est continue dans un domaine D si et seulement si la partie réelle u et la partie imaginaire v sont continues dans D .

2 Fonctions élémentaires

2.1 Fonctions polynômiales

[8] Les fonctions polynômiales sont définies par :

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = P(z), \quad (2.1)$$

où $a_0 \neq 0$, a_1, \dots, a_n , sont des constantes complexes et n un entier positif appelé le degré du polynôme $P(z)$.

2.2 Fractions rationnelles

[8] Les fractions rationnelles sont définies par :

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (2.2)$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes. Le cas particulier :

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.3)$$

où $ad - bc \neq 0$, est appelé transformation homographique.

2.3 Fonctions exponentielles

[8] La fonction exponentielle e^z est définie par :

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad (2.4)$$

formule dans laquelle e est la base des logarithmes népériens. Si a est réel et positif on définit :

$$a^z = e^{z \log a}, \quad (2.5)$$

où $\log a$ est le logarithme népérien de a . Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelles. Par exemple :

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \text{et} \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

2.4 Fonctions trigonométriques

[8] Les fonctions trigonométriques ou circulaires sont définies à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, & \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}, & \csc z &= \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}, \\ \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}. \end{aligned}$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Par exemple :

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad 1 + \tan^2 z = \sec^2 z, \quad 1 + \cot^2 z = \csc^2 z,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad \tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2},$$

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \tan(-z) = -\tan z.$$

2.5 Fonctions hyperboliques

[8] Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}, \\ \operatorname{tanh} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, & \operatorname{coth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \end{aligned}$$

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \tan(iz) = i \operatorname{tanh} z,$$

$$\operatorname{sh}(iz) = i \sin z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z, \quad \operatorname{tanh}(iz) = i \tan z.$$

2.6 Fonctions logarithmiques

[8] Si $z = e^w$, on écrit $w = \log z$ appelé le logarithme népérien de z . La fonction $\log z$, $z \neq 0$, est donc l'inverse de la fonction exponentielle. On a :

$$w = \log z = \log|z| + i(\theta + 2k\pi), \quad -\pi < \theta = \operatorname{Arg}(z) < \pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

où $z = r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + 2k\pi)}$.

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \quad \log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2, \quad \log z^n = n \log z.$$

Remarque 2.4 La fonction $w = \log z$ est une fonction multiforme.

Exemple 2.8 On a :

$$\log(-1) = \log|-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour la détermination principale,

$$\log(-1) = i\pi.$$

Exemple 2.9 On a :

$$\log(1+i) = \log|1+i| + i \arg(1+i) = \log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour la détermination principale,

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

2.7 Fonctions puissances

[8] La fonction z^α , $\alpha, z \in \mathbb{C}$ est définie par :

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

De même si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions données de z , on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \log f(z)}.$$

En général de telles fonctions sont multiformes.

Exemple 2.10

$$i^{-i} = e^{-i \log i} = e^{-i(\log|i| + i \arg(i))} = e^{-i^2(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La détermination principale est

$$i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Remarque 2.5 Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}.$$

Mais, dans le cas général si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}.$$

Exemple 2.11 On a

$$((-i)^2)^i = (-1)^i = e^{i \ln(-1)} = e^{i(\log|-1| + i \arg(-1))} = e^{i^2(\pi + 2k\pi)} = e^{-\pi - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'autre part,

$$(-i)^{2i} = e^{2i \ln(-i)} = e^{2i(\log|-i| + i \arg(-i))} = e^{2i^2(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{\pi - 4k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'où

$$((-i)^2)^i \neq (-i)^{2i}.$$

2.8 Fonctions trigonométriques inverses

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \quad \operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad \operatorname{Arccot} z = \frac{1}{2i} \log \frac{z + i}{z - i}.$$

2.9 Fonctions hyperboliques inverses

$$\operatorname{Argsh} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right), \quad \operatorname{Argch} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}, \quad \operatorname{Argcoth} z = \frac{1}{2} \log \frac{z + 1}{z - 1}.$$

3 Travaux dirigés

3.1 Exercices résolus

Exercice 1 . Soit $w = f(z) = z^2 + z$. Trouver les valeurs de w qui correspondent aux variables suivantes :

$$\text{i) } z = 1 - i, \quad \text{ii) } z = -1 + 2i.$$

Solution . Soit $w = f(z) = z^2 + z$.

i) Pour $z = 1 - i$, on a :

$$\begin{aligned} w &= f(1 - i) \\ &= (1 - i)^2 + 1 - i \\ &= 1 - 3i. \end{aligned}$$

ii) Maintenant, si $z = -1 + 2i$, on aura :

$$\begin{aligned} w &= f(-1 + 2i) \\ &= (-1 + 2i)^2 - 1 + 2i \\ &= -4 - 2i. \end{aligned}$$

Exercice 2 . Déterminer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

$$\text{i) } f(z) = e^{-z}, \quad \text{ii) } f(z) = \sin z, \quad \text{iii) } f(z) = \text{Ch } z.$$

Solution . i)

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-z} = e^{-x-iy} = e^{-x} e^{-iy} \\ &= e^{-x} (\cos y - i \sin y) \\ &= e^{-x} \cos y - i e^{-x} \sin y, \end{aligned}$$

donc, $\text{Re}(f) = e^{-x} \cos y$ et $\text{Im}(f) = -e^{-x} \sin y$.

ii)

$$\begin{aligned}f(z) = \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\&= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\&= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} \\&= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} \\&= \frac{\cos x (e^{-y} - e^y) + i \sin x (e^y + e^{-y})}{2i} \\&= \frac{(e^y + e^{-y})}{2} \sin x + i \frac{(e^y - e^{-y})}{2} \cos x \\&= \operatorname{ch} y \sin x + i \operatorname{sh} y \cos x,\end{aligned}$$

donc, $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{ch} y \sin x$ et $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{sh} y \cos x$.**iii)**

$$\begin{aligned}f(z) &= \operatorname{ch} z \\&= \operatorname{ch}(x + iy) \\&= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} iy.\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{ch} iy = \cos y$ et $\operatorname{sh} iy = i \sin y$, on obtient :

$$f(z) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y,$$

donc, $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{ch} x \cos y$ et $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{sh} x \sin y$.**Exercice 3.** Montrer que : $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.**Solution.** Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\sin(z_1 + z_2) &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz_1} e^{iz_2} - e^{-iz_1} e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) - (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)}{2i} \\ &= \frac{2i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2)}{2i}.\end{aligned}$$

D'où

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Exercice 4 . Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\textbf{i)} \operatorname{Im}(\sin z) = 0, \quad \textbf{ii)} \operatorname{Re}(\operatorname{Sh} z) = 0, \quad \textbf{iii)} e^z = -2.$$

Solution . **i)** $\operatorname{Im}(\sin z) = 0$. Selon l'exercice 2, l'item (ii), on a :

$$\sin z = \operatorname{ch} y \sin x + i \operatorname{sh} y \cos x.$$

Alors, la partie imaginaire de $\sin z$ s'annule si

$$\operatorname{sh} y \cos x = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sh} y = 0.$$

Donc, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $y = 0$. D'où $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

ii) $\operatorname{Re}(\operatorname{sh} z) = 0$. Tout d'abord, on doit déterminer la partie réelle de la fonction $\operatorname{sh} z$.

Soit $z = x + iy$. Alors,

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} z &= \operatorname{sh}(x + iy) \\ &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} iy \\ &= \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Re}(\operatorname{sh} z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} x \cos y = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos y = 0.$$

Alors, $x = 0$ ou $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. D'où $z_k = i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

iii) Pour $z = x + iy$, on a :

$$e^z = -2 \Leftrightarrow e^x \cos y + i e^x \sin y = -2.$$

Ainsi,

$$e^x \cos y = -2, \tag{2.6}$$

et

$$e^x \sin y = 0. \tag{2.7}$$

Puisque $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\sin y = 0.$$

D'où $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'équation (2.6) devient

$$e^x \cos(k\pi) = -2.$$

Or

$$e^x = 2(-1)^{k+1}.$$

Ceci est possible seulement si k est un nombre impair. Dans ce cas, $x = \log 2$.

Les racines de l'équation $e^z = -2$ sont donc,

$$z_{k'} = \log 2 + i(2k' + 1)\pi, \quad k' \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 5. Calculer

i) $\operatorname{Log}(1 + i)$, **ii)** i^i .

Solution . i)

$$\log(1 + i) = \log|1 + i| + i \arg(1 + i) = \log \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ii)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(\log|i| + i \arg(i))} = e^{i(\log 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 6. Calculer les limites suivantes :

$$\mathbf{i)} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\operatorname{ch}(iz) + i \operatorname{sh}(iz)}, \quad \mathbf{ii)} \lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}.$$

Solution . i)

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\operatorname{ch}(iz) + i \operatorname{sh}(iz)} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ch}\left(i \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sh}\left(i \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{0}{0}, \quad (\text{forme indéterminée}).$$

Pour enlever l'indétermination, on va utiliser les relations suivantes :

$$\operatorname{ch}(iz) = \cos z \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin z.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\operatorname{ch}(iz) + i \operatorname{sh}(iz)} &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\cos z - \sin z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - \sin z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z)}{\cos z - \sin z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos z + \sin z) \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

ii)

$$\lim_{z \rightarrow -i \frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i} = \frac{e^{-i\pi} + 1}{e^{-i \frac{\pi}{2}} + i} = \frac{-1 + 1}{-i + i} = \frac{0}{0}, \quad (\text{forme indéterminée}).$$

En décomposant le numérateur, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -i \frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i} &= \lim_{z \rightarrow -i \frac{\pi}{2}} \frac{(e^z)^2 - i^2}{e^z + i} \\ &= \lim_{z \rightarrow -i \frac{\pi}{2}} \frac{(e^z - i)(e^z + i)}{e^z + i} \\ &= \lim_{z \rightarrow -i \frac{\pi}{2}} (e^z - i) \\ &= e^{-i \frac{\pi}{2}} - i \\ &= -2i. \end{aligned}$$

Exercice 7. Montrer que : $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas.

Solution. Si la limite existait, elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.

Si $z \rightarrow 0$ le long de l'axe des x , alors $y = 0$, $z = x + iy = x$ et $\bar{z} = x - iy = x$; la limite cherchée est donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Si $z \rightarrow 0$ le long de l'axe des y , alors $x = 0$, $z = x + iy = iy$ et $\bar{z} = x - iy = -iy$; la limite cherchée est

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z \rightarrow 0$, il n'y a pas de limite.

3.2 Exercices supplémentaires

Exercice 1. Soit $z = x + iy$. Trouver $\operatorname{Re} w$ et $\operatorname{Im} w$ où $w = f(z)$.

i) $w = f(z) = \frac{1}{z}$, **ii)** $w = f(z) = 2z^3 - 3z$, **iii)** $w = f(z) = \frac{i+z}{i-z}$.

Exercice 2. Écrire sous la forme $a + ib$ les fonctions suivantes :

i) $\log i$, **ii)** $\log(-1 - i)$, **iii)** $\log(-2i)$.

Exercice 3. Trouver toutes les solutions des équations suivantes :

i) $e^z = 1 + 2i$, **ii)** $\cos z = i \sin z$, **iii)** $e^{iz} = 4$.

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{C} , $\tanh z = 0$.

Exercice 5. Trouver les valeurs de : **i)** $\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{3}\right)$, **ii)** $\operatorname{ch}\left(\frac{\pi i}{2}\right)$, **iii)** $\operatorname{coth}\left(\frac{3\pi i}{4}\right)$.

Exercice 6. Calculer les limites suivantes :

i) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z+1}{z+2}$, **ii)** $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z+i}$, **iii)** $\lim_{z \rightarrow (3-4i)} |z|$.

Exercice 7. Soit $f(z) = z^2$. Montrer que : $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Chapitre 3

Dérivation dans le domaine complexe

Comme pour les fonctions réelles d'une variable réelle, on peut développer la notion de dérivées de fonctions complexes en se basant sur le concept fondamental de la limite.

1 Fonctions analytiques

1.1 Dérivée d'une fonction uniforme

Définition 3.1 [3, 4, 7, 8] Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction uniforme.

La dérivée de f en $z_0 \in D$ est définie par :

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (3.1)$$

pourvu que cette limite existe. On dit alors que f est dérivable en z_0 . On utilisera souvent $z_0 + h$, au lieu de z dans la formule (3.1).

Définition 3.2 [3, 4, 7, 8] Si la dérivée de f existe en tout point z d'un domaine D , alors f est dite analytique dans D . Une fonction f est dite analytique (ou holomorphe ou régulière) en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0 .

Exemple 3.1 La fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = z^2$ est analytique dans \mathbb{C} .

En effet, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = 2z_0 = f'(z_0).$$

Exemple 3.2 La fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point. Ici, on peut montrer que la limite donnée dans la formule (3.1) n'existe pas pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$.

Définition 3.3 Une fonction f est dite entière si elle est dérivable dans tout le plan complexe \mathbb{C} .

Exemple 3.3 1) Les fonctions constantes sont entières.

2) La fonction identique définie par $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$, est entière.

3) Les polynômes $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ sont des fonctions entières.

1.2 Conditions de Cauchy-Riemann

On va maintenant développer un moyen pour tester l'analyticité d'une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, basé sur les dérivées partielles de ses parties réelles et imaginaires u et v .

Théorème 3.1 [4, 8] Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, où $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Si f est analytique dans D , alors les dérivées partielles de u et v existent en tout point de D et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.2)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Réciproquement, si les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont continues dans D , et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, alors la fonction $f = u + i v$ est analytique dans D .

1.3 Expression de la dérivée

Proposition 3.1 Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine. Si $f = u + i v$ est analytique dans D , alors la dérivée de f est donnée par :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad z \in D.$$

Exemple 3.4 On considère la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = z^3. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 = (x + iy)^3 \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3). \end{aligned}$$

Donc,

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{et} \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3, \quad u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy, \end{cases}$$

sont satisfaites en tout point z du plan complexe \mathbb{C} .

Remarque 3.1 En multipliant la deuxième condition de Cauchy-Riemann, équation (3.3) par i et l'ajouter à la première condition, équation (3.2), les conditions de Cauchy-Riemann peuvent être reformulées comme suit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (3.4)$$

Proposition 3.2 En notant que :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

les conditions de Cauchy-Riemann peuvent être écrites sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (3.5)$$

Exemple 3.5 Soit la fonction $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, définie par $f(z) = \frac{1}{z} + z \operatorname{Re} z$.

On a :

$$f(z) = \frac{1}{z} + z \operatorname{Re} z = \frac{1}{z} + z \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right).$$

En utilisant la Proposition 3.2, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2} \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Ce qui montre que f n'est pas analytique sur \mathbb{C}^* .

Exemple 3.6 On prend la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, où $f(z) = z^2$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Donc f est entière.

1.4 Dérivées d'ordre supérieur

Théorème 3.2 Si $D \subset \mathbb{C}$ est un domaine et f est dérivable dans D , alors f est infiniment dérivable dans D . En d'autres termes si f est analytique dans D , alors ses dérivées

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}, \dots$$

sont toutes analytiques dans D pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.2 Une fonction analytique est indéfiniment dérivable.

1.5 Règles de dérivation

Proposition 3.3 Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$, deux fonctions dérivables sur l'ouvert $D \subset \mathbb{C}$, et c une constante. Alors on a :

- 1) $(c)' = 0$,
- 2) $(cf)'(z) = cf'(z)$,
- 3) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$,
- 4) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$,
- 5) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z) \neq 0$,
- 6) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$.

Exemple 3.7 a) $f(z) = \sin z$, $f'(z) = \cos z$, b) $f(z) = 3z^2 - \pi z + 3$, $f'(z) = 6z - \pi$,

c) $f(z) = e^{z^2-1}$, $f'(z) = 2ze^{z^2-1}$.

1.6 Règle de l'Hospital

Soit f et g deux fonctions analytiques dans un domaine D contenant le point z_0 , telles que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$. Alors, la règle de l'Hospital permet d'affirmer que :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau.

Exemple 3.8 On a :

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 - 1}{z^2 + 1} = \frac{0}{0}.$$

En utilisant la règle de l'Hospital, on aura

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 - 1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{4z^3}{2z} = 2i^2 = -2.$$

2 Points singuliers

Un point en lequel une fonction f cesse d'être analytique est appelé un point singulier ou une singularité de f . Il existe des types variés de singularités.

2.1 Pôles

Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = l \neq 0, \infty$, alors z_0 est appelé pôle d'ordre n . Si $n = 1$, z_0 est appelé pôle simple.

Exemple 3.9 Soit la fonction f définie par :

$$f(z) = \frac{3z - 2}{(z - i)^2 (z + 1)^3 (z - 4)}.$$

Puisque,

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{3z - 2}{(z + 1)^3 (z - 4)} = \frac{3i - 2}{(i + 1)^3 (i - 4)} \neq 0, \infty,$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z + 1)^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{3z - 2}{(z - i)^2 (z - 4)} = -\frac{i}{2} \neq 0, \infty,$$

et

$$\lim_{z \rightarrow 4} (z - 4) f(z) = \lim_{z \rightarrow 4} \frac{3z - 2}{(z - i)^2 (z + 1)^3} = \frac{10}{5^3 (4 - i)^2} \neq 0, \infty,$$

alors, f a un pôle double en $z = i$, un pôle triple en $z = -1$ et un pôle simple en $z = 4$.

2.2 Singularités apparentes

Le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

Exemple 3.10 Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

car

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1.$$

2.3 Singularités essentielles

Le point singulier z_0 est appelé singularité essentielle de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ n'existe pas. Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

Exemple 3.11 La fonction

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-3}},$$

a une singularité essentielle en $z = 3$ car $\lim_{z \rightarrow 3} f(z)$ n'existe pas.

3 Fonctions harmoniques

3.1 Définitions et notations

Définition 3.4 Soient D un ensemble de \mathbb{R}^2 et f une application de D dans \mathbb{R} . La fonction f est dite de classe C^2 sur D , (on note $f \in C^2(D, \mathbb{R})$), si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent et sont continues pour tout (x, y) de D .

Définition 3.5 [4, 8] Soit $u \in C^2(D, \mathbb{R})$. On dit que u est harmonique dans D , si pour tout $(x, y) \in D$, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.6)$$

Notation 3.1 La fonction $\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est appelée le Laplacien de u .

Exemple 3.12 On reprend la fonction

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z) = z^3,$$

où

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{et} \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

On a : $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x,$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y.$$

Alors,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0,$$

et

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6y - 6y = 0,$$

ce qui montre que les fonctions u et v sont harmoniques dans \mathbb{R}^2 .

Proposition 3.4 Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, une fonction analytique sur $D \subset \mathbb{C}$. Alors les fonctions réelles u et v sont harmoniques dans D

Exemple 3.13 On prend la fonction entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, définie par $f(z) = z^2 = u + iv$, où

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad v(x, y) = 2xy.$$

Donc, les fonctions u et v sont harmoniques dans \mathbb{R}^2 .

En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0,$$

et

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 - 0 = 0.$$

3.2 Lien Entre l'harmonicité et l'analyticité

Définition 3.6 Soit u une fonction harmonique sur $E \subset \mathbb{R}^2$. Alors, une fonction v est dite conjuguée harmonique de u si les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

Proposition 3.5 Soit u une fonction harmonique sur $E \subset \mathbb{R}^2$. Alors, il existe une fonction f analytique de $E \subset \mathbb{C}$ dans \mathbb{C} , telle que $\operatorname{Re} f = u$.

Remarque 3.3 Toute fonction harmonique $u(x, y)$ est la partie réelle d'une fonction analytique f définie à une constante imaginaire pure près.

Exercice 3.1 Soit la fonction u définie par : $u(x, y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- 1) Vérifier que la fonction u est harmonique sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Trouver v , conjuguée harmonique de u pour que la fonction $f = u + iv$ soit analytique.

Solution 3.1 1) On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 6xy - 3y^2, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 6x - 6y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -3x^2 - 6xy + 3y^2, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -6x + 6y. \end{aligned}$$

Donc, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

D'où u est harmonique sur \mathbb{R}^2 .

2) En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy - 3y^2, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2 - 6xy + 3y^2. \quad (3.8)$$

En intégrant l'équation (3.7), par rapport à y , on aura :

$$v(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + F(x), \quad (3.9)$$

où F est une fonction réelle de x .

Maintenant, des équations (3.8) et (3.9), on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 3y^2 + F'(x) = 3x^2 + 6xy - 3y^2,$$

d'où

$$F'(x) = 3x^2,$$

et donc,

$$F(x) = x^3 + c,$$

où $c \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, la fonction conjuguée harmonique $v(x, y)$ est

$$v(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

et la fonction analytique est donc

$$u(x, y) + iv(x, y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + i(3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3 + c).$$

4 Travaux dirigés

4.1 Exercices résolus

Exercice 1. À l'aide de la définition, calculer la dérivée de la fonction f , définie par $f(z) = z^2 - 3z$, aux points suivants :

i) $z = z_0$ et **ii)** $z = 1$.

Solution. **i)** Par définition, la dérivée de f en $z = z_0$ est

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - 3z - (z_0^2 - 3z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z^2 - z_0^2) - 3(z - z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0 - 3)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0 - 3) \\ &= 2z_0 - 3. \end{aligned}$$

ii) D'après l'item **i)**, ou directement, on trouve que si $z_0 = 1$, alors, $f'(1) = -1$.

Exercice 2. Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas analytiques en aucun point.

i) $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ **ii)** $f(z) = \operatorname{Re} z$, $z \in \mathbb{C}$, **iii)** $f(z) = \operatorname{Im} z$, $z \in \mathbb{C}$.

Solution. Par définition, f n'est pas analytique en z_0 , si la limite : $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'existe pas, i.e, la limite dépend de la façon dont z tend vers z_0 .

i) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x - iy - (x_0 - iy_0)}{x + iy - (x_0 + iy_0)}.$$

Si $y = y_0$ et $x \rightarrow x_0$, la limite cherchée est

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Si $x = x_0$ et $y \rightarrow y_0$, la limite cherchée est

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1.$$

Cette limite dépendant de la façon dont $z \rightarrow z_0$, la dérivée n'existe pas, i.e, la fonction f n'est analytique en aucun point.

ii)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x - x_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}.$$

Pour $y = y_0$ et $x \rightarrow x_0$, la limite cherchée est

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Pour $x = x_0$ et $y \rightarrow y_0$, la limite cherchée est

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x - x_0}{iy - iy_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{0}{iy - iy_0} = 0.$$

Donc, f n'est analytique en aucun point.

iii)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{y - y_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}.$$

Si $y = y_0$ et $x \rightarrow x_0$, la limite est

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

Si $x = x_0$ et $y \rightarrow y_0$, la limite est

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{iy - iy_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{i(y - y_0)} = -i.$$

Alors, f n'est dérivable en aucun point de \mathbb{C} .

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont analytiques sur le domaine indiqué.

i) $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, sur \mathbb{C} , ii) $f(z) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}$, sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Solution. Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit analytique.

i) On a :

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{et} \quad v(x, y) = e^x \sin y, \quad u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites dans \mathbb{R}^2 . Alors, la fonction f est analytique sur \mathbb{C} .

ii) On a :

$$u(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v(x, y) = -\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Donc, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - (x-1)^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y(x-1)}{[(x-1)^2 + y^2]^2}.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont ainsi satisfaites et la fonction f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Exercice 4. Soit u la fonction définie par :

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 3xy - 3x + 4y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Montrer que la fonction u est harmonique.

ii) Trouver une conjuguée harmonique v de u telle que $f = u + iv$ soit analytique.

Solution. i) On a : $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 3x + 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

On obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0,$$

ce qui montre que u est harmonique sur \mathbb{R}^2 .

ii) Pour trouver une conjuguée harmonique v de u telle que $f = u + iv$ soit analytique, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 3y - 3, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y - 3x + 4. \tag{3.11}$$

En intégrant l'équation (3.10), par rapport à y , on obtient :

$$v(x, y) = 2xy - \frac{3}{2}y^2 - 3y + R(x), \tag{3.12}$$

où R est une fonction réelle de x .

Par substitution de (3.12) dans (3.11), on aura :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + R'(x) = 2y + 3x - 4.$$

Alors,

$$R'(x) = 3x - 4,$$

et

$$R(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$v(x, y) = 2xy - \frac{3}{2}y^2 - 3y + \frac{3}{2}x^2 - 4x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les singularités et leur nature :

$$\text{i) } f(z) = \frac{z+3}{(z^2-1)(z-i)^2}, \quad \text{ii) } f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Solution. i) On a :

$$f(z) = \frac{z+3}{(z^2-1)(z-i)^2} = \frac{z+3}{(z-1)(z+1)(z-i)^2}.$$

Puisque

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+3}{(z+1)(z-i)^2} = \frac{4}{2(1-i)^2} = \frac{2}{-2i} = i \neq 0, \infty,$$

le point $z=1$ est un pôle simple.

De même $z=-1$ est aussi un pôle simple car

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+3}{(z-1)(z-i)^2} = \frac{2}{-2(-1-i)^2} = \frac{-1}{2i} = \frac{i}{2} \neq 0, \infty.$$

Le point $z=i$ est un pôle double car :

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z+3}{(z^2-1)} = \frac{i+3}{-1-1} = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \neq 0, \infty.$$

ii) Pour $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, on a $z=0$ est un point singulier essentiel car $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ n'existe pas.

4.2 Exercices supplémentaires

Exercice 1. À l'aide de la définition, déterminer les dérivées des fonctions suivantes aux points indiqués :

$$\text{i) } f(z) = 3z^2 + 4iz - 5 + i, \quad z=2, \quad \text{ii) } f(z) = \frac{2z-i}{z+2i}, \quad z=-i.$$

Exercice 2. Examiner si les fonctions suivantes sont analytiques

$$\text{i) } f(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{ii) } f(z) = |z|^2 - z, \quad \text{iii) } f(z) = ze^z.$$

Exercice 3. Vérifier que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites par les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

$$\text{i) } f(z) = \sin 2z, \quad \text{ii) } f(z) = ze^{-z}.$$

Exercice 4. Trouver les réels a , b , c et d tels que f soit partout analytique.

$$\text{i) } f(z) = (3x - y + 5) + i(ax + by - 3),$$

$$\text{ii) } f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2).$$

Exercice 5. Déterminer parmi les fonctions suivantes, celles qui sont harmoniques :

$$\text{i) } u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2, \quad \text{ii) } u(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2),$$

$$\text{iii) } u(x, y) = 2x^3y + x^2 - 3y^3.$$

Exercice 6. Est-ce que la fonction

$$v(x, y) = (x^2 + 1)y^2,$$

peut former la partie imaginaire de la fonction analytique $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$?

Exercice 7. Trouver une conjuguée harmonique v de u telle que $f = u + iv$ soit analytique.

$$\text{i) } u(x, y) = x \quad \text{ii) } u(x, y) = y, \quad \text{iii) } u(x, y) = x^2 - y^2, \quad \text{iv) } \cos x \text{ chy.}$$

Exercice 8. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points singuliers :

$$\text{i) } f(z) = \frac{z}{z+i}, \quad \text{ii) } f(z) = \frac{3z-2}{z^2+2z+5}.$$

Exercice 9. Préciser la nature des singularités de la fonction suivante :

$$f(z) = \frac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3 (3z+2)^2}.$$

Exercice 10. Déterminer

$$\text{i) } \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}, \quad \text{ii) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-\sin z}{z^3}.$$

Chapitre 4

Intégration dans le domaine complexe

Dans ce chapitre, on va aborder les méthodes d'intégration des fonctions complexes.

1 Arcs, chemins et lacets

Définition 4.1 [2, 4] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On appelle arc toute application continue γ d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{C} . On dit que $\gamma(a)$ est l'origine et que $\gamma(b)$ est l'extrémité.

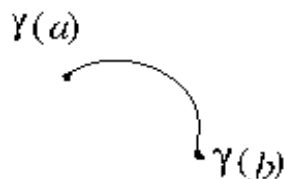


FIGURE 4.1 – Arc

Définition 4.2 [2, 4] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{C})$ une fonction différentiable, définie par $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

L'image $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t), t \in [a, b]\}$, notée C est appelée chemin et γ est un paramétrage du chemin.

Les points $z_0 = \gamma(a)$ et $z_n = \gamma(b)$ sont l'origine et l'extrémité du chemin respectivement.

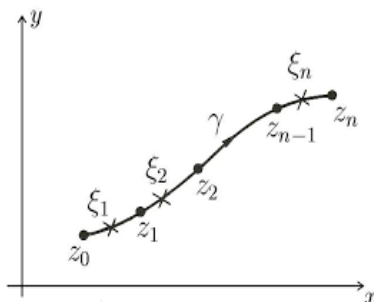


FIGURE 4.2 – Chemin

Exemple 4.1 Soient $z_0 = 2 + i$, $z_1 = 5 + 2i$. On définit

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1. \end{aligned}$$

On a : $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Le segment joignant z_0 et z_1 , noté $[z_0, z_1]$ est un chemin.

Exemple 4.2 Soient $z_0 = i$ et $r = 2$. On considère

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) = z_0 + re^{it}. \end{aligned}$$

Le cercle de centre z_0 et de rayon r , qu'on note $C(z_0, r)$ est un chemin.

Remarque 4.1 Le paramétrage d'un chemin n'est pas unique. On peut vérifier que les équations suivantes

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\gamma(t) = e^{2\pi it}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\gamma(t) = e^{i\frac{\pi t}{2}}, \quad t \in [0, 4],$$

sont toutes des paramétrages du cercle unité $|z| = 1$, orienté positivement.

Définition 4.3 Si les points initial et final d'un chemin coïncident, il est appelé chemin fermé ou lacet.

Remarque 4.2 On dit qu'un chemin est simple si ne se recoupe pas lui-même, i.e., il n'a pas de points doubles.

Remarque 4.3 Tout chemin fermé et simple, est appelé courbe de Jordan.

Exemple 4.3 On considère les chemins suivants :

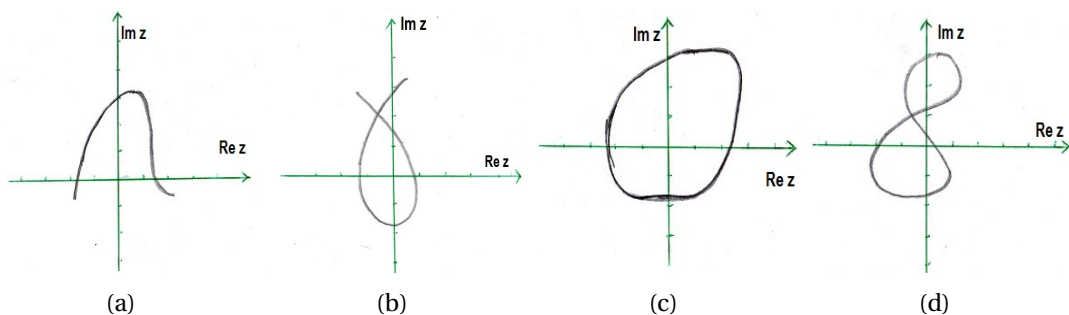


FIGURE 4.3 – (a) : Chemin non fermé et simple, (b) : Chemin non fermé et non simple, (c) : Chemin fermé et simple, (d) : Chemin fermé et non simple.

Définition 4.4 Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ et $C = \{\gamma(t), t \in [a, b]\}$ un chemin. On définit

$$C^- = \{\gamma^-(t), t \in [a, b]\},$$

comme le chemin opposé de C où

$$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \gamma^-(t) = x(a+b-t) + iy(a+b-t).$$

2 Intégration curviligne

Définition 4.5 [8] Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et C un chemin paramétré par $z : [a, b] \rightarrow D$, tel que z est différentiable, i.e., z' existe et continue.

On définit l'intégrale de f le long du chemin C par

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

L'intégrale le long d'un chemin est aussi appelée intégrale le long d'une courbe, ou intégrale curviligne complexe.

Notation 4.1 Si la courbe est fermée et orientée positivement \odot , on note $\oint_C f(z) dz$ au lieu de $\int_C f(z) dz$.

Exemple 4.4 Soit $C = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = e^{it}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. Calculer l'intégrale $\int_C z^2 dz$.

On a $dz = z'(t) dt = ie^{it} dt$.

Donc,

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{it})^2 ie^{it} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ie^{i3t} dt = \left[\frac{1}{3} e^{i3t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3} - i\frac{1}{3}.$$

2.1 Relation entre intégrales curvilignes réelles et complexes

Proposition 4.1 Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv$ et $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, l'intégrale curviligne complexe $\int_C f(z) dz$ peut être exprimée au moyen d'intégrales curvilignes réelles de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C (udx - vdy) + i(vdx + udy) \\ &= \int_a^b \left[u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \right] dt \\ &\quad + i \int_a^b \left[v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

Exemple 4.5 Soit $C = \{(t^2, \frac{1}{2}t) \in \mathbb{R}^2, t \in [-1, 3]\}$. Calculer $\int_C f(z) dz$ où $f(z) = i\bar{z} = y + ix$.

On a : $x(t) = t^2, y(t) = \frac{1}{2}t$ et $dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t)) dt = (2t + i\frac{1}{2}) dt$.
Donc,

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{-1}^3 (y(t) + ix(t)) (x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}t + it^2\right) \left(2t + i\frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_{-1}^3 \left[\frac{1}{2}t^2 + i\left(\frac{1}{4}t + 2t^3\right)\right] dt \\ &= \left[\frac{1}{6}t^3 + i\left(\frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}t^4\right)\right]_{-1}^3 \\ &= \frac{14}{3} + 40i. \end{aligned}$$

2.2 Propriétés des intégrales

Soient C_1, C_2 deux chemins tels que, l'extrémité de C_1 est l'origine de C_2 et $C = C_1 \cup C_2$, f et g sont intégrables le long de C . Alors,

1. $\int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz,$
2. $\int_C \alpha f(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz, \quad \alpha \in \mathbb{C},$
3. $\int_{C^-} f(z) dz = -\int_C f(z) dz,$
4. $\int_C f(z) dz = \int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$

2.3 Longueur d'un chemin

Soit C un chemin paramétré par la fonction continue

$$\begin{aligned} z: [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto z(t) = x(t) + iy(t), \end{aligned}$$

où $z' = x' + iy'$ existe et continue. Alors la longueur L_C du chemin C est définie par :

$$L_C = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Exemple 4.6 Soit $C = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$. Trouver la longueur du C .

On a $z'(t) = ie^{it}$ et $|ie^{it}| = 1$. Alors,

$$L_C = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

2.4 Théorème d'estimation

Théorème 4.1 [4, 8] Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $C = \{z(t) \in D, t \in [a, b]\}$ un chemin, tel que $M = \max_{z(t) \in C} |f(z(t))|$. Alors,

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML_C.$$

où L_C est la longueur du chemin C .

Exemple 4.7 Soit C le segment d'extrémités -2 et $3 + 4i$ qui est définie par :

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = -2 + 5t + 4it, t \in [0, 1]\}.$$

Soit $f(z) = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z$.

$$\text{On a : } f(z) = -2 + 5t - 4t = -2 + t,$$

$$dz = z'(t) dt = (5 + 4i) dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_0^1 (-2 + t)(5 + 4i) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 (5t - 10 + i(4t - 8)) dt \right| \\ &= \left| \left[\frac{5}{2}t^2 - 10t + i(2t^2 - 8t) \right]_0^1 \right| \\ &= \left| \left[\frac{5}{2}t^2 - 10t + i(2t^2 - 8t) \right]_0^1 \right| \\ &= \left| -\frac{15}{2} - 6i \right| \\ &= \sqrt{\frac{225}{4} + 36} = \sqrt{\frac{369}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{41}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|f(z(t))| = |-2 + t| \leq |-2| + |t| \leq 3, \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$L_C = \int_0^1 |z'(t)| dt = \int_0^1 |5 + 4i| dt = \sqrt{41},$$

et

$$ML_C = 3\sqrt{41}.$$

D'où,

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML_C.$$

3 Théorèmes de Cauchy

Définition 4.6 Un domaine $D \subset \mathbb{C}$ est dit simplement connexe si tout chemin fermé simple de D peut être réduit par déformation continue à un point sans quitter D .

Dans le cas contraire, D est dit multiplément connexe.

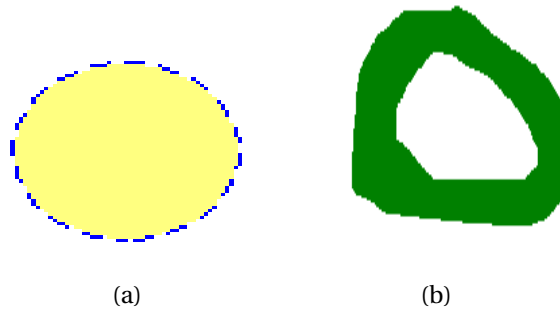


FIGURE 4.4 – (a) Domaine simplement connexe (b) Domaine multiplément connexe

Théorème 4.2 [4, 8] Soit f une fonction analytique dans un domaine D et sur sa frontière C . Alors,

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Ce théorème fondamental est souvent appelé théorème de Cauchy, il est à la fois valable pour des domaines simplement connexes ou multiplément connexes.

Exemple 4.8 Soit $C = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$. Calculer $\oint_C f(z) dz$; $f(z) = z^2$.

On a $dz = z'(t) dt = ie^{it} dt$. Alors,

$$\begin{aligned} \oint_C z^2 dz &= \int_0^{2\pi} (e^{2it}) ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} ie^{3it} dt \\ &= \left[\frac{e^{3it}}{3} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Proposition 4.2 Soit f une fonction analytique dans un domaine limité par deux chemins fermés simples C_1 et C_2 et sur ces chemins. Alors,

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

Exemple 4.9 Soit $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$. Calculer $\oint_{C_1} f(z) dz$ et $\oint_{C_2} f(z) dz$, où

$$C_1 = \left\{ z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = 2e^{it}, t \in [0, 2\pi] \right\},$$

et

$$C_2 = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}.$$

La fonction f est analytique dans le domaine limité par les chemins C_1 et C_2 et sur ces chemins.

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} f(z) dz &= \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-it}) 2ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i dt \\ &= 2\pi i, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} f(z) dz &= \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz \\ &= \int_0^{2\pi} (e^{-it}) ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i dt \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

D'où

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

3.1 Primitives et indépendance du chemin d'intégration

Définition 4.7 [4, 8] Soit $D \subset \mathbb{C}$, un domaine et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. On dit que f admet une primitive sur D , s'il existe F fonction analytique sur D , telle que $F' = f$ sur D . On écrit

$$F(z) = \int f(z) dz.$$

Exemple 4.10 La fonction

$$F : z \mapsto z + e^z - \cos z,$$

est une primitive de

$$f : z \mapsto 1 + e^z + \sin z.$$

Théorème 4.3 [4, 8] (Théorème Fondamental de l'Intégration). Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $z_0, z_1 \in D$, f et g deux fonctions analytiques sur D telles que $F'(z) = f(z)$. Alors, pour tout chemin C de point initial z_0 et de point final z_1 , on a :

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = [F(z)]_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0).$$

Cela signifie que si f est analytique alors la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin suivi pour aller de z_0 à z_1 .

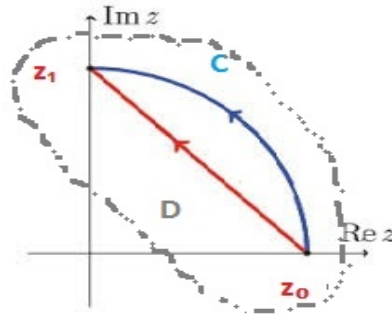


FIGURE 4.5 – Indépendance du chemin d'intégration

Exemple 4.11 Soit $z \rightarrow f(z) = 3z$. Évaluer $\int_C f(z) dz$ de $z_0 = 0$ à $z_1 = 4 + 8i$ le long de la parabole

$$C_1 = \left\{ z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = \frac{1}{4}t^2 + 2it, \quad t \in [0, 4] \right\},$$

et le long du segment de droite

$$C_2 = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = 4t + 8it, \quad t \in [0, 1]\}.$$

Sur la parabole C_1 , on a :

$$z(t) = \frac{1}{4}t^2 + i2t \Rightarrow dz = z'(t)dt = \left(\frac{1}{2}t + 2i\right)dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_{C_1} 3z dz \\ &= 3 \int_0^4 \left(\frac{1}{4}t^2 + 2it\right) \left(\frac{1}{2}t + 2i\right) dt \\ &= 3 \int_0^4 \left(\frac{1}{8}t^3 - 4t + \frac{3}{2}it^2\right) dt \\ &= 3 \left[\frac{1}{32}t^4 - 2t^2 + \frac{1}{2}it^3 \right]_0^4 \\ &= -72 + 96i. \end{aligned}$$

Sur le segment C_2 , on a :

$$z(t) = 4t + i8t \Rightarrow dz = z'(t)dt = (4 + 8i) dt,$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_{C_2} f(z) dz &= \int_{C_2} 3z dz \\
 &= 3 \int_0^1 (4t + 8it)(4 + 8i) dt \\
 &= 3 \int_0^1 (-48t + 64it) dt \\
 &= 3 [-24t^2 + 32it^2]_0^1 \\
 &= -72 + 96i.
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

4 Quelques théorèmes importants

4.1 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 4.4 [4, 8] Soient f une fonction analytique à l'intérieur d'un lacet C et sur C , et z_0 point intérieur à C . Alors,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{4.1}$$

où C est décrit dans le sens positif.

De même la n -ième dérivée de f en z_0 est donnée par :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.2}$$

Les formules (4.1) et (4.2) sont appelées formules intégrales de Cauchy.

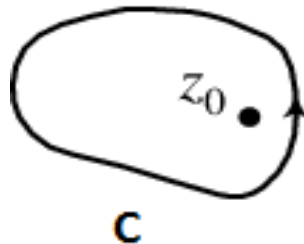


FIGURE 4.6 – Formule intégrale de Cauchy

Exemple 4.12 Soient $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z+1}$ et $C = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = 2 + e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$. Utiliser la formule intégrale de Cauchy (4.1), pour évaluer l'intégrale suivante :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-2} dz.$$

La fonction f est analytique à l'intérieur du cercle C et sur C , alors d'après la formule intégrale de Cauchy (4.1), avec $z_0 = 2$, on obtient :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-2} dz = \oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz = 2\pi i f(2) = \frac{2}{3}\pi i.$$

4.2 Inégalité de Cauchy

Théorème 4.5 [4, 8] Soit f une fonction analytique à l'intérieur du cercle C et sur C , où C désigne le cercle d'équation $|z - z_0| = r$. Alors,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n},$$

où

$$M = \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

4.3 Théorème de Liouville

Théorème 4.6 [4, 8] Soit f une fonction analytique et bornée, sur tout le plan complexe. Alors, f est constante.

4.4 Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 4.7 [4, 8] Toute équation algébrique

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = 0, \quad a_n \neq 0,$$

possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

4.5 Théorème du module maximum

Théorème 4.8 [4, 8] Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'un lacet C et sur C , si de plus $f(z)$ n'est pas constante, alors le maximum de $|f(z)|$ est atteint sur C .

4.6 Théorème de Rouché

Théorème 4.9 [4, 8] Si $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques dans et sur un lacet C , et si $|g(z)| < |f(z)|$ sur C , alors $f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C .

5 Travaux dirigés

5.1 Exercices résolus

Exercice 1 . Calculer $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2) dx + (3x - y) dy$ le long de

i) la parabole $x = 2t$, $y = t^2 + 3$,

ii) la ligne brisée formée par les segments de droite $(0,3)$ à $(2,3)$ et $(2,3)$ à $(2,4)$.

Solution . i) Les points $(0,3)$ et $(2,4)$ de la parabole correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = 1$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{2(t^2 + 3) + (2t)^2\} 2dt + \{3(2t) - (t^2 + 3)\} 2tdt &= \int_0^1 (24t^2 + 12 - 2t^3 - 6t) dt \\ &= \left[8t^3 + 12t - \frac{t^4}{2} - 3t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{33}{2}. \end{aligned}$$

ii) Le long du segment de droite d'extrémités $(0,3)$ et $(2,3)$, $y = 3$, $dy = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_0^2 (6 + x^2) dx + (3x - 3) 0 = \left[6x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{44}{3}.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(2,3)$ et $(2,4)$, $x = 2$, $dx = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_3^4 (2y + 4) 0 + (6 - y) dy = \left[6y - \frac{y^2}{2} \right]_3^4 = \frac{5}{2}.$$

Le résultat demandé est donc

$$\frac{44}{3} + \frac{5}{2} = \frac{103}{6}.$$

Exercice 2 . Évaluer $\int_C \bar{z} dz$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$ le long du chemin C dans les cas suivants :

i) le chemin C défini par $z(t) = t^2 + it$,

ii) le chemin C formé des segments joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4 + 2i$.

Solution . i) Les points $z = 0$ et $z = 4 + 2i$ sur C correspondant à $t = 0$ et à $t = 2$.

L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \overline{(t^2 + it)}(2t + i) dt &= \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i) dt \\
 &= \int_0^2 (2t^3 + t - it^2) dt \\
 &= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} - i \frac{t^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= 10 - i \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

Autre méthode. L'intégrale donnée s'écrit

$$\int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i \int_C xdy - ydx.$$

Les équations paramétriques de C sont : $x = t^2$ et $y = t$ de $t = 0$ à $t = 2$, l'intégrale curviligne a donc pour valeur

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 t^2(2t) dt + t dt + i \int_0^2 t^2 dt - t(2t) dt &= \int_0^2 (2t^3 + t) dt + i \int_0^2 -t^2 dt \\
 &= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} \right]_0^2 + i \left[-\frac{1}{3} t^3 \right]_0^2 \\
 &= 10 - i \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

ii) L'intégrale donnée vaut

$$\int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i \int_C xdy - ydx.$$

La droite qui joint 0 à $2i$ joint les points $(0, 0)$ et $(0, 2)$, on a donc sur cette droite $x = 0$, $dx = 0$, et la valeur de l'intégrale est

$$\int_0^2 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 2.$$

Sur le segment de droite $2i$, $4 + 2i$ on a : $y = 2$, $dy = 0$.

D'où

$$\int_0^4 x dx + i \int_0^4 -2 dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 + i [-2x]_0^4 = 8 - 8i.$$

Donc, le résultat demandé est

$$2 + 8 - 8i = 10 - 8i.$$

Exercice 3 . Évaluer les intégrales : $\oint_C dz$, et $\oint_C z dz$, et $\oint_C (z - z_0) dz$, où C est un chemin fermé simple et z_0 une constante.

Solution . Les fonctions 1 , z et $z - z_0$, sont analytiques dans C , et sur C . Alors, par le Théorème de Cauchy, on obtient :

$$\oint_C dz = \oint_C z dz = \oint_C (z - z_0) dz = 0.$$

Exercice 4 . Soit $C = \{z(t) \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Calculer $\oint_C \frac{e^z}{z - z_0} dz$, où z_0 est

i) à l'extérieur de C , ii) à l'intérieur de C .

Solution . La fonction $\frac{e^z}{z - z_0}$ est analytique à l'intérieur de C .

i) Soit z_0 à l'extérieur de C , ($|z_0| > 1$). Donc, d'après le Théorème de Cauchy on a :

$$\oint_C \frac{e^z}{z - z_0} dz = 0.$$

ii) Si z_0 est à l'intérieur de C , ($|z_0| < 1$), on pose : $f(z) = e^z$ qui est analytique à l'intérieur de C . Alors, d'après la formule d'intégration de Cauchy, on trouve :

$$\oint_C \frac{e^z}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i e^{z_0}.$$

Exercice 5 . Soit C le cercle $|z| = 5$. Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{i) } \oint_C \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 5z + 4} dz, \quad \text{ii) } \oint_C \frac{e^{4z}}{(z + 2)^3} dz.$$

Solution . i) En utilisant le fait que

$$\frac{1}{z^2 - 5z + 4} = -\frac{1}{3(z - 1)} + \frac{1}{3(z - 4)},$$

on obtient

$$\oint_C \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 5z + 4} dz = -\frac{1}{3} \oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z - 1)} dz + \frac{1}{3} \oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z - 4)} dz.$$

L'application de la formule de Cauchy pour $z_0 = 1$ et $z_0 = 4$, donne

$$-\frac{1}{3} \oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z - 1)} dz = -\frac{1}{3} (2\pi i \cos \pi) = \frac{2}{3} \pi i, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{3} \oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z - 4)} dz = \frac{1}{3} (2\pi i \cos 4\pi) = \frac{2}{3} \pi i, \quad (4.4)$$

car $z_0 = 1$ et $z_0 = 4$ sont à l'intérieur de C et $\cos(\pi z)$ est analytique dans C .

Par addition de (4.3) et (4.4), on obtient alors

$$\oint_C \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 5z + 4} dz = \frac{2}{3}\pi i + \frac{2}{3}\pi i = \frac{4}{3}\pi i.$$

ii) Soient $f(z) = e^{4z}$ et $z_0 = -2$. La formule intégrale de Cauchy s'écrit

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (4.5)$$

Si $n = 2$, alors, $f^{(2)}(z) = 16e^{4z}$ et $f^{(2)}(-2) = 16e^{-8}$. Dans ces conditions, la formule (5.1) devient

$$16e^{-8} = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{4z}}{(z+2)^3} dz,$$

d'où

$$\oint_C \frac{e^{4z}}{(z+2)^3} dz = 16e^{-8}\pi i.$$

5.2 Exercices supplémentaires

Exercice 1. Calculer $\oint (1 + i - 2\bar{z}) dz$ le long du chemin joignant les points $z_1 = 0$ et $z_2 = 1 + i$:

i) suivant une droite,

ii) suivant la parabole $y = x^2$.

Exercice 2. Soient $f(z) = z^2$,

$$C_1 = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = t + it, \quad t \in [0, 1]\},$$

et

$$C_2 = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = t + it^2, \quad t \in [0, 1]\}.$$

Calculer les intégrales : i) $\int_{C_1} f(z) dz$, ii) $\int_{C_2} f(z) dz$.

Exercice 3. Évaluer les intégrales :

i) $\oint_C z^2 dz$, pour n'importe quel lacet C ,

ii) $\oint_C e^z dz$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,

iii) $\oint_C \frac{dz}{z}$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 1\}$.

Exercice 4. Calculer

$$\text{i) } \oint_C \frac{dz}{z^2+9}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\},$$

$$\text{ii) } \oint_C \frac{z^2 - 4z + 1}{z+i} dz, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\},$$

$$\text{iii) } \oint_C \frac{z}{z^2+9} dz, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| = 4\}.$$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{i) } \oint_C \frac{\sin z}{z^2} dz, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$\text{ii) } \oint_C \frac{\cos z}{z^3} dz, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Chapitre 5

Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent

Ce chapitre traite le développement en série de Laurent en analyse complexe.

1 Séries de fonctions

À partir de la suite de fonctions $\{u_n(z)\}$, on forme une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$S_1(z) = u_1(z),$$

$$S_2(z) = u_1(z) + u_2(z),$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) = \sum_{k=1}^n u_k(z),$$

où $S_n(z)$ appelée la n ème somme partielle est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$.

La suite $S_1(z), S_2(z), \dots$ est représentée par :

$$u_1(z) + u_2(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z),$$

appelée série infinie. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est dite convergente et $S(z)$ est sa somme, dans le cas contraire la série est dite divergente.

Proposition 5.1 *On considère $u_n = a_n + ib_n$, $n = 1, 2, \dots$ où a_n et b_n sont réels. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, est que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent.*

Définition 5.1 [8] *Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est dite absolument convergente si la série des valeurs absolues, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge.*

Proposition 5.2 Si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge. Autrement dit une série absolument convergente est convergente.

Proposition 5.3 Les sommes, différences et produits de séries absolument convergentes sont également absolument convergentes.

2 Séries entières

Définition 5.2 Une série de la forme

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (5.1)$$

est appelée série entière en $z - z_0$.

2.1 Critères spéciaux de convergence de séries numériques

Théorème 5.1 [8] (Critères de Comparaison).

- i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ converge et si $|u_n| \leq |v_n|$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge absolument,
- ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ diverge et si $|v_n| \leq |u_n|$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge, mais $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ peut converger ou diverger.

Théorème 5.2 [8] (Critère de d'Alembert).

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$, alors, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, converge (absolument) si $L < 1$ et diverge si $L > 1$.
Si $L = 1$, on ne peut conclure.

Théorème 5.3 [8] (Critère de Cauchy). Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$, alors, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, converge (absolument) si $L < 1$ et diverge si $L > 1$. Si $L = 1$, on ne peut conclure.

Théorème 5.4 [8] (Critère de l'intégrale). Si $f(x) \geq 0$, pour $x \geq a$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge ou diverge selon que $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$ converge ou diverge.

2.2 Rayon de convergence

Il existe un nombre positif R tel que (5.1) converge pour $|z - z_0| < R$ et diverge pour $|z - z_0| > R$, cependant pour $|z - z_0| = R$, elle peut ou non converger.

Géométriquement si C est le cercle de rayon R centré en z_0 , alors la série (5.1) converge en tous les points intérieurs à C et diverge en tous les points extérieurs, elle peut ou non converger sur le cercle C .

Les valeurs spéciales $R = 0$ et $R = +\infty$ correspondent aux cas où (5.1) converge uniquement en $z = z_0$ ou converge pour toute valeur (finie) de z . Le nombre R est souvent appelé le rayon de convergence de (5.1) et le cercle $|z - z_0| = R$ est appelé le cercle de convergence.

Proposition 5.4 On peut obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, par critère de d'Alembert : $R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, ou celui de Cauchy : $R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, si les limites existent.

Exemple 5.1 On considère $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. On a : $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Alors, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$. Donc, cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Pour $|z| = 1$, la série diverge car $|z^n| \rightarrow 1 \neq 0$, condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée.

Exemple 5.2 On prend $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Ici : $a_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1$.

Cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Sur le cercle $|z| = 1$, la série converge en certains points et diverge en d'autres points.

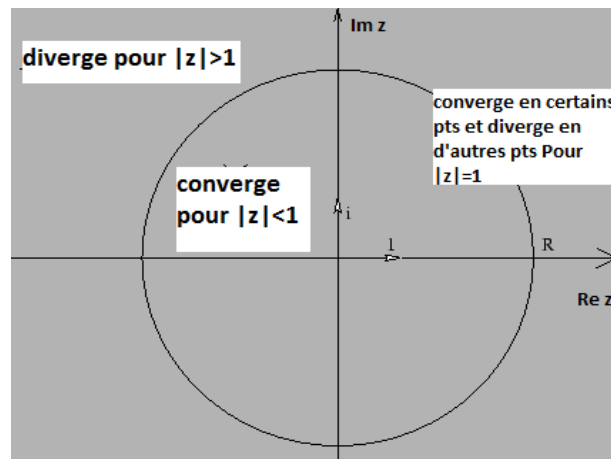


FIGURE 5.1 – Rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

Proposition 5.5 Une série entière peut être dérivée terme à terme dans tout domaine située à l'intérieur du cercle de convergence.

Une série entière peut être intégrée terme à terme sur tout chemin C situé entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.

3 Séries de Taylor

3.1 Théorème de Taylor

Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'un lacet C et sur C. Alors,

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf^{(1)}(z_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(z_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots \quad (5.2)$$

En posant $z = z_0 + h$, $h = z - z_0$, on obtient :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f^{(1)}(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f^{(2)}(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots \quad (5.3)$$

Ceci est appelé le Théorème de Taylor et la série (5.2) ou (5.3) est appelée série de Taylor ou développement de Taylor de $f(z_0 + h)$ ou $f(z)$.

Le domaine de convergence de la série (5.3) est défini par $|z - z_0| < R$, le rayon de convergence R étant égal à la distance de z_0 à la singularité de f la plus proche.

Sur $|z - z_0| = R$, la série peut ou non converger. Pour $|z - z_0| > R$, la série diverge.

Si la singularité la plus proche est à l'infini, le rayon de convergence est infini, i.e. la série converge quel que soit z .

Si $z_0 = 0$ dans (5.2) ou (5.3), la série obtenue est souvent appelée série de Maclaurin.

Exemple 5.3 On suppose que $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est développée en une série de Taylor de centre $z_0 = 2i$. Trouver le rayon de convergence R .

La fonction f est analytique partout sauf au point $z = 1$. Donc le rayon de convergence est la distance entre 1 et le centre $z_0 = 2i$,

$$R = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

3.2 Séries de Maclaurin de bases

[8] La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence :

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad |z| < \infty,$
2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad |z| < \infty,$
3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad |z| < \infty,$
4. $\log z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \quad |z| < 1,$
5. $\text{Arctg } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)} + \dots \quad |z| < 1,$
6. $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad |z| < 1,$
7. $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} z^n + \dots \quad |z| < 1.$

Si $(1+z)^p$ est multiforme, le résultat est valable pour la branche de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z = 0$.

4 Séries de Laurent

4.1 Théorème de Laurent

[8] Soient C_1 et C_2 deux cercles concentriques, de centre z_0 et de rayons respectifs R_1 et R_2 . On suppose que f est uniforme et analytique sur C_1 et C_2 , et également dans la

couronne D (région annulaire D) limitée par C_1 et C_2 .

Soit $z_0 + h$ un point quelconque de D. Alors, on a

$$f(z_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + \dots, \quad (5.4)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots, (n \in \mathbb{Z}), \quad (5.5)$$

C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs et $C = C_1$ ou $C = C_2$.

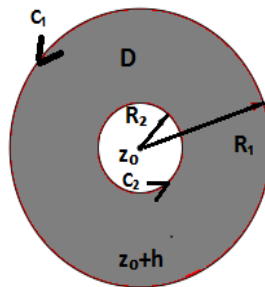


FIGURE 5.2 – Domaine pour le Théorème de Laurent

Avec le changement de notation $z = z_0 + h$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(z) = & a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \dots \\ & + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ceci est appelé le Théorème de Laurent et (5.4) ou (5.6) est appelée une série de Laurent ou un développement de Laurent.

La partie

$$a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \dots,$$

est appelée la partie analytique de la série de Laurent.

Cependant que le reste de la série formé des puissances négatives de $z - z_0$,

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots$$

est appelé la partie principale.

Remarque 5.1 Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

Exemple 5.4 Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+4} \right),$$

dans les domaines suivants :

i)

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{3}{2} < |z| < \frac{7}{2} \right\},$$

ii)

$$D = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1 \}.$$

i) La fonction f est analytique dans D et sur sa frontière, car les singularités -1 et -4 sont à l'extérieur D .

Donc, f admet un développement en série de Laurent centré à l'origine $z_0 = 0$.

Si $|z| > \frac{3}{2} > 1$, on a :

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{z}} \right) = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

Si $|z| < \frac{7}{2} < 4$, on a :

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + \frac{z}{4}} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z}{4} \right)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} - \frac{z}{16} + \frac{z^2}{64} + \dots$$

D'où, dans la couronne $D = \{ z \in \mathbb{C} : \frac{3}{2} < |z| < \frac{7}{2} \}$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+1)(z+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+4} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{4^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{z}{16} + \frac{z^2}{64} + \dots \right) \end{aligned}$$

ii) Pour tout $0 < |z+1| < 1$, on peut écrire

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{3+z+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \frac{z+1}{3}} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z+1}{3} \right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z+1)^n.$$

D'où

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+4)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z+1)^{n-1} = \frac{1}{3(z+1)} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} (z+1) - \dots$$

4.2 Classification des singularités

Il est possible de classer les singularités d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent.

Le point z_0 est appelé singularité isolée, ou point singulier isolé de f , si la fonction f est analytique sur un disque pointé de z_0 , $D = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r \}$, $r > 0$.

Pôles

Si f à la forme (5.6) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par :

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = z_0$ est appelé un pôle d'ordre n .

Si $n = 1$, on a affaire à un pôle simple. Si $z = z_0$ est un pôle de f , alors, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Exemple 5.5 La fonction $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+4)}$ présente un pôle simple au point $z_1 = -1$, et un pôle simple au point $z_2 = -4$.

Singularités apparentes

Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = z_0$ mais si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe, alors, $z = z_0$ est appelée une singularité apparente. Dans un pareil cas, on définit f pour $z = z_0$ comme étant égal à $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Exemple 5.6 Si $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, alors, $z = 0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. On définit $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

On remarque que dans ce cas

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left\{ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right\} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

Singularités essentielles

Si f est uniforme, alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une singularité essentielle. Si $z = z_0$ est une singularité essentielle de f , la partie principale du développement de Laurent possède une infinité de terme.

Exemple 5.7 Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrivant

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots,$$

on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle.

Singularités à l'infini

En posant $z = \frac{1}{\omega}$ dans $f(z)$, on obtient la fonction $f\left(\frac{1}{\omega}\right) = F(\omega)$. Alors, la nature de la singularité à $z = \infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $F(\omega)$ en $\omega = 0$.

Exemple 5.8 La fonction $z \mapsto f(z) = z^3$ à un pôle triple en $z = \infty$, car $F(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^3}$ possède un pôle triple en $\omega = 0$.

De la même façon $z \mapsto f(z) = e^z$ possède une singularité essentielle en $z = \infty$ car $F(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right) = e^{\frac{1}{\omega}}$ a une singularité essentielle en $\omega = 0$.

5 Travaux dirigés

5.1 Exercices résolus

Exercice 1 . Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$.

Solution . Si $u_n(z) = \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$, alors $u_{n+1}(z) = \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^{n+1}}$. D'où en excluant la valeur $z = -2$ pour laquelle la série converge, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{|z+2|}{4}.$$

La série converge donc (absolument) pour $\frac{|z+2|}{4} < 1$, i.e. $|z+2| < 4$.

Le point $z = -2$ vérifie la condition $|z+2| < 4$.

Si $\frac{|z+2|}{4} = 1$, i.e. $|z+2| = 4$, le critère de d'Alembert ne s'applique plus. Toutefois, on peut voir que dans ce cas

$$\left| \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} \right| = \frac{1}{(n+1)^3 4^n} \leq \frac{1}{n^3},$$

et comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge [série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, avec $p = 3$], la série considérée converge absolument.

On en déduit que la série donnée converge (absolument), pour $|z+2| \leq 4$.

Géométriquement, on obtient ainsi l'ensemble de tous les points intérieurs au cercle de rayon 4, centré en $z = -2$ ou situés sur ce cercle ; ce cercle est appelé le cercle de convergence. Le rayon de convergence est égale à 4.

Exercice 2 . Déterminer le domaine de convergence des séries :

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!},$

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} n! z^n.$

Solution . i) Si $u_n(z) = \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, alors $u_{n+1}(z) = \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. D'où si l'on ne

tient pas compte de la valeur $z = 0$, valeur pour laquelle la série converge, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{z^2(2n-1)!}{(2n+1)!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z^2|(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z^2|}{(2n+1)(2n)} = 0 \\ &< 1, \end{aligned}$$

pour tout z fini. La série converge donc quel que soit z , ce que l'on traduit en disant la série converge pour $|z| < \infty$. De façon équivalente, on peut dire que le cercle de convergence est infini ou que le rayon de convergence $R = \infty$.

ii) Si $u_n(z) = n!z^n$, alors $u_{n+1}(z) = (n+1)!z^{n+1}$. En excluant $z = 0$, valeur pour laquelle la série donnée converge, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|z| = \infty.$$

La série converge donc seulement pour $z = 0$.

Exercice 3. Soit $f(z) = \text{Log}(1+z)$, où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour $z = 0$.

- i) Développer $f(z)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$,
- ii) Déterminer le domaine de convergence de la série de litem i).

Solution . i) On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \text{Log}(1+z), \quad f(0) = 0, \quad f'(z) = \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1}, \quad f'(0) = 1, \\ f''(z) &= -(1+z)^{-2}, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(z) = 2(1+z)^{-3}, \quad f'''(0) = 2, \\ &\dots \\ &\dots \\ f^{(n+1)}(z) &= (-1)^n n! (1+z)^{-(n+1)}, \quad f^{(n+1)}(0) = (-1)^n n! \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(z) &= \text{Log}(1+z) = f(0) + f'(0)z + f''(0)\frac{z^2}{2!} + f'''(0)\frac{z^3}{3!} + \dots \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \end{aligned}$$

Autre méthode. Si $|z| < 1$, $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$ On obtient alors par intégration entre 0 et z ,

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

ii) Le n-ième terme est $u_n(z) = \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$. D'après le critère de d'Alembert,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-nz}{n+1} \right| = |z|,$$

et la série converge pour $|z| < 1$. On peut montrer que la série converge pour $|z| = 1$ sauf pour $z = -1$.

Ce résultat est aussi une conséquence du fait que la série converge dans un cercle qui s'étend jusqu'à la singularité la plus proche (i.e. $z = -1$) de $f(z)$.

Exercice 4. Soit $f(z) = \sin z$.

i) Développer la fonction f en série de Taylor au voisinage de $z = \frac{\pi}{4}$,

ii) Déterminer le domaine de convergence de cette série.

Solution . i)

$$f(z) = \sin z, \quad f'(z) = \cos z, \quad f''(z) = -\sin z, \quad f'''(z) = -\cos z,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où avec $z_0 = \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin z = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f''(z_0) \frac{(z - z_0)^2}{2!} + f'''(z_0) \frac{(z - z_0)^3}{3!} + \dots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}(z - \frac{\pi}{4})}{2} - \frac{\sqrt{2}(z - \frac{\pi}{4})^2}{2 \cdot 2!} - \frac{\sqrt{2}(z - \frac{\pi}{4})^3}{2 \cdot 3!} + \dots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 + \left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Autre méthode. Soit $u = z - \frac{\pi}{4}$ ou $z = u + \frac{\pi}{4}$. On a alors,

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \sin u \cos \frac{\pi}{4} + \cos u \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin u + \cos u). \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots\right) + \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots\right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 + u - \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \dots \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 + \left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

ii) La singularité de $\sin z$ la plus proche de $\frac{\pi}{4}$ est à l'infini, la série converge donc pour toutes les valeurs finies de z , i.e. $|z| < \infty$. Ceci peut aussi être établi par la critère de d'Alembert.

Exercice 5. Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

$$\text{i)} \quad f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}; \quad z=1,$$

$$\text{ii)} \quad f(z) = (z-3) \sin \frac{1}{z+2}; \quad z=-2.$$

Solution . i) Soit $z-1 = u$. Alors, $z = 1 + u$ et

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} e^{2u} \\ &= \frac{e^2}{u^3} \left\{ 1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \dots \right\} \\ &= \frac{e^2}{u^3} + \frac{2e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u} + \frac{4e^2}{3} + e^2 u + \dots \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{e^2}{(z-1)} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3} (z-1) + \dots \end{aligned}$$

Le point $z=1$ est un pôle d'ordre trois, ou pôle triple. La série converge pour toute valeur de $z \neq 1$.

ii) Soit $z+2 = u$ ou $z = u-2$. D'où,

$$\begin{aligned} (z-3) \sin \frac{1}{z+2} &= (u-5) \sin \frac{1}{u} \\ &= (u-5) \left\{ \frac{1}{u} - \frac{1}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^5} - \dots \right\} \\ &= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!u^2} + \frac{5}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^4} - \frac{1}{4!u^5} - \dots \\ &= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3} + \frac{1}{120(z+2)^4} - \frac{1}{24(z+2)^5} - \dots \end{aligned}$$

$z=-2$ est une singularité essentielle (point singulier essentiel).

5.2 Exercices supplémentaires

Exercice 1. Trouver la série de Maclaurin de :

$$\text{i)} \quad z \mapsto f(z) = e^z, \quad \text{ii)} \quad z \mapsto f(z) = \frac{z^3}{(1-z)^2}.$$

Exercice 2. Étudier la convergence des séries :

$$\mathbf{i)} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^2}, \quad \mathbf{ii)} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k!(z-i)^k.$$

Exercice 3. Développer $\operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ en série de Taylor au voisinage de $z=0$.

Exercice 4. Trouver la série de Taylor et le rayon de convergence de chacune des fonctions suivantes autour du centre indiqué :

$$\mathbf{i)} \quad \frac{1}{z+1}, \quad z_0 = -i, \quad \mathbf{ii)} \quad \frac{1}{(3-z)^2}, \quad z_0 = 2i.$$

Exercice 5. Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées :

$$\mathbf{i)} \quad \frac{z}{(z+1)(z+2)}, \quad z = -2, \quad \mathbf{ii)} \quad \frac{z}{z^2(z-3)^2}, \quad z = 3.$$

Exercice 6. Développer $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ en série de Laurent valable pour :

$$\mathbf{i)} \quad 1 < |z| < 3, \quad \mathbf{ii)} \quad 0 < |z+1| < 2.$$

Exercice 7. Analyser quelle type de singularité $z=0$ dans les fonctions suivantes :

$$\mathbf{i)} \quad \frac{\sin z}{z^2}, \quad \mathbf{ii)} \quad \sin \frac{1}{z}.$$

Chapitre 6

Théorème des résidus et applications

1 Résidus et leurs calculs

Soit f une fonction analytique et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C , excepté au point $z = z_0$ centre de C . Alors, $f(z)$ possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$, donné par :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots, \quad (6.1)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

Dans le cas particulier $n = -1$, on a :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (6.3)$$

On peut obtenir (6.3) à partir de (6.1), par intégration terme à terme en utilisant le résultat :

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^p} = \begin{cases} 2\pi i, & p = 1, \\ 0, & p \in \mathbb{Z} - \{1\}. \end{cases} \quad (6.4)$$

L'intégrale de (6.3) s'exprime à l'aide du seul coefficient a_{-1} de (6.1).

Définition 6.1 [4, 8] On considère le développement de Laurent de f au voisinage de z_0 donné par (6.1). On appelle le coefficient a_{-1} le résidu de $f(z)$ en $z = z_0$. On note :

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz. \quad (6.5)$$

Pour obtenir le résidu d'une fonction f en $z = z_0$, on pourrait croire d'après (6.1) à la nécessité d'écrire le développement de $f(z)$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$. En fait, dans quelques cas, il existe des formules simples qui donnent a_{-1} .

1.1 Pôle simple

Si $z = z_0$ est un pôle simple, le calcul du résidu est particulièrement simple

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (6.6)$$

Exemple 6.1 Soit $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)}$. Trouver le résidu de f en $z = 1$.

Le point $z = 1$ est un pôle simple. On a d'après (6.6), le résidu en $z = 1$ est

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - z_0) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z + 1}{(z + 2)(z - 1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z + 1}{z + 2} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Remarque 6.1 Si $z = z_0$ est un pôle simple et $f(z)$ se présente sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z_0) = 0, \quad Q'(z_0) \neq 0,$$

alors,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \quad (6.7)$$

1.2 Pôle d'ordre k

Dans le cas où $z = z_0$ est un pôle d'ordre $k \geq 2$, le résidu a_{-1} est donné par la formule :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z - z_0)^k f(z) \right\}. \quad (6.8)$$

Si $k = 2$ (pôle double), le résultat est

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} \left\{ (z - z_0)^2 f(z) \right\}. \quad (6.9)$$

Exemple 6.2 Trouver le résidu de $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$, en $z = -1$.

Le point $z = -1$, est un pôle double. Alors, en utilisant la formule (6.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} \{(z - z_0)^2 f(z)\} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{(z-1)^2} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

1.3 Point singulier essentiel

Si $z = z_0$ est un point singulier essentiel, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus :

Exemple 6.3 Si $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, alors $z = 0$ est un point singulier essentiel et d'après le développement connu de

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots,$$

avec $u = -\frac{1}{z}$, on trouve :

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots,$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $\frac{1}{z}$ sa valeur est -1 .

2 Théorème des résidus

Soit f une fonction uniforme et analytique à l'intérieur d'un lacet C et sur C , sauf en un nombre fini de singularités z_1, z_2, \dots, z_n intérieures à C .

Alors le Théorème des résidus établit que :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k). \quad (6.10)$$

i.e. L'intégrale de $f(z)$ le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de $f(z)$ en les singularités contenues dans C . Notons que le Théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers de ce Théorème.

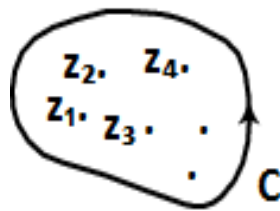


FIGURE 6.1 – Lacet C contenant un nombre fini de singularités z_1, \dots, z_n

Exemple 6.4 Calculer $\oint_C f(z) dz$ où $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1}$ et C le cercle centré à l'origine et de rayon r , $r > 1$.

La fonction f possède deux pôles simples $z_1 = i$ et $z_2 = -i$. Alors, en utilisant (6.7), on a :

$$\text{Res}(f, i) = \frac{i^3 + 1}{2i} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2},$$

et

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{(i)^3 + 1}{-2i} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Maintenant, en utilisant la formule (6.10), on aura :

$$\oint_C \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \right) = -2\pi i.$$

Remarque 6.2 Si $0 < r < 1$, l'intégrale $\oint_C f(z) dz = 0$, car la fonction f est analytique à l'intérieur de C et sur C.

3 Applications des résidus au calcul des intégrales

3.1 Théorème particulier utilisé

[4, 8] Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et Γ_R un demi cercle centré à l'origine et de rayon R. Lorsque l'on calcule certaines types d'intégrales, il est souvent nécessaire de montrer que $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$ tend vers zéro quand $R \rightarrow \infty$.

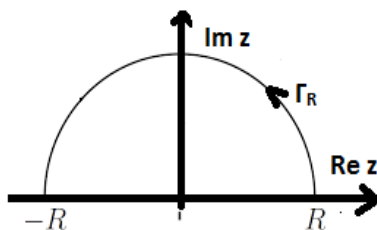


FIGURE 6.2 – Γ_R est un demi cercle centré à l'origine et de rayon R.

On présente le Théorème fondamental suivant :

Théorème 6.1 [4, 8] Si $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, $R = e^{it}$, où $k > 1$ et $M > 0$ sont des constantes, alors si Γ_R est le demi-cercle de la FIGURE 6.2, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$.

3.2 Intégrales de fractions rationnelles

Intégrale de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \tag{6.11}$$

où $f(z) = \frac{P(x)}{Q(x)}$; $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes tels que $\deg Q \geq \deg P + 2$, et Q ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

Soit $f(z)$ une fonction complexe analytique dans le demi plan $\text{Im } z > 0$ sauf en un nombre fini de points singuliers isolés z_1, z_2, \dots, z_n . On suppose de plus que $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, $R = e^{it}$, où $k > 1$ et $M > 0$ sont des constantes.

Pour calculer l'intégrale I , on considère $\oint_{C_R} f(z) dz$, où $C_R = [-R, R] \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = R \text{ et } \text{Im } z > 0\}$ désigne le contour fermé formé du segment $[-R, R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct, comme dans la FIGURE 6.3.

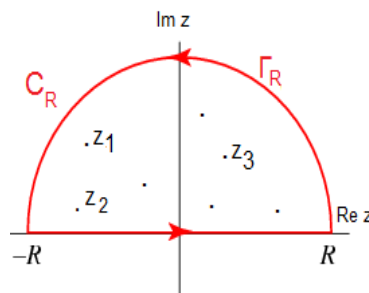


FIGURE 6.3 – $C_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$ est un contour

D'après le Théorème des résidus,

$$\oint_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k). \tag{6.12}$$

En utilisant le Théorème 6.1, on aura $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$.

Finalement, lorsque $R \rightarrow +\infty$ dans (6.12), on obtient :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k). \tag{6.13}$$

Exemple 6.5 Déterminer la valeur de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

La fonction f vérifie les hypothèses de l'intégrale de la forme (6.11). Alors, la formule (6.13) donne :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1),$$

où les pôles sont $z_1 = i$ et $z_2 = -i$ et seulement le pôle simple : $z_1 = i$ situé dans le demi plan $\operatorname{Im} z > 0$. Alors, un calcul simple du résidu donne :

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Par conséquent,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) = \pi.$$

3.3 Intégrales de fractions rationnelles trigonométriques

Intégrale de la forme

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt, \tag{6.14}$$

où $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$; est une fonction rationnelle de $\cos t$ et $\sin t$, avec la fonction Q qui ne s'annule pas sur $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Pour calculer l'intégrale donnée, on pose : $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Alors,

$$\sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = ie^{it} dt \quad \text{et} \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

D'où l'intégrale (6.14), devient

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) dz.$$

En posant $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ et en appliquant le Théorème des résidus, on aura :

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k),$$

où z_k , $k = 1, \dots, n$, sont les pôles de la fraction rationnelle f qui appartiennent à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

Exemple 6.6 Calculer l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\frac{5}{2} + 2 \sin t}$.

En posant le changement de variable :

$$z = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

on obtient :

$$dz = ie^{it} dt.$$

Alors,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\frac{5}{2} + 2 \sin t} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(\frac{5}{2} + 2 \frac{z-z^{-1}}{2i} \right)} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(5iz + 2z^2 - 2)} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(2z+i)(z+2i)},$$

où les singularités sont : $z_1 = -\frac{i}{2}$ et $z_2 = -2i$. On considère seulement $z_1 = -\frac{i}{2}$ qui appartient à l'intérieur du cercle $|z|=1$.

Donc d'après le Théorème des résidus,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\frac{5}{2} + 2 \sin t} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(f, -\frac{i}{2} \right) = \frac{4}{3}\pi,$$

où

$$\operatorname{Res} \left(f, -\frac{i}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{2}} \left(z + \frac{i}{2} \right) \frac{2}{(2z+i)(z+2i)} = \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{2}} \frac{1}{z+2i} = \frac{2}{3i}.$$

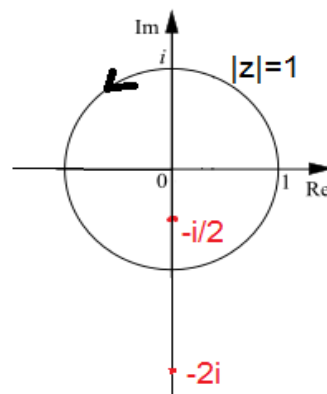


FIGURE 6.4 – Seul $z_1 = -\frac{i}{2}$ est à l'intérieur du cercle $|z|=1$.

4 Travaux dirigés

4.1 Exercices résolus

Exercice 1 . Trouver les pôles de $\frac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 2z}$ et déterminer les résidus en ces pôles.

Solution . Soit

$$f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 2z}.$$

Alors, les singularités $z_1 = 0$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = -1 + i$, sont les pôles simples de f .

Le résidu de f en $z_1 = 0$ est

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 4}{z^2 + 2z + 2} = 2.$$

Le résidu de f en $z_2 = -1 - i$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1 - i) &= \lim_{z \rightarrow -1 - i} (z + 1 + i) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1 - i} (z + 1 + i) \frac{z^2 + 4}{z(z + 1 + i)(z + 1 - i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1 - i} \frac{z^2 + 4}{z(z + 1 - i)} \\ &= -\frac{1}{2}(1 + 3i). \end{aligned}$$

Le résidu de f en $z_3 = -1 + i$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1 + i) &= \lim_{z \rightarrow -1 + i} (z + 1 - i) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1 + i} (z + 1 - i) \frac{z^2 + 4}{z(z + 1 + i)(z + 1 - i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1 + i} \frac{z^2 + 4}{z(z + 1 + i)} \\ &= -\frac{1}{2}(1 - 3i). \end{aligned}$$

Exercice 2 . Trouver les résidus de $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2 (z^2 + 4)}$, en tous les pôles à distance finie.

Solution . La fonction f possède un pôle double en $z = -1$ et des pôles simples en $z = -2i$ et en $z = 2i$.

Le résidu en $z = -1$ est

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \{(z+1)^2 f(z)\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2 + 4)} \right\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 4} \right\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2z^2 + 8z - 8}{(z^2 + 4)^2} \\
 &= -\frac{14}{25}.
 \end{aligned}$$

Le résidu en $z = -2i$ est

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}(f, -2i) &= \lim_{z \rightarrow -2i} \{(z+2i) f(z)\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -2i} \left\{ (z+2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z+2i)(z-2i)} \right\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z-2i)} \\
 &= \frac{7-i}{25}.
 \end{aligned}$$

Le résidu en $z = 2i$ est

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}(f, 2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \{(z-2i) f(z)\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 2i} \left\{ (z-2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z+2i)(z-2i)} \right\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z+2i)} \\
 &= \frac{7+i}{25}.
 \end{aligned}$$

Exercice 3. Évaluer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$.

Solution. On considère $\oint_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 1}$, où C_R désigne le contour fermé de la FIGURE 6.5 formé du segment $[-R, R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

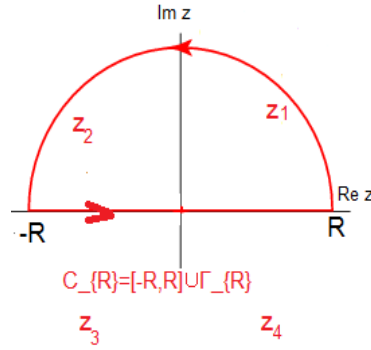


FIGURE 6.5 – $C_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$.

Les pôles simples de $\frac{1}{z^4 + 1}$ sont $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Seuls les pôles z_1 et z_2 sont à l'intérieur de C_R . Alors,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{i\frac{\pi}{4}} \right) &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \left\{ (z - e^{i\frac{\pi}{4}}) \frac{1}{z^4 + 1} \right\} = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \\ \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} \left\{ (z - e^{i\frac{3\pi}{4}}) \frac{1}{z^4 + 1} \right\} = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \oint_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 1} &= 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{i\frac{\pi}{4}} \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^4 + 1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \quad (6.15)$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (6.15) quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{(Re^{it})^4 + 1} dt = 0,$$

on obtient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi,$$

car la fonction $\frac{1}{x^4+1}$ est paire.

Exercice 4. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx = \frac{7\pi}{50}$.

Solution. On pose : $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$. Les pôles de f situés à l'intérieur du contour C , sont $z_1 = i$ d'ordre 2 et $z_2 = -1+i$ d'ordre 1, voir la FIGURE 6.6.

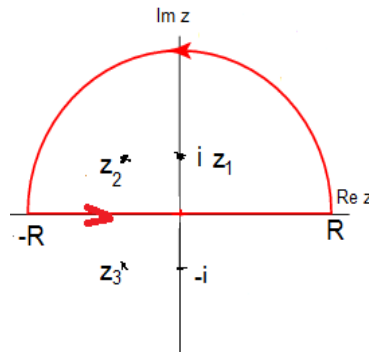


FIGURE 6.6 – $C_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$.

Alors,

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \{(z-i)^2 f(z)\} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left\{ (z-i)^2 \frac{z^2}{(z-i)^2 (z+i)^2 (z^2+2z+2)} \right\} \\ &= \frac{-12+9i}{100}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1+i) &= \lim_{z \rightarrow -1+i} (z+1-i) \frac{z^2}{(z^2+1)^2 (z+1-i)(z+1+i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2 (z+1+i)} \\ &= \frac{3-4i}{25}. \end{aligned}$$

D'où

$$\oint_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2 (z^2+2z+2)} dz = 2\pi i \left(\frac{-12+9i}{100} + \frac{3-4i}{25} \right) = \frac{7}{50} \pi.$$

Donc,

$$\int_{-R}^{+R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2 (x^2+2x+2)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2 (z^2+2z+2)} dz = \frac{7}{50} \pi. \quad (6.16)$$

En prenant la limite de (6.16) quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0, on obtient le résultat demandé.

Exercice 5. Évaluer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2 \cos t + \sin t}$.

Solution. Soit $z = e^{it}$. Alors,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad dz = iz dt,$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2 \cos t + \sin t} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(3 - 2 \frac{z+z^{-1}}{2} + \frac{z-z^{-1}}{2i} \right)} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{6iz - 2i(z^2 + 1) + z^2 - 1} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}. \end{aligned}$$

On pose : $f(z) = \frac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$. Les pôles de f sont les pôles simples $z_1 = 2-i$ et $z_2 = \frac{2-i}{5}$. Seul $z_2 = \frac{2-i}{5}$ est à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

Alors,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(f, \frac{2-i}{5} \right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{2-i}{5}} \left(z - \frac{2-i}{5} \right) \frac{2}{z^2(1-2i) + 6iz - 2i - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{2-i}{5}} \frac{2}{2z(1-2i) + 6i} \\ &= \frac{1}{2i}, \end{aligned}$$

d'après la règle de l'Hospital.

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2 \cos t + \sin t} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(3 - 2 \frac{z+z^{-1}}{2} + \frac{z-z^{-1}}{2i} \right)} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(f, \frac{2-i}{5} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) = \pi, \end{aligned}$$

qui est la valeur demandée.

Exercice 6. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t} = \frac{2}{3}\pi$.

Solution. On pose $z = e^{it}$. D'où $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{it} dt = iz dt$.
Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t} &= \oint_C \frac{dz}{iz \left(5 - 4 \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} \\ &= \oint_C \frac{2}{-4z^2 + 10iz + 4} dz, \end{aligned}$$

où C est le cercle unité centré à l'origine.

Les pôles de $\frac{2dz}{(-4z^2 + 10iz + 4)}$, sont $z_1 = 2i$ et $z_2 = \frac{1}{2}i$.
Seul z_2 est à l'intérieur de C, car $|z_2| < 1$.

Alors,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{2}{-4z^2 + 10iz + 4}, \frac{i}{2} \right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} \left(z - \frac{i}{2} \right) \frac{2}{-4z^2 + 10iz + 4} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} \frac{2}{-8z + 10i} \\ &= \frac{1}{3i}. \end{aligned}$$

D'où

$$\oint_C \frac{2}{-4z^2 + 10iz + 4} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{2}{-4z^2 + 10iz + 4}, \frac{i}{2} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{3i} \right) = \frac{2\pi}{3},$$

qui est la valeur demandée.

Exercice 7. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t} dt = \frac{\pi}{12}$.

Solution. On pose $z = e^{it}$. D'où $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $\cos 3t = \frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} =$

$\frac{z^3 + z^{-3}}{2}$, $dz = ie^{it} dt = iz dt$ et donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt &= \oint_C \frac{\frac{z^3 + z^{-3}}{2}}{iz \left(5 - 4 \frac{z+z^{-1}}{2}\right)} dz \\ &= -\frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^3 + z^{-3}}{2z^2 - 5z + 2} dz \\ &= -\frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3 (2z^2 - 5z + 2)} dz \\ &= -\frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3 (z-2)(2z-1)} dz, \end{aligned}$$

où C est le cercle unité centré à l'origine.

Soit $f(z) = \frac{z^6 + 1}{z^3 (z-2)(2z-1)}$. La fonction f a un pôle triple en $z = 0$ et un pôle simple $z = \frac{1}{2}$ à l'intérieur de C .

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \{z^3 f(z)\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ z^3 \frac{z^6 + 1}{z^3 (2z^2 - 5z + 2)} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{z^6 + 1}{2z^2 - 5z + 2} \right\} \\ &= \frac{21}{8}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{z^6 + 1}{z^3 (z-2)(2z-1)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{z^6 + 1}{z^3 (z-2)} = -\frac{65}{24}. \end{aligned}$$

Donc,

$$-\frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3 (z-2)(2z-1)} dz = -\frac{1}{2i} (2\pi i) \left(\frac{21}{8} - \frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12},$$

qui est la valeur demandée.

4.2 Exercices supplémentaires

Exercice 1 . Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les pôles et les résidus en ces pôles :

$$\text{i) } \frac{2z+1}{z^2-z-2}, \quad \text{ii) } \frac{3z+2}{z^2+4}, \quad \text{iii) } \frac{3z-1}{5z+2}.$$

Exercice 2 . Calculer $\oint_C \frac{2z^2+5}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} dz$, où C est le cercle $|z-2i|=6$.

Exercice 3 . Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$.

Exercice 4 . Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx = \frac{7\pi}{50}$.

Exercice 5 . Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5+4\cos t} dt$.

Exercice 6 . Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{2}{\cos t + 2\sin t + 3} dt$.

Exercice 7 . Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5-3\sin t)^2} = \frac{5}{32}\pi$.

Chapitre 7

Fonctions spéciales

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux fonctions d'Euler gamma et bêta.

1 Fonction gamma

L'une des fonctions spéciales est la fonction Gamma qui apparaît dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, la théorie des nombres et la théorie du calcul fractionnaire. Dans l'étude de cette fonction, certaines constantes mathématiques célèbres se produisent.

1.1 Définition et propriété

Définition 7.1 [9] Pour $x > 0$ réel, la fonction Gamma est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (7.1)$$

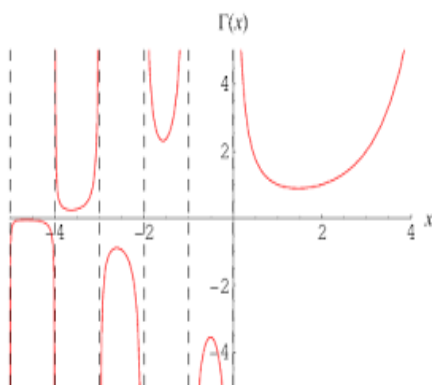


FIGURE 7.1 – Variations de $\Gamma(x)$ pour x réel

L'intégrale (7.1) converge près de $t = 0$, puisque la fonction t^{x-1} est intégrable d'après le critère de Riemann, et elle converge aussi pour $t \rightarrow \infty$, simplement parce que la décroissance de e^{-t} neutralise toute croissance polynomiale.

Proposition 7.1 La fonction $x \mapsto \Gamma(x)$, $x > 0$, se prolonge comme fonction analytique dans le demi-plan droit $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, par la formule :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0; \quad z = x + iy. \quad (7.2)$$

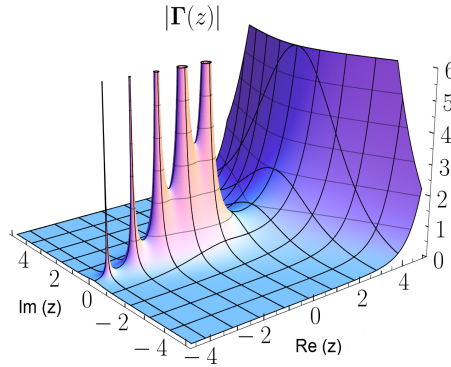


FIGURE 7.2 – $\Gamma(z)$ pour z complexe

1.2 Prolongement analytique de gamma

Proposition 7.2 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $\operatorname{Re} z > 0$, on a :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (7.3)$$

et si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (7.4)$$

Preuve. On peut démontrer (7.3) par une intégration par parties dans le domaine de convergence $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z). \quad (7.5)$$

Comme

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1,$$

une récurrence instantanée donne $\Gamma(n+1) = n!$ ■

La relation de récurrence (7.3) permet de définir $x \mapsto \Gamma(x)$ pour les valeurs négatives de x , tel que pour $-1 < x < 0$, on aura $0 < x+1 < 1$. Alors, $\Gamma(x+1)$ est bien définie par la formule (7.1), mais pas $\Gamma(x)$. On peut définir $\Gamma(x)$ par la relation :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Ainsi pour $-(n+1) < x < -n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on aura :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exemple 7.1 Pour $x = -\frac{5}{3}$, on a

$$\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma(-\frac{5}{3} + 2)}{-\frac{5}{3}(-\frac{5}{3} + 1)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{-\frac{5}{3}(-\frac{2}{3})} = \frac{9}{10}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

où $-2 < -\frac{5}{3} < -1$.

Proposition 7.3 La fonction Γ initialement définie dans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ s'étend en une fonction analytique au plan complexe \mathbb{C} tout entier, dont les seules singularités sont des pôles simples aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, -3, \dots$, où elle a pour résidus :

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 7.4 La dérivée de la fonction gamma est

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln(t) dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Ainsi la n -ième dérivée de gamma est

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} (\ln t)^n dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

1.3 Formule des compléments

Proposition 7.5 Formule des Compléments. Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Alors,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (7.6)$$

En faisant $z = \frac{1}{2}$ dans (7.6), on obtient :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi.$$

D'où,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (7.7)$$

2 Fonction bêta

Dans de nombreux cas il est plus commode d'employer la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison des valeurs de la fonction Gamma.

Définition 7.2 [9] La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$B(z, \omega) = \int_0^1 (1-t)^{z-1} t^{\omega-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} \omega > 0. \quad (7.8)$$

Cette fonction admet une autre représentation intégrale

$$B(z, \omega) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2z-1} \theta \cos^{2\omega-1} \theta d\theta, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} \omega > 0.$$

Proposition 7.6 La relation entre les fonctions Gamma et Beta est donnée par l'expression :

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} = B(\omega, z), \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} \omega > 0. \quad (7.9)$$

3 Surface de la sphère dans \mathbb{R}^D

[1] Il s'agit ici de présenter une application importante de la fonction Γ (et/ou B) en mécanique quantique. La surface de la sphère dans l'espace à D dimensions \mathbb{R}^D . Pour montrer comment le calcul fonctionne et l'articulation des idées, commençons par traiter le cas $D=3$.

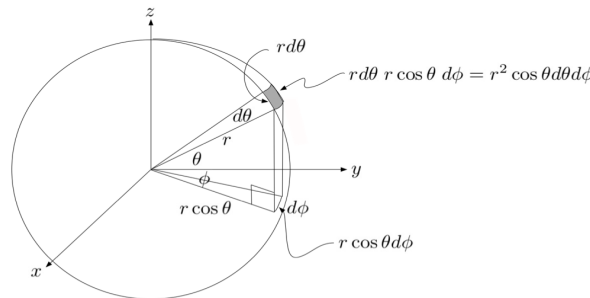


FIGURE 7.3 – Utilisation de coordonnées polaires sphériques pour calculer la surface de la sphère

Compte tenu de la formule (7.6), et en faisant le changement de variable $t = y^2$, on aura :

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} y^{2z-1} e^{-y^2} dy, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (7.10)$$

On part de la relation (7.10), écrite pour $z = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy,$$

3. SURFACE DE LA SPHÈRE DANS \mathbb{R}^D

ce qui permet d'écrire :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^3 = \prod_{i=1}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_i^2} dy_i \equiv \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\vec{r}^2} dr^3, \quad (7.11)$$

où on a bien pris soin de distinguer les variables muettes d'intégration pour écrire le cube de l'intégrale. Passant en coordonnées polaires sphériques pour effectuer l'intégration,

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad dr^3 = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi,$$

on aura :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^3 = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \equiv \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^2 dr \int_{\text{sphère unité}} dS, \quad (7.12)$$

où dS note l'élément de surface de la sphère de rayon unité.

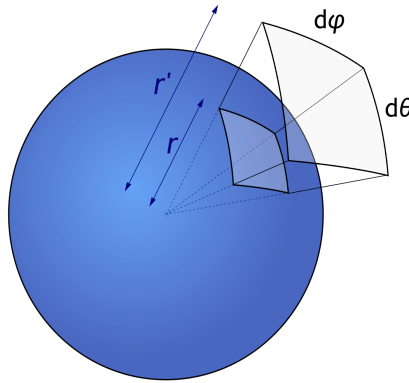


FIGURE 7.4 – Angle solide dans \mathbb{R}^3

En notant Ω_D la surface de cette sphère (c'est la valeur de l'angle solide dans \mathbb{R}^D), il vient donc

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^3 = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^2 dr \Omega_3 = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Omega_3, \quad (7.13)$$

où on a utilisé (7.10) avec $z = \frac{3}{2}$, d'où

$$\Omega_3 = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = \frac{2[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = 4 \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = 4\pi. \quad (7.14)$$

On retrouve ainsi la surface S_3 de la sphère de rayon R dans \mathbb{R}^3 , égale à $4\pi R^{3-1} = 4\pi R^2$.

Le calcul se généralise sans peine à D quelconque. On écrit maintenant comme en (7.11) :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^D = \int_{\mathbb{R}^D} e^{-(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_D^2)} dy_1 dy_2 \dots dy_D, \quad (7.15)$$

de sorte que (7.13) devient :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^D = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{D-1} dr \Omega_D = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Omega_D \Leftrightarrow \Omega_D = \frac{2 \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^D}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}, \quad (7.16)$$

d'où

$$\Omega_D = 2 \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}, \quad S_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} R^{D-1}. \quad (7.17)$$

En particulier : $S_1 = 2R$, $S_2 = 2\pi R$, $S_3 = 4\pi R^2$, $S_4 = 2\pi^2 R^3$, $S_5 = \frac{8}{3}\pi^2 R^4, \dots$

En faisant $R = 1$ dans ces formules, on obtient l'angle solide Ω_D , $D = 1, 2, 3, \dots$, pour les dimensions d'espace "ordinaire". Notons que l'expression de ces éléments géométriques à l'aide de fonctions définies pour D quelconque (réel, pas forcément entier positif, et même complexe) permet de traiter des problèmes en dimension quelconque, pas forcément entière (ce que font parfois les physiciens, exemple : phénomènes critiques).

4 Travaux dirigés

4.1 Exercices résolus

Exercice 1. La fonction Gamma est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

i) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et $\Gamma(x)$.

ii) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\Gamma(x+n)$, en fonction de x , n et $\Gamma(x)$, ainsi que la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. i) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On commence par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x+1 \in \mathbb{R}_+^*$. Donc, une intégration par parties donne

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-e^{-t} t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

d'où

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

ii) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on montre par récurrence que la propriété $P(n)$ ci-dessous est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(n): \quad \Gamma(x+n) = \Gamma(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

Pour $n=1$, on a déjà montré dans l'item (i) que :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \Gamma(x) \prod_{k=0}^{1-1} (x+k).$$

Si l'on suppose que :

$$\Gamma(x+n) = \Gamma(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k), \tag{7.18}$$

alors,

$$\Gamma(x+n+1) = (x+n)\Gamma(x+n).$$

En utilisant la formule (7.18), on aura :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n+1) &= (x+n)\Gamma(x+n) \\ &= (x+n)\Gamma(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \\ &= \Gamma(x) \prod_{k=0}^n (x+k). \end{aligned}$$

Doù, la propriété $P(n)$ est vérifiée à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Par récurrence, on a donc montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(x+n) = \Gamma(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

Ainsi, le calcul direct

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1,$$

et l'application de la formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ fournissent par une récurrence immédiate la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier n non nul :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Exercice 2. Montrer l'existence des deux intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx$ et les ex-

primer à l'aide de Γ .

Solution. Les fonctions $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^4}$ sont continues sur \mathbb{R}_+ , positives et majorées sur $(1, +\infty)$ par e^{-t} qui est intégrable.

Les fonctions $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^4}$ sont donc intégrables sur \mathbb{R}_+ .

Les changements de variable : $u = t^2$ et $u = t^4$ donnent, respectivement,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^4} dt = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-\frac{3}{4}} du.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^4} dt = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

Exercice 3. Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Solution. On a :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \text{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Par définition,

$$\text{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (7.19)$$

On effectue le changement de variable $t = x^2$ dans (7.19) et l'on obtient :

$$\text{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \arcsin 1 = \pi,$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}.$$

On remarque que

$$\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 4. La fonction Bêta d'Euler est définie par :

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $B(x, y) = B(y, x)$.

Solution. Soient $x > 0$ et $y > 0$. Alors,

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Il suffit de prendre comme changement de variable : $u = 1-t$. D'où $du = -dt$. Donc

$$B(x, y) = - \int_1^0 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du = \int_0^1 (1-u)^{y-1} u^{x-1} du = B(y, x).$$

Exercice 5. Vérifier que, pour tout x, y : $x > 0$, $y > 0$, on a :

$$\text{i) } B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y),$$

$$\text{ii) } B(1, y) = \frac{1}{y}.$$

Solution. i) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Alors,

$$B(x+1, y) = \frac{\Gamma(x+1) \Gamma(y)}{\Gamma(x+1+y)}.$$

Puisque

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{et} \quad \Gamma(x+1+y) = (x+y)\Gamma(x+y),$$

on obtient :

$$B(x+1, y) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+1+y)} = \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{x}{(x+y)}B(x, y),$$

d'où le résultat.

ii) Soit $y > 0$. En utilisant la propriété $\Gamma(1+y) = y\Gamma(y)$, on aura :

$$B(1, y) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(y)}{\Gamma(1+y)} = \frac{\Gamma(y)}{y\Gamma(y)} = \frac{1}{y}.$$

4.2 Exercices supplémentaires

Exercice 1. En utilisant la formule des compléments, calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} \quad \text{et} \quad \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n \sqrt{\pi}}{1.3.5\dots(2n-1)}.$$

Exercice 3. Montrer en utilisant un changement de variable adéquat que :

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Exercice 4. i) Montrer que $xB(x, y+1) = yB(x+1, y)$, $x > 0$, $y > 0$,

ii) En déduire que $B(x, n) = \frac{n-1}{x} B(x+1, n-1)$, $x > 0$, $n-1 > 0$.

Exercice 5. Vérifier que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, on a :

i) $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$,

ii) $B(1, y) = \frac{1}{y}$.

Bibliographie

- [1] C. Aslangul, *Mathématiques pour Physiciens*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Sorbonne Université, (2011/2012). 88
- [2] B. Belaidi, *Analyse Complexe, Cours et Exercices Résolus*, Office des Publications Universitaires, Algérie, 2002. 4, 5, 43
- [3] H. Catan, *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables Complexes*, Editeur Hermann, Paris 1985. 17, 30
- [4] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1986. 4, 30, 31, 35, 43, 47, 48, 49, 51, 52, 70, 73, 74
- [5] J. Kuntzmann, *Variable Complexe*, Hermann, Paris, 1967. Manuel de premier cycle. 17
- [6] R. Courant and H. Robbins Richard, *What is Mathematics*, Ouvrage Classique de Vulgarisation, Oxford University Press, Toronto, 1978. 4, 6
- [7] W. Rudin, *Analyse Réelle et Complexe*, Masson, Manuel de deuxième cycle, Paris, 1975. 4, 5, 30
- [8] M.R. Spiegel, *Variables Complexes : Cours et Problèmes, Série Schaum*, vol. 12, New York, 1973. 4, 8, 17, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 35, 45, 47, 48, 49, 51, 52, 58, 59, 61, 70, 73, 74
- [9] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A course of Modern Analysis : An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions with Account of the Principal Transcendental Functions*, Third Edition, Combridge at the University press, 1920. 85, 88

