جامعة عبد الحميد بن باديس –مستغانم -
كلية العلوم الاقتصادية، علوم التسييروالعلوم التجارية

دروس وأعمال موجهة في الإحصاء 3

مطبوعة موجهة إلى طلبة السنة الثانية والسنة الثالثة **LMD** علوم اقتصادية، علوم التسيير والعلوم التجارية

د. خليفة الحاج

السنة الجامعية: 2018 - 2019

" لَّقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا (94) وَكُلُّهُمْ آتِيهِ يَوْمَ الْقِيَامَةِ فَرْدًا (95) "

سورة مريم

« La statistique est comparable à un fusil chargé qui, en des mains inexpérimentées, peut amener à de graves accidents ».

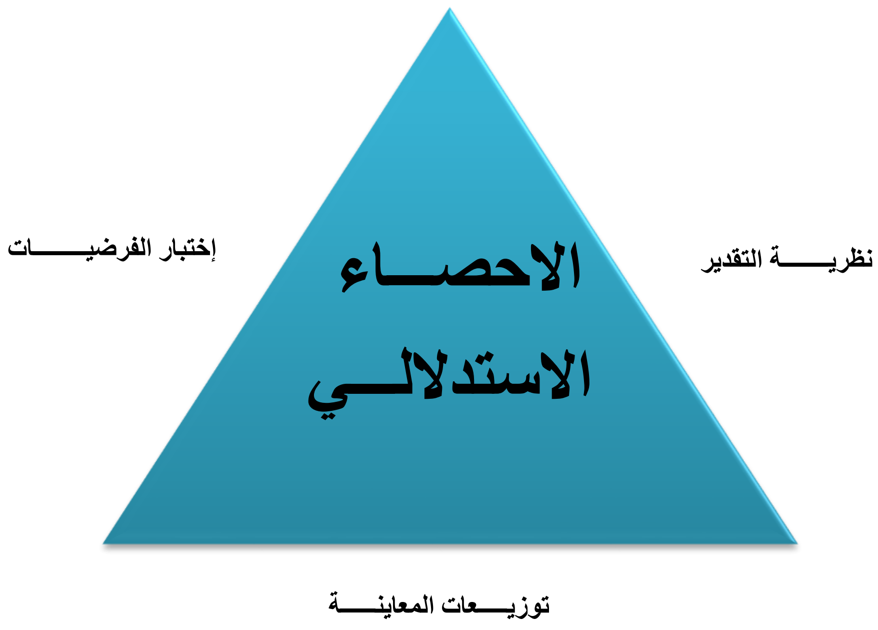
CHEYSSON

فهـــرس المحتويــــات

مقدمــــة

تتضمن هذه المطبوعة دروس وأمثلة وتمارين محلولة وفق البرنامج الوزاري لمقياس الإحصاء 3 أو ما يُسمى بالإحصاء الاستدلالي (*Statistique inférentielle*) أو التطبيقي (*Statistique appliquée*) موجهة لطلبة أقسام السنة الثانية علوم اقتصادية، علوم التسيير والعلوم التجارية والعلوم المالية والمحاسبية، وإلى كل المستويات باختلاف تخصصاتها، وقد حرصنا في تقديم هذه المطبوعة على الإيجاز والسهولة وتبسيط المفاهيم المدعمة بأمثلة تطبيقية بعيداً عن البراهين المعقدة والمسترسلة، وذلك حتى يتسنى للطلبة استيعاب محاور المقرر الدراسي.

وقد قُسمت هذه المطبوعة إلى ثلاثة فصول أساسية يُطلق عليها بمثلث الاستدلال الإحصائي (*Triangle de l'inférence statistique*) حيث يرتكز عليها الاستدلال الإحصائي هي: نظرية المعاينة (*Théorie d'échantillonnage*) أو توزيعات المعاينة، نظرية التقدير (*Théorie d'estimation*) (تقدير معالم المجتمع المجهولة)، واختبار الفرضيات الإحصائية (*Test d'hypothèses*).



الفصـــل الأول
نظريــة المعاينـــة

تمهيــــد

تهتم نظرية العينات بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه فيما يسمى بالاستدلال الإحصائي. هناك عدة طرق لأخذ العينات من المجتمع لاستخدامها في الاستدلال الإحصائي ومن أشهر هذه الطرق هي العينة العشوائية وهي العينة التي تكون لكل مفرده من مفردات المجتمع نفس فرصة الاختيار في العيينة. فمثلاً نستعين بعينه مسحوبة من المجتمع لتقدير معالم هذا المجتمع مثل متوسطه أو تباينه أو غير ذلك. أو أعطاء عينه من المرضى بارتفاع الضغط، مثلاً دواء معين ثم قياس ضغطهم قبل وبعد تناولهم لهذا الدواء لمعرفة ما إذا كان هذا الدواء مفيد في خفض الضغط أم لا.

1.1. مفاهيــــم إحصائيـــة

1.1.1. المجتمــــع الإحصائي والعينة الإحصائيـــــة

- **المجتمع الإحصائي:** هو مجموعة من المفردات (أفراد، أعداد، أشياء، مقاييس،...) ذات خصائص مشتركة تدور الدراسة الإحصائية حولها (مجموعة العناصر التي تعتمد عليها الدراسة الإحصائية).
- **العينة الإحصائية:** تعرف العينة بأنها جزء من المجتمع يتم اختياره لتمثيل المجتمع.

2.1.1. المعاينـــة بالإرجاع والمعاينـــة بدون إرجـــاع

- **المعاينـــة بالإرجاع (*Echantillonnage avec remise*)**

هي التي يتم فيها اختيار كل عنصر من مجتمع أكثر من مرة، ويُمكن اعتبار هذا المجتمع الذي تمت فيه المعاينة بالإرجاع بالمجتمع غير منته أو المجتمع غير المحدود طالما انه يمكن أن نسحب منه عينة أياً كان حجمها دون استنفاد المجتمع. وهناك قاعدة لمعرفة هل المعاينة تمت بالإرجاع (*Tirage avec remise*) أو بدون إرجاع (*Tirage sans remise*) وذلك كما يلي:

$n < 0,05N \Rightarrow$ المجتمع غير محدود أي أن المعاينة بالإرجاع

- **المعاينـــة بدون إرجـــاع (*Echantillonnage sans remise*)**

هي التي يتم فيها اختيار كل عنصر من مجتمع مرة واحدة فقط، ويُمكن اعتبار هذا المجتمع الذي تمت فيه المعاينة بدون إرجاع بالمجتمع المنته أو المجتمع المحدود.

$n \geq 0,05N \Rightarrow$ المجتمع محدود أي أن المعاينة بدون إرجاع

3.1.1. معالم المجتمـــع (*Paramètres*)

هي عبارة عن خاصية أو مقياس يتم حسابها من المجتمع محل الدراسة. أي أن المعالم هي مقاييس تحدد خصائص المجتمع (التوزيع).

4.1.1. إحصائيـــات العينـــة (*Statistiques*)

هي عبارة عن خاصية أو مقياس يتم حسابها من العينة المسحوبة من المجتمع محل الدراسة. أي أن الاحصاءة هي دالة في بيانات العينة.

5.1.1. توزيعات المعاينـــة (*Distributions d'échantillonnage*)

توزيع المعاينة للإحصائية هو التوزيع الاحتمالي لهذه الإحصائية المحسوب لكل العينات الممكنة والتي حجمها n والمأخوذة من المجتمع الإحصائي المدروس أياً كان حجمه وأياً كانت طريقة السحب.

2.1. توزيـــع المعاينـــة للمتوســـط الحسابي

إذا أخذنا عينات متكررة من مجتمع ما وقمنا بقياس متوسط لكل عينة، فإننا نجد أن معظم هذه المتوسطات تختلف عن بعضها البعض، ويسمى التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات بـــ: **"توزيـــع المعاينة للمتوسط"**. ولكن **توزيع المعاينة للمتوسط** له أيضاً متوسط، يعبر عنة بالرمز $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}}}$، وانحراف معيارى أو **خطأ معيـــارى** $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}}$.

فتوزيع المعاينة للمتوسطات الحسابية هي عبارة عن التوزيع التكراري للمتوسطات الحسابية لعدد كبير من العينات العشوائية المتساوية الحجم ومن مجتمع إحصائي واحد.

كما أن المتوسط الحسابي لتوزيع معاينة إحصائيات العينة يتفق تماماً مع المعلمة الذي أخذت منه هذه العينات.

1.2.1. توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي في حالة مجتمع طبيعي

إذا كان $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه فإن توزيع $\bar{x}$ يكون التوزيع الطبيعي ذا المتوسط μ والتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ حيث أن المتغير العشوائي: $\mathbf{Z} = \frac{\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\mathbf{n}}}$ يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري.

- **توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي في حالة مجتمع غير منته.**

إذا كان x_i متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 وكان $\bar{x}$ يمثل المتوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمحسوبة من هذا المجتمع بالإرجاع (مجتمع غير منته) فإن:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- **توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي في حالة مجتمع منتـــه.**

أما في حالة السحب بدون إرجاع فإن:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1} \quad \text{et} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

تمريـــن 1: سحبت عينة عشوائية من مجتمع لا نهائي (السحب بالإرجاع) متوسطه 70 وتباينه 40. إذا كان حجم العينة 10، فأوجد:

- المتوسط الحسابي للعينة.
- تباين العينة.
- الانحراف المعياري للعينة.

الحـــل

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 70$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{40}{10} = 4$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{4} = 2$$

تمريـــن 2: تخضع علامات الطلاب في أحد المقاييس للتوزيع الطبيعي الذي متوسطه 65 وانحرافه المعياري 18. أُخذت عينة عشوائية حجمها 36 طالب، أحسب:

- احتمال أن يزيد متوسط علامات العينة على 74 ؟
- احتمال أن يقل متوسط علامات العينة على 60 ؟

الحـــل

$$P(\overline{x} > 74) = P(\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{74-65}{18/\sqrt{36}}) = P(Z > \frac{74-65}{18/\sqrt{36}}$$

$$= P(Z > 3) = 1 - P(Z < 3)$$

$$= 1 - 0.9987 = 0.0013$$

$$P(\overline{x} < 60) = P\left(\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{60-65}{\frac{18}{\sqrt{36}}}\right) = P\left(Z < \frac{60-65}{\frac{18}{\sqrt{36}}}\right) = P(Z < -1.67) = 0.0475$$

2.2.1. توزيع المعاينـــة للمتوســـط الحسابي في حالة مجتمـــع غير طبيعـــي

إذا كان مجتمع متوسطه μ وتباينه σ^2 معلوم، وسحبت منه جميع العينات العشوائية ذات الحجم n فما هو توزيع المتوسط الحسابي لهذه العينات حتى ولو لم يكن توزيع المجتمع توزيع طبيعي؟

نظرية النـهاية المركزيـــة (*Théorème central limite*)

إذا كانت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هي مشاهدات عينة عشوائية حجمها n أُخذت من مجتمع إحصائي متوسطه μ وتباينه σ^2، فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 كلما زاد حجم العينة تدريجياً، ويكفي لذلك أن يصل حجم العينة إلى 30 مشاهدة، بعبارة أخرى فإن المتغير Z حيث $\mathbf{Z} = \frac{\bar{\mathbf{x}}-\mu}{\sigma/\sqrt{\mathbf{n}}}$ يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري كلما كان حجم العينة أكبر أو يساوي 30. أي أن:

$$\bar{x} \backsim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{عندما} \quad n \to +\infty$$

تمريـــن 3: إذا سُحبت عينة عشوائية حجمها 36 من مجتمع إحصائي متوسطه 65 وانحرافه المعياري 9. أحسب احتمال أن يكون متوسط العينة أصغر من 68 حالة المعاينة بالإرجاع.

الحل

- حساب احتمال أن يكون متوسط العينة أصغر من 68 في حالة المعاينة بالإرجاع.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 65$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{36}} = 1,5$$

وأن توزيع المعاينة هو:

$$\bar{x} \sim N(65; 1,5)$$

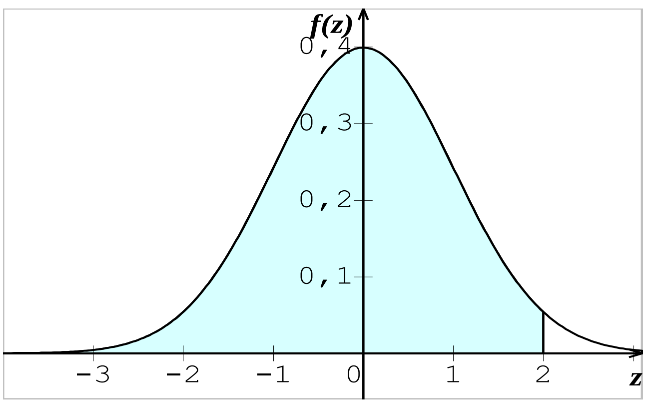
ونحسب الاحتمال وفق الصيغة التالية:

$$P(\bar{x} < 68) = p\left(Z < \frac{68-65}{1,5}\right)$$

$$= p(Z < 2)$$

$$= 0,9010$$

الشكل (1.1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $p(Z < 2)$.



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي Sine qua non

3.2.1. توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي في حالة تباين المجتمع وحجـم العينة صغيـر.

إذا أخذت عينة عشوائية من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 غير معلوم بحيث كان $\overline{x}$ (المتوسط الحسابي للعينة) لعينة حجمها n وانحرافها المعياري s فإن المتغير: $T_{dl} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

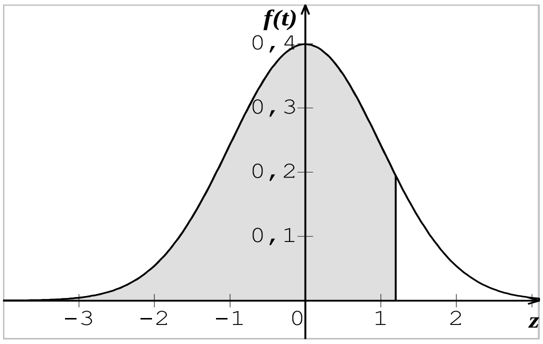
يخضع لتوزيع t بدرجات حرية $dl = n - 1$

تمريـــن 4: إذا كانت أطوال الطلاب في أحد الصفوف المدرسية تتبع التوزيع الطبيعي المتوسط يساوي 160سم، إذا سحبت عينة عشوائية من 4 طلاب فما هو احتمال أن يقل متوسطها الحسابي عن 166سم، إذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة يساوي 10سم ؟

الحل

$$P(\bar{x} < 166) = P\left(t < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(t < \frac{166 - 160}{10/\sqrt{4}}\right) = P(t < 1{,}2) = 0{,}8849$$

الشكل (2.1): المساحة تحت منحنى student للاحتمال $P(\overline{x} < 166)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي Sine qua non

تمريـــن 5: نفترض أن علامات طلبة قسم علوم التسيير في مقياس الإحصاء الاستدلالي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 12 وانحراف معياري مقداره 4، سُحبت منه عينة عشوائية حجمها 36 طالباً، أوجد:

- توزيع المعاينة لهذه العينة؛
- أحسب احتمال أن يزيد متوسط علامات الطلبة عن 14.

الحل

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 12$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{36}} = 0{,}67$$

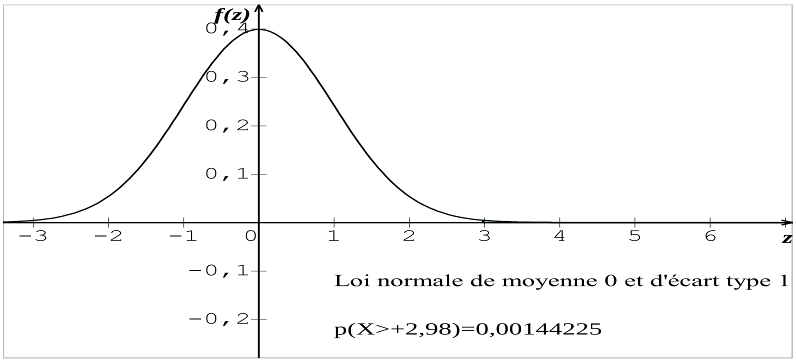
وأن توزيع المعاينة هو:

$$\bar{x} \sim N(12; 0{,}67)$$

ونحسب الاحتمال وفق الصيغة التالية:

$$P(\bar{x} \geq 14) = p\left(Z \geq \frac{14-12}{0,67}\right)$$
$$= p(Z \geq 2,98)$$
$$= 0,5 - p(0 \leq z \leq 2,98)$$
$$0,5 - 0,4986 = \mathbf{0,0014}$$

الشكل (3.1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $p(Z \geq 2,98)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي Sine qua non

جدول 1.1: ملخص توزيع المعاينة للمتوسط

المجتمــــع	المعاينــــة	الخاصيــــة
مجتمع ما	معاينة بالإرجاع أو بدون إرجاع	$\mu_{\bar{x}} = \mu$
مجتمع ما	معاينة بالإرجاع	$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$
مجتمع ما حجمه N	معاينة بدون إرجاع	$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
مجتمع موزع طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2	معاينة بالإرجاع أو بدون إرجاع	$\bar{x} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$
مجتمع بمتوسط μ وتباين σ^2 لكن ليس بالضرورة طبيعيا	عندما يكون n كبيراً (n ≥ 30)	$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0;1)$

المصدر: من إعداد الباحث

جدول 2.1: توزيع المعاينة للمتوسطات حسب طبيعة توزيع المجتمع، معلومية التباين و حجم العينة.

قانون المجتمع	تباين المجتمع (σ^2)	n	$\sigma_{\bar{x}}$	نوع التوزيــع
طبيعي	معلوم	$n \geq 30$ أو $n < 30$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\sim N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
	غير معلوم	$n \geq 30$	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\sim N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
		$n < 30$	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\sim t_{\alpha; n-1}$
غير معلوم	معلوم	$n \geq 30$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\sim N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
	غير معلوم	$n \geq 100$	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\sim N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

المصدر: من إعداد الباحث

3.1. توزيع المعاينـــة للفرق بين متوسطيــن

1.3.1. الحالة الأولى: المجتمعيــن طبيعييــن و σ_1^2 و σ_2^2 معلوميــن

إذا سُحبت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي متوسطه الحسابي μ_1 وتباينه σ_1^2، وعينة ثانية حجمها n_2 من مجتمع طبيعي أيضاً متوسطه الحسابي μ_2 وتباينه σ_2^2، والعينتان مستقلتان. فإذا كان $\bar{x}_1$ يمثل متوسط العينة الأولى، و $\bar{x}_2$ يمثل متوسط العينة الثانية، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطيهما $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين وفق الصيغة التالية:

$$\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي المجتمعين وفق الشكل التالي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

تمريــن 6: لمعرفة الفرق بين متوسطي الأجور للعمال، سُحبت عينتين عشوائيتين من مؤسستين مختلفتين لإنتاج مواد التجميل، فتحصلنا على النتائج المدونة أدناه:

	Entreprise A	Entreprise B
n	36	50
σ	36	40
μ	230	180

- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي الأجور للعينتين أكبر من 40.

الحل: بما أن حجم العينتين أكبر من 30 والانحراف المعياري للمجتمعين معلومين، إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع طبيعي.

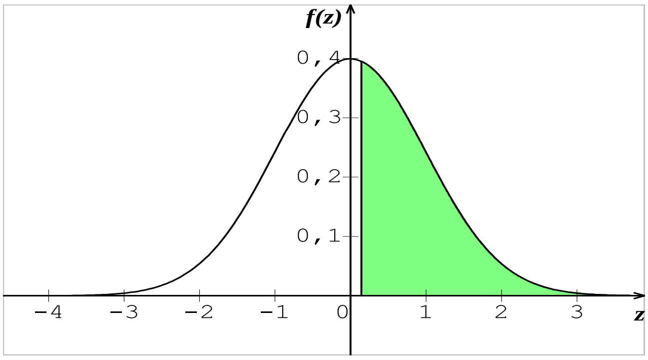
$$P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)>40]=P\left[Z>\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right]$$

$$\Rightarrow P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)>40]=P\left[Z>\frac{40-(230-180)}{\sqrt{\frac{(36)^2}{36}+\frac{(40)^2}{50}}}\right]$$

$$\Leftrightarrow P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)>40]=P[Z>0,147]$$

$$\Leftrightarrow P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)>40]=0,4415$$

الشكل (4.1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $P[Z>0,147]$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

2.3.1. الحالة الثانية: المجتمعيــــن غير طبيعييـــن و σ_1^2، σ_2^2، معلوميــن

إذا كان $\bar{x}_1$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 سُحبت من مجتمع متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 معلوم، وكان $\bar{x}_2$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 سُحبت من مجتمع مستقل عن المجتمع الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_1^2 معلوم أيضاً. وكان حجم العينتين كبير بدرجة كافية، فإن توزيع المعاينة لــ $(\bar{x}_2-\bar{x}_2)$ يخضع تقريباً للتوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين كما يلي:

$$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\mu_1-\mu_2$$

$$\sigma^2{}_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

ويكون المتغير Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \backsim N(0;1)$$

تمريـــن 7: نسحب عينتان عشوائيتان ومستقلتان من مجتمعين مختلفين وحصلنا على النتائج التالية:

Population 1	Population 2
$\boldsymbol{\mu_1 = 15}$	$\mu_2 = 10$
$\boldsymbol{\sigma_1^2 = 6}$	$\sigma_2^2 = 4{,}5$
$\boldsymbol{n_1 = 50}$	$n_2 = 40$

أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكثر من 5,5

الحل

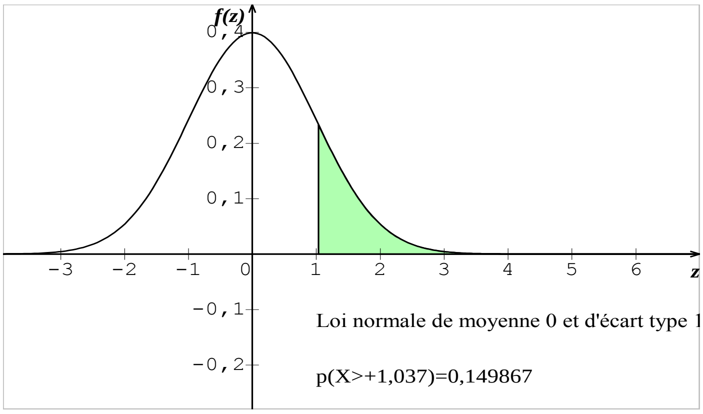
$$P[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 5{,}5] = P\left[Z > \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right]$$

$$=P\left[Z > \frac{5{,}5-(15-10)}{\sqrt{\frac{6}{50}+\frac{4{,}5}{40}}}\right]$$

$$=P[Z > 1{,}037]$$

$$=0{,}1498$$

الشكل (5.1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $\boldsymbol{P[Z > 1{,}037]}$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

3.3.1. الحالة الثالثة: تباينا المجتمعين مجهوليـــن والعينــــات صغيـــرة الحجم

في حالة تباينا المجتمعين (σ_1^2) و (σ_2^2) مجهولين نستبدل مكانهما تباينا العينتين (S_1^2) و (S_2^2)، وإذا كانت هاتين العينتين مستقلتين وصغيرتا الحجم، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطيهما يتبع توزيع ستودنت (t) بدرجات حرية dl. وهنا نميز حالتين:

- حالة تباينا المجتمعين متساويين؛
- حالة تباينا المجتمعين غير متساويين.

أ. حالة تباينا المجتمعيــن (σ_1^2) و (σ_2^2) متساوييــن ومجهوليــن

ليكن مجتمعين بتباينين متساويين ومجهولين $(\boldsymbol{\sigma_1^2} = \boldsymbol{\sigma_2^2})$ فإن التباين المشترك بينهما هو مجهول كذلك. وبالتالي يكون تباين الفرق بين متوسطي العينتين وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma^2{}_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

وبما أن التباين المشترك مجهول فإننا نستخدم في مكانه تباينا العينتين (S_1^2) و (S_2^2)، حيث يكون تقدير التباين هو متوسط مرجح للقيم (S_1^2) و (S_2^2)، وتكون الترجيحات على أساس حجم العينات، ولكي يكون تقدير التباين تقديراً غير متحيز لـ σ^2 فإننا نستخدم درجات الحرية $(n_1 - 1)$، $(n_2 - 1)$ كترجيحات بدلاً من استخدام العينتين n_1 و n_2 بشكل مباشر.

وعليه فإن مقدر التباين المشترك σ^2 هو S_p^2 ويعطي بالصيغة الرياضية التالية:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$ *La variance pondérée* (التباين المرجح)

ويكون المتغير t حيث:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \backsim t(n_1 + n_2 - 2; \frac{\propto}{2})$$

تمريـــن 8: نسحب عينتان عشوائيتان ومستقلتان من مجتمعين مختلفين فحصلنا على النتائج التالية:

Population 1	Population 2
$\boldsymbol{\mu_1 = 30}$	$\mu_2 = 28$
$\boldsymbol{S_1^2 = 4}$	$S_2^2 = 7$
$\boldsymbol{n_1 = 16}$	$n_2 = 25$

إذا اعتبرنا أن تباينا المجتمعين متساويين فأوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 3

الحل

$$P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)<3]=P\left[t<\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\right]$$

$$\Rightarrow P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)<3]=P\left[t<\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}*\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\right]$$

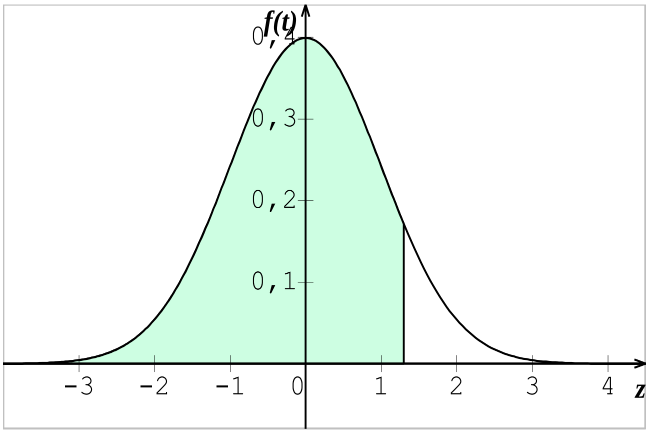
$$\Leftrightarrow P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)<3]=P\left[t<\frac{3-(30-28)}{\sqrt{\frac{(16-1)4+(25-1)7}{16+25-2}*\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\right)}}\right]$$

$$\Leftrightarrow P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)<3]=P[t<1{,}30]$$

$$\Leftrightarrow P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)<3]=P[t<1{,}30]$$

$$=0{,}9032$$

الشكل (6.1): المساحة تحت منحنى Student للاحتمال $P[t<1{,}30]$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

ب. حالة تباينا المجتمعيــن (σ_1^2) و (σ_2^2) غيــر متساوييــن ومجهوليــن

ليكن $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ المتوسطين الحسابين لعينتين مستقلتين صغيرتا الحجم ومسحوبتين من مجتمعين متوسطيهما على التوالي μ_1 و μ_2، وبتباينين مجهولين وغير متساويين، $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$ فإن تقدير الانحراف المعياري للفرق بين متوسطي العينتين يُعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\sigma_{[\bar{x}_1-\bar{x}_2]}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

ويكون المتغير t حيث:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \backsim t(\mathrm{V}; \frac{\propto}{2})$$

حيث V هي درجة الحرية لتوزيع ستودنت t:

$$V = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

تمريـــن 9: نسحب عينتان عشوائيتان ومستقلتان من مجتمعين مختلفين فحصلنا على النتائج التالية:

Population 1	**Population 2**
$\boldsymbol{\mu_1 = 15}$	$\mu_2 = 10$
$\boldsymbol{S_1^2 = 6}$	$S_2^2 = 4$
$\boldsymbol{n_1 = 25}$	$n_2 = 20$

إذا اعتبرنا أن تباينا المجتمعين غير متساويين فأوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكثر من 6.

الحل

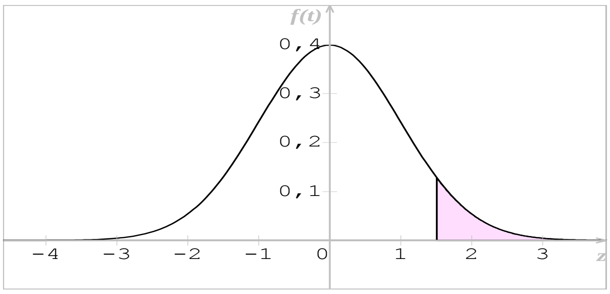
$$P[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 6] = P\left[t > \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}\right]$$

$$\Rightarrow P[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 6] = P\left[t > \frac{6-(15-10)}{\sqrt{\left(\frac{6}{15}+\frac{4}{10}\right)}}\right]$$

$$\Leftrightarrow P[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 6] = P[t > 1,51]$$

$$= 0,0655$$

الشكل (7.1): المساحة تحت منحنى Student للاحتمال $\boldsymbol{P[t > 1,51]}$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

4.1. توزيـــع المعاينـــــة لتباين العينـــة

إذا كان تباين العينة (S^2) يُعطى بالصيغة التالية:

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

فإن متوسط تباين العينة يعطى بالصيغة التالية:

$$E(S^2) = \sigma^2$$

أما الانحراف المعياري لتباين العينة فيعطى بالصيغة التالية:

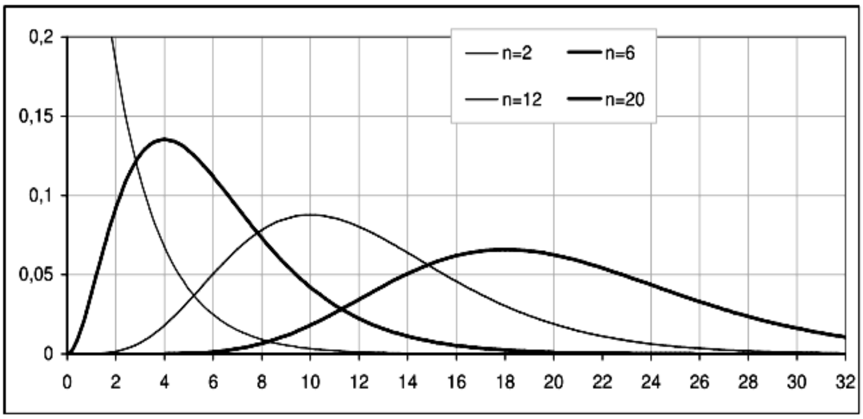
$$\sigma_{s^2=\sigma^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}}}$$

إذا سُحبت عينة عشوائية من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2، وكانت S^2 تُمثل تباين العينة، فإن المتغير:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

له توزيع كاي مربع بدرجات حرية dl = n-1، حيث أن المتغير χ^2 هو دالة في S^2.

الشكل (7.1): منحنى توزيع χ^2



المصدر: **https://math.unice.fr/~diener/StatL2/COURS5.pdf**

تمريـــن 10: مجتمع إحصائي يتبع توزيع طبيعي تباينه 25، سُحبت منه عينة عشوائية حجمها 6 فأوجد:

- احتمال أن يكون تباين العينة أقل أو يساوي 2؛
- احتمال أن يتجاوز تباين العينة 7.

الحل: لدينا درجة الحرية dl

$$dl = n\text{-}1 = 6\text{-}1 = 5$$

$$P(S^2 \leq 2) = P(\chi^2 \leq 2) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{(6-1)2^2}{25}\right) = P(\chi^2 \leq 0{,}8)$$

وباستخدام الجدول الإحصائي للـ χ^2 وعند درجة الحرية dl = 5 نجد أن:

$$P(\chi^2 \leq 2) \cong 0{,}975$$

$$P(S^2 > 7) = P(\chi^2 > 7) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{(6-1)7^2}{25}\right) = P(\chi^2 > 9{,}8)$$

وباستخدام الجدول الإحصائي للـ χ^2 وعند درجة الحرية dl = 5 نجد أن:

$$P(\chi^2 > 9{,}8) \cong 0{,}05$$

5.1. توزيـــع المعاينـــة لنسبـــة تباينـــا العينتيـــن

إذا كانت S_1^2، S_2^2، تباينا عينتين مستقلتين حجمهما n_1، n_2 مسحوبتين من مجتمعين موزعين توزيعاً طبيعياً ذو التباينين σ_1^2، σ_2^2،على الترتيب، فإن المتغير:

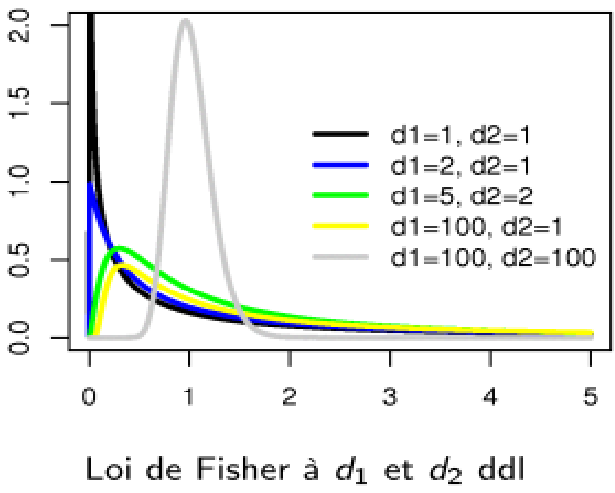
$$F = \frac{\dfrac{n_1}{n_1-1}\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{n_2}{n_2-1}\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\dfrac{\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}} \backsim F_{(d_1;\, d_2;\, \propto)}$$

$d_1 = n_1 - 1$ درجات الحرية مقترنة بتباين العينة S_1^2 في البسط؛

$d_2 = n_2 - 1$ درجات الحرية مقترنة بتباين العينة S_2^2 في المقام؛

إن توزيع F يتحدد تماماً بدراجات الحرية ويتم الحصول على القيم الجدولية لفيشر من خلال تقاطع درجتي حرية البسط والمقام.

الشكل (7.1): منحنـــى توزيـــع $\boldsymbol{fisher}$



Source : CLEMENT Rau., cours 2 : Variables aléatoires continues, loi normale., Laboratoire de Mathématiques de toulouse, Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan., p. 63. Disponible sur le site : http://www.math.univ-toulouse.fr/~rau/retro%20stat%20inf/c2.pdf

تمريـــن 11: تُسحب عينتان حجمهما 8 و 10 من مجتمعين موزعين توزيعاً طبيعياً تباينهما على الترتيب 20 و36. فما هو احتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من ضعف تباين العينة الثانية.

الحل

$$n_1 = 8;\quad n_2 = 10;\quad \sigma_1^2 = 20;\quad \sigma_2^2 = 36$$

$$\mathrm{F} = \frac{\frac{n_1}{n_1 - 1}\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{n_2}{n_2 - 1}\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\frac{8}{8-1}\frac{S_1^2}{(20)}}{\frac{10}{10-1}\frac{S_2^2}{(36)}} = 1{,}85\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

عدد درجات الحرية للبسط والمقام هما:

$$d_1 = n_1 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$d_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

فإذا كان S_1^2 أكبر من ضعف S_2^2 أي $S_1^2 > S_2^2$ فإن: $F > 3{,}70$. وبالعودة إلى الجدول الإحصائي لفيشر نجد أن الاحتمال هو اصغر من 0,05 ولكنه اكبر من 0,01 وللحصول على القيمة الدقيقة نحتاج جداول للتوزيع F موسعة أكثر.

6.1. توزيـــع المعاينـــة لنسبـــة العينـــة

توزيع معاينة النسبة هو عبارة عن التوزيع التكراري للنسب المئوية لعدد كبير من العينات العشوائية متساوية الحجم مسحوبة من مجتمع إحصائي واحد. حيث أن توزيع معاينة النسب المئوية يخضع إلى توزيع ذو الحدين (Binomiale)

المتوسط الحسابي $\mu=np$

الانحراف المعياري $\sigma=\sqrt{npq}$

إلا أن توزيع ذو الحدين يقترب من توزيع المنحنى الطبيعي إذا كان:

- حجم العينة يُساوي على الأقل 100 مفردة أي $n \geq 100$؛
- عندما تقترب النسب المئوية لتحقق الصفة من النسب المئوية لعدم تحقق الصفة أي: $p = q = 0{,}5$.

وتعطى الصيغة الرياضية لحساب الانحراف المعياري لتوزيع معاينة النسب المئوية كما يلي:

جدول 3.1: ملخص توزيع المعاينة للنسبة

المجتمع	المعاينة	P	σ_p
كبير	بالإرجاع	معلومة	$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

كبير	بالارجاع	مجهولة	$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$
صغير	بدون ارجاع	معلومة	$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
صغير	بدون ارجاع	مجهولة	$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

المصدر: من إعداد الباحث

$\bar{P}$: النسبة المحققة في العينة، حيث $\bar{P} = \frac{x}{n}$

$1-\bar{P}$: النسبة غير المحققة في العينة

تمريـــن 12: مصنع به 100 عامل منهم 20 يدخنون، سُحبت منه كل العينات الممكنة من العمال والتي حجمها 36 مع الإرجاع. أحسب المتوسط الحسابي والخطأ المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة المدخنين.

الحل

نسبة العمال المدخنين بالمصنع هو:

$$p = \frac{20}{100} = 0{,}20$$

المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة لنسبة المدخنين هو:

$$\mu_{\bar{p}} = p = 0{,}2$$

نسبة العمال غير المدخنين بالمصنع هو:

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$$

الخطأ المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة المدخنين هو:

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}20(0{,}80)}{36}} = 0{,}067$$

7.1. توزيع المعاينـــة للفـــرق بين نسبتي عينتيـــن

لتكن (p_1) نسبة ظاهرة ما في المجتمع الأول، و (p_2) نسبة ظاهرة ما في المجتمع الثاني، نريد معرفة الفرق بين نسبتي الظاهرتين في المجتمعين $(p_1 - p_2)$ من خلال استخدام الفرق بين نسبتي العينتين العشوائيتين المسحوبتين من هذين المجتمعين، أي باستخدام الإحصائيتين $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$، حيث:

$\bar{\mathbf{p}}_1$: هي نسبة الظاهرة في العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول؛

$\bar{\mathbf{p}}_2$: هي نسبة الظاهرة في العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني.

فإذا قمنا بسحب كل العينات العشوائية ذات الحجم n_1 من المجتمع الأول، وحسبنا نسبة الظاهرة المدروسة لكل عينة، وإذا قمنا بالمقابل بسحب كل العينات العشوائية ذات الحجم n_2 من المجتمع الثاني، وحسبنا نسبة الظاهرة المدروسة لكل عينة.

نفترض أن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمعين مستقلة عن بعضها البعض، وإذا حسبنا كل الفروق بين نسب عينات المجتمع الأول ونسب عينات المجتمع الثاني، فسنحصل على توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي العينتين $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$، وإذا حسبنا المتوسط الحسابي $(\mu_{\bar{p}_1-\bar{p}_2})$ والتباين $(\sigma^2{}_{\bar{P}_1-\bar{P}_2})$ لهذا التوزيع، فنجد أن هناك علاقات تربط بين هذين المقياسين مع نسبة المجتمع الأول ونسبة المجتمع الثاني، وذلك كما يلي: $\mu_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = p_1 - p_2$

فإذا كان السحب بالإرجاع أي المجتمع غير منته يكون التباين للفرق بين نسبتي العينتين كما يلي:

$$\sigma^2{}_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \frac{p_1q_2}{n_1} + \frac{p_1q_2}{n_2}$$

أما إذا كان السحب بدون إرجاع أي المجتمع منته يكون التباين للفرق بين نسبتي العينتين كما يلي:

$$\sigma^2{}_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \frac{p_1q_1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{p_2q_2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)$$

وعلى هذا الأساس فإنه إذا كان سحبنا عينتين عشوائيتين مستقلتان من مجتمعين، وطبقاً لنظرية النهاية المركزية يكون توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي العينتين $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ توزيعاً قريباً من التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي وتباين. ومن ثم فإن المتغير العشوائي الطبيعي المعياري **Z** يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\mathbf{Z} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}} \sim N(0;1)$$

تمريــن 13: لدينا مصنعين، المصنع الأول به 100 عامل منهم 20 يدخنون، سُحبت منه عينة حجمها 36، والمصنع الثاني به 200 عامل منهم 30 يدخنون، سُحبت منه عينة حجمها 40.

أحسب المتوسط الحسابي والخطأ المعياري للفرق بين نسبتي العمال المدخنين.

الحل: المتوسط الحسابي للفرق بين متوسطي نسبتي العمال المدخنين

$$\mu_{\bar{P}_1-\bar{P}_2} = p_1 - p_2 = \frac{20}{100} - \frac{30}{200} = 0{,}20 - 0{,}15 = 0{,}05$$

الانحراف المعياري للفرق بين متوسطي نسبتي العمال المدخنين

$$\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}20*0{,}80}{36}+\frac{0{,}15*0{,}85}{40}} = 0{,}087$$

خلاصـــة الفصــــل

على ضوء ما سبق يُمكن القول أن نظرية المعاينة أو توزيعات المعاينة لمعلمة أو معالم المجتمع تلعب دوراً مهماً في تحديد دقة التقديرات الإحصائية، وحتى يكون التقدير الإحصائي واختبار الفرضيات الإحصائية سليماً، ينبغي أن يُبنى على عينة ممثلة للمجتمع، ولا يتأتى ذلك إلا من خلال القيام بالمعاينة العشوائية. في الفصل الموالي سوف نشير إلى نظرية التقدير الإحصائي.

تماريـــن إضافيـــة

التمرين 1

يسحب محلل مالي عينة من بنك حجمها 10% من مجتمع متكون من 300 حساب بنكي. فيجد أن متوسط قيود الحسابات لهذه العينة هو 148,50 دج و انحرافها المعياري هو 35,75 دج. نعتبر متوسط كل القيود البنكية هو 138 دج.

- أحسب توزيع المعاينة الطبقية لمتوسط العينات المسحوبة؛
- أحسب توزيع المعاينة الطبقية للانحراف المعياري؛
- أحسب إحتمال أن يكون $\bar{x}$ محصوراً بين 131,47 و 144,53.

التمرين 2

في دراسة لأرصدة عملاء بنك ما تبين أنها تتبع التوزيع الطبيعي بـ μ = 13600DA و δ = 600DA. إذا قمنا بسحب 60 عينة حجم كل منها 9 حسابات من مجموع الحسابات المفتوحة و عددها 6000 حساب.

- أحسب $\mu_{\bar{x}}$ و $\delta_{\bar{x}}$ في حالة السحب بالإرجاع و السحب بغير إرجاع؛
- ما هي نسبة و عدد العينات التي يكون فيها $\bar{x}$ محصوراً بين 13600 و 13800؟، أقل من 13800؟

التمرين 3

مجتمع إحصائي متكون من مصابيح كهربائية ولتكن x_i مدة حياة هذه المصابيح ونفترض أنها تتبع القانون الطبيعي بمتوسط 10 وتباين 4. ولتكن $\bar{x}_i$ توزيع متوسط مدة حياة هذه المصابيح لعينات حجمها 4 ومحسوبة من مجتمع حجمه 100.

1. أحسب احتمال اختيار مصباح عشوائي تتراوح مدة حياته ما بين 8 ساعات و 12 ساعة؛
2. أحسب احتمال اختيار متوسط عينة مدة حياتها محصورة ما بين 8 ساعات و 12 ساعة

التمرين 4

ليكن مجتمع متكون من 05 أعداد: 1، 2، 4، 7، 8

- أحسب μ و δ
- أوجد التوزيع النظري لمتوسط المعاينة للعينات التي حجمها يساوي 2 في حالتي السحب بالإرجاع و السحب بدون إرجاع؛

أحسب $\mu_{\bar{x}}$ و $\delta_{\bar{x}}$ في كلتا الحالتين.

التمرين 5 (الامتحان الاستدراكي للسنة الجامعية 2017-2018)

مجتمع إحصائي غير محدود (غير منته) موزع طبيعياً معالمه كما يلي: $X_i \sim N(\mu=60; \sigma^2=100)$. سُحبت منه عينات عشوائية وطُلب منا حساب القياسات الإحصائية كما هو ممثل في الجدول أدناه:

الحجم	توزيع معاينة المتوسط $\bar{x}_i$			
n	$\mu_{\bar{x}}$	$\sigma^2_{\bar{x}}$	$\sigma_{\bar{x}}$	$p(\bar{x}_n > 63)$
4	60	25	5	0,2742
8	…..	…..	…..	…..
16	…..	…..	…..	…..
32	…..	…..	…..	…..
64	…..	…..	…..	…..
100	…..	…..	…..	…..

- أكمل الجدول مع تبرير النتائج بإجراء الحسابات.

التمرين 6 (إختبر معلوماتك)

أُخذت عينة عشوائية حجمها 30 من مجتمع بيرنوللي فيه نسبة النجاح 0,7 وأُخذت عينة عشوائية حجمها 45 من مجتمع آخر مستقل عن الأول ونسبة النجاح فيه 0,55. فإذا كانت نسبة النجاح في العينة الأولى $\bar{p}_1$، وفي العينة الثانية $\bar{p}_2$. أوجد $p(\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \geq 0{,}2)$

التمرين 7 (اختبر معلوماتك)

أخذت عينتان عشوائيتان من مجتمعين طبيعيين مستقلين، إذا كان $S_1 = 11$، S_1^2 تباين العينة الأولى، $n_2 = 8$، S_2^2 تباين العينة الثانية. أوجد C في كل حالة إذا كان $\sigma_1^2 = 10$، $\sigma_2^2 = 16$؛

- $p\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq C\right) = 0{,}95$
- $p\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq C\right) = 0{,}98$

حلول التماريـــن

التمرين 1

S = 35,75 $\bar{x} = 148,50$ n = 0,1N= 0,1*300 = 30   N = 300 $\mu = 138$

1. حساب توزيع المعاينة الطبقية لمتوسط العينات المسحوبة

أولاً يجب معرفة طبيعة السحب الذي قام به المحلل المالي بتطبيق القاعدة التالية:

- إذا كان حجم العينة أكبر أو يساوي 5 % نقول بأن المجتمع منته أو محدود أي أن السحب تم بدون إرجاع
- إذا كان حجم العينة أصغر من 5 % نقول بأن المجتمع غير منته أو غير محدود أي أن السحب تم بالإرجاع.

5%N = 0,05 * 300 = 15

n= 30 > 5%N

إذن المجتمع منته ومنه السحب تم بدون إرجاع.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 138$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=\frac{35,75}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{300-30}{300-1}}=6,20$$

2. حساب إحتمال أن يكون $\bar{x}$ محصوراً بين 131,47 و 144,53.

$$P(131,47\leq\bar{x}\leq144,53)=P\left(\frac{\bar{x}_1-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}\leq Z_i\leq\frac{\bar{x}_2-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}\right)$$

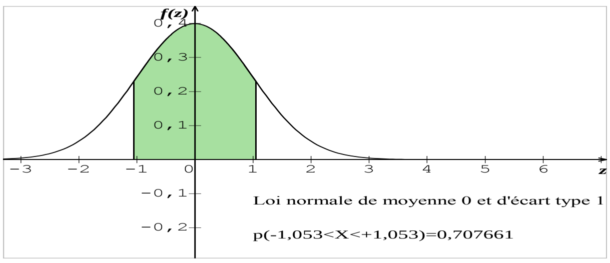
$$= P\left(\frac{131,47-138}{6,20} \leq Z_i \leq \frac{144,53-138}{6,20}\right) = P(-1,053 \leq Z_i \leq +1,053)$$

$$= 2 * P(0 \leq Z_i \leq 1,053)$$

$$= 2 * 0,3538$$

$$= 0,7076$$

الشكل (8.1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $P(-1,053 \leq Z_i \leq +1,053)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

التمرين 2

n= 9 $\acute{n} = 60$ σ = 600 $\mu = 13600$ N = 6000

حساب $\mu_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ في حالة السحب بالإرجاع

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 13600$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{600}{\sqrt{9}} = 200$$

حساب $\mu_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ في حالة السحب بدون إرجاع

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 13600$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{600}{\sqrt{9}}\sqrt{\frac{6000-9}{6000-1}} = 199{,}86$$

ايجاد نسبة وعدد العينات التي يكون فيها $\bar{x}$ محصوراً بين 13600 و 13800.

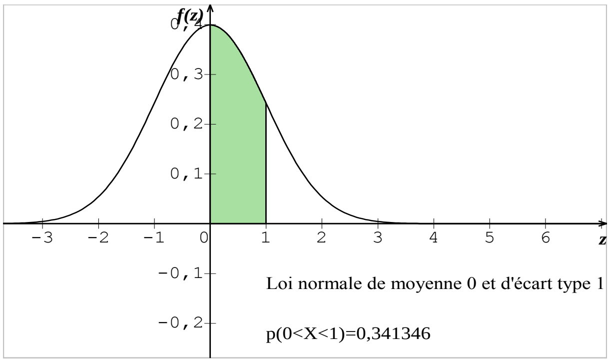
$$P(13600 \leq \bar{x} \leq 13800) = P\left(\frac{\bar{x}_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_i \leq \frac{\bar{x}_2 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{13600 - 13600}{\frac{600}{\sqrt{9}}} \leq Z_i \leq \frac{13800 - 13600}{\frac{600}{\sqrt{9}}}\right)$$

$$= P(0 \leq Z_i \leq 1)$$

$$= 0{,}3413$$

الشكل (9.1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $P(0 \leq Z_i \leq 1)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

إذن نسبة العينات التي يكون فيها $\bar{x}$ محصوراً بين 13600 و 13800. هو 34,13 %

عدد العينات = الاحتمال مضروب في عدد العينات المسحوبة من المجتمع

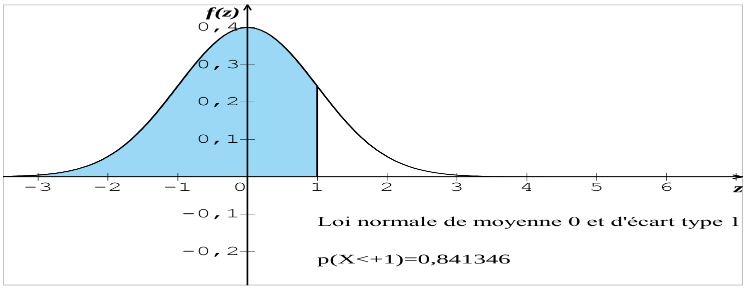
عدد العينات = 60 * 0,3413

عدد العينات = 20,478 ≈ 21 عينة.

ايجاد نسبة وعدد العينات التي يكون فيها $\bar{x}$ أقل من 13800.

$$P(\bar{\boldsymbol{x}} \leq 13800) = P\left(Z_i \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$= P\left(Z_i \leq \frac{13800-13600}{\frac{600}{\sqrt{9}}}\right)$$
$$= P(Z_i \leq +1)$$
$$= 0{,}8413$$

الشكل (10.1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $P(Z_i \leq +1)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

إذن نسبة العينات التي يكون فيها $\bar{x}$ أقل من 13800. هو 84,13 %

عدد العينات = الاحتمال مضروب في عدد العينات المسحوبة من المجتمع

عدد العينات = 60 * 0,8413

عدد العينات = 50,478 ≈ 51 عينة.

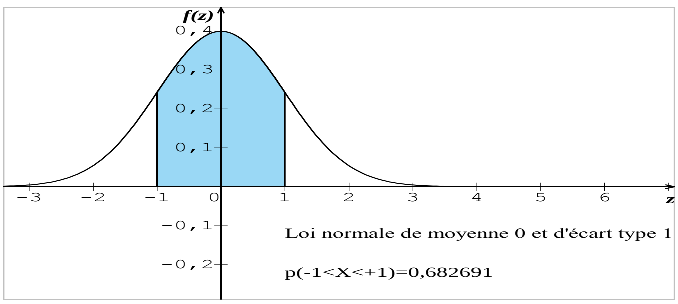
التمرين 3

$\mu = 10$ $\sigma^2 = 4$ n =4 N =100 σ=2

1. **حساب احتمال اختيار مصباح عشوائي تتراوح مدة حياته ما بين 8 ساعات و 12 ساعة**

$$P(8 \leq x_i \leq 12) = P(Z_1 \leq Z_i \leq Z_2)$$
$$Z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{8-10}{2} = -1$$
$$Z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma} = \frac{12-10}{2} = +1$$

الشكل (11.1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $P(-1 \leq Z_i \leq +1)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

$$P(8 \leq x_i \leq 12) = P(-1 \leq Z_i \leq +1)$$
$$= 2 * P(0 \leq Z_i \leq 1)$$
$$= 2 * 0,3413$$
$$= 2 * 0,6826$$

2. احتمال اختيار متوسط عينة مدة حياتها محصورة ما بين 8 ساعات و 12 ساعة

يجب معرفة هل المجتمع منته أو غير منته أي هل السحب تم بالإرجاع أو بدون إرجاع

لدينا:

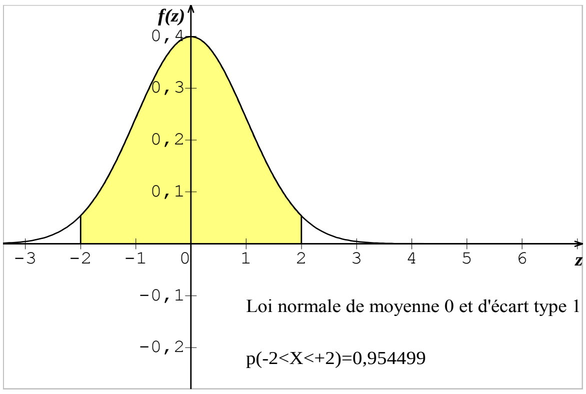
$5\% *N = 0,05 * 100 = 5 \Rightarrow n = 4 < 5\%N$

إذن نقول بأن المجتمع غير منته أي أن السحب تم بالإرجاع وعليه:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P(8 \leq \bar{x}_i \leq 12) = P(Z_1 \leq Z_i \leq Z_2)$$
$$= P\left(\frac{\bar{x}_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_i \leq \frac{\bar{x}_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$
$$= P\left(\frac{8 - 10}{2/\sqrt{4}} \leq Z_i \leq \frac{12 - 10}{4/\sqrt{4}}\right)$$
$$= P(-2 \leq Z_i \leq +2)$$
$$= 2 * P(0 \leq Z_i \leq 2)$$
$$= 2 * 0,4772$$
$$= 0,9544$$

الشكل (12.1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $P(-2 \leq Z_i \leq +2)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

التمرين 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\sum$
x_i	1	2	4	7	8	22
x_i^2	1	4	16	49	64	134

1. حساب μ و δ

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{22}{5} = 4,4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2} = \sqrt{\frac{134}{5} - (4,4)^2} = 2,73$$

2. أيجاد التوزيع النظري للمعاينة للعينات التي حجمها يساوي 2 في حالة السحب بالإرجاع

أولا نبحث عن عدد العينات الممكنة التي حجمها يساوي 2 والمسحوبة بالإرجاع من هذا المجتمع الذي حجمه يساوي 5.

$$\grave{n} = A_N^n = A_5^2 = N^n = 5^2 = 25 \text{ échantillons}$$

(1 ;1)	(1 ;2)	(1 ;4)	(1 ;7)	(1 ;8)
(2 ;1)	(2 ;2)	(2 ;4)	(2 ;7)	(2 ;8)
(4 ;1)	(4 ;2)	(4 ;4)	(4 ;7)	(4 ;8)
(7 ;1)	(7 ;2)	(7 ;4)	(7 ;7)	(7 ;8)
(8 ;1)	(8 ;2)	(8 ;4)	(8 ;7)	(8 ;8)

التوزيع النظري لمتوسط المعاينة للعينات التي حجمها يساوي 2 في حالة السحب بالإرجاع

1	1,5	2,5	4	4,5
1,5	2	3	4,5	5
4,5	3	4	5,5	6
4	4,5	5,5	7	7,5
4,5	5	6	7,5	8

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 4,4$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,73}{\sqrt{2}} = 1,93$$

3. ايجاد التوزيع النظري للمعاينة للعينات التي حجمها يساوي 2 في حالة السحب بدون إرجاع

أولا نبحث عن عدد العينات الممكنة التي حجمها يساوي 2 والمسحوبة بدون إرجاع من هذا المجتمع الذي حجمه يساوي 5.

$$\grave{n} = C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5*4*3!}{2*1*3!} = 10 \text{ échantillons}$$

(1 ;2)	(1 ;4)	(1 ;7)	(1 ;8)
	(2 ;4)	(2 ;7)	(2 ;8)
		(4 ;7)	(4 ;8)
			(7 ;8)

التوزيع النظري لمتوسط المعاينة للعينات التي حجمها يساوي 2 في حالة السحب بدون إرجاع

1,5	2,5	4	4,5
	3	4,5	5
		5,5	6
			7,5

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 4{,}4$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{2{,}73}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{5-2}{5-1}} = 1{,}67$$

التمرين 5

لدينا المجتمع الإحصائي غير محدود (غير منته) موزع طبيعياً معالمه كما يلي: $X_i \sim N(\mu=60; \sigma^2=100)$.

الحجم	توزيع معاينة المتوسط $\bar{x}_i$			
n	$\mu_{\bar{x}}$	$\sigma^2_{\bar{x}}$	$\sigma_{\bar{x}}$	$p(\bar{x}_n > 63)$
4	60	25	5	0,2742
8	60	$\frac{100}{8} = 12{,}5$	$\sqrt{\frac{100}{8}} = 3{,}53$	0,1979
16	60	$\frac{100}{16} = 6{,}25$	$\sqrt{\frac{100}{16}} = 2{,}5$	0,1150
32	60	$\frac{100}{32} = 3{,}125$	$\sqrt{\frac{100}{32}} = 1{,}767$	0,0448
64	60	$\frac{100}{64} = 1{,}5625$	$\sqrt{\frac{100}{64}} = 1{,}25$	0,0081
100	60	$\frac{100}{100} = 1$	$\sqrt{\frac{100}{100}} = 1$	0,0013

تبرير النتائج

مهما كان حجم العينة ومهما كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع فإن:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 60$$

مادام أن المجتمع غير محدود فإن السحب تم بالإرجاع أي:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{n}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma}{n}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2}$$

$$n=8 \Rightarrow p(\bar{x}_8>63)=p\left(Z>\frac{\bar{x}_8-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=p\left(Z>\frac{63-60}{3,53}\right)=p(Z>0,849)=0,1979$$

$$n=16 \Rightarrow p(\bar{x}_{16}>63)=p\left(Z>\frac{\bar{x}_{16}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=p\left(Z>\frac{63-60}{2,5}\right)=p(Z>1,2)=0,1150$$

$$n=32 \Rightarrow p(\bar{x}_{32}>63)=p\left(Z>\frac{\bar{x}_{32}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=p\left(Z>\frac{63-60}{1,767}\right)=p(Z>1,69)=0,0448$$

$$n=64 \Rightarrow p(\bar{x}_{64}>63)=p\left(Z>\frac{\bar{x}_{64}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=p\left(Z>\frac{63-60}{1,25}\right)=p(Z>2,4)=0,0081$$

$$n=100 \Rightarrow p(\bar{x}_{100}>63)=p\left(Z>\frac{\bar{x}_{100}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=p\left(Z>\frac{63-60}{1}\right)=p(Z>3)=0,0013$$

الفصـــل الثاني
نظريــة التقديـــر

تمهيد

خلاصـــة الفصـــل

تماريــن

حلول التماريــن

تمهيد

تلعب نظرية التقدير دوراً رئيسياً هاماً في الاقتصاد وفي الإحصاء الاستدلالي، حيث يتم على ضوئها تقدير معالم المجتمع الإحصائي (*Paramètres*) والمعلوم توزيعه الاحتمالي، وذلك عن طريق سحب عينة عشوائية من المجتمع وتستخدم إحصاءاتها (*Statistiques*) في تقدير معالم المجتمع.

1.2. مفهـــــوم التقدير الإحصائي (*Estimation statistique*)

تتم عملية التقدير من خلال اختبار عينة عشوائية من مجتمع ما ومشاهدة مقررات تلك العينة ومن ثم حساب المقاييس المراد إجراؤها وتعميم ذلك على المجتمع. إن أي توزيع احتمالي يحتوى على معالم تحدد شكله. توزيع ذات الحدين يعتمد على p (نسبة النجاح)، n (عدد مرات اجراء التجربة) أما في توزيع يواسون فيعتمد شكله على معلمة λ (معدل النجاحات في فترة زمنية معينة) أما في التوزيع الطبيعي فيعتمد شكل ذلك التوزيع على μ (المتوسط)، σ (الانحراف المعياري)، (التباين σ^2) وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة، وفي هذه الحالة لا بد من تقدير هذه المعالم.

2.2. أنواع التقديرات الإحصائية

هناك طريقتان أساسيتان لتقدير معالم المجتمع المجهولة هما:

1.2.2. التقدير النقطي (*Estimation ponctuelle*)

تستخدم بيانات العينة لتقدير معلمة المجتمع المجهولة بنقطة واحدة فقط، أي بقيمة واحدة فقط.

مثال: نقدر العمر الافتراضي للمصابيح المنتجة في مصنع معين بأن نقول أن العمر الافتراضي للمصباح يُقدر بـــ: 400 ساعة.

- **المقدر غير المنحاز (*Estimateur non biais*)**

نقول عن إحصائية ما بأنها مقدر غير منحاز لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساوياً لمعلمة المجتمع. أي:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

مثال: نقول عن متوسط العينة $\bar{x}$ أنه مقدر غير منحاز لمتوسط المجتمع **μ** لأن:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

- **نظرية**

إذا كان $\bar{x}$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$ مسحوبة من مجتمع إحصائي متوسطه الحسابي μ، فإن:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

حيث:

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}[E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)]$$
$$= \frac{1}{n}[E(x_1) + E(x_2) + \cdots E(x_n)]$$
$$= \frac{1}{n}[\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n]$$
$$= \frac{1}{n}[n\mu]$$
$$= \mu$$

نقول عن الإحصائية S^2 (تباين العينة) في حالة المعاينة بالإرجاع أنها مقدر غير منحاز لـــ σ^2 لأن:

$$E(S^2) = \frac{n}{n-1}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

نقول عن الإحصائية $\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2$

$$E(S^2) = \frac{n}{n-1}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

2.2.2. التقدير بفترة أو مجـــال الثقة: *Estimation par intervalle de confiance*

التقدير بفترة فنحصل من خلاله على مجال (*intervalle*) أو فترة تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة. ونلاحظ هنا أن فترة التقدير (أو تقدير الفترة) تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائياً في كثير من الحالات.

3.2. فتـــرة الثقة لمتوســط المجتمع μ

في هذه الحالة لا نكتفي بتقدير معلمة المجتمع بنقطة فنلجأ باستخدام عينة من المجتمع لحساب مجال نأمل أن تقع فيه معلمة المجتمع بمستوى ثقة محدد مسبقاً يُرمز له بالرمز (α -1) حيث تسمى α مستوى الخطر أو مستوى الخطر أو مستوى ، ويطلق على هذه الفترة فترة الثقة للمعلمة بمستوى ثقة .(1- α)%

وفيما يلي سنوضح كيفية إيجاد فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي في الحالات التالية:

1.3.2. الحالة الأولى: تباين المجتمع: σ^2 معلـــوم

نعلم أنه إذا كان $X_i : \backsim N(\mu, \sigma^2)$ فإن $\bar{x}_i : \backsim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ وكذلك $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \backsim N(0;1)$ فنعرف فترة الثقة %(α -1) أو نقول فترة ثقة عند مستوى خطر α بأنها الفترة التي تحقق ما يلي:

$$p\left(-Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < +Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\right) = 1 - \alpha$$

وبتبسيط فترة الاحتمال نحصل على العلاقة التالية:

$$p\left(\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

وهذه هي فترة الثقة المطلوبة، ولاحظ أن فترة الثقة مركزها $\bar{x}$ متغير عشوائي سيتغير مركز الثقة بتغير العينة وبالتالي تتغير فترة الثقة، ولكن كل الفترات تشترك في أن متوسط العينة يقع داخل كل فترة بنسبة $(1-\alpha)\%$.

تمريـــن 1: أخذت عينة حجمها 49 ومتوسطها 45 من مجتمع إحصائي يتبع توزيعاً طبيعياً تباينه 12,25. أوجد فترة الثقة بنسبة 95 % لمتوسط المجتمع.

الحــل

حجم العينة n =49 وحيث أن 0,95 = α -1 فتكون 0,05 = α ومنه: $\frac{\propto}{2} = 0{,}025$ وبالتالي:

$$Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0{,}05}{2}\right)} = Z_{0{,}475} = \pm 1{,}96$$

وحيث أن $\sigma^2 = 12{,}25$ فيكون الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 3{,}5$، ولاحظ هنا أن تباين المجتمع معلوم لذلك نستخدم التوزيع الطبيعي في ايجاد فترة الثقة المطلوبة عند مستوى خطر 95 % وذلك كما يلي:

$$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\propto$$

$$= \left[45 - 1{,}96.\frac{3{,}5}{\sqrt{49}} \quad ; \quad 45 + 1{,}96.\frac{3{,}5}{\sqrt{49}}\right] = 0{,}95$$

$$= [45 - 0{,}98 \quad ; \quad 45 + 0{,}98]$$

$$= [44{,}02 \quad ; \quad 45{,}98]$$

وهذا يعني أن احتمال وقوع متوسط المجتمع بين القيمتين 44,02 و 45,98 هو 0,95، وتعني كذلك أن هناك 5 حالات من كل 100 حالة ستكون فيها μ خارج فترة الثقة المذكورة.

2.3.2. الحالة الثانية: تباين المجتمع: σ^2 مجهـــول وعينات كبيــرة $(n \geq 30)$

في هذه الحالة يعطى مجال الثقة لمتوسط المجتمع بالعلاقة التالية:

$$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\propto$$

حيث نستخدم الانحراف المعياري للعينة S بدلاً من الانحراف المعياري للمجتمع σ لأنه مجهول.

البرهان

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.S}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

لأنه حسب قانون الأعداد الكبيرة فإن:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \sim 1$$

تمريـــن 2: سحبت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي مجهول التباين بحجم 36 مشاهدة، حيث بلغ متوسطها الحسابي 12 بتباين 16. أوجد فترة الثقة بنسبة 99 % لتقدير متوسط المجتمع μ.

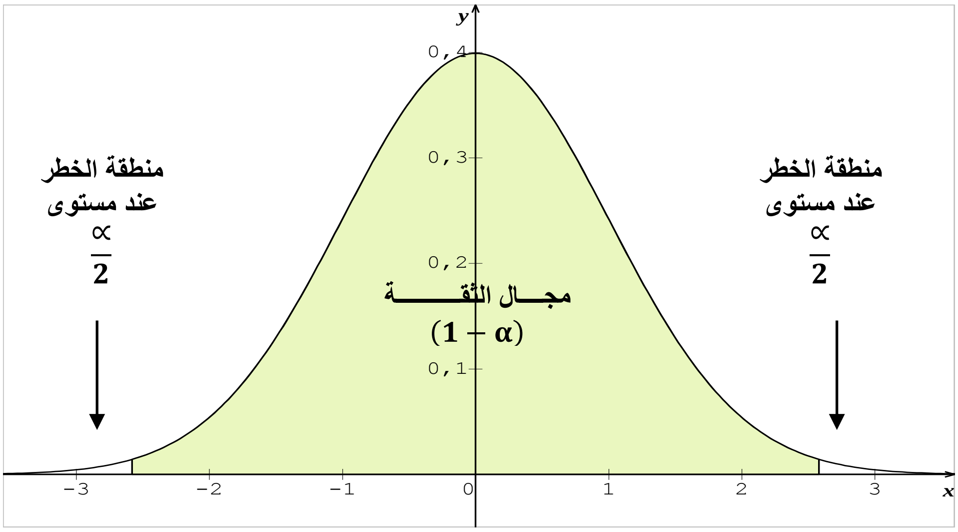
الحل

$$\alpha = 0{,}01 \quad 1-\alpha = 0{,}99 \quad n = 36 \quad S^2 = 16 \quad \bar{x} = 12$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد:

$$Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0{,}01}{2}\right)} = Z_{0{,}495} = \pm 2{,}58$$

الشكل (1.2): المساحة تحت المنحنى المظللة (مجال الثقة) بين القيمتين (Z=-2,58 و Z=+2,58)



المصدر: **من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»**

فتكون فترة الثقة المطلوبة كما يلي:

$$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} . \frac{S}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} . \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\propto$$

$$= \left[12 - 2{,}58 . \frac{4}{\sqrt{36}} \quad ; \quad 12 + 2{,}58 . \frac{4}{\sqrt{36}}\right] = 0{,}99$$

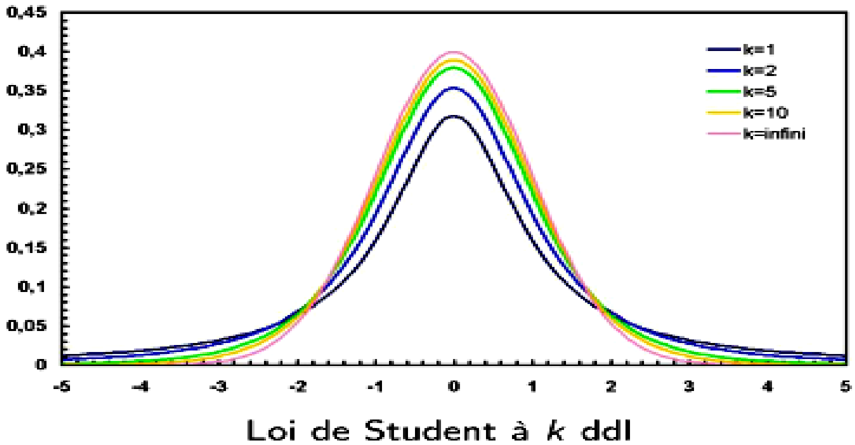
$$= [10{,}28 \quad ; \quad 13{,}72]$$

3.3.2. الحالة الثالثة: تباين المجتمع: σ^2 مجهـــول وعينات صغيـــرة (n < 30)

عندما يكون التوزيع طبيعياً ولكن σ غير معلومة و n < 30 ، فإننا لا نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي لتحديد فترات الثقة لمتوسط المجتمع غير المعلوم، ولكن يمكننا استخدام توزيع ***t***. هذا التوزيع متماثل حول متوسط الصفر ولكنه منبسط عن التوزيع الطبيعي القياسي، ولهذا فإن جزاءاً أكبر من

مساحته تقع عند الأطراف. وبينما يوجد توزيع طبيعي قياسي واحد، فإن هناك توزيعاً t مختلفاً لكل حجم للعينة **n**. ولكن مع تزايد **n** فإن توزيـع t يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي إلى أن تكون $n \geq 30$، وعندئذ يتساويان تقريباً.

الشكل (2.2): التوزيع الاحتمالي لـ Student



Source : CLEMENT Rau., Op. cit., p.54

ويُعطى مجال الثقة لتقدير متوسط المجتمع في هذه الحالة وفق الصيغة التالية:

$$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} - t\left(n-1; \frac{\propto}{2}\right).\frac{S}{\sqrt{n-1}} \qquad ; \qquad \bar{x} + t\left(n-1; \frac{\propto}{2}\right).\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right] = 1-\propto$$

- **البرهان**

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.S}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

في هذه الحالة فإن: $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$ لا يؤول إلى 1 لأن حجم العينة صغير أقل من 30 ولا ينطبق عليها قانون الأعداد الكبيرة.

- **تمريــن 3**

سحبت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع إحصائي فكان متوسطها 8,5 وانحرافها المعياري 1,58. أوجد فترة الثقة عند مستوى خطر $\alpha = 5\%$.

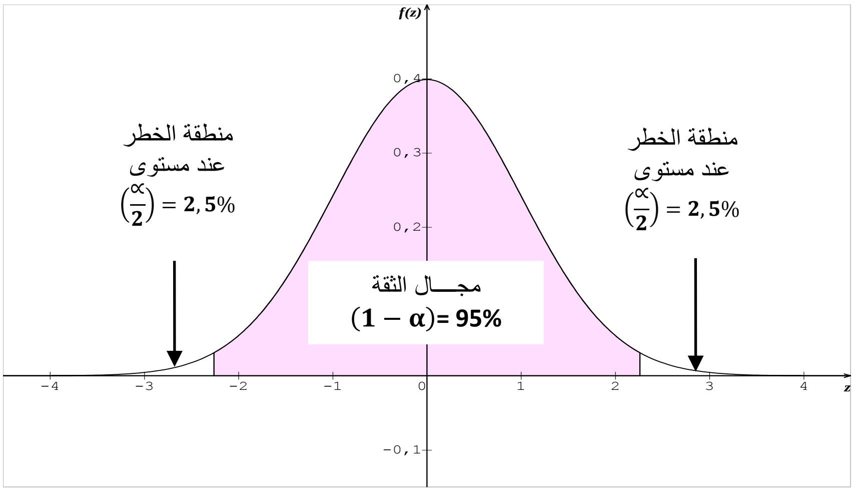
- **الحل**

ما دام أن $30 > n$ والانحراف المعياري للمجتمع مجهول، فإن التوزيع المتبع هو توزيع ستودنت (Student).

من الجدول الإحصائي لتوزيع ستودنت نجد أن:

$$t_{\left(n-1; \frac{\propto}{2}\right)} = t(9; 0{,}025) = \pm 2{,}26$$

الشكل (3.2): المساحة تحت المنحنى المظللة (مجال الثقة) بين القيمتين (Z=-2,58 و Z=+2,58)



المصدر: **من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»**

وتكون فترة الثقة المطلوبة كما يلي:

$$I_{c_\mu} = \left[8{,}5 - 2{,}26.\frac{1{,}58}{\sqrt{10-1}} \quad ; \quad 8{,}5 + 2{,}26.\frac{1{,}58}{\sqrt{10-1}}\right] = 1-\propto$$

$$= [7{,}31 \quad ; \quad 9{,}69]$$

جدول 1.2: ملخص مجالات الثقة لمتوسط المجتمع

حجم العينة	الانحراف المعياري للمجتمع	طبيعة توزيع الاحصاءة $\bar{x}$	مجال الثقة
n < 30	σ connu	$\bar{x} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ou $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \backsim N(0;1)$	$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} \pm Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
	σ inconnu	$\bar{x} \backsim t\left(\mu, \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right)$ ou $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \backsim t_{(n-1)}$	$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} \pm t\left(n\text{-}1; \frac{\propto}{2}\right).\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$
n ≥ 30	σ connu	$\bar{x} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ou $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \backsim N(0;1)$	$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} \pm Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
	σ inconnu	$\bar{x} \backsim N\left(\mu, \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ ou $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \backsim N(0;1)$	$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} \pm Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

المصدر: من إعداد الباحث

4.2. فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقليـــن $(\mu_1 - \mu_2)$

وفيما يلي سنجد فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين مستقلين في حالات مختلفة:

1.4.2. الحالة الأولى: معلوميـــة تباينا المجتمعيـــن

إذا كان $X_1 \backsim N(\mu_1;\ \sigma_1^2)$ و $X_2 \backsim N(\mu_2;\ \sigma_2^2)$، فإن:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \ \backsim N\left(\mu_1 - \mu_2;\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

ومنه:

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \backsim N(0;1)$$

وتكون فترة الثقة (1- α) % كالتالي:

$$-Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} < \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < +Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}$$

حيث بحل المتباينة بالنسبة إلى $\mu_1 - \mu_2$ نجد أن:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- **تمرين 4**

سُحبت عينتان عشوائيتان من مجتمعين طبيعيين مستقلين وكانت النتائج المتحصل عليها كما يلي:

المجتمع 2	المجتمع 1
$= 9n_2$	$= 8\boldsymbol{n_1}$
$= 25{,}11\bar{x}_2$	$=21{,}25\bar{\boldsymbol{x}}_1$
$.\sigma_2^2 = 12$	$\boldsymbol{\sigma_1^2} = 6$

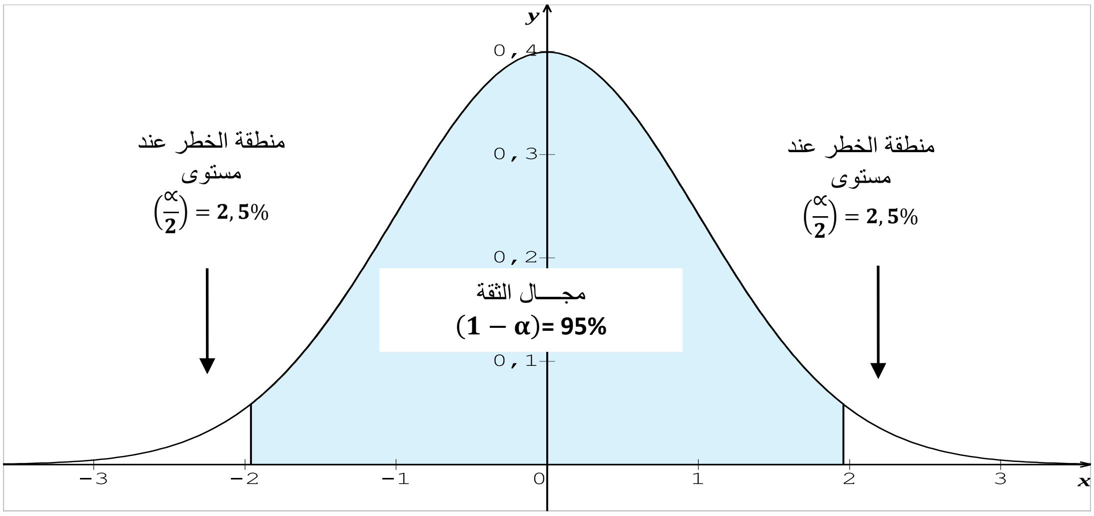
حدد مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى خطر α =5%.

- **الحل**

إيجاد القيمة الجدولية $Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}$

$$Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0{,}05}{2}\right)} = Z_{0{,}475} = \pm 1{,}96$$

الشكل (3.2): المساحة تحت المنحنى المظللة (مجال الثقة) بين القيمتين (Z=-1,96 و Z=+1,96)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

$$I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad ; \quad (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

$$= \left[(21,25-25,11)-1,96.\sqrt{\frac{6}{8}+\frac{12}{9}} \quad ; \quad (21,25-25,11)+1,96.\sqrt{\frac{6}{8}+\frac{12}{9}}\right]$$

$$= [-6,99 \quad ; \quad -1,03]$$

2.4.2. الحالة الثانية: عدم معلوميـــة تباينا المجتمعيـن والعينتان مستقلتــان وكبيـــرة الحجم ($n_1, n_2 \geq 30$)

في هذه الحالة نقدر تباين كل مجتمع بتباين عينة عشوائية تُسحب منه ونستبدل تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 في فترة الثقة للحالة السابقة فتصبح فترة الثقة لهذه الحالة كما يلي:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

تمريـن 5

لمعرفة متوسط الفرق بين نقاط مقياس الإحصاء الاستدلالي لطلبة قسم علوم التسيير و طلبة قسم العلوم الاقتصادية، قام الأستاذ بسحب عينة عشوائية حجمها 75 طالباً من قسم علوم التسيير وعينة أخرى من قسم العلوم الاقتصادية حجمها 50 طالباً، وأجروا الامتحان وخلص إلى النتائج الممثلة كما يلي:

قسم علوم التسيير	قسم العلوم الاقتصادية
$\boldsymbol{n_1} = 75$	$n_2 = 50$

$=72\bar{x}_1$	$=66\bar{x}_2$
$S_1^2=64$	$S_2^2=36$.

أوجد فترة الثقة للفرق بين متوسطي نقاط الطلبة لكلا القسمين عند مستوى خطر 10 %.

الحل

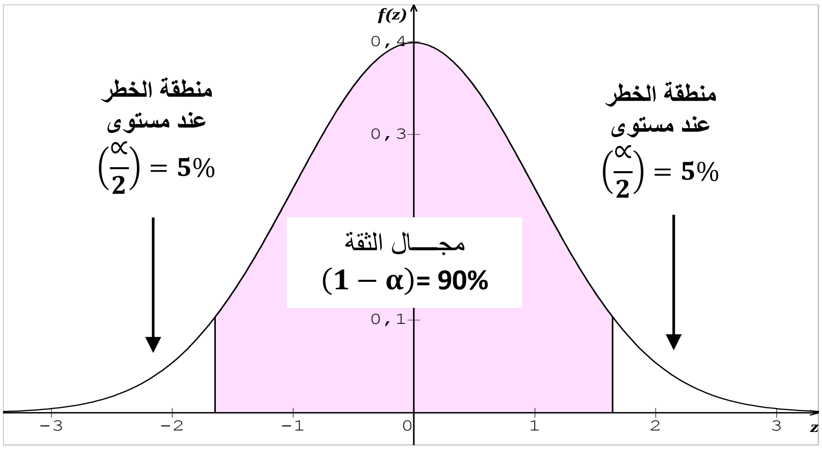
بما أن تباينا المجتمعين مجهولين وحجم العينتان أقل من 30 ومستقلتان، فإن فترة الثقة للفرق بين متوسطي نقاط مقياس الإحصاء الاستدلالي لطلبة القسمين يعطى بالعلاقة التالية:

$$I_{c_{\mu_1-\mu_2}}=\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\quad;\quad(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

حجم العينتين أكبر من 30 إذن المجتمعين يتبعان توزيع طبيعي وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية Z حيث:

$$Z_{th}=Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}=Z_{\left(\frac{1-0,1}{2}\right)}=Z_{0,450}=\pm1,65$$

الشكل (4.2): المساحة تحت المنحنى المظللة (مجال الثقة) بين القيمتين (Z=-1,65 و Z=+1,65)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

وبما أن تباينا المجتمعين غير معلومين فيتم استبدالهما بتباينا العينتين المسحوبتين من المجتمعين كما يلي:

$$I_{c_{\mu_1-\mu_2}}=\left[(72-66)-1,65.\sqrt{\frac{64}{75}+\frac{36}{50}}\quad;\quad(72-66)+1,65.\sqrt{\frac{64}{75}+\frac{36}{50}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_{\mu_1-\mu_2}}=[3,93037\quad;\quad8,06963]$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 90 % بأن الفرق بين متوسط النقاط لمقياس الإحصاء الاستدلالي لطلبة القسمين سيقع بين القيمتين 3,93 و 8,06963.

3.4.2. الحالة الثالثة: عدم معلومية تباينا المجتمعين والعينتان مستقلتان وكبيرة الحجم ($n_1, n_2 < 30$)

تتفرع عن هذه الحالة حالتين: حالة تباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين وحالة تباينا المجتمعين مجهولين وغير متساويين كما يلي:

- **تباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين**

في هذه الحالة تُعطى فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين بالعلاقة التالية:

$$I_{c_{\mu_1-\mu_2}}=\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm t\left(dL;\frac{\alpha}{2}\right).\sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2+(n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right]$$

حيث مادام أن $n_1, n_2 < 30$ وتباينا المجتمعين مجهولين، فإن المجتمعان يتبعان توزيع ستودنت عند درجة حرية dL، حيث: $dL = n_1 + n_2 - 2$.

- **تمريـن 6**

نفترض أن كلاً من المتغيرتين العشوائيتين X_1 و X_2 لمجتمعين مختلفين بتباين متساوي ومتوسطات مختلفة. قمنا بسحب عينتين عشوائيتين مستقلتين من المجتمعين محل الدراسة، فكانت النتائج التالية:

Population 1	Population 2
$n_1 = 12$	$n_2 = 8$
$\bar{x}_1 = 25$	$\bar{x}_2 = 35$
$S_1^2 = 16$	$S_2^2 = 14$

✓ قدر نقطياً الفرق بين متوسطي المجتمعين: $(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)$

✓ أعط مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $\mu_1 - \mu_2$ عند مستوى خطر 5%.

- **الحل**

✓ تحديد التقدير النقطي للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)$

$$(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2) = \bar{x}-\bar{x} = 25-35 = -10$$

✓ مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)$ عند مستوى خطر $\alpha = 5\%$.

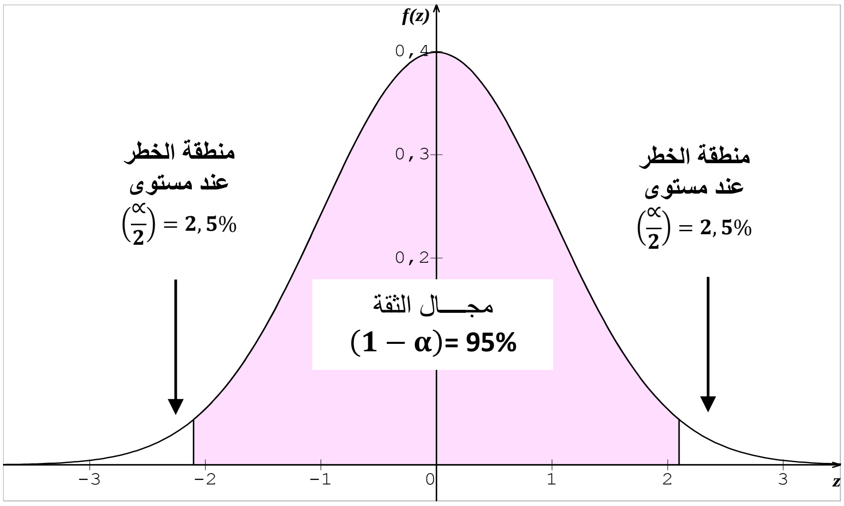
لدينا وتباينا المجتمعين مجهولين، فإن المجتمعان يتبعان توزيع ستودنت عند درجة حرية dl،

حيث: $dl = n_1 + n_2 - 2$.

إذن نحسب القيمة النظرية أو القيمة الجدولية التي تستخرج من الجدول الإحصائي لستودنت.:

$$t_{th} = t\left(dl; \frac{\propto}{2}\right) = t_{\left(12+8-2; \frac{0,05}{2}\right)} = t_{(18;0,025)} = \pm 2,101$$

الشكل (5.2): المساحة تحت المنحنى المظللة (مجال الثقة) بين القيمتين (t=-2,101 و t=+2,101)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

$$I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t(dl; \frac{\propto}{2}).\sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2+(n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[-10 \pm 2,101 * \sqrt{\frac{(12-1).16+(8-1).14}{12+8-2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = [-13,74 \quad ; \qquad -6,26]$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 95 % بأن الفرق بين متوسطي المجتمعين سيقع بين القيمتين 13,74- و -6,26.

- **تباينـــا المجتمعيـــن مجهوليـــن وغير متساوييـــن**

تُعطى فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين بالعلاقة الرياضية التالية:

$$I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t(V; \frac{\propto}{2}).\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

حيث: V هي درجات الحرية المحسوبة لتوزيع t في حالة عدم تساوي تباينا المجتمعين ويُعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$V = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left({S_1^2}/{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left({S_2^2}/{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

- **تمريـــن 7**

اختبر أحد المصانع عينتين مختلفتين من خطي إنتاج مختلفين فتحصل على النتائج التالية:

Usine 1	Usine 2
$n_1 = 10$	$n_2 = 15$
$\bar{x}_1 = 90$	$\bar{x}_2 = 87$
$S_1 = 5$	$S_2 = 4$

- ✓ أعط تقديـــــراً نقطياً للفرق بين متوسطي المصنعين؟
- ✓ باستخدام درجة ثقة 98 %، أحسب تقدير فترة الثقة للفرق بين متوسطي خطي الإنتاج إذا كان:

تباينا المصنعين غير متساويين les variances sont différentes

- **الحل**

- ✓ تحديد التقدير النقطي للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)$

$$(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) = \bar{x} - \bar{x} = 0{,}8 - 1{,}0 = -0{,}2$$

- ✓ مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)$ عند مستوى خطر α = 2%.

لدينا وتباينا المجتمعين مجهولين، فإن المجتمعان يتبعان توزيع ستودنت عند درجة حرية **V** حيث:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left({S_1^2}/{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left({S_2^2}/{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{5^2}{10} + \frac{4^2}{15}\right)^2}{\frac{\left({5^2}/{10}\right)^2}{10 - 1} + \frac{\left({4^2}/{15}\right)^2}{15 - 1}} = 16{,}40$$

$$\Rightarrow t\left(V, \frac{\propto}{2}\right) = t(16{,}40; 0{,}01)$$

لكن درجة الحرية V = 16,40 غير موجودة في الجدول الإحصائي لستودنت لكنها محصورة بين الدرجتين V =16 و V=17 حيث:

$$\begin{cases} t(16\,; 0{,}01) = \pm 2{,}583 \\ t(17\,; 0{,}01) = \pm 2{,}567 \end{cases}$$

إذن: $t(16{,}40\ ; 0{,}01) = \frac{2{,}583 + 2{,}567}{2} = \pm 2{,}575$

ويعطى مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين بالعلاقة التالية:

$$I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t(V; \frac{\propto}{2}).\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[(90-87) \pm 2{,}575.\sqrt{\frac{5^2}{10}+\frac{4^2}{15}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = [-1{,}86 \quad ; \quad +7{,}86 \quad]$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 98 % بأن الفرق بين متوسطي المصنعين سيقع بين القيمتين 1,86- و 7,86.

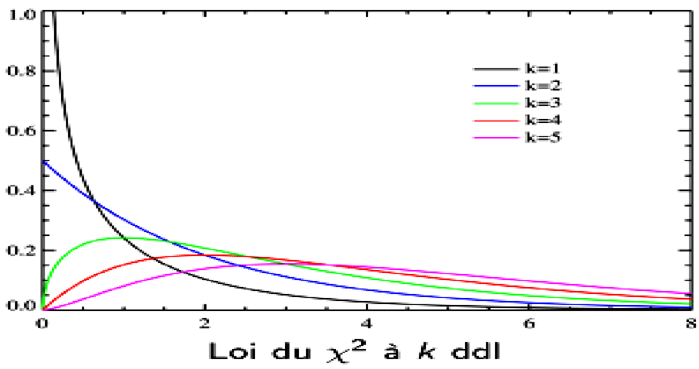
5.2. فتـــرة الثقة تبايـــن المجتمـــع

إذا تم سحب عينات عشوائية حجما n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 وتم حساب تباين توزيع المعاينة S^2 لكل عينة، فإنه يتم الحصول على قيم للإحصاءة S^2، ولندرة استخدام توزيع المعاينة لـــ S^2 في الواقع وبدلاً من ذلك سوف نستخدم توزيع المتغير العشوائي χ^2، ويطلق عليه الكاي مربع، ويُمكن حساب قيمته من كل عينة بالمعادلة:

$$\chi^2 = \frac{(n-1).S^2}{\sigma^2}$$

ويطلق على توزيع هذا المتغير توزيع الكاي مربع بدرجة حرية (n-1)، حيث يرمز لها بالرمز V، والشكل الموالي يوضح منحنى توزيع الكاي مربع:

الشكل (6.2): منحنى χ^2



Source : CLEMENT Rau., Op. cit., p.58

تُعطى فترة الثقة لتقدير تباين المجتمع بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\frac{(n-1).S^2}{\chi^2_{\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1).S^2}{\chi^2_{\left(n-1;1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

أو بعبارة أخرى:

$$I_{C_{\sigma^2}} = \left[\frac{(n-1).S^2}{\chi^2_{\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{(n-1).S^2}{\chi^2_{\left(n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$$

- **تمريـــن 8**

أوجد فترة الثقة لتباين مجتمع سُحبت منه عينة حجمها 6 وتباينها 11,8عند مستوى خطر $\alpha = 5\%$.

- **الحـل**

أولاً نقوم باستخراج القيم الجدولية من الجدول الإحصائي لتوزيع χ^2

$$\chi^2_{\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(5;\,0{,}025)} = 12{,}83$$

$$\chi^2_{\left(n-1;1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(5;0{,}975)} = 0{,}83$$

$$\Rightarrow I_{C_{\sigma^2}} = \left[\frac{(6-1).\,11{,}8}{12{,}83} \quad ; \quad \frac{(6-1).\,11{,}8}{0{,}83}\right]$$

$$\Rightarrow I_{C_{\sigma^2}} = [4{,}60 \quad ; \quad 71{,}08\ ]$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 95 % بأن تباين المجتمع سيقع بين القيمتين 4,60 و 71,08.

6.2. فتـــرة الثقـــة للنسبـــة بين تباينا المجتمعيـــن $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ عينة عشوائية من $N(\mu_1, \sigma_1^2)$، وكانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ عينة عشوائية من $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

مستقل عن المجتمع الأول، فإن فترة الثقة للنسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ هي:

$$I_{c_{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}} = \left(\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\left[n_1-1\,;\,n_2-1;\ \frac{\alpha}{2}\right]}} \quad ; \quad \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}\cdot F_{\left[n_2-1;\ n_1-1;\ \frac{\alpha}{2}\right]}\right)$$

تمريـــن 9

في دراسة لأعمار المرضى الذين يعانون من الجلطة الدموية سحبت عينة من المرضى من الجنسين الذكور و الإناث فكانت النتائج كما يلي:

X_i : variable aléatoire représente le sexe « ***Femmes*** » ;

X_i	50	55	52	65	35	40	55	60	70	68	72	75	48	52	60	70

$\mathbf{Y_i}$: variable aléatoire représente le sexe : « ***Hommes*** » ;

Y_i	40	45	40	55	42	56	58	60	60	62	35	40	50	55

- أوجد فترة الثقة بمقدار 90% للنسبة بين تباين الذكور و الإناث.

الحل

تحديد فترة الثقة بمقدار 90 % للنسبة بين تباين الذكور وتباين الإناث

✓ حساب تباين العينة لجنس الإناث

$$S_1^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n_1} = \frac{\sum(x_i)^2}{n_1} - \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n_1} = \frac{927}{16} = 57{,}94$$

$$S_1^2 = 135{,}796$$

✓ حساب تباين العينة لجنس الذكور

$$S_2^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n_2} = \frac{\sum(y_i)^2}{n_2} - \bar{y}^2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n_2} = \frac{698}{14} = 49{,}86$$

$$S_2^2 = 85{,}209$$

يعطى مجال الثقة لنسبة تباين مجتمع الإناث إلى مجتمع الذكور بالعلاقة الرياضية التالية:

$$I_{c_{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}} = \left(\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\left[n_1 - 1\,;\; n_2 - 1;\;\; \frac{\alpha}{2}\right]}} ;\;\; \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \cdot F_{\left[n_2 - 1;\;\; n_1 - 1;\;\; \frac{\alpha}{2}\right]} \right)$$

نلاحظ ان درجة الحرية 15 لا توجد في الجدول الإحصائي لفيشر فهي محصورة بين الدرجتين 14 و 16 إذن:

$$\begin{cases} F_{(15;13;0,05)} = \dfrac{2{,}55 + 2{,}51}{2} = +2{,}53 \\ F_{(13;15;0,05)} = \dfrac{2{,}48 + 2{,}43}{2} = +2{,}455 \end{cases}$$

$$\hat{S}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} S_1^2 = \frac{16}{16 - 1} . (135{,}796) = 144{,}85$$

$$\hat{S}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} S_2^2 = \frac{14}{14 - 1} . (85{,}209) = 91{,}76$$

$$I_{c_{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}} = \left(\frac{144,85}{91,76} \cdot \frac{1}{2,53} ; \ \frac{144,85}{91,76} \cdot 2,45\right)$$

$$\Rightarrow I_{c_{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}} = (0,624 \quad ; \ 3,867)$$

نحن واثقون بنسبة 90 % بأن نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني سيقع بين القيمتين 0,624 و 3,867.

7.2. فتـــرة الثقة لنسبـــة المجتمـــع P

إن تقدير النسبة بفترة هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع **p** ثم إيجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لإيجاد فترة ثقة ذات معامل ثقة معينة تحصر نسبة النجاح **p** بداخلها والنظرية التالية توضح ذلك.

إذا كان $\mathbf{\bar{p}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n وكان n كبيراً، فإن فترة الثقة التقريبية لنسبة النجاح P هي:

$$I_{c_P} = \left(\bar{p} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad ; \quad \bar{p} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

هذا إذا كانت المعاينة تتم مع مجتمع غير منته (غير محدود) أي في حالة السحب بالإرجاع. أما إذا كانت المعاينة تتم من مجتمع منته (محدود) أي أن السحب بدون إرجاع فإن مجال الثقة لنسبة المجتمع تعطى وفق العلاقة التالية:

$$I_{c_P} = \left[\left(\bar{p} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad ; \quad \bar{p} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)\right]$$

- **تمريـن 10**

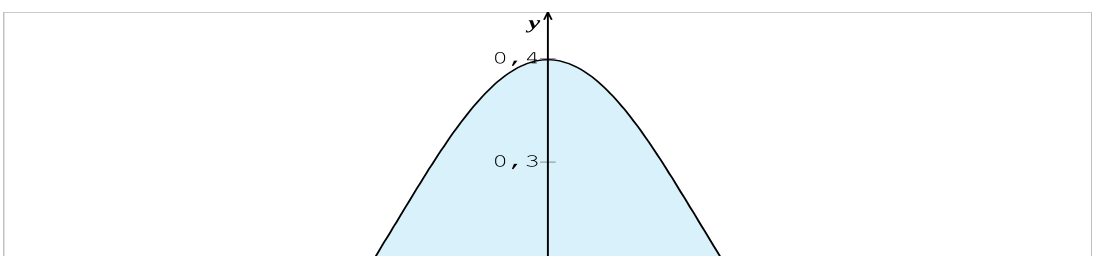
لإيجاد فترة 95% ثقة لنسبة عدد طلاب أحد المدارس الأساسية الذين لديهم ضعف في البصر، أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد أن من لديهم ضعف في البصر كان 15 طالب.

أوجد فترة الثقة المطلوبة؟

- **الحل**

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = 47.5\%$$

الشكل (7.2): فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (Z = - 1,96 و Z = + 1,96)



منطقة الخطر عند مستوى $\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2,5\%$

مجـــال الثقة $(1-\alpha)= 95\%$

منطقة الخطر عند مستوى $\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2,5\%$

<u>المصدر</u>: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

وأيضاً يجب إيجاد $\overline{P}$: (التقدير النقطي لنسبة النجاح)

$$\overline{p} = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{15}{100} = 0.15$$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$I_{c_P} = \left[0.15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}} \quad ; \quad 0.15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}}\right]$$

$$= [0.08 \quad ; \quad 0.22]$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 95 % بأن نسبة الطلبة الذين لديهم ضعف البصر في المدرسة سيقع بين القيمتين 0,08 و 0,22.

- **تمريــن 11**

مؤسسة متكونة من 1200 عامل. أخذنا عينة عشوائية متكونة من 100 عامل. أراد 70 عامل تسيير تمويل تقاعدهم بأنفسهم بدلاً من تسجيلهم ضمن مخطط التقاعد المضمون من طرف شركة التأمينات.

- حدد مجال الثقة عند مستوى خطر 5% بالنسبة لنسب العمال الذين اختاروا تسيير أموال تقاعدهم بأنفسهم.

- **الحل**

$$N = 1200, \quad n = 100, \quad x = 70, \quad , \alpha = 5\%$$

نسبة العمال الذين اختاروا تسيير أموال تقاعدهم بأنفسهم في العينة المسحوبة هو:

$$\overline{p} = \frac{x}{n} = \frac{70}{100} = 0,70$$

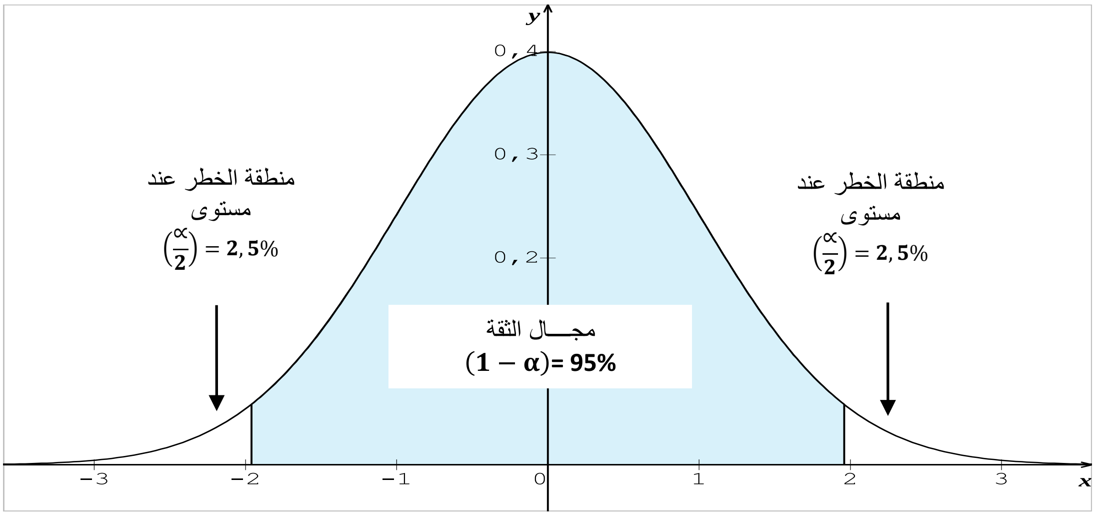
نسبة العمال الذين لم يختاروا تسيير أموال تقاعدهم بأنفسهم في العينة المسحوبة هو:

$$1 - \overline{P} = 1 - 0,70 = 0,30$$

لدينا: n = 100 أكبر من 30 إذن التوزيع المتبع هو التوزيع الطبيعي

$$Z_{théorique} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,05}{2}\right)} = Z_{0,475} = \pm 1,96$$

الشكل (8.2): فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (Z = - 1,96 و Z = + 1,96)



<u>المصدر</u>: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

كذلك لدينا:

$$5\%\ N = 0,05\ (1200) = 60$$

$$\Longrightarrow n=100 > 5\%N.$$

أي أن المجتمع محدود أو منته (السحب تم بدون إرجاع) إذن يمكن تطبيق القاعدة التالية:

$$I_{cp} = \left[\left(\bar{P} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right.;\quad \left.\bar{P} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow I_{cp} = \left[0,7-1,96.\sqrt{\frac{0,7*0.3}{100}}\sqrt{\frac{1200-100}{1200-1}}\ ;\ 0,7+1,96.\sqrt{\frac{0,7*0,3}{100}}\sqrt{\frac{1200-100}{1200-1}}\right]$$

$$\Longrightarrow I_{cp} = [0,696\ ;\ 0,704]$$

أي اننا واثقون بنسبة 95 % بأن نسبة العمال الذين اختاروا تسيير تقاعدهم بأنفسهم سيقع بين القيمتين 0,696 و 0,704.

8.2. فتـــرة الثقـــة للفرق بين نسبتي مجتمعيـــــن $(p_1 - p_2)$

إذا كانت $x_1 \ ,x_2 \ , \dots \ x_{n_1}$ عينة عشوائية من مجتمع برنوللي $B(1 . p_1)$. وكانت $y_1 \ ,y_2 \ , \dots \ y_{n_2}$ عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع برنوللي $B(1 . p_2)$ ، فإن فترة الثقة للفرق بين النسبتين $(p_1 - p_2)$ هي:

$$I_{c_{(p_1-p_2)}} = \left[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} \sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}} \quad ; \quad (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} \sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}} \right]$$

تمريـــن 12

أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالبة من المدرسة (A)، ووجد أن 27 طالبة لديهن تسوس في الأسنان، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 80 من المدرسة (B) ووجد أن 12 طالبة لديهن تسوس في الأسنان. أجد فترة 95% ثقة للفرق بين $(p_2 \ ,p_1)$؟

الحل

$$(p_1 \ ,p_2) \quad 1 - \alpha \ = \ 95\% \ \rightarrow \ 1 - \alpha/2 \ = \ 97.5\%$$

$$\bar{p}_1 = \frac{27}{100} = \ 0.27 \qquad\qquad \bar{p}_2 = \frac{12}{80} = \ 0.15$$

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = 0.27 - 0.15 = 0.12$$

لدينا $n_1 \ , n_2 > 30$ إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع طبيعي، أي نبحث عن القيمة الجدولية Z حيث:

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,05}{2}\right)} = Z_{0,475} = \pm 1,96$$

حسب النظرية السابقة نجد أن:

$$I_{c_{(P_1-P_2)}} = \left[(0,27 - \ 0,15) - \ 1,96 \sqrt{\frac{0,27(1-0,27)}{100} + \frac{0,15(1-0,15)}{80}} \quad ; \quad (0,27 - 0,15) \right.$$

$$\left. + \ 1,96 \sqrt{\frac{0,27(1-0,27)}{100} + \frac{0,15(1-0,15)}{80}} \right]$$

$$\Rightarrow I_{c_{(P_1-P_2)}} = [0,003 \qquad ; \qquad 0,237]$$

جدول 2.2: ملخص مجالات الثقة للمتوسط، الفرق بين متوسطي مجتمعين، نسبة المجتمع، الفرق بين نسبتي مجتمعين، تباين المجتمع ونسبة تباينا مجتمعين والتوزيعات الاحتمالية لها.

المعلمة المقدرة	المجتمع	التوزيع الاحتمالي	حدود مجال الثقة
متوسط المجتمع (μ)	$n\geq30$، σ معلوم، والمجتمع غير منته	$\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{x}\pm Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	$n\geq30$، σ معلوم، والمجتمع منته	$\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$	$\bar{x}\pm Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
	$n\geq30$، σ مجهول، والمجتمع غير منته	$\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{x}\pm Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$
	$n\geq30$، σ مجهول، والمجتمع منته	$\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$	$\bar{x}\pm Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
	$n<30$، σ معلوم، والمجتمع غير منته	$\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{x}\pm Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	$n<30$، σ معلوم، والمجتمع منته	$\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$	$\bar{x}\pm Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
	$n<30$، σ مجهول، والمجتمع غير منته	$\bar{x}\sim t\left(n-1,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{x}\pm t_{\left(n-1,\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$
	$n<30$، σ مجهول، والمجتمع منته	$\bar{x}\sim t\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$	$\bar{x}\pm t_{\left(n-1,\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
الفرق بين متوسطي مجتمعين	تباينا المجتمعين معلومين وحجم العينات كبير	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\sim\left(\mu_1-\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	تباينا المجتمعين مجهولين وحجم العينات كبير	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\sim\left(\mu_1-\mu_1,\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)$	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$

	تباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين وحجم العينات صغير	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \sim \left(\mu_1-\mu_1, S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\right)$	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t(dL;\frac{\propto}{2}).\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$
	تباينا المجتمعين مجهولين وغير متساويين وحجم العينات صغير	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \sim \left(\mu_1-\mu_1, \frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)$	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t(V;\frac{\propto}{2}).\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$
النسبة في المجتمع (P)	المجتمع غير منته	$\bar{P} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)$	$\bar{p} \pm Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$
	المجتمع منته	$\bar{P} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$	$\bar{p} \pm Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
الفرق بين نسبتي مجتمعين.	عينات كبيرة	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \sim \left(p_1 - p_2; \sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}\right)$	$(\bar{p}_1-\bar{p}_2) \pm Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$
تباين المجتمع (σ^2)	مجتمع طبيعي بمتوسط غير معلوم	$\frac{(n-1).S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$	$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1).S^2}{\chi^2_{\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)}} ; \frac{(n-1).S^2}{\chi^2_{\left(n-1;1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$
نسبة تباينا مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	عينتين عشوائيتين من مجتمعين طبيعيين	$\frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \sim F(d_1, d_2)$	$\left[\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}.\frac{1}{F\left[d_1, d_2, \frac{\alpha}{2}\right]} ; \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}.F\left[d_2, d_1, \frac{\alpha}{2}\right]\right]$

المصدر: من إعداد الباحث

خلاصـــة الفصل

بعد الإشارة إلى تقدير معلمة أو معالم مجتمع معين باستخدام بيانات عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع، سواءً أكان التقدير بنقطة أو التقدير بمجال الثقة، حيث بينا كيفية تقدير معالم المجتمع المجهولة انطلاقاً من إحصائيات العينة المعلومة (أي انطلاقاً من الجزء المعلوم يُمكن معرفة الكل المجهول).

لكن إذا كانت معالم المجتمع معلومة ونود التأكد من صحتها، ففي هذه الحالة فلا نقوم بتقدير شيء معلوم وإنما الشيء المعلوم يتم اختبار صحته وهو ما يُعرف باختبار الفروض الإحصائية.

في الفصل الموالي سنشير إلى كيفية اختبار صحة أو عدم صحة فرضية أو فرضيات معينة تتعلق بهذه المعالم، وذلك بالاستناد إلى بيانات العينة العشوائية.

تماريـــن إضافيـــة

التمرين 1

لتقدير متوسط مستوى المياه في سد معين، أخذت على فترات (عشوائياً) القياسات التالية:

x_i	4,25	4,36	3,99	4,42	4,63

- قدر نقطياً مستوى المياه في السد؛
- أعط تقديراً نقطياً لتباين مستوى المياه في السد.

التمرين 2

بفرض أن أطوال 100 طالب ذكر في جامعة ما تمثل عينة عشوائية لأطوال الـــ 1546 طالباً ذكراً في تلك الجامعة.

الفئـــات (الطول)	التكرارات المطلقـــة
$[60-62[$	5
$[63-65[$	18
$[66-68[$	42
$[69-71[$	27
$[72-74[$	8

أوجد التقديرات النقطية لكل من متوسط وتباين المجتمع.

التمرين 3 (إمتحان السنة الجامعية 2015/2014)

على جزء من الطريق حددت سرعة السيارات بـــ 90 كلم / سا، نقوم بمراقبة السرعة بجهاز قياس عالي الدقة. نقيس السرعة بـــ (كلم/سا) لعينة عشوائية متكونة من 100 سيارة مسحوبة بالإرجاع فتحصلنا على النتائج المدونة في الجدول التالي:

Vitesse (km/h)	$[75-80[$	$[80-85[$	$[85-90[$	$[90-95[$	$[95-100[$	$[100\text{-}105[$	$[105-110[$
effectif	5	10	20	36	15	8	6

- أحسب كل من المتوسط الحسابي $(\bar{x})$ والانحراف المعياري S لهذه العينة؛
- انطلاقاً من النتائج المتحصل عليها من هذه العينة، أقترح تقدير نقطي للمتوسط μ والانحراف المعياري σ للسرعة لمجتمع مشكل من 2500 سيارة؛
- حدد، مجال الثقة لسرعة المتوسط للمجتمع عند مستوى ثقة 99 %؛
- حدد فترة الثقة للانحراف المعياري للمجتمع عند مستوى خطر 5 %.

التمرين 4 (إمتحان السنة الجامعية 2015/2014)

بائع البصريات (**Opticien**) مهتم ببيع الأجهزة الفوتوغرافية ذات الضبط التلقائي للصورة مع التكبير (**Autofocus avec Zoom**)، يريد تقدير مجال الثقة لنسبة المشترين لهذه الأجهزة (P) من طرف زبائنه. في عينة متكونة من 100 زبون سُحبت بالإرجاع، 60 منهم يشترون مثل هذه الأجهزة.

- أعط تقديراً نقطياً للنسبة P المقدمة من طرف هذه العينة؛
- أعط التقدير بواسطة مجال الثقة للنسبة P عند مستوى ثقة 95 %؛
- حدد حجم العينة n، بحيث يكون n أكبر من 30، لعينة من الزبائن حتى يكون التقدير النقطي للنسبة P المحسوب آنفاً محصورة في مجال الثقة للنسبة P المقدر بــ [0,557 ; 0,643] عند مستوى ثقة 90 %.

تمرين 5

ندرس نشاط الانزيما في الدم (*Enzyme sérique*) بخطر مختلف العوامل في جسم المرأة، النتائج معبر عنها بوحدة القياس الدولية (*Litre de sérum*). عند مجموعتين من النساء (الحوامل وغير الحوامل) (*Enceintes et non enceintes*)، تحصلنا على النتائج المبينة في الجدول:

Non enceintes (x_i)	1,5	1,6	1,4	2,9	2,2	1,8	2,7	1,9	2,2	2,8	2,1	1,8	3,7	1,8	2,1
Enceintes (y_i)	4,2	5,5	4,6	5,4	3,9	5,4	2,7	3,9	4,1	4,1	4,6	3,9	3,5	---	---

Indications numériques : $\sum x_i = 32{,}5$; $\sum X_i^2 = 75{,}83$; $\sum y_i = 55{,}8$; $\sum y_i^2 = 247{,}32$

- قدر نقطياً معالم المجتمع؛
- قدر نقطياً الفرق بين متوسطي المجموعتين؛
- حدد مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجموعتين عند مستوى خطر 5 %.

تمرين 6

أراد أحد الباحثين تقدير الفرق بين متوسطي الاستهلاك الأسبوعي للحليب في بلدين شقيقين، الجزائر والمغرب. أخذ عينة عشوائية من كل بلد (السحب بالإرجاع)، نرمز بــ: x_i للمتغير العشوائي للعينة المسحوبة من الجزائر، و y_i للعينة المسحوبة من المغرب، فخلص إلى النتائج التالية:

$$\sum_{i=1}^{n=25} x_i+\sum_{i=1}^{n=20} y_i=450;\quad \sum_{i=1}^{n=25} x_i-\sum_{i=1}^{n=20} y_i=-60;\quad \sum_{i=1}^{n=25} x_i^2=1600;\quad \sum_{i=1}^{n=20} y_i^2=3360$$

1. أعط تقديراً نقطياً للفرق بين متوسطي الاستهلاك الأسبوعي للحليب للبلدين؛
2. قدم فترة الثقة لتقدير الفرق بين متوسطي الاستهلاك الأسبوعي للحليب لكلا البلدين عند مستوى خطر 2 % في حالة تساوي تباينا المجتمعين.

تمرين 7 (امتحان السنة الجامعية 2013-2014)

من بين المؤسسات العاملة في قطاع الحرف والصناعة التقليدية وعددها 194 مؤسسة، تم سحب عينة عشوائية بدون إرجاع من 40 مؤسسة فوجد أن عدد العمال في هذه المؤسسات كما يلي:

91	168	171	53	114	37	126	12	71	95
33	43	158	137	2	115	99	190	32	140
81	147	68	78	11	86	127	64	57	194
131	141	93	25	105	26	79	23	69	101

$$\sum_{i=1}^{n=40} x_i = 3593 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n=40} x_i^2 = 425596$$

1. قدر نقطياً متوسط عدد العمال للمؤسسة العاملة في القطاع؛
2. قدم فترة الثقة لمتوسط عدد العمال للمؤسسة العاملة في القطاع عند مستوى ثقة 90 %؛
3. أعط مجال الثقة لتقدير تباين المؤسسات العاملة في القطاع عند مستوى خطر 2 %؛
4. تقرر منح إعفاء ضريبي (*Exonération fiscale*) لمؤسسات القطاع التي تشغل 135 عاملاً أو أكثر، أعط تقديراً بمستوى خطر 5 % لنسبة مؤسسات القطاع المستفيدة من الإعفاء.

تمرين 8

عينة من المؤسسات لقطاع معين أعطت سلسلة من النتائج الإحصائية التالية:

Chiffre d'affaires (MDA)	[0 -2[	[2 -3[	[3 -4[	[4 -5[	[5 ;7[
Effectifs	6	12	17	10	5

- أعط تقدير نقطي لرقم الأعمال المتوسط والانحراف المعياري لرقم الأعمال لجميع مؤسسات القطاع.
- أعط تقديراً لرقم الأعمال بواسطة مجال الثقة عند مستوى ثقة 95 %.
- أعط تقديراً نقطياً لنسبة المؤسسات التي تجاوز رقم أعمالها 4,5 مليون دج.

- أعط تقديراً لهذه النسبة بواسطة مجال الثقة عند مستوى خطر 1 %.

تمرين 9 (امتحان السنة الجامعية 2015-2016)

قام الطاقم الطبي لشركة عملاقة ببعض الإحصائيات حول معدل الكوليستيرول (*Taux de cholestérol*) في مستخدمي الشركة (*Personnels de la société*)، اختاروا عشوائياً 100 عامل وأجروا عليهم الفحوصات فخلصوا إلى النتائج المبينة في الجدول أدناه:

مركز الفئة (x_i)	120	160	200	240	280	320	$\sum$
f_i	9	22	25	21	16	7	**100**

- قدر نقطياً المتوسط والانحراف المعياري لمعدل الكوليستيرول في كل الشركة؛
- حدد مجال الثقة للمتوسط عند مستوى خطر 5 %؛
- حدد الحجم الأدنى للعينة حتى تكون سعة مجال الثقة يساوي 30 عند مستوى خطر يساوي 5 %.

تمرين 10 (امتحان السنة الجامعية 2016-2017)

يستخدم مخبر معين جهاز قياس بصري مخصص لقياس تركيز محلول الفلورسين (*FLUORESCEINE*). نتائج القياسات تم نمذجتها بواسطة متغير عشوائي متوسطه الحسابي يساوي التركيز الحقيقي للمحلول، والانحراف المعياري مضمون من طرف الشركة المصنعة فهو معلوم ويُساوي **0,05**.
أخذنا **9** قياسات من المحلول (السحب بالإرجاع) فكان المتوسط التجريبي هو **4,38mg/L**.

1. أعط مجال الثقة لمتوسط التركيز الحقيقي للمحلول عند مستوى ثقة يساوي **0,99**؛
2. بالنسبة لنفس العينة السابقة، ما هو مستوى ثقة المجال **[4,4012 ; 4,4173]**؟
3. في نفس العينة (**9** قياسات)، لاحظنا أن الانحراف المعياري التجريبي هو **0,08mg/L**. أعط مجال الثقة للانحراف المعياري الحقيقي عند مستوى ثقة **0,99**. ماذا تقول عن الانحراف المعياري المضمون من طرف الشركة المصنعة؟

تمرين 11 (اختبر معلوماتك)

نفترض أن توزيع المتغير العشوائي X_i للنقاط المتحصل عليها في الرياضيات من طرف الطلبة في شعبة علوم التسيير يتبع القانون الطبيعي بإنحراف معياري 2,65. نسحب عينة عشوائية من الطلبة فسجلنا النتائج التالية:

$$\sum_{i=1}^{28} x_i = 291 \qquad \sum_{i=1}^{28} x_i^2 = 3091$$

- قدر نقطياً المتوسط μ للمتغير X_i؛
- قدر المتوسط μ بواسطة مجال الثقة 0,90 ؛
- نفترض أننا نجهل قيمة الانحراف المعياري σ للمتغير العشوائي X_i، شكل مجال الثقة للمتوسط μ عند مستوى ثقة 0,90. قارن بينه وبين تلك المتحصل عليها في السؤال السابق.

تمرين 12 (اختبر معلوماتك)

قمنا بقياس الوقت الممضي يومياً أمام التلفاز من طرف مراهق من خلال سحب عينة عشوائية تضم 80 شخص. سجلنا النتائج الموضحة أدناه:

$$\sum_{i=1}^{80} x_i = 257{,}33 \qquad ; \qquad \sum_{i=1}^{80} x_i^2 = 874{,}78$$

- قدر نقطياً المتوسط والانحراف المعياري للوقت الممضي أمام التلفاز لجميع المجتمع الجزائري؛
- قدر متوسط المجتمع بواسطة مجال الثقة 0,95.

تمرين 13 (اختبر معلوماتك)

قبل فترة قصيرة من الانتخابات، أحد المترشحين قام بإستجواب 150 ناخب، من بينهم 45 ناخب أبدى نيته للتصويت لصالح المترشح.

- أعط تقديراً نقطياً للنسبة p للناخبين الراغبين للتصويت لصالح المترشح؛
- أعط مجال الثقة في حدود 90 % للنسبة p.

حلول التمارين

التمرين 1

						$\sum$
Xi	4,25	4,36	4,63	4,42	3,99	**21,65**
X_i^2	18,0625	19,0096	15,9201	19,5364	21,4369	**93,9655**

- التقدير النقطي لمتوسط مستوى المياه في السد: $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{21,65}{5} = 4,33$$

- التقدير النقطي لتباين مستوى المياه في السد: $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}.S^2 = \frac{n}{n-1}.\left[\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{x}^2\right]$$

$$\Rightarrow \ \hat{\sigma}^2 = \frac{5}{5-1}.\left[\frac{93,9655}{5} - (4,33)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \hat{\sigma}^2 = 0,05525$$

التمرين 2

الفئـــات	x_i	f_i	$f_i * x_i$	x_i^2	$f_i * x_i^2$
$[60-62[$	61	5	305	3721	18605
$[63-65[$	64	18	1152	4096	73728
$[66-68[$	67	42	2814	4489	188538
$[69-71[$	70	27	1890	4900	132300
$[72-74[$	73	8	584	5329	42632
$\sum$	/	**100**	**6745**	/	**455803**

- حساب التقدير النقطي لمتوسط المجتمع $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum f_i * x_i}{f_i} = \frac{6745}{100} = 67,45$$

- حساب التقدير النقطي لتباين المجتمع $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}.S^2 = \frac{n}{n-1}.\left[\frac{\sum f_i * x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2\right]$$

حسب قانون الأعداد الكبيرة فإن:

$$\frac{n}{n-1} \sim 1$$

وبالتالي يصبح

$$\hat{\sigma}^2 \approx .S^2 = \frac{455803}{100} - (67{,}45)^2 = 8{,}5275$$

التمرين 3

الفئـــات	x_i	f_i	$f_i * x_i$	x_i^2	$f_i * x_i^2$
$[75-80[$	77,5	5	387,5	6006,25	30031,25
$[80-85[$	82,5	10	825	6806,25	68062,50
$[85-90[$	87,5	20	1750	7656,25	153125
$[90-95[$	92,5	36	3330	8556,25	308025
$[95-100[$	97,5	15	1462,5	9506,25	142593,75
$[100-105[$	102,5	8	820	10506,25	84050
$[105-110[$	107,5	6	645	11556,25	69337,5
$\sum$	/	**100**	**9220**	/	**855225**

- حساب المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i * x_i}{f_i} = \frac{9220}{100} = 92{,}20$$

- حساب الانحراف المعياري للعينة S

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i * x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\mathbf{855225}}{100} - (92{,}20)^2} = 7{,}17$$

- التقدير النقطي لمتوسط المجتمع $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 92{,}20$$

- التقدير النقطي للإنحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.S \approx S = 7{,}17$$

لأنه حسب قانون الأعداد الكبيرة فإنه:

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}} \sim 1$$

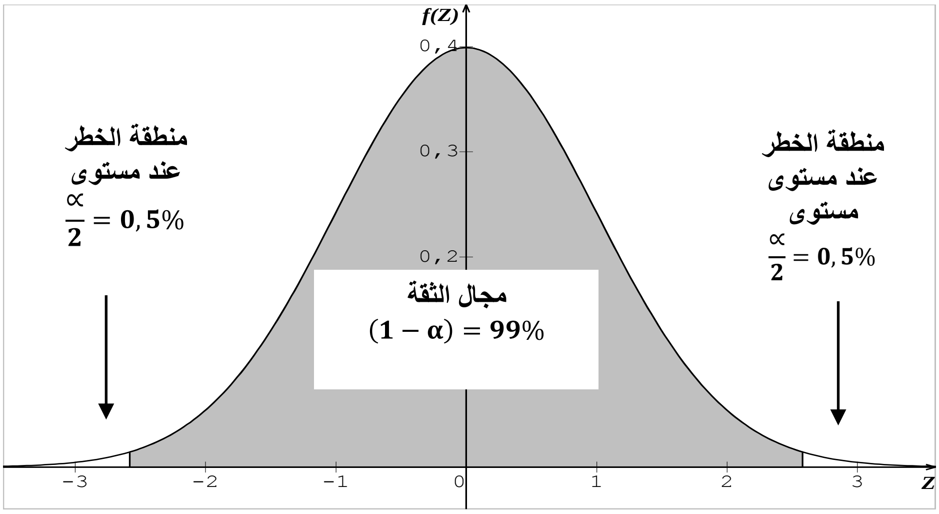
- تحديد مجال الثقة لسرعة المتوسط μ للمجتمع عند مستوى ثقة 99 %

لدينا $n > 30$ والانحراف المعياري للمجتمع مجهول إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع طبيعي وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية Z.

حيث:

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0{,}01}{2}\right)} = Z_{0{,}495} = \pm 2{,}58$$

الشكل (9.2): فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (Z = - 2,58 و Z = + 2,58)



<u>المصدر</u>: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

- **حساب $\sigma_{\bar{x}}$**

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع مجهول إذن نستخدم في مكانه الانحراف المعياري للعينة أو الانحراف المعياري المقدر لأن الانحراف المعياري المقدر هو نفسه الانحراف المعياري للعينة في هذه الحالة. وبالتالي يصبح:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}}; \qquad \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\propto$$

$$\Rightarrow I_{c_\mu} = \left[92,20 - 2,58.\frac{1,17}{\sqrt{100}}; \qquad 92,20 + 2,58.\frac{1,17}{\sqrt{100}}\right] = 0,99$$

$$\Rightarrow I_{c_\mu} = [91,90 \quad ; \quad 92,50] = 0,99$$

- تحديد فترة الثقة للانحراف المعياري للمجتمع σ عند مستوى خطر 5 %.

$$I_{C_\sigma} = \left[S * \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)}}} \quad ; \quad S * \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right]$$

- استخراج القيم الجد ولية من الجدول الإحصائي χ^2

$$\chi^2_{\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(99;\,0,025)} = 123,85$$

$$\chi^2_{\left(n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(99;\,0{,}975)} = 69{,}93$$

$$I_{C_\sigma} = \left[1{,}17 * \sqrt{\frac{(100-1)}{123{,}85}} \quad ; \quad 1{,}17 * \sqrt{\frac{(100-1)}{69{,}93}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{C_\sigma} = [1{,}05 \quad ; \quad 1{,}39\ ]$$

التمرين 4

- التقدير النقطي للنسبة P المقدمة من طرف هذه العينة

$$\overline{P} = \frac{x}{n} = \frac{60}{100} = 0{,}60$$

- التقدير بواسطة مجال الثقة للنسبة P عند مستوى ثقة 95 %

لدينا n>30 إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع طبيعي وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية Z

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0{,}05}{2}\right)} = Z_{0{,}475} = \pm 1{,}96$$

$$I_{cp} = \left(\overline{P} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} \quad ; \quad \overline{P} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow I_{cp} = \left(0{,}60 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}60(1-0{,}60)}{100}} \quad ; \quad 0{,}60 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}60(1-0{,}60)}{100}}\right)$$

$$\Rightarrow I_{cp} = \left(0{,}60 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}60(1-0{,}60)}{100}} \quad ; \quad 0{,}60 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}60(1-0{,}60)}{100}}\right)$$

$$\Rightarrow I_{cp} = (\,0{,}504 \quad ; \quad 0{,}696)$$

- تحديد حجم العينة n، بحيث n يكون أكبر من 30، لعينة من الزبائن حتى يكون التقدير النقطي للنسبة P المحسوب آنفاً محصورة في في مجال الثقة للنسبة P المقدر بـ [0,557 ; 0,643] عند مستوى ثقة 90 %.

لدينا طول المجال L يساوي الحد الأعلى للمجال – الحد الأدنى للمجال

L = 0,643 - 0,557 = 0,086

$$L = \overline{P} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} - \left[\overline{P} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right]$$

$$\Rightarrow L = 2 * Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} = 0{,}086$$

$$\Rightarrow L = 2 * 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}60(1-0{,}60)}{n}} = 0{,}086$$

$\Rightarrow L = 2*1{,}65\,\frac{\sqrt{0{,}60*0{,}40}}{\sqrt{n}} = 0{,}086$

$\Rightarrow \sqrt{n} = 2*1{,}65\,\frac{\sqrt{0{,}60*0{,}40}}{0{,}086}$

$\Rightarrow \sqrt{n} = 18{,}80$

$\Leftrightarrow n = 354$

التمرين 5

1. التقدير النقطي لمعالم المجتمع

- **التقدير النقطي لمتوسط المجتمع ($\hat{\mu}_1$) ومتوسط المجتمع الثاني ($\hat{\mu}_2$)**

$$\hat{\mu}_1 = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n_1} = \frac{32{,}5}{15} = 2{,}17$$

$$\hat{\mu}_2 = \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n_2} = \frac{55{,}8}{13} = 4{,}29$$

- **التقدير النقطي للانحراف المعياري للمجتمعين**

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1-1}}.S_1 = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1-1}} * \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15-1}} * \sqrt{\frac{75{,}83}{15} - 2{,}17^2} = 0{,}61$$

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2-1}}.S_2 = \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2-1}} * \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13-1}} * \sqrt{\frac{247{,}32}{13} - 4{,}29^2} = 0{,}82$$

2. حساب التقدير النقطي للفرق بين إنجازي المجموعتين ($\hat{\mu}_1$ - $\hat{\mu}_2$)؛

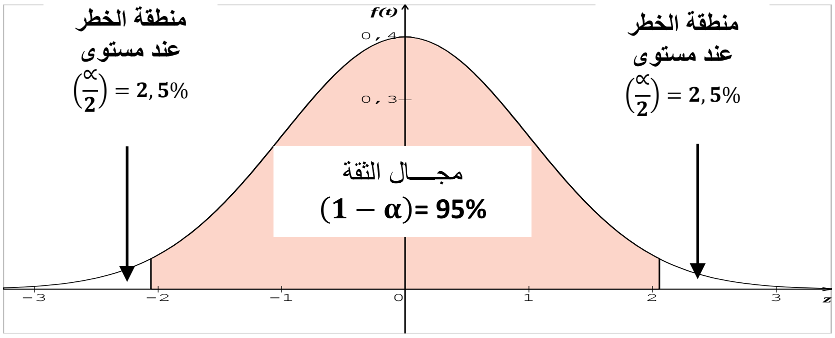
$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{x} - \bar{y} = 2{,}17 - 4{,}29 = -2{,}12$

3. تحديد فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجموعتين عند مستوى خطر 5 %.

بما أن $n_1, n_2 < 30$ وتباينا المجتمعين مجهولين، فإن المجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t حيث:

$$t_{th} = t\left(dL; \frac{\alpha}{2}\right) = t_{\left(15+13-2;\frac{0{,}05}{2}\right)} = t_{(26;0{,}025)} = \pm 2{,}056$$

الشكل (10.2): فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (t = - 2,056 و t = + 2,056)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

$$I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t(dL;\ \frac{\propto}{2}).\ \sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2 + (n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \right]$$

$$\Rightarrow I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[-2{,}12 \pm 2{,}056 * \sqrt{\frac{(15-1).\,0{,}61^2 + (8-1).\,0{,}82^2}{15+13-2}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{13}\right)} \right]$$

$$\Rightarrow I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = [-2{,}675 \quad ; \qquad -1{,}654]$$

التمرين 6

1. التقدير النقطي للفرق بين متوسطي الاستهلاك الأسبوعي للحليب للبلدين

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{x} - \bar{y} \qquad \bar{x} = ?; \qquad \bar{y} = ?$$

$$\boldsymbol{n_1 = 25}; \qquad \boldsymbol{n_2 = 20}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n=25} x_i + \sum_{i=1}^{n=20} y_i = 450 \ldots\ldots\ldots..(1) \\ \sum_{i=1}^{n=25} x_i - \sum_{i=1}^{n=20} y_i = -60 \ \ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$2\sum \mathrm{x_i} = 390 \ \Rightarrow \sum \mathrm{x_i} = 195$$

ومنه:

$$\bar{x} = \frac{\sum \mathrm{x_i}}{\mathrm{n_1}} = \frac{195}{25} = 7{,}8$$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$2\sum \mathrm{y_i} = 510 \ \Rightarrow \sum \mathrm{y_i} = 255$$

ومنه:

$$\bar{y} = \frac{\sum \mathrm{y_i}}{\mathrm{n_2}} = \frac{255}{20} = 12{,}75$$

إذن التقدير النقطي للفرق بين المتوسطين هو:

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{x} - \bar{y} = 7{,}8 - 12{,}75 = \ -4{,}95$$

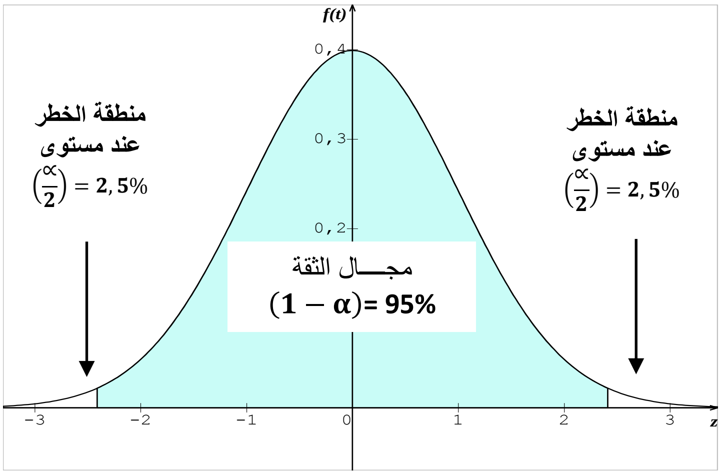
$$\begin{cases} S_1^2 = \dfrac{\sum X_i^2}{n_1} - \bar{x}^2 = \dfrac{1600}{25} - (7{,}8)^2 = 3{,}16 \\ S_2^2 = \dfrac{\sum y_i^2}{n_2} - \bar{y}^2 = \dfrac{3360}{20} - (12{,}75)^2 = 5{,}44 \end{cases}$$

2. فترة الثقة لتقدير الفرق بين متوسطي الاستهلاك الأسبوعي للحليب لكلا البلدين في حالة تساوي تبايـنا المجتمعيـن

بما أن $n_1, n_2 < 30$ وتباينا المجتمعين مجهولين، فإن المجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t حيث:

$$t_{th} = t\left(dL; \frac{\propto}{2}\right) = t_{\left(25+20-2; \frac{0,05}{2}\right)} = t_{(43;0,025)} = \pm 2,41$$

الشكل (11.2): فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (t = - 2,41 و t = + 2,41)



<u>المصدر</u>: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

ويعطى مجال الثقة لتقدير الفرق بين متوسطي المجتمعين في هذه الحالة بالعلاقة الرياضية التالية:

$$I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[(\bar{x}-\bar{y}) \pm t\left(dL; \frac{\propto}{2}\right) . \sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2 + (n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = \left[(-4,95) \pm 2,41 . \sqrt{\frac{(25-1).3,16 + (20-1).5,44}{25+20-2}\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{20}\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow I_{c_{\mu_1-\mu_2}} = [-5,56 \quad ; \quad -3,48 \quad]$$

التمرين 7

1. التقدير النقطي للمتوسط $(\hat{\mu})$

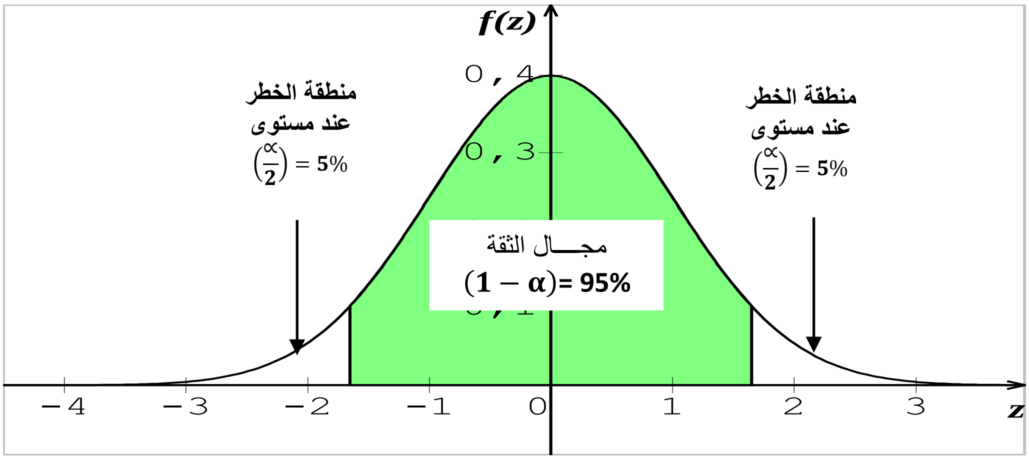
$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3593}{40} = 89,825$$

2. مجال الثقة لتقدير متوسط المجتمع

بما ان حجم العينة أكبر من 30 والانحراف المعياري للمجتمع مجهول إذن فالمجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية Z_{th}

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,1}{2}\right)} = Z_{0,450} = \pm 1,65$$

الشكل (12.2): فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (Z = - 1,65 و Z = + 1,65)



<u>المصدر</u>: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

- حساب الانحراف المعياري للعينة S

$$S = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{425596}{40} - (89.825)^2} = 50,71$$

- حساب $\sigma_{\bar{x}}$

المجتمع منته أو محدود لأن السحب تم بدون إرجاع إذن:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} * S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \approx \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

ويعطى مجال الثقة لتقدير متوسط المجتمع بالعلاقة الرياضية التالية:

$$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad ; \quad \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_\mu} = \left[89,825 - 1,65 \cdot \frac{50,71}{\sqrt{40}}\sqrt{\frac{194-40}{194-1}} \quad ; \quad 89,825 + 1,65 \cdot \frac{50,71}{\sqrt{40}}\sqrt{\frac{194-40}{194-1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow I_{c_\mu} = \left[89,825 - 1,65 \cdot \frac{50,71}{\sqrt{40}}\sqrt{\frac{194-40}{194-1}} \quad ; \quad 89,825 + 1,65 \cdot \frac{50,71}{\sqrt{40}}\sqrt{\frac{194-40}{194-1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow I_{c_\mu} = [78,015 \quad ; \quad 101,64]$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 90 % بأن متوسط المجتمع سيقع بين القيمتين 78,015 و 101,64.

3. مجال الثقة لتقدير تباين المجتمع (σ^2)

أولاً نستخرج القيم الجدولية من الجدول الإحصائي لــ χ^2

$$\chi^2_{\left(n-1;\,\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(39;\,0,01)} = 57,29$$

$$\chi^2_{\left(n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(39;\,0,99)} = 18,55$$

يعطى مجال الثقة لتقدير تباين المجتمع بالصيغة التالية:

$$I_{C_\sigma} = \left[S^2 * \frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(n-1;\,\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad S^2 * \frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{C_\sigma} = \left[(50.71)^2 * \frac{(40-1)}{57,29} \quad ; \quad (50.71)^2 * \frac{(40-1)}{18,55}\right]$$

$$\Leftrightarrow I_{C_\sigma} = [1750,54 \quad ; \quad 5406,40\ ]$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 99 % بأن تباين المجتمع سيقع بين القيمتين 1750,54 و 5406,40

4. التقدير بواسطة مجال الثقة لنسبة مؤسسات القطاع المستفيدة من الإعفاء

ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد المؤسسات المستفيدة من الإعفاء

$$x_i = 9$$

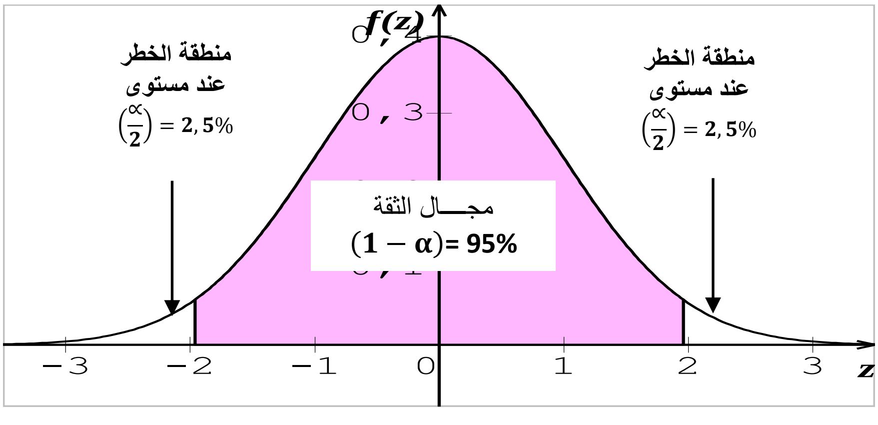
نسبة المؤسسات التي تستفيد من الإعفاء الضريبي:

$$\bar{P} = \frac{x_i}{n} = \frac{9}{40} = 0,225$$

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإن التوزيع المتبع هو توزيع طبيعي نستخرج القيمة الجدولية Z_{the}

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,05}{2}\right)} = Z_{0,475} = \pm 1,96$$

الشكل (13.2): فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (Z = - 1,96 و Z = + 1,96)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

يُعطى مجال الثقة لتقدير نسبة المجتمع بالعلاقة الرياضية التالية:

$$I_{c_p}=\left[\left(\bar{P}-Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}\right)\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\quad;\quad \left(\bar{P}+Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}\right)\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_p}=\left[0{,}225-1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}225*0.775}{40}}\sqrt{\frac{194-40}{194-40}}\quad;\quad 0{,}225+1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}225*0.775}{40}}\sqrt{\frac{194-40}{194-40}}\right]$$

$$\Leftrightarrow I_{c_p}=[0{,}109\quad;\quad 0{,}340]$$

نقول بأن واثقون بنسبة 95 % بأن نسبة المجتمع ستقع بين القيمتين 0,109 و 0,340.

التمرين 8

الفئـــات	x_i	f_i	$f_i * x_i$	x_i^2	$f_i * x_i^2$
$[0-2[$	1	6	6	1	6
$[2-3[$	2,5	12	30	6,25	75
$[3-4[$	3,5	17	59,5	12,25	208,25
$[4-5[$	4,5	10	45	20,25	202,5
$[5-7[$	6	5	30	36	180
$\sum$	/	**50**	**170,5**	/	**671,75**

- التقدير النقطي لمتوسط رقم الأعمال لجميع مؤسسات القطاع

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{\sum f_i * x_i}{f_i}=\frac{170{,}5}{50}=3{,}41$$

- حساب التقدير النقطي لتباين المجتمع $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{n}{n-1}.S^2=\frac{n}{n-1}.\left[\frac{\sum f_i * x_i^2}{\sum f_i}-\bar{x}^2\right]\approx S^2\approx\left[\frac{\sum f_i * x_i^2}{\sum f_i}-\bar{x}^2\right]$$

$$\approx\left[\frac{671{,}75}{50}-(3{,}41)^2\right]$$

69= 1,80

$$\Rightarrow\hat{\sigma}=\sqrt{1{,}8069}=1{,}3442$$

- التقدير بواسطة مجال الثقة لرقم الأعمال عند مستوى ثقة 95 %.

لدينا حجم العينة أكبر من 30 وتباين المجتمع مجهول إذن فالمجتمع يتبع توزيع طبيعي وبالتالي فإن الصيغة الرياضية لتقدير متوسط المجتمع تُعطى بالعلاقة التالية:

$$I_{c_\mu}=\left[\bar{x}-Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}}\quad;\quad \bar{x}+Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_\mu}=\left[3{,}41-Z_{\left(\frac{1-0{,}05}{2}\right)}.\frac{1{,}3442}{\sqrt{50}}\quad;\quad 3{,}41+Z_{\left(\frac{1-0{,}05}{2}\right)}.\frac{1{,}3442}{\sqrt{50}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_\mu} = \left[3{,}41 - 1{,}96.\frac{1{,}3442}{\sqrt{50}} \quad ; \quad 3{,}41 + 1{,}96.\frac{1{,}3442}{\sqrt{50}}\right]$$

$$\Leftrightarrow I_{c_\mu} = \left[3{,}41 - 1{,}96.\frac{1{,}3442}{\sqrt{50}} \quad ; \quad 3{,}41 + 1{,}96.\frac{1{,}3442}{\sqrt{50}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{c_\mu} = [3{,}03741 \quad ; \quad 3{,}78259]$$

- **التقدير النقطي لنسبة المؤسسات التي تجاوز رقم أعمالها 4,5 مليـــون دج.**

ليكن x يُمثل عدد المؤسسات التي تجاوز رقم أعمالها 4,5 مليون دج.

$$x = 15$$

أي نسبة المؤسسات التي تجاوز رقم أعمالها 4,5 مليوم دج هو $\overline{P}$ حيث:

$$\bar{P} = \frac{x_i}{n} = \frac{15}{50} = 0{,}3$$

- **تقدير النسبة بواسطة مجال الثقة عند مستوى خطر 1 %.**

يُعطى مجال الثقة لتقدير نسبة المجتمع بالعلاقة الرياضية التالية:

$$I_{cp} = \left[\left(\overline{P} - Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} \quad ; \quad \overline{P} + Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow I_{cp} = \left[0{,}3-2{,}58.\sqrt{\frac{0{,}3*0.7}{50}} \quad ; \quad 0{,}3+2{,}58.\sqrt{\frac{0{,}3*0.73}{50}}\right]$$

$$\Leftrightarrow I_{cp} = [0{,}132 \quad ; \quad 0{,}467]$$

$$\Leftrightarrow I_{cp} = [13{,}2\% \quad ; \quad 46{,}7\%]$$

التمرين 9

x_i	f_i	$f_i * x_i$	x_i^2	$f_i * x_i^2$
120	9	1080	14400	129600
160	22	3520	25600	563200
200	25	5000	40000	1000000
240	21	5040	57600	1209600
280	16	4480	78400	1254400
320	7	2240	102400	716800
/	**100**	**21360**	/	**4873600**

- **التقدير النقطي لمتوسط المجتمع $\hat{\mu}$**

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum f_i * x_i}{f_i} = \frac{21360}{100} = 213{,}60$$

- **حساب التقدير النقطي لتباين المجتمع $\hat{\sigma}^2$**

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}.S^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}.\left[\frac{\sum f_i * x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2\right]} \approx \sqrt{S^2} \approx \sqrt{\left[\frac{\sum f_i * x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2\right]}$$

$$\approx \sqrt{\left[\frac{4873600}{100} - (213,60)^2\right]}$$

$$= 55,77$$

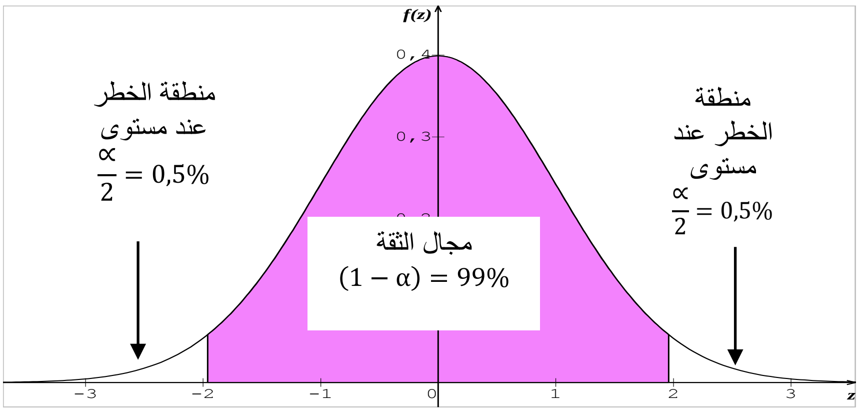
- **تحديد مجال الثقة لسرعة المتوسط μ للمجتمع عند مستوى خطر 5 %**

لدينا $n > 30$ والانحراف المعياري للمجتمع مجهول إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع طبيعي وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية Z.

حيث:

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,05}{2}\right)} = Z_{0,475} = \pm 1,96$$

الشكل (14.2): فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (Z = - 1,96 و Z = + 1,96)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

- **حساب $\sigma_{\bar{x}}$**

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع مجهول إذن نستخدم في مكانه الانحراف المعياري للعينة أو الانحراف المعياري المقدر لأن الانحراف المعياري المقدر هو نفسه الانحراف المعياري للعينة في هذه الحالة. وبالتالي يصبح:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\propto$$

$$\Rightarrow I_{c_\mu} = \left[213,60 - 1,96.\frac{55,77}{\sqrt{100}} \quad ; \quad 213,60 + 1,96.\frac{55,77}{\sqrt{100}}\right] = 0,95$$

$$\Leftrightarrow I_{c_\mu} = [202{,}67 \quad ; \quad 224{,}53]$$

- تحديد الحجم الأدنى للعينة حتى تكون سعة مجال الثقة يُساوي 30 عند مستوى خطر 5 %.

لدينا طول المجال L يساوي الحد الأعلى للمجال – الحد الأدنى للمجال

L = 30

$$L = \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n}} - \left[\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\Longrightarrow L = 2 * Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n}} = 30$$

$$\Leftrightarrow L = 2*1{,}96 \frac{55{,}77}{\sqrt{n}} = 30$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{2*1.96*55{,}77}{30}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} = 7{,}28728$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \approx 53$$

التمرين 10

$\bar{x} = 4{,}38 \quad \alpha = 1\% ; \quad \sigma = 0{,}05 \quad n = 9$

1. تحديد مجال الثقة لمتوسط التركيز الحقيق للمحلول عند (1-α = 0,99)

بما أن n = 9< 30 والانحراف المعياري للمجتمع معلوم فالمجتمع يتبع توزيع طبيعي وبالتالي يُعطى مجال الثقة لتقدير متوسط المجتمع بالعلاقة التالية:

$$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \quad \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow I_{c_\mu} = \left[4{,}38 - 2{,}58 . \frac{0{,}05}{\sqrt{9}} ; \quad 4{,}38 + 2{,}58 . \frac{0{,}05}{\sqrt{9}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow I_{c_\mu} = [4{,}33 ; \quad 4{,}42]$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 99 % بأن متوسط التركيز الحقيق للمحلول سيقع بين القيمتين 4,33 و 4,42.

2. ايجاد مستوى الثقة (1-α) للمجال [4,4012 ; 4,4173].

لدينا:

$$I_{c_\mu} = \left[\bar{x} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \quad \bar{x} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ولدينا طول المجال **[4,4012 ; 4,4173]**.هو 0,061 ويساوي الحد الأعلى للمجال – الحد الأدنى للمجال.

$$\left[4{,}38 - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} . \frac{0{,}05}{\sqrt{9}} \quad ; \quad 4{,}38 + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} . \frac{0{,}05}{\sqrt{9}}\right] = [\mathbf{4,4012} \quad ; \quad \mathbf{4,4173}]$$

$$\Longrightarrow \left[4{,}38 - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} . 0{,}017 \quad ; \quad 4{,}38 + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} . 0{,}017\right] = 0{,}0161$$

$$\Leftrightarrow 4{,}38 + Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.0{,}017 - \left(4{,}38 - Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)}.0{,}017\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 * Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} * 0{,}017 = 0{,}0161$$

$$\Leftrightarrow Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} = \frac{0{,}0161}{2 * 0{,}017} \approx 0{,}4735$$

$$\Rightarrow \frac{1-\propto}{2} = 0{,}4735 \Leftrightarrow 1-\propto = 0{,}9470 = 94{,}70\%$$

3. ايجاد مجال الثقة للانحراف المعياري الحقيق (σ) عند مستوى خطر 1 %

أولاً نستخرج القيم الجدولية من الجدول الإحصائي لــ χ^2

$$\chi^2_{\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(8;\,0{,}005)} = 21{,}96$$

$$\chi^2_{\left(n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(8;\,0{,}005)} = 1{,}34$$

يعطى مجال الثقة لتقدير الانحراف المعياري للمجتمع بالصيغة التالية:

$$I_{C_\sigma} = \left[S * \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)}}} \quad ; \quad S * \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right]$$

$$\Rightarrow I_{C_\sigma} = \left[0{,}08 * \sqrt{\frac{(9-1)}{21{,}96}} \quad ; \quad 0{,}08 * \sqrt{\frac{(9-1)}{1{,}34}}\right]$$

$$\Leftrightarrow I_{C_\sigma} = [0{,}048 \quad ; \quad 0{,}195\ ]$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 99 % بأن تباين المجتمع سيقع بين القيمتين 0,048 و 0,195

الفصـــل الثالث
اختبار الفرضيات

تمهيد

ينقسم الإحصاء إلى قسمين الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستدلالي، ويتفرع هذا الأخير بدوره إلى فرعين، الأول يعرف بـــ: نظرية التقدير والثاني بـــ اختبار الفرضيات.

فعند الرغبة في التحقق من ادعاء (فرضية) ما أو التحقق من معلومة معينة عن المجتمع الإحصائي يتم عادةً سحب عينة عشوائية من هذا المجتمع وحساب بعض الإحصاءات لها ثم نستخدم طرق إحصائية معينة للتحقق من صحة أو عدم صحة هذا الادعاء.

وقبل الخوض في هذه الاختبارات سنذكر بعض المفاهيم الخاصة التي ستمكننا من فهم الاختبارات وتطبيقها.

1.3. مفهـــوم الفرضية الإحصائية

هو عبارة عن إدعاء أو تخمين معين حول معلمة من معالم المجتمع ويكون المطلوب اختبار صحة هذا الادعاء أو التخمين.

2.3. فرضية العدم والفرضية البديلة

في معظم الأحيان هناك نوعان من الفرضيات في المسألة الواحدة. النوع الأول هو الفرضية الصفرية أو فرضية العدم وهي الفرضية التي تبنى على أمل أن يتخذ قرار بعدم صحتها، ونصطلح الآن على اعتبار أي فرضية نود اختبارها صفرية، ونعبر عن ذلك بالرمز H_0. وهكذا، فكل فرضية إحصائية تريد اختبارها تسمى فرضية صفرية H_0.

إن رفض الفرضية الصفرية H_0 المتعلقة بمعلمة مجتمع معين بشكل يعين قيمة محددة لتلك المعلمة فإنها تسمى فرضية بسيطة.

- **الفرضية الصفرية (فرضية العدم) H_0. *Hypothèse nulle***

هي الفرضية حول معلمة المجتمع التي نجري اختبار عليها باستخدام بيانات من عينة والتي تشير أن الفرق بين معلمة المجتمع والإحصائية من العينة ناتج عن الصدفة ولا فرق حقيقي بينهما. وهي الفرضية التي ننطلق منها ونرفضها عندما تتوفر دلائل على عدم صحتها، وخلاف ذلك نقبلها وتعني كلمة Nulle انه لا يوجد فرق بين معلمة المجتمع والقيمة المدعاة (إحصائية العينة).

- **الفرضية البديلة (H_1)** ***Hypothèse Alternative***

هي الفرضية التي يضعها الباحث كبديل عن فرضية العدم ونقبلها عندما نرفض فرضية العدم باعتبارها ليست صحيحة بناء على المعلومات المستقاة من العينة.

3.3. أخطاء اختبـــار الفرضيات وأنواعها.

الخطأ من النوع الأول α والخطأ من النوع الثاني β
إن أي قرار إحصائي يُمكن أن ينتج عنه نوعان من الخطأ:

- **الخطأ من النوع الأول α**: يحدث هذا النوع من الأخطاء عندما نقوم برفض الفرضية الصفرية (H_0) في حين أنها صحيحة (إدانة الشخص وهو بريء)، وذلك باحتمال مقداره α هي مستوى الخطر).
- **الخطأ من النوع الثاني β**: يقع مثل هذا النوع من الأخطاء عندما نرفض الفرضية الصفرية (H_0) في حين أنه خطأ.

ويُمكن تلخيص القرارات الإحصائية كما يلي:

القرار / الفرضية	قبـــول H_0	رفـــض H_0
H_0 صحيح	قرار صحيح	خطأ من النوع الأول **α**
H_0 خطأ	خطأ من النوع الثاني **β**	قرار صحيح

- **مستوى الخطر الإحصائية ومنطقة الرفض**

عندما نقبل الفرضية الصفرية (فرضية العدم) فإننا نقبلها بنسبة دقة 90% أو 95% أو 99% أو غير ذلك وتسمى مستويات الخطر أو الثقة (*niveaux de signification*) أي يوجد نسبة خطأ معين في قبولنا للفرضية الصفرية بمعنى أننا نقبل صحة الفرضية الصفرية وهي خاطئة وهذا الخطأ هو α ويسمى مستوى الخطر.

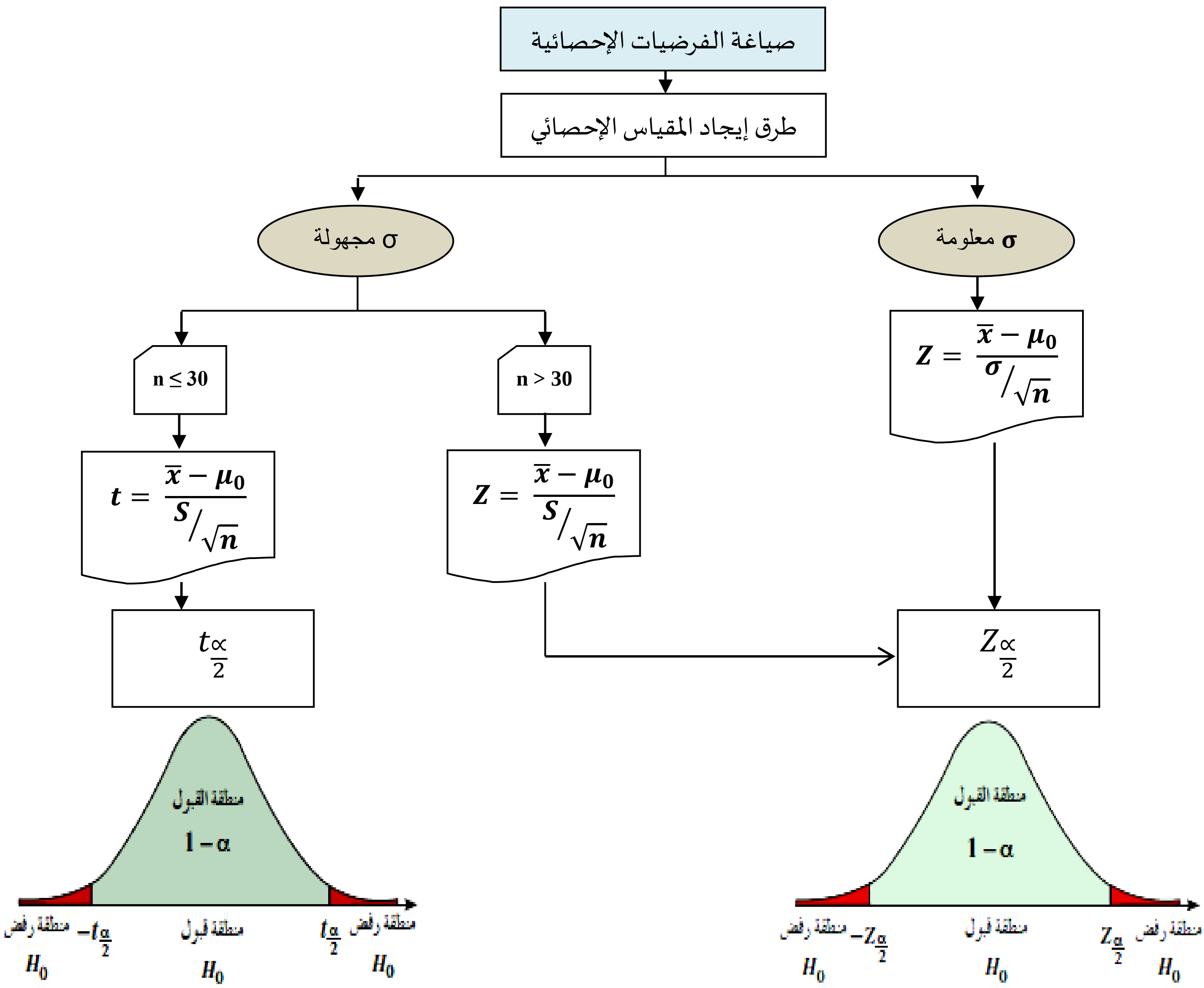
أي إذا كان مستوى الثقة 95% = (1-α) فان مستوى الخطر α تساوي 5% وهي عبارة عن مساحة المنطقة التي تقع تحت منحنى التوزيع والتي تمثل منطقة الرفض أو المنطقة الحرجة، وتكون أما على صورة ذيل واحد جهة اليمين أو اليسار أو ذيلين متساويين في المساحة واحد جهة اليمين والثاني جهة اليسار.

4.3. خطـــوات عمليـــة اختبـــار الفرضيـــات الإحصائيـــة

عند إجراء أي اختبار للفرضيات الإحصائية فإننا نتبع الخطوات التالية:

- صياغـــة الفرضيات الإحصائية؛
- معرفـــة طبيعة التوزيع المتبع من خلال تحديد حجم العينة (n) والتحقق من الانحراف المعياري للمجتمع (معلوم أم مجهول) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)؛
- استخراج القيمة الجدوليـــة (Z أو t)؛
- اتخاذ القرار الإحصائي (قبول الفرضية الصفرية) أو (رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة) من خلال مقارنة القيمة الجدوليـــة بإحصائية الاختبار.

الشكل 1.3: خطوات عملية اختبار الفرضيات



المصدر: من إعداد الباحث

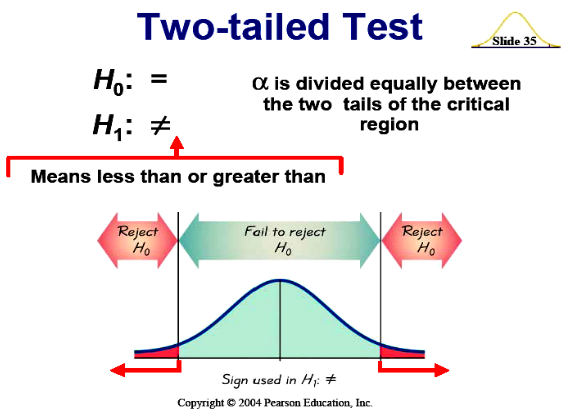
1. صياغــة الفرضيـات الإحصائيــة

تأخذ الفرضيات الإحصائية ثلاثة أشكال مختلفة كما يلي:

- **اختبار ثنائي الاتجاه (من الطرفين)**

اختبار ثنائي الاتجاه $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

الشكل (2.3): اختبار ثنائي الاتجاه



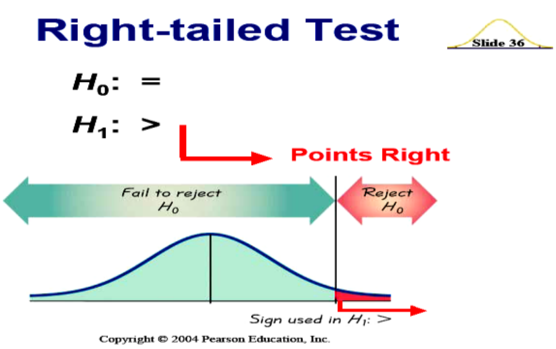
نقبل فرضية العدم إذا تحققت المعادلة التالية: $-Z_{\propto/2} < Z_c < +Z_{\propto/2}$

نرفض فرضية العدم إذا تحققت إحدى المعادلتين: $Z_c > +Z_{\propto/2}$ أو $Z_c < -Z_{\propto/2}$

- **اختبار أحادي الاتجاه من اليمين**

اختبار أحادي الاتجاه من اليمين $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$

الشكل (3.3): اختبار أحادي الاتجاه من اليمين



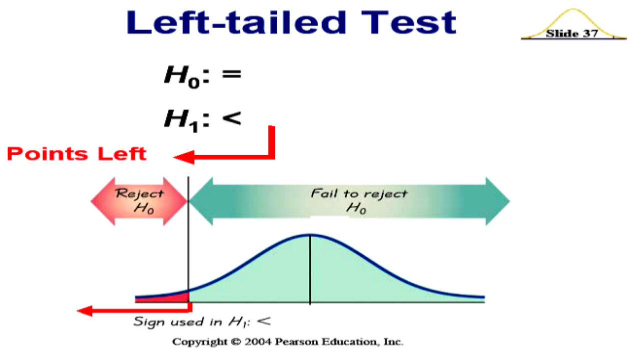
نقبل فرضية العدم إذا تحققت المعادلة التالية: $Z_c < +Z_{\propto}$

نرفض فرضية العدم إذا تحققت المعادلة التالية: $Z_c > +Z_{\propto}$

- **اختبار أحادي الاتجاه من اليسار**

اختبار أحادي الاتجاه من اليسار $\begin{cases} \mathbf{H_0: \mu = \mu_0} \\ \mathbf{H_1: \mu < \mu_0} \end{cases}$

الشكل (4.3): اختبار أحادي الاتجاه من اليسار



نقبل فرضية العدم إذا تحققت المعادلة التالية: $Z_c > -Z_\propto$

نرفض فرضية العدم إذا تحققت المعادلة التالية: $Z_c < -Z_\propto$

5.3. اختبــار الفرضيات لمتوسط المجتمـــع μ

1.5.3. الحالة الأولى: تبايــن المجتمع σ^2 معلـــوم.

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي يتبع التوزيع $N(\mu, \sigma^2)$ وكانت σ^2 معلومة فإن إحصاءه الاختبار هي $\mathbf{z} = \frac{x - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ وهو يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري $\boldsymbol{Z \sim N(0,1)}$.

وتسمى الإحصائية بقيمة Z المحسوبة من خلال بيانات العينة و $\bar{x}$ يمثل متوسط البيانات المشاهدة من العينة n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع وμ_0 هو القيمة لمتوسط المجتمع والتي نقوم باختبارها. نقوم بعد ذلك باختيار قيمة α (مستوى الخطر) حيث يتم على أساسه تحديد القيم الحرجة $Z_{\alpha/2}$ و $-Z_{\alpha/2}$ أو Z_α وذلك حسب نوع الاختبار هل هو اختبار من طرف واحد أم طرفين، وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

- **تمريــن 1**

أخذت عينة من 64 طالب من إحدى المدارس فوجد أن متوسط الطول هو 155سم فإذا كان الانحراف المعياري للمجتمع يساوي 5سم. اختبر الفرض القائل:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 160 \\ H_1: \mu \neq 160 \end{cases}$$

وذلك عند مستوى خطر 5 % و 1 %.

- **الحــل**

- **عند مستوى خطر 5 %**
- حساب المقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة)

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

حيث:

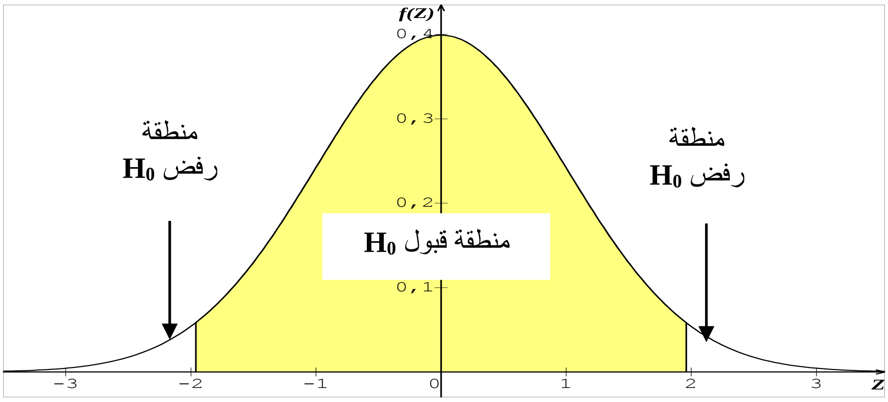
$\bar{x} = 155,\quad \mu_0 = 160,\quad \sigma = 5,\quad n = 64,\quad \alpha=5\%$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Z_c} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{155-160}{5/\sqrt{64}} = -8$$

عند مستوى الخطر ($\propto = 0,05$) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيم Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,05}{2}\right)} = Z_{0,475} = \pm 1,96$$

الشكل (5.3): منطقة قبول *H0* بين القيمتين (*Z= -1,96* و *Z = +1,96*)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

ومن هنا نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرضية الصفرية و نقبل الفرضية البديلة.

- **عند مستوى خطر 1 %**

عند مستوى خطر ($\propto = 0,01$) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيم Z الجندولية سوف تكون كالتالي:

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\propto}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,01}{2}\right)} = Z_{0,495} = \pm 2,58$$

ومن هنا نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة.

2.5.3. الحالة الثانية: تباين المجتمع σ^2 مجهــول وعينات كبيـــرة

إن المجتمع في هذه الحالة لم يفترض أنة طبيعي، ولكن حجم العينة كبير$n \geq 30$.

إذا تم أخذ عينة عشوائية كبيرة الحجم من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول، فإن إحصائية الاختبار المناسب هي:

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

حيث يتم استبدال الانحراف المعياري للمجتمع المجهول بالانحراف المعياري للعينة المعلوم.

تمريـــن 2

عند مستوى خطر5%، اختبر الفرضية $H_0: \mu = 10$ مقابل الفرضية البديلة $H_1: \mu \neq 10$

إذا أعطت عينة حجمها n=42 وسطاً حسابيا $\bar{x}$=11,5 وانحرافاً معيارياً S=3,3

الحـل:

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \mu = 10 \\ H_1: \mu \neq 10 \end{cases}$$

- حساب المقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة)

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

حيث:

$\bar{x} = 11,5, \quad \mu_0 = 10, \quad s = 3,3, \quad n = 42, \quad \alpha=5\%$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Z_c} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{11,5 - 10}{3,3/\sqrt{42}} = +\,2,94$$

وذلك باستعمال S بدلاً من σ لأن الانحراف المعياري للمجتمع مجهول حجم العينة أكبر من 30. كما يلي:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.S$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.S}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

لأن حسب قانون الأعداد الكبيرة

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \sim 1$$

عند مستوى الخطر ($\propto$= 0,05) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيم Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,05}{2}\right)} = Z_{0,475} = \pm 1,96$$

ومن هنا نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية من جهة اليمين، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرضية الصفرية و نقبل الفرضية البديلة.

3.5.3. الحالة الثالثة: تباين المجتمع σ^2 مجهــول وعينات صغيــرة

عندما يكون الانحراف المعياري للمجتمع مجهول وكذلك حجم العينة المسحوبة من ذلك المجتمع صغير ($n < 30$) فإن الإحصائية Z يتم تغييرها إلى الإحصائية t التي يكون لها الشكل التالي:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

حيث s تمثل الانحراف المعياري للعينة والإحصائية t تتبع توزيع t وذلك بدرجات حرية ($dl = n - 1$) ومستوى خطر α أو $\alpha/2$ حسب نوع الاختبار من طرف واحد أو طرفين، وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

تمريــن 3

إذا كان متوسط ربح سهم إحدى الشركات هو 15 دج في العام الماضي. تم أخذ عينة من 7 مساهمين عن توقعاتهم عن متوسط ربح السهم العام الحالي فوجد أنه 17 دج بانحراف معياري 2. هل توافق المساهمين في تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام؟ وذلك بمستوى خطر 5%.

الحـــل

$$\bar{x}=17, \quad \mu_0=15, \quad s = 2, \quad n = 7, \quad \alpha = 0.05$$

- صياغـــة الفرضيات الإحصائيـــة

$$\begin{cases} H_0: \mu=15 \\ H_1: \mu >15 \end{cases}$$

- نقوم بحساب قيمة t المحسوبة

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{17 - 15}{2/\sqrt{7}} = +2,65$$

- نقوم الآن بحساب قيمة t الجدولية.

عند مستوى خطر ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة t الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$t_{(n-1,\ \alpha)} = t_{(7-1,\ 0.05)} = t_{(6,\ 0.05)} = +1,943$$

- **اتخاذ القــرار الإحصائــي**

بمقارنة القيمة الجدولية بالقيمة المحسوبة نجد أن قيمة t المحسوبة أكبر من قيمة t الجدولية، أي أن قيمة t تقع في منطقة الرفض، ومن هنا يمكن القول بأننا نوافق المساهمين على توقعاتهم بارتفاع متوسط الربح للسهم هذا العام.

6.3. اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطي مجتمعين

إذا كان لدينا مجتمعين متوسطيهما الحسابيين μ_1، μ_2 وتباينهما σ_1^2، σ_2^2 على الترتيب، ونريد أن نقارن بين متوسطي المجتمعين، فإننا سنختبر أن الفرق يرجع إلى الصدفة (أي لا يوجد اختلاف بينهما)، أم أن هذا الفرق جوهري (يوجد اختلاف بينهما). ولمعرفة هذا فإننا نسحب عينتين مستقلتين حجمهما n_1، n_2 ونسحب متوسطيهما الحسابيين ثم نقوم بإختبار تساوي متوسطي المجتمعين. ويتم اتخاذ القرار الإحصائي بخصوص قبول الفرضية الصفرية أو رفضهما كما يلي:

مجال رفض H_0	مجال قبول H_0	نوع الاختبار
$Z_c > +Z_{\alpha/2}$ $Z_c < -Z_{\alpha/2}$	$Z_c \in \left[Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \;;\; Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$	$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$
$Z_c > +Z_\alpha$	$Z_c \in [-\infty \;;\; +Z_\alpha]$	$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$
$Z_c < -Z_\alpha$	$Z_c \in [-Z_\alpha \;;\; +\infty]$	$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$

وهنا نميز ثلاث حالات:

1.6.3. الحالة الأولى: تباينا المجتمعيــن σ_1^2 و σ_2^2 معلومين

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع يتبع التوزيع $N \backsim (\mu_1, \sigma_1)$ وأخذت عينة عشوائية ثانية ومستقلة عن الأولى حجمها n_2 من مجتمع يتبع التوزيع $N \backsim (\mu_2, \sigma_2)$ وكان σ_1^2 و σ_2^2 معلومتين فإن إحصاءة الاختبار تعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \backsim N(0;1)$$

تمريــن 4

لاختبار الفرق بين كمية النيكوتين في نوعين من السجائر لمجتمعين مختلفين، أخذت عينتان عشوائيتان من المجتمعين محل الدراسة، فكانت النتائج التالية:

Population 1	Population 2
$n_1 = 100$	$n_2 = 100$
$\bar{x}_1 = 0,8$	$\bar{x}_2 = 1,0$
$\delta_1^2 = 0,36$	$\delta_2^2 = 0,64$

✓ اختبر الفرق بين متوسط كمية النيكوتين في النوعين عند مجال ثقة 98 %.

الحل

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

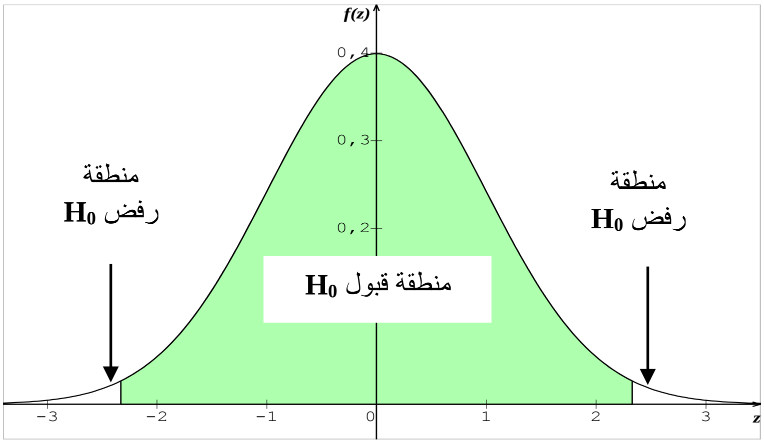
$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

- **تحديد القيمة النظرية أو الجدولية:**

بما أن حجمي العينتين أكبر من 30 وتباينا المجتمعين معلومين، إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع طبيعي وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية Z_{th}

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,02}{2}\right)} = Z_{0,490} = \pm 2,33$$

الشكل (6.3): منطقة قبول *H0* بين القيمتين (*Z*= -2,33 و Z = +2,33)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

L'intervalle de zone d'acceptation de H_0 est $[-2,33 \quad ; \quad +2,33]$

- **تحديد إحصائية الاختبار Z_c**

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(0,8 - 1,0)}{\sqrt{\frac{0,36}{100} + \frac{0,64}{100}}} = -2$$

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

$$-2,33 < Z_c = -2 < +2,33$$

إذن إحصائية الاختبار أو القيمة المحسوبة تنتمي إلى مجال قبول الفرضية الصفرية وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية التي تدعي أن متوسط كمية النيكوتين في النوعين متساوي.

2.6.3. الحالة الثانية: تباينا المجتمعين σ_1^2 و σ_1^2 مجهولين وحجمي العينتين كبير

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 أكبر من 30 من مجتمع يتبع التوزيع $N \backsim (\mu_1, \sigma_1)$ ، وأخذت عينة عشوائية ثانية ومستقلة عن الأولى حجمها n_2 أكبر من 30 من مجتمع يتبع التوزيع $N \backsim (\mu_2, \sigma_2)$ وكان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولتين فإن إحصاءة الاختبار للفرضية H_0: $\mu_1 = \mu_2$ هـــي:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \backsim N(0;1)$$

حيث $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, هما متوسطي العينتين على التوالي.

تمريـــن 5

لبناء مركز تجاري حصل مستثمر على المعلومات التالية حول موقعين مختلفين ومداخيل سكانها. فأخذ عينة من الموقع الأول حجمها $n_1 = 30$، وعينة من الموقع الثاني حجمها $n_2 = 30$ فحصل على النتائج التالية: $\bar{x}_1 = 15500$ و $\bar{x}_2 = 14600$، $S_1 = 1800$ و $S_2 = 2400$. نفترض تساوي معدل دخل سكان الموقعين. اختبر هذه الفرضية عند مستوى خطر 5 %.

الحل

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

- **تحديد القيمة النظرية أو الجدولية:**

بما أن حجمي العينتين أكبر من 30 وتباينا المجتمعين مجهولين، إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع طبيعي وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية Z_{th}

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0,05}{2}\right)} = Z_{0,475} = \pm 1,96$$

- **تحديد إحصائية الاختبار Z_c**

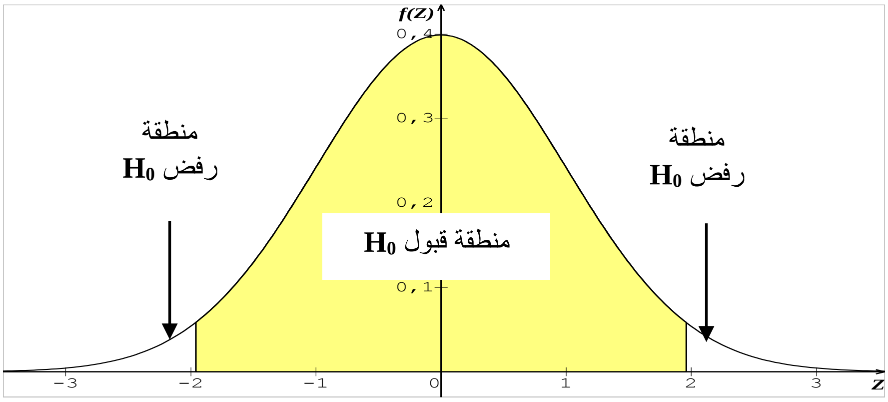
$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\frac{n_1}{n_1 - 1} S_1^2}{n_1} + \frac{\frac{n_2}{n_2 - 1} S_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Car $\frac{n_1}{n_1 - 1} \sim 1$ et $\frac{n_2}{n_2 - 1} \sim 1$ selon la loi des grands nombres.

$$Z_c = \frac{(15500 - 14600)}{\sqrt{\frac{(1800)^2}{30} + \frac{(2400)^2}{40}}} = 1,79$$

L'intervalle de zone d'acceptation de H_0 est $[-1,96 \quad ; \quad 1,96]$

الشكل (7.3): منطقة قبول *H0* بين القيمتين (*Z= -1,96* و *Z = +1,96*)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

$$-1,96 < Z_c = 1,79 < +1,96$$

إذن إحصائية الاختبار أو القيمة المحسوبة تنتمي إلى مجال قبول الفرضية الصفرية وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية التي تدعي أن متوسط دخل سكان الموقعين متساوي.

3.6.3. الحالة الثالثة: تباينا المجتمعين σ_1^2 و σ_1^2 مجهولين وحجمي العينتين صغير

في هذه الحالة نمير حالتين:

- تباينا المجتمعين σ_1^2 و σ_1^2 مجهولين ومتساويين؛
- تباينا المجتمعين σ_1^2 و σ_1^2 مجهولين و غير متساويين؛

أ. حالة تباينا المجتمعيـــن σ_1^2 و σ_1^2 مجهوليـــن ومتساوييـــن؛

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 أصغر من 30 من مجتمع متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، وأخذت عينة عشوائية ثانية ومستقلة عن الأولى حجمها n_2 أصغر من 30 من مجتمع متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، وكان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولتين و $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ فإن إحصاءة الاختبار للفرضية: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ هـــي:

$$T_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1).S_1^2 + (n_2 - 1).S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \backsim t(dl; \alpha)$$

تمريـــن 6

يدعي عميد كلية العلوم الاقتصادية، علوم التسيير والعلوم التجارية لجامعة مستغانم أنه لا يوجد فرق بين متوسط نقاط مقياس الإحصاء الاستدلالي لقسمي علوم التسيير وقسم العلوم التجارية. لمعرفة صحة هذا الادعاء، نسحب عينة عشوائية حجمها 12 علامة من قسم علوم التسيير و 10 علامات من قسم العلوم التجارية، فتحصلنا على النتائج التالية: $\bar{x}_1 = 2,7$ و $\bar{x}_2 = 2,9$، $S_1 = 0,4$ و $S_2 = 0,3$. هل تُساند هذا الادعاء عند مستوى خطر 5 % مع افتراض تساوي تباينا القسمين.

الحل

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

- **تحديد القيمة النظرية أو الجدولية**

بما أن حجمي العينتين أصغر من 30 وتباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين، إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t_{th}

$$t_{th} = t_{\left(dl;\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(n_1+n_2-2;\frac{0,05}{2}\right)} = t_{(20;0,025)} = \pm 2,086$$

L'intervalle de zone d'acceptation de H_0 est $[-2,086 \quad ; \quad +2,086]$

- **تحديد إحصائية الاختبار t_c**

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2+(n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(2,7-2,9)}{\sqrt{\frac{(12-1).(0,4)^2+(10-1).(0,3)^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{10}\right)}} = -1,3$$

- **اتخاذ القرار الاحصائي**

$$-2,086 < Z_c = -1,3 < +2,086$$

إذن إحصائية الاختبار أو القيمة المحسوبة تنتمي إلى مجال قبول الفرضية الصفرية وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية التي تدعي أن متوسط نقاط القسمين متساوية.

ب. حالة تباينا المجتمعيـــن σ_1^2 و σ_1^2 مجهوليـــن وغير متساوييـــن

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 أصغر من 30 من مجتمع متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، وأخذت عينة عشوائية ثانية ومستقلة عن الأولى حجمها n_2 أصغر من 30 من مجتمع متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، وكان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولتين و $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ فإن إحصاءة الاختبار للفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2$ هـــي:

$$T_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \backsim t(V;\alpha)$$

حيث$\bar{x}_1 \bar{x}_2$, هما متوسطي العينتين على التوالي، و V هي درجة الحرية المشتركة

$$V = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

تمريـن 7

نسحب عينتين عشوائيتين من مجتمعين مستقلين فتحصلنا على النتائج التالية

المجتمع 1	المجتمع 2
$n_1 = 9$	$n_2 = 8$
$\bar{x}_1 = 28$	$\bar{x}_2 = 25$
$S_1 = 2$	$S_2 = 1{,}2$

نفترض عدم تساوي تباينا المجتمعين، اختبر فرضية عدم وجود فروق خطر بين متوسطي المجتمعين عند مستوى خطر 5 %.

الحل

- **صياغة الفرضيـــات الإحصائيـــة**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

- **تحديد القيمة النظرية أو الجدوليـــة**

بما أن حجمي العينتين أصغر من 30 وتباينا المجتمعين مجهولين و غير متساويين، إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t_{th}

$$t_{th} = t_{\left(v;\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$V = \frac{\left(\frac{(2)^2}{9} + \frac{(1{,}2)^2}{8}\right)^2}{\frac{\left((2)^2/9\right)^2}{9-1} + \frac{\left((1{,}2)^2/8\right)^2}{8-1}} = 12{,}19$$

$$\Rightarrow t_{th} = t_{\left(v;\frac{\alpha}{2}\right)} = t(12{,}19; 0{,}025) = \pm 2{,}179$$

L'intervalle de zone d'acceptation de H_0 est $[-2{,}179 \quad ; \quad +2{,}179]$

- **تحديد إحصائية الاختبار t_c**

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(28-25)}{\sqrt{\frac{(2)^2}{9} + \frac{(1,2)^2}{8}}} = +3,79$$

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

$$-2,179 < Z_c + 3,79 > +2,179$$

إذن إحصائية الاختبار أو القيمة المحسوبة لا تنتمي إلى مجال قبول الفرضية الصفرية وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة التي تدعي وجود فروق خطر بين متوسطي المجتمعين.

جدول 1.3: المقياس الإحصائي للاختبار وقانون الإحصائية للفرق بين متوسطي مجتمعين

قانون المجتمع		الإحصائية	قانون الاحصائية
طبيعي $(n_1;\ n_2 > 30)$	σ_1^2 و σ_2^2 معلومتين	$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	N(0 ;1) اختبار Z
طبيعي $(n_1;\ n_2 > 30)$	σ_1^2 و σ_2^2 مجهولتين	$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	N(0 ;1) اختبار Z
طبيعي $(n_1;\ n_2 \leq 30)$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ومتساويين	$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2 + (n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	**t**$(n_1 + n_2 - 2)$ Student
طبيعي $(n_1;\ n_2 \leq 30)$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ وغير متساويين	$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	**t**(V, α) Student

المصدر: من إعداد الباحث

7.3. اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلين

المجتمعين غير مستقلين هما المجتمعين اللذين بياناتهما مرتبطة ببعضها البعض، مثل إجراء الاختبار على نفس المجموعة مرتين، حيث: $n_1 = n_2 = n$.

تمريـن 8: نفترض عينة من الأزواج وزوجاتهم.

$\bar{x}_1$ متوسط العينة الأولى مرتبط مع $\bar{x}_2$ متوسط العينة الثانية وهي نفس العينة الأولى. ويتم استخدام اختبار T لفحص فرضية متعلقة بمساواة متوسط متغير لعينتين غير مستقلتين.

وتُعطى إحصائية الاختبار بالشكل التالي:

$$T_c = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

حيث: $\bar{d}$ هو متوسط الفروق بين العينتين ويُعطى بالعلاقة التالية

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}\ ; \qquad d_i = x_i - y_i$$

أما تباين الفروق فيُعطى بالصيغة التالية:

$$S_d^2 = \frac{\sum d_i^2 - \frac{\left(\sum \bar{d}\right)^2}{n}}{n-1}; \quad donc \quad S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{\left(\sum \bar{d}\right)^2}{n}}{n-1}}$$

تمريــن 9

إذا كانت نقاط طلبة شعبة علوم التسيير في مادة الإحصاء الاستدلالي في الامتحان الأول والثاني كما هو مبين في الجدول أدناه، والمطلوب هو اختبار الفرق بين متوسطي نقاط الامتحانين في مقياس الإحصاء الاستدلالي عند مستوى خطر 5 %.

الحل

- طرح الفرضيات الإحصائية

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 = 0 \end{cases}$$

نحسب متوسط الفروق بين العينتين $\bar{d}$

الطلبة	$EMD\ 1$	$EMD\ 2$	$d_i = EMD_1 - EMD_2$	d_i^2
1	20	15	5	25
2	20	14	6	36
3	18	20	-2	4
4	15	17	-2	4
5	16	17	-1	1
6	12	18	-6	36
7	15	20	-5	25
8	18	18	0	0
9	18	14	4	16
10	18	17	1	1
11	14	8	6	36
12	16	18	-2	4
13	12	14	-2	4
14	17	14	3	9
15	14	12	2	4
16	19	20	-1	1
17	11	10	1	1
18	10	10	0	0
19	19	20	-1	1

20	12	15	-3	9
21	17	20	-3	9
$\sum$			**0**	**226**

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{0}{21} = 0$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{\left(\sum \bar{d}\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{226-0}{21-1}} = 3{,}3615$$

$$T_c = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{0-0}{\frac{3{,}3615}{\sqrt{21}}} = 0$$

$$t_{th} = t_{\left(n-1;\frac{\propto}{2}\right)} = t(20; 0{,}025) = \pm 2{,}086$$

$$-t_{\frac{\propto}{2}} < T_c < +t_{\frac{\propto}{2}}$$

$$-t_{\frac{\propto}{2}} = -2{,}086 < T_c = 0 < +t_{\frac{\propto}{2}} = +2{,}086$$

إذن إحصائية الاختبار تتواجد في منطقة قبول $\boldsymbol{H_0}$ ومنه نقبل الفرضية الصفرية التي تدعي أنه لا يوجد فرق بين نقاط الطالب في الامتحان الأول والثاني.

8.3. اختبار الفرضيـات لنسبـــة المجتمــع

إذا سُحبت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يتبع توزيع ذو الحدين (*Binomiale*)، وكان حجم العينة كبير، ونريد اختبار فرضية تساوي نسبة ظاهرة معينة في المجتمع لقيمة ما. فإن الفرضيات الإحصائية تأخذ الأشكال التالية:

نوع الاختبار	مجال قبول H_0	مجال رفض H_0
$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P \neq P_0 \end{cases}$	$Z_c \in \left[Z_{\left(\frac{\propto}{2}\right)} \;;\; Z_{\left(\frac{\propto}{2}\right)}\right]$	$Z_c > +Z_{\alpha/2}$ $Z_c < -Z_{\propto/2}$
$H_0: P = P_0$ $H_1: P > P_0$	$Z_c \in [-\infty \;;\; +Z_\alpha]$	$Z_c > +Z_\alpha$
$H_0: P = P_0$ $H_1: P < P_0$	$Z_c \in [-Z_\alpha \;;\; +\infty]$	$Z_c < -Z_\alpha$

المصدر: من إعداد الباحث

حيث أن إحصائية الاختبار Z_c تُعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$Z_c = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_{0(1-P_0)}}{n}}}$$

تمريــن 10

اذا كانت نسبة الحقائب التالفة لإحدى المصانع تساوي 30% اختيرت عينة مكونة من 1000 حقيبة فكان من بينها 400 حقيبة تالفة. فهل تدل هذه النتائج على أن نسبة الحقائب التالفة يزيد عن 30% من انتاج هذا المصنع استخدمي مستوى خطر 1 %.

الحل

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0 : P = 0,3 \\ H_1 : P > 0,3 \end{cases}$$ اختبار أحادي الاتجاه من اليمين

- **حساب إحصائية الاختبار Z_C المحسوبة**

$$Z_c = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_{0(1-P_0)}}{n}}} \; ; \quad \overline{P} = \frac{x}{n} = \frac{400}{1000} = 0,4$$

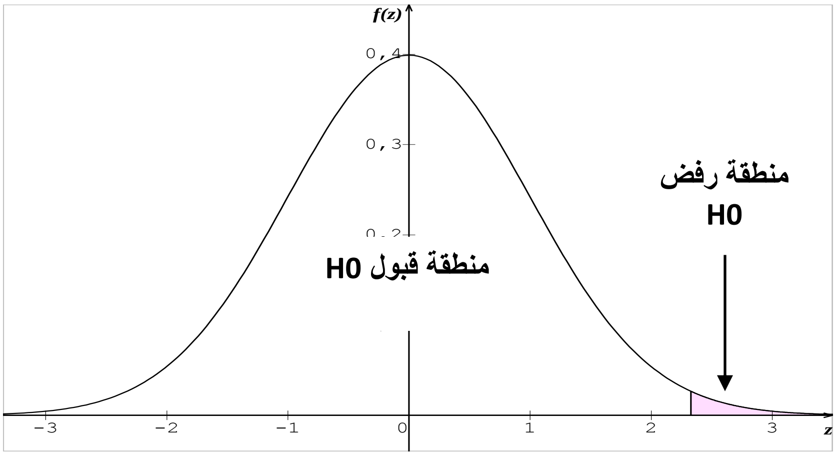
$$Z_c = \frac{0,4 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3 * 0,7}{1000}}} = 6,90$$

- **تحديد القيمة الجدولية بناءاً على نوع الاختبار**

$$Z_{th} = Z_{(0,5-\propto)} = Z_{(0,5-0,01)} = Z_{0,490} = +2,33$$

$$I_{Accepté} = [-\infty \quad ; \quad +2,33]$$

الشكل (8.3): منطقة قبول *H0* عند القيمة (*Z*< *+2,33*)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

$$Z_c = 6,90 > +2,33$$

بما أن إحصاء الاختبار Z_C لا تنتمي إلى مجال القبول

إذن القرار نرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة، أي أن نسبة الحقائب التالفة في المصنع تساوي تزيد عن 30%، بدرجة ثقة 99%.

9.3. اختبار الفرضيات للفرق بين نسبتي مجتمعين

لتكن لدينا عينتان عشوائيتان مستقلتان حجمهما n_1 و n_2 والنسبتان للصفة المدروسة هما على التوالي $\bar{P}_1$، $\bar{P}_2$ تم اختيار هاتين العينتين من مجتمعين مختلفين، المجتمع الأول يحتوي على النسبة P_1 والمجتمع الثاني يحتوي على النسبة P_2 (مجهولتان). فعلى أساس هاتين العينتين نود معرفة ما إذا كانت نسبتي المجتمعين متساويتين أم لا.

إن توزيع المعاينة لنسبة ظاهرة ما في المجتمعين تتبع التوزيع الطبيعي: $N\left(P_1, \sqrt{\frac{P_1q_1}{n}}\right)$، و $N\left(P_2, \sqrt{\frac{P_2q_2}{n}}\right)$، وعليه فإن الفرق $p_1 - p_2$ يتبع التوزيع الطبيعي $N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{P_1q_1}{n} + \frac{P_2q_2}{n}}\right)$

وتعطى إحصائية الاختبار وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{p}\bar{q}}{n_2}}}$$

$$\bar{p} = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \,{}^{x_1}\!/_{n_1} + n_2 \,{}^{x_2}\!/_{n_2}}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

حيث: $\bar{p}$ هي المتوسط المرجح لنسبتي العينتين $\bar{P}_1$، $\bar{P}_2$

أما اتخاذ القرار الإحصائي فيكون حسب نوع الاختبار كما يلي:

مجال رفض H_0	مجال قبول H_0	نوع الاختبار
$Z_c > +Z_{\alpha/2}$ $Z_c < -Z_{\alpha/2}$	$Z_c \in \left[Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \;;\; Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$	$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$
$Z_c > +Z_\alpha$	$Z_c \in [-\infty \;;\; +Z_\alpha]$	$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases}$
$Z_c < -Z_\alpha$	$Z_c \in [-Z_\alpha \;;\; +\infty]$	$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 < P_2 \end{cases}$

تمريــن 11

لمعرفة الفرق بين نسبة السائقين الذين يستعملون حزام الأمن في ولايتي مستغانم ووهران، نسحب عينة عشوائية حجمها 100 من كل ولاية، فتبين أن 80 سائق من ولاية مستغانم يستعملون حزام الأمن و70 من ولاية وهران يستعملون حزام الأمن.

اختبر الفرضيات الإحصائية عند مستوى خطر 5 %.

الحل

$n_1 = 100; \quad n_2 = 100\,; \ \bar{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{80}{100} = 0{,}80 \qquad \bar{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{70}{100} = 0{,}70$

$\bar{p} = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1+n_2} = \frac{100*0{,}80+100*0{,}70}{100+100} = 0{,}75 \Rightarrow q = 1 - \bar{p} = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

$$Z_c = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{p}\bar{q}}{n_2}}} = \frac{0{,}80 - 0{,}70}{\sqrt{\frac{0{,}75 * 0.25}{100} + \frac{0{,}75 * 0{,}25}{100}}} = 1{,}63$$

القرار الاحصائي	مجال قبول H_0	نوع الاختبار
نقبل H_0	$Z_c = +1{,}63 \in [-1{,}96 \ ; \ +1{,}96]$	$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$
نقبل H_0	$Z_c = +1{,}63 \in [-\infty \ ; \ +1{,}65]$	$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases}$
نقبل H_0	$Z_c \in [-1{,}65 \ ; \ +\infty]$	$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 < P_2 \end{cases}$

10.3. اختبار الفرضيـــات لتبايـــن المجتمـــع σ^2

عند الرغبة في اختبار الفرضية أن التباين لمجتمع طبيعي يساوي قيمة معينة σ_0^2 فإن إحصاءة الاختبار المناسبة هي: $\chi_C^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ، والتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي χ^2 يُسمى توزيع كاي مربع بدرجة حرية $dl = n\text{-}1$، وبالتالي فإن اتخاذ القرار الإحصائي يكون كما يلي:

مجال رفــض H_0	مجال قبـــول H_0	نوع الاختبـــار
$\chi_c^2 > \chi^2_{(dl;\,\alpha/2)}$ $\chi_c^2 < \chi^2_{(dl;1-\alpha/2)}$	$\chi_c^2 \in \left[\chi^2_{\left(dl;1-\frac{\alpha}{2}\right)} \ ; \ \chi^2_{\left(dl;\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$	$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$
$\chi_c^2 > \chi^2_{(dl;\,\alpha)}$	$\chi_c^2 < \chi^2_{(dl;\,\alpha)}$	$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$
$\chi_c^2 < \chi^2_{(dl;1-\alpha)}$	$\chi_c^2 > \chi^2_{(dl;1-\alpha)}$	$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$

تمريـــن 12

يدعي صاحب مصنع أن مدة صلاحية منتوجه يزيد انحرافه عن سنتين، ولمعرفة صحة هذا الادعاء أخذنا عينة عشوائية حجمها 25 فوجدنا متوسط مدة صلاحية هذا المنتوج هو 3 سنوات وانحرافها المعياري هو 2,5 سنوات.

هل تؤيد هذا الادعاء أم تفنده عند مستوى خطر 1 %

الحل

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

σ_0: الانحراف المعياري الافتراضي للمجتمع (المصنع)

$$\begin{cases} H_0{:}\sigma=2 \\ H_1{:}\sigma>2 \end{cases}$$ اختبار أحادي الاتجاه من اليمين

- **استخراج القيمة الجدولية من الجدول الإحصائي لـــ χ^2**

$$\chi^2_{(dl;\,\alpha)} = \chi^2_{(n-1;\,\alpha)} = \chi^2_{(25-1;\,0{,}01)} = \chi^2_{(24;\,0{,}01)} = 42{,}98$$

- **حساب إحصائية الاختبار χ^2_c**

$$\chi^2_C = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)(2{,}5)^2}{2^2} = 37{,}5$$

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

$$\chi^2_C = 37{,}5 < \chi^2_{(24;\,0{,}01)} = 42{,}98$$

إحصائية الاختبار χ^2_C تتواجد في منطقة قبول H_0 وبالتالي نقبل H_0 ونرفض H_1 التي تدعي أن مدة صلاحية منتوجه يزيد انحرافه عن سنتين.

11.3. اختبـــار الفرضيـــات لنسبـــة تباينـــا مجتمعيـــن

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1\,,\,\sigma_1^2)$ وأخذت عينة مستقلة عن الأولى حجمها n_2 من مجتمع $N(\mu_2\,,\,\sigma_2^2)$ وكان s_1^2 تباين العينة الأولى و s_2^2 تباين العينة الثانية، فإن إحصاءة الاختبار المناسب هو المتغير العشوائي F، حيث:

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1;n_2-1;\,\alpha)}$$

والتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي F يُسمى بتوزيع فيشر، ويتم اتخاذ القرار الإحصائي كما يلي:

الفرضية البديلة H_1	رفض H_0
$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F_c < F_{(d_1,d_2,1-\alpha/2)}$ أو $F_c > F_{(d_1,d_2,\alpha/2)}$
$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F_c > F_{(d_1,d_2,\alpha)}$
$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F_c < F_{(d_1,d_2,1-\alpha)}$

تمريـن 13

نسحب عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين مختلفين فكانت النتائج المتحصل عليها كما يلي:

$$n_1 = 15; \quad n_2 = 11; \quad S_1 = 100; \qquad S_2 = 144$$

اختبر فرضية تساوي تباينا المجتمعين عند مستوى خطر 5 %.

الحل

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$ اختبار ثنائي الاتجاه

- **استخراج القيم الجدولية من الجدول الإحصائي لــ F**

$$\begin{cases} F_{(d_1;\ d_2;\ \alpha)} = F_{(n_1-1;\ n_2-1;\ 0,05)} = F_{(14;\ 10;\ 0,05)} = 2,86 \\ F_{(d_2;\ d_1;\ \alpha)} = F_{(n_2-1;\ n_1-1;\ 0,05)} = F_{(10;\ 14;\ 0,05)} = 2,60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_G = \dfrac{1}{F_{(n_1-1;\ n_2-1;\ 0,05)}} = \dfrac{1}{2,86} = 0,35 \\ F_D = F_{(n_2-1;\ n_1-1;\ 0,05)} = F_{(10;\ 14;\ 0,05)} = 2,60 \end{cases}$$

- **حساب إحصائية الاختبار F_c**

$$F_c = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1} S_1^2}{\frac{n_2}{n_2-1} S_2^2} = \frac{\frac{15}{14}.(100)^2}{\frac{11}{10}.(144)^2} = 0,47$$

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

$$F_G < F_c < F_D$$

$$F_G = 0,35 < F_c = 0,47 < F_D = 2,60$$

إحصائية الاختبار F_c تتواجد في منطقة قبول H_0 وبالتالي نقبل H_0 التي تدعي تساوي تباينا المجتمعين.

جدول 2.3: ملخص الإحصاءات المستخدمة في الاختبارات

المجتمع	العينات	إحصائية الاختبار	توزيع الإحصاءة
مجتمع غير محدود و σ معلوم	$n \geq 30$	$Z_c = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0;1)$
مجتمع محدود و σ معلوم	$n \geq 30$	$Z_c = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$	$N(0;1)$
مجتمع غير محدود و σ مجهول	$n < 30$	$t_c = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	t_d=n-1
مجتمع محدود و σ مجهول	$n < 30$	$t_c = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$	t_d=n-1
اختبار النسبة في المجتمع	$n \geq 30$	$Z_c = \dfrac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}}$	$N(0;1)$
	$n \geq 30$	$Z_c = \dfrac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$	$N(0;1)$

تباين مجتمع طبيعي وانحرافه المعياري معلوم	$n < 30$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$= \text{n-1}\chi_d^2$
النسبة بين مجتمعين طبيعيين	$n < 30$	$F_c = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$	$F(n_1\text{-}1;n_2\text{-}1)$
الفرق بين متوسطي مجتمعين معلومين التباين	صغيرة أو كبيرة	$Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0;1)$
الفرق بين متوسطي مجتمعين مجهولين التباين	كبيرة	$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$N(0;1)$
الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين معلومي التباين	صغيرة	$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0;1)$
الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين مجهولين التباين وبفرض تساوي التباين $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$	صغيرة	$t_c = \frac{(\bar{x}_1\text{-}\bar{x}_2)\text{-}(\mu_1\text{-}\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1\text{-}1).S_1^2+(n_2\text{-}1).S_2^2}{n_1+n_2\text{-}2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	$t_d = n_1 + n_2 - 2$
الفرق بين متوسطين مجتمعين غير مستقلين	مزدوجة وكبيرة	$Z = \frac{\bar{D} - D}{S_{\bar{p}}/\sqrt{n}}$	$V(0,1)$
الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعي غير مستقلين	مزدوجة وصغيرة	$t = \frac{\bar{D} - D}{S_{\bar{p}}/\sqrt{n}}$	$t_v = n - 1$
الفرق بين نسبتين في مجتمعين مختلفين	كبيرة	$Z_c = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{p}\bar{q}}{n_2}}}$ $\bar{p} = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1 + n_2}$	$N(0;1)$

المصدر: من إعداد الباحث.

خلاصـــة الفصـــل

تُعتبر عملية اختبار الفرضيات الإحصائية أحد أهم المواضيع أو الأركان الأساسية للاستدلال الإحصائي الذي يهدف إلى اتخاذ القرار بشأن القيمة المختبرة أو المعلنة لمعلمة المجتمع من خلال فحص الفرضيات والتخمينات حولها انطلاقا من الشواهد والأدلة التي تُقدم من العينة (إحصائيات العينة).

تماريـــن إضافيـــة

التمرين 1 (إمتحان السنة الجامعية 2013-2014)

لمعرفة سعر سلعة معينة، اخترنا 15 دكان (***Magasin***) لمدينة ما، فتحصلنا على النتائج المدونة في الجدول أسفله:

Unité : **U.M**

42,7	42,6	43	43,5	42,8	43,1	43,6	42,9
41,6	42,8	42,9	43,2	42,6	43,1	43,1	-----------

ليكن Xi متغيرة عشوائية تمثل سعر السلعة محل الدراسة. نحدد مستوى بـــ **5 %**.

1. أعط تقديـــــراً نقطياً لمتوسط المجتمع (**μ**) و انحرافه المعياري (**δ**)؛
2. هل يمكن أن نقبل الفرضية: **E(X) = 43,0**؟
3. هي يمكن أن نقبل الفرضية: **Var(X) = 0,1**؟

التمرين 2

تنتج شركة أسلاك معدنية تباين قوة المقاومة للتلف للأسلاك لا تتعدى 30000 وادعت الشركة بأن إنتاجها للطريقة الجديدة المستخدمة الآن تزيد من تباين قوة المقاومة لتلف الأسلاك. وللتحقق من صحة الإدعاء سحبنا عينة عشوائية مكونة من 10 أسلاك من إنتاج الشركة فوجدنا تباينها 40000.

اختبر فرضية وجود زيادة خطر في التباين عند مستوى خطر **α = 1%**.

التمرين 3

يعرف مركز تجنيد بالجيش من الخبرة الماضية أن وزن المجند يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ يساوي 80 كلغ وانحراف معياري σ يساوي 10 كلغ. ويرغب مركز التجنيد أن يختبر، عند مستوى خطر 1%، ما إذا كان متوسط وزن مجند هذا العام أكبر من 80 كيلو جراماً. ولعمل هذا، فقد أخذ عينة عشوائية من 25 مجنداً حيث وجد أن متوسط الوزن في العينة 85 كيلو جراماً.

كيف يُمكن إجراء هذا الاختبار؟

التمرين 4 (إمتحان السنة الجامعية 2013-2014)

يرغب الخبراء في مقارنة المدة الزمنية للإنتاج المزعومة في مصنعين. لمعرفة هذا، أخذوا عينتين عشوائيتين مستقلتان من هذين المصنعين فخلصوا إلى النتائج الموضحة في الجدول التالي:

	Usine 1	Usine 2
عدد القطع المصنعة	12	15
المدة الزمنية المتوسطة (بالدقائق)	45,1	50,8
الانحراف المعياري الملاحظ	6	10

- هل يمكن اعتبار عند مستوى خطر $\alpha = 5\%$ أن فرضية تساوي تباينا المدتين الزمنيتين للمصنعين صحيحة؟؛
- على ضوء النتائج المحصلة، و عند مستوى خطر $\alpha = 5\%$، هل يمكن مساندة الخبراء على أن المدة الزمنية للإنتاج في المصنع الأول مماثلة إلى تلك التي في المصنع الثاني؟

التمرين 5 (إمتحان السنة الجامعية 2017-2018)

تقوم الوكالة الوطنية للتشغيل (ANEM) لولاية ما بتحقيق حول مدة البحث عن العمل خلال مدة ثمانية أشهر على عينة من المتخرجين ذوي الشهادات للولاية الذين يبلغ تعدادهم حسب إحصائيات الوكالة 3000 متخرج، وخلصت إلى النتائج المدونة في الجدول أدناه:

Durée de recherche (en Mois)	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 7[	[7 ; 8[
Nombre de diplômés	13	13	8	6	3	1	3	1

الشخص المكلف بالتحقيق أكد أن المدة المتوسطة للبحث عن العمل للمتخرجين ذوي الشهادات أقل من 3 أشهر.

اختبر هذه الفرضية عند مستوى خطر $\alpha = 5\%$.

التمرين 6 (إمتحان السنة الجامعية 2017-2018)

يرغب مخبر التحاليل الطبية في مقارنة تأثير نوعين من الأدوية العصبية على المرضى، نعتبر الوقت الضروري لتهدئة قلقهم، نطبق على 11 مريض الدواء الأول A وعلى 14 مريض آخر الدواء الثاني B. وسجل النتائج المتوصل إليها في الجدول أدناه:

Groupe A			**Groupe B**		
$n_A = 11$	$\sum x = 14{,}6$	$\sum x^2 = 23{,}34$	$n_B = 14$	$\sum x = 39{,}9$	$\sum x^2 = 198{,}91$

من خلال هذه النتائج المتحصل عليها يرغب المخبر في معرفة وجود فرق معنوي للوقت الضروري لتهدئة القلق بين النوعين من الأدوية العصبية. ونيابة عن المخبر، قم باختبار هذه لفرضية عند مستوى خطر $\alpha = 5\%$.

التمرين 7 (إمتحان السنة الجامعية 2017-2018)

الجدول أدناه يُبين نتيجة التنقيط (Scores) لمجموعة من الذكور والإناث تقدموا لإجتياز اختبار (DALF)؛

HOMMES					FEMMES							
24	69	23	95	43	86	79	64	40	82	39	25	33
48	60	35	53	-----	41	93	54	44	31	15	62	-----
$\sum x_i=450;\ \sum x_i^2=26678$					$\sum x_i=788;\ \sum x_i^2=49504$							

هل يُمكننا اعتبار تساوي متوسط التنقيط (Scores) عند الجنسين عند مستوى خطر 1 %؟

التمرين 8 (إمتحان السنة الجامعية 2016-2017)

على إثر معالجة مجموعة من القوارض في مجتمع متكون من 800، نسحب عينة عشوائية متكونة من **10** حيوانات ونقيس أوزانها. فتحصلنا على الأوزان بالغرام كما يلي:

83	**81**	**84**	**80**	**85**	**87**	**89**	**84**	**82**	**80**

مع العلم أن: $\sum x_i = \mathbf{835} \quad et \quad \sum x_i^2 = \mathbf{69801}$

نعلم أن الوزن المتوسط للقوارض غير المعالجة هو **87,6** غ، والانحراف المعياري هو **2** غ.

1. قدر نقطياً معالم المجتمع (Estimer ponctuellement les paramètres de la population)
2. عند مستوى الخطر **5 %**، اختبر الفرضية القائلة: "المعالجة ليس لها أثر على الوزن المتوسط" مقابل أن "المعالجة تُخفض من الوزن المتوسط".

التمرين 9 (مسابقة دكتوراه الطور الثالث جامعة بسكرة أكتوبر 2015)

بلعت نسبة الذكور في المؤسسة (A) 0,3 وفي المؤسسة (B) 0,2، فإذا قمنا بسحب عينتين عشوائيتين من المؤسسة الأولى (A) بحجم 100 والثانية من المؤسسة (B) بحجم 200.

- حدد توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين؛
- ما هو احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي الذكور في المؤسستين أكبر من 0,06؛
- اختبر الفرض القائل بأن نسبتي الذكور في المؤسستين متساويين بمستوى الخطر 5%.

حلول التمارين

التمرين 1

1. التقديـــــر النقطي لمتوسط المجتمع (µ) و انحرافه المعياري (δ)؛

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{643{,}5}{15} = 42{,}9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.S = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.\sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{15}{15-1}} * \sqrt{\frac{27609{,}15}{15} - (42{,}9)^2} = 0{,}46$$

2. اختبار فرضية متوسط المجتمع حول قيمة E(X) = 43,0

- طرح الفرضيات الإحصائية

$$\begin{cases} \mathbf{H_0}: \mu = 43{,}0 \\ \mathbf{H_1}: \mu \neq 43{,}0 \end{cases}$$ اختبار ثنائي الاتجاه

- **معرفة طبيعة التوزيع وتحديد المقياس الإحصائي للاختبار**

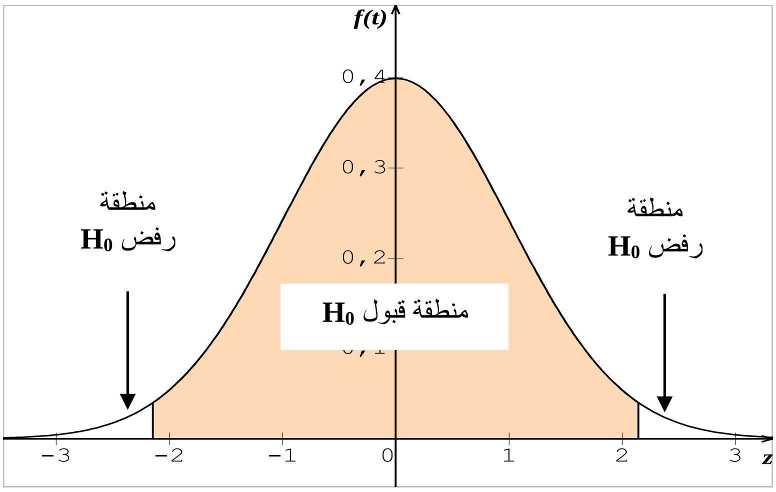
لدينا n = 15، والانحراف المعياري للمجتمع مجهول إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع ستودنت وبالتالي فإن المقياس الإحصائي للاختبار هو **t.**

$$t_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}} = \frac{42{,}9-43}{0{,}447/\sqrt{15-1}} = -0{,}83$$

- **استخراج القيمة الجدولية**

$$t_{\left(n-1,\ \frac{\alpha}{2}\right)} = t_{(15-1,\ 0.025)} = t_{(14,\ 0.025)} = \pm 2{,}145$$

الشكل (9.3): منطقة قبول *H0* بين القيمتين (*t = -2,145* و *t= 2,145*)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي [2,145+ ; 2,145-]

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

نقوم بمقارنة القيمة الجدولية t_{th} بالمقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) t_c

$$\mathbf{-2{,}145 < -0{,}83 < +2{,}145}$$

$$-0{,}83 \in]-2{,}145 \quad ; \quad +2{,}145[$$

المقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) t_c تتواجد في منطقة رفض H_0، إذن نقبل H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1.

3. **اختبار فرضية تباين المجتمع حول قيمة Var(X) = 0,1**

- **طرح الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 0{,}1 \\ H_1: \sigma^2 \neq 0{,}1 \end{cases} \quad \text{اختبار ثنائي الاتجاه}$$

- حساب إحصائية الاختبار

$$\chi_C^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1) * 0{,}2}{0{,}1} = 28$$

- **استخراج القيم الجدولية**

$$\chi^2_{tabulé_D} = \chi^2_{\left(n-1;\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(14;\,0{,}025)} = 26{,}12$$

$$\chi^2_{tabulé_G} = \chi^2_{\left(n-1;1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(14;0{,}975)} = 5{,}63$$

إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي [26,12 ; 5,63]

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

نقوم بمقارنة القيمة الجدولية $\chi_{tabulé}$ بالمقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) χ_c^2

$$\mathbf{5{,}63 < 28 < 26{,}12}$$

$$28 \in]5{,}63 \quad ; \quad 26{,}12[$$

المقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) χ_c تتواجد في منطقة قبول H_0، إذن نقبل H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1.

التمرين 2

$$\sigma_0^2 = 30000 \quad S^2 = 40000 \quad n = 10 \quad \alpha = 1\%$$

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 30000 \\ H_1: \sigma^2 > 30000 \end{cases} \quad \text{اختبار أحادي الاتجاه من اليمين}$$

- **استخراج القيمة الجدولية من الجدول الإحصائي لـــ** χ^2

$$\chi^2_{(dl;\,\alpha)} = \chi^2_{(n-1;\,\alpha)} = \chi^2_{(10-1;\,0{,}01)} = \chi^2_{(9;\,0{,}01)} = 21{,}67$$

- **حساب إحصائية الاختبــار** χ^2_c

$$\chi^2_C = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)40000}{30000} = 12$$

- **اتخاذ القرار الإحصائــي**

$$\chi^2_C = 12 < \chi^2_{(9;\,0{,}01)} = 21{,}67$$

إحصائية الاختبار χ^2_C تتواجد في منطقة قبول H_0 وبالتالي نقبل H_0 ونرفض H_1 التي تدعي وجود زيادة في تباين قوة المقاومة لتلف الأسلاك.

التمرين 3

- **طرح الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} \mathbf{H_0}: \mu = 80 \\ \mathbf{H_1}: \mu > 80 \end{cases}$$

اختبار أحادي الاتجاه من اليمين

- **معرفة طبيعة التوزيع وتحديد المقياس الإحصائي للاختبار**

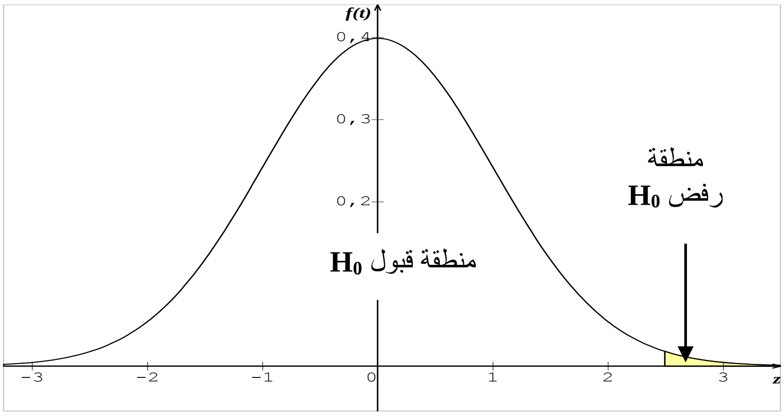
لدينا n = 25، والانحراف المعياري للمجتمع معلوم إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع ستودنت t وبالتالي فإن المقياس الإحصائي للاختبار هو **t.**

$$\boldsymbol{t_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{85-80}{10/\sqrt{25}} = +2{,}5}$$

- **استخراج القيمة الجدولية**

$$t_{(n-1,\ \alpha)} = t_{(25-1,\ 0{,}01)} = t_{(24,\ 0.01)} = +2{,}492$$

الشكل (10.3): منطقة قبول *H0* بين القيمتين (*t = -2,492* و *t= 2,492*)



<u>المصدر</u>: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي]2,492+ ; ∞-[

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

نقوم بمقارنة القيمة الجدولية t_{th} بالمقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) t_c

$$-2{,}492 < +2{,}5 > +2{,}492$$

$$+2{,}5 \notin]-2{,}492 \quad ; \quad +2{,}492[$$

المقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) t_c تتواجد في منطقة قبول H_0، إذن نقبل H_0.

التمرين 4

1. **اختبار فرضية تساوي تباينا المدتين الزمنيتين للمصنعين عند مستوى خطر 5 %.**

- **صياغة الفرضيات الاحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases} \text{اختبار ثنائي الاتجاه}$$

- **استخراج القيم الجدوليــة من الجدول الإحصائي لـــ F**

$$\begin{cases} F_{(d_1,d_2,\propto)} = F_{(n_1-1,n_2-1,0{,}025)} = F_{(11;14;0{,}025)} = 2{,}56 \\ F_{(d_2,d_1,\propto)} = F_{(n_2-1,n_1-1,0{,}025)} = F_{(14;11;0{,}025)} = 2{,}74 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_G = \dfrac{1}{F_{(n_1-1,n_2-1,0{,}025)}} = \dfrac{1}{2{,}56} = 0{,}390 \\ F_D = F_{(n_2-1,n_1-1,0{,}025)} = F_{(10;14;0{,}05)} = 2{,}74 \end{cases}$$

- **حساب إحصائية الاختبار F_c**

$$F_c = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}S_1^2}{\frac{n_2}{n_2-1}S_2^2} = \frac{\frac{12}{11}.(6)^2}{\frac{15}{14}.(10)^2} = 0{,}366$$

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

$$F_G < F_c < F_D$$

$$F_G = 0{,}39 < F_c = 0{,}366 < F_D = 2{,}74$$

إحصائية الاختبار F_c تتواجد في منطقة قبول H_0 وبالتالي نقبل H_0 التي تدعي تساوي تباينا المدتين الزمنيتين للمصنعين.

2. **اختبار فرضية تساوي متوسط المدتين الزمنيتين للمصنعين عند مستوى خطر 5 %.**

   - **صياغة الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

   - **تحديد القيمة النظرية أو الجدولية**

بما أن حجمي العينتين أصغر من 30 وتباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين، إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t_{th}

$$t_{th} = t_{\left(dl;\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(n_1+n_2-2;\frac{0,05}{2}\right)} = t_{(25;0,025)} = \pm 2,060$$

L'intervalle de zone d'acceptation de H_0 est $[-2,060 \quad ; \quad +2,060]$

- تحديد إحصائية الاختبار t_c

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2+(n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(45,1-50,8)}{\sqrt{\frac{(12-1).(6)^2+(15-1).(10)^2}{12+15-2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)}} = -1,74$$

- اتخاذ القرار الاحصائي

$$-2,060 < Z_c = -1,74 < +2,060$$

إذن إحصائية الاختبار أو القيمة المحسوبة تنتمي إلى مجال قبول الفرضية الصفرية وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية التي تدعي أن متوسط المدة الزمنية للمصنع الأول تساوي متوسط المدة الزمنية للمصنع الثاني.

التمرين 5

الفئـــات	f_i	x_i	$f_i * x_i$	x_i^2	$f_i * x_i^2$
[0-1[	13	0,5	6,5	0,25	3,25
[1-2[	13	1,5	19,5	2,25	29,25
[2-3[	8	2,5	20	6,25	50
[3-4[	6	3,5	21	12,25	73,5
[4-5[	3	4,5	13,5	20,25	60,75
[5-6[	1	5,5	5,5	30,25	30,25
[6-7[	3	6,5	19,5	42,25	126,75
[7-8[	1	7,5	7,5	56,25	56,25
$\sum$	**48**	/	**113**	/	**430**

- حساب المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i * x_i}{f_i} = \frac{113}{48} = 2,35$$

- حساب الانحراف المعياري للعينة S

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i * x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\mathbf{430}}{48} - (2,35)^2} = 1,85$$

- **طرح الفرضيات الإحصائية**

اختبار أحادي الاتجاه من اليسار
$$\begin{cases} \mathbf{H_0}: \mu = 3 \\ \mathbf{H_1}: \mu < 3 \end{cases}$$

- **معرفة طبيعة التوزيع وتحديد المقياس الإحصائي للاختبار**

لدينا n = 48>30، والانحراف المعياري للمجتمع مجهول إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع طبيعي وبالتالي فإن المقياس الإحصائي للاختبار هو Z.

$$Z_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \; ; \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ou } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

5%*N = 0,05 (3000) = 150

n = 48 < 150 c-à-d: n < 5%N

إذن نقول بأن المجتمع غير منته (غير محدود) أي أن السحب تم بالارجاع. إذن $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

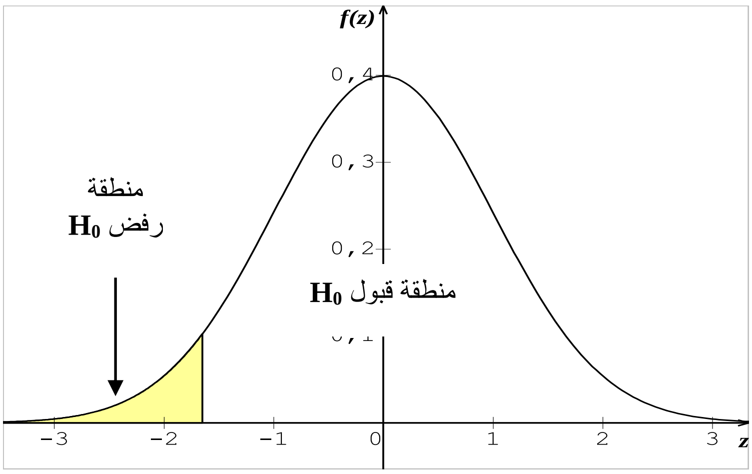
$$Z_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.S}{\sqrt{n}}} \text{ avec } \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \sim 1 \; car \; n > 30$$

$$\Rightarrow Z_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{2,35-3}{1,85/\sqrt{48}} = -2,43$$

- **استخراج القيمة الجدولية**

$$Z_{th} = Z_{(0,5-\alpha)} = Z_{(0,5-0,05)} = Z_{0,450} = -1,65$$

الشكل (11.3): منطقة قبول *H0* عند القيمة (*Z > -1,65*)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي [-1,65 ; +∞[

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

نقوم بمقارنة القيمة الجدولية t_{th} بالمقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) Z_c

-1,65 > -2,43

$-2,43 \notin]-1,65 \quad ; \quad +\infty[$ ou $-2,43 \in]-\infty \quad ; \quad -1,65[$

المقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) Z_c تتواجد في منطقة رفض H_0، إذن نرفض H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1.

التمرين 6

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_i}{n_1} = \frac{14,6}{11} = 1,33 \qquad n_1 = 11$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_i}{n_2} = \frac{39,9}{14} = 2,85 \qquad n_1 = 14$$

$$S_1^2 = \frac{\sum x_i^2}{n_1} - \bar{x}_1^2 = \frac{23,34}{11} - (1,33)^2 = 0,35$$

$$S_2^2 = \frac{\sum x_i^2}{n_2} - \bar{x}_2^2 = \frac{198,91}{14} - (2,85)^2 = 6,08$$

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$ اختبار ثنائي الاتجاه

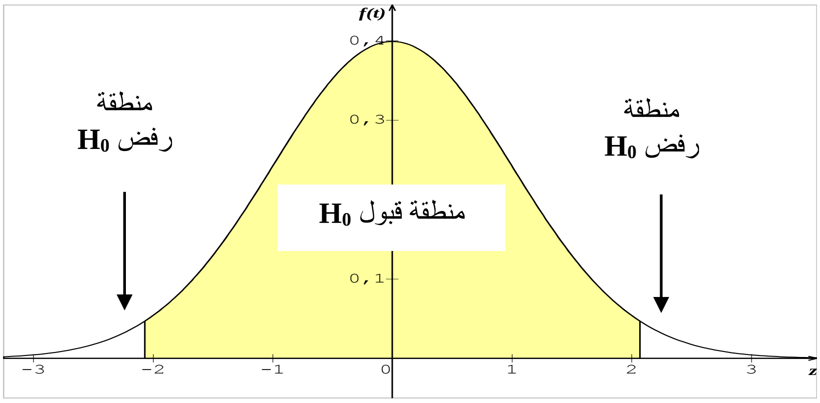
- **تحديد القيمة النظرية أو الجدولية**

بما أن حجمي العينتين أصغر من 30 وتباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين، إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t_{th}

$$t_{th} = t_{\left(dl; \frac{\propto}{2}\right)} = Z_{\left(n_1+n_2-2; \frac{0,05}{2}\right)} = t_{(23;0,025)} = \pm 2,069$$

L'intervalle de zone d'acceptation de H_0 est $[-2,069 \quad ; \quad +2,069]$

الشكل (12.3): منطقة قبول *H0* عند القيمة (*t= -2,069* و *t = +2,069*)



<u>المصدر</u>: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

- **تحديد إحصائية الاختبار t_c**

$$t_c=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2+(n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{(1,33-2,85)}{\sqrt{\frac{(11-1).(0,35)+(14-1).(6,08)}{11+14-2}\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{14}\right)}}=-1,99$$

- **اتخاذ القرار الاحصائي**

$$-2,069 < Z_c = -1,99 < +2,069$$

إذن إحصائية الاختبار أو القيمة المحسوبة تنتمي إلى مجال قبول الفرضية الصفرية وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية التي تدعي عدم وجود فروق خطر للوقت الضروري لتهدئة القلق بين النوعين من الأدوية العصبية.

التمرين 7

$$\bar{x}_1=\frac{\sum x_i}{n_1}=\frac{450}{9}=50 \qquad n_1=9$$

$$\bar{x}_2=\frac{\sum x_i}{n_2}=\frac{788}{15}=52,53 \qquad n_1=15$$

$$S_1^2=\frac{\sum x_i^2}{n_1}-\bar{x}_1^2=\frac{26678}{9}-(50)^2=464,22$$

$$S_2^2=\frac{\sum x_i^2}{n_2}-\bar{x}_2^2=\frac{49504}{15}-(52,53)^2=540,86$$

- **صياغة الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1=\mu_2 \\ H_1: \mu_1\neq\mu_2 \end{cases}$$ اختبار ثنائي الاتجاه

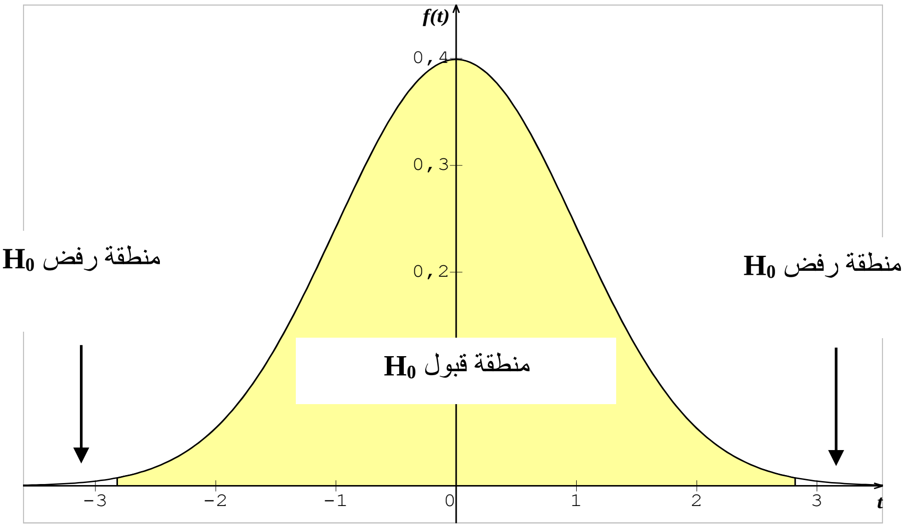
- **تحديد القيمة النظرية أو الجدولية**

بما أن حجمي العينتين أصغر من 30 وتباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين، إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t_{th}

$$t_{th}=t_{\left(dl;\frac{\propto}{2}\right)}=Z_{\left(n_1+n_2-2;\frac{0,05}{2}\right)}=t_{(22;0,005)}=\pm 2,819$$

L’intervalle de zone d’acceptation de H_0 est $[-2,819 \quad ; \quad +2,819]$

الشكل (13.3): منطقة قبول *H0* عند القيمة (*t= -2,819* و *t = +2,819*)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « **Sine qua non**»

- **تحديد إحصائية الاختبار t_c**

$$t_c=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2+(n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{(50-52,53)}{\sqrt{\frac{(9-1).(464,22)+(15-1).(540,86)}{9+15-2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{15}\right)}}=-0,26$$

- **اتخاذ القرار الاحصائي**

$$-2,819 < Z_c = -0,26 < +2,819$$

إذن إحصائية الاختبار أو القيمة المحسوبة تنتمي إلى مجال قبول الفرضية الصفرية وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية التي تزعم تساوي متوسط التنقيط عند الجنسين.

التمرين 8

$\sum x_i = 835$ et $\sum x_i^2 = 69801$; $n = 10$ $\mu_0 = 87,2;$ $\sigma = 2$

1. التقدير النقطي لمعالم المجتمع ($\hat{\mu}$) و ($\hat{\sigma}^2$)

أ. التقدير النقطي للمتوسط ($\hat{\mu}$)

$$\hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{835}{10} = 83,5$$

ب. تباين المجتمع ($\hat{\sigma}^2$)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}.S^2 = \frac{n}{n-1}.\left[\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{x}^2\right]$$

$$\Rightarrow\ \hat{\sigma}^2 = \frac{10}{10-1}.\left[\frac{69801}{10} - (83{,}5)^2\right]$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = 8{,}72$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{8{,}72} = 2{,}95$$

2. اختبار الفرضيات عند مستوى خطر 5 %

- **طرح الفرضيات الإحصائية**

$$\begin{cases} H_0: \mu = 87{,}6 \\ H_1: \mu < 87{,}6 \end{cases}$$ اختبار أحادي الاتجاه من اليسار

- **معرفة طبيعة التوزيع وتحديد المقياس الإحصائي للاختبار**

لدينا 30 > n = 10، والانحراف المعياري للمجتمع معلوم إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع طبيعي وبالتالي فإن المقياس الإحصائي للاختبار هو Z.

$$Z_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\ ; \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ou } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$5\%*N = 0{,}05\ (800) = 40$$

$$n = 10 < 40 \text{ c-à-d: } n < 5\%N$$

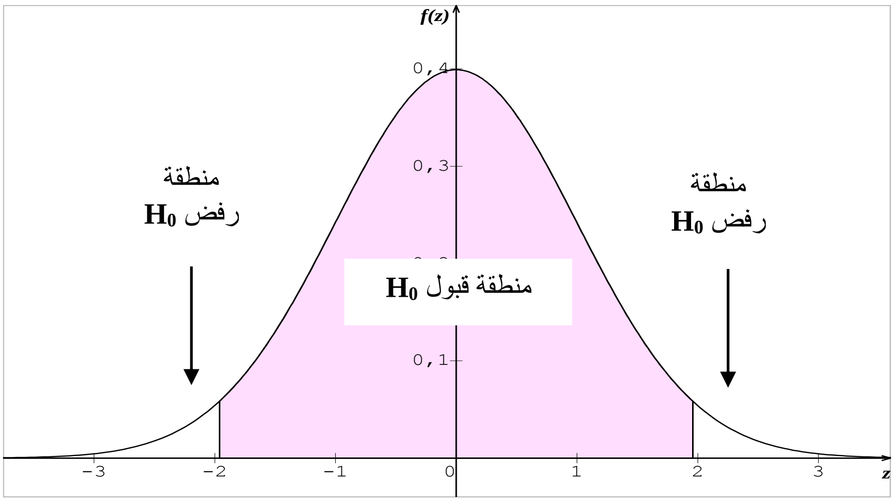
إذن نقول بأن المجتمع غير منته (غير محدود) أي أن السحب تم بالارجاع. إذن $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$Z_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{83{,}5-87{,}6}{2/\sqrt{10}} = -1{,}29$$

- **استخراج القيمة الجدولية**

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0{,}05}{2}\right)} = Z_{0{,}475} = \pm 1{,}96$$

الشكل (14.3): منطقة قبول *H0* عند القيمة (*Z = -1,96* و *Z = +1,96*)



<u>المصدر</u>: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي « Sine qua non»

إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي [1,96+ ; -1,96]

- **اتخاذ القرار الإحصائي**

نقوم بمقارنة القيمة الجدولية t_{th} بالمقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) Z_c

$$-1{,}96 < -1{,}29 < +1{,}96$$

$$-1{,}29 \in]-1{,}96 \quad ; \quad +1{,}96[$$

المقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) Z_c تتواجد في منطقة رفض H_0، إذن نقبل H_0 التي تدعي أن المعالجة ليس لها أثر على الوزن المتوسط.

التمرين 9

لدينا

$$n_1=100; \quad n_2 = 200; \quad p_1 = 0{,}3 \Rightarrow q_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}3 \Rightarrow q_2 = 0{,}7$$

- **تحديد توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين**

بما أن حجم العينتين كبير بالقدر الكافي فإن توزيع المعاينة للإحصائية $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ سيكون قريب من التوزيع الطبيعي بمتوسط وانحراف معياري قدرهما على التوالي كما يلي:

$$\mu_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = p_1 - p_2 = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$$

$$\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1 * q_1}{n_1} + \frac{p_2 * q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}3 * 0{,}7}{100} + \frac{0{,}2 * 0{,}8}{200}} = 0{,}0538$$

- **حساب احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي الذكور في المؤسستين أكبر من 0,06.**

بما ان التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعي فإن:

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 * q_1}{n_1} + \frac{p_2 * q_2}{n_2}}} = \frac{0{,}1 - 0{,}1}{0{,}0538} = 0{,}5$$

وعليه يكون الاحتمال كالآتي:

$$p(\bar{p}_1 - \bar{p}_2 > 0{,}06) = p(Z > 0{,}5) = 0{,}5$$

ومنه احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي الذكور في المؤسستين أكبر من 0,06 هو 0,5.

- **اختبار الفرض القائل بأن نسبتي الذكور في المؤسستين متساويين بمستوى خطر 5 %.**

$$\begin{cases} H_0: p_1 = p_2 \\ H_1: p_1 \neq p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0: p_1 - p_2 = 0 \\ H_1: p_1 - p_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0{,}05}{2}\right)} = Z_{0{,}475} = \pm 1{,}96$$

إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي [1,96+ ; 1,96-]

$$Z_c = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{\frac{p_1 * q_1}{n_1} + \frac{p_2 * q_2}{n_2}}} = \frac{0,3 - 0,2}{0,0538} = +1,858$$

اتخاذ القرار الإحصائي

نقوم بمقارنة القيمة الجدولية t_{th} بالمقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) Z_c

$$-1,96 < +1,858 < +1,96$$

$$+1,858 \in]-1,96 \quad ; \quad +1,96[$$

المقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) Z_c تتواجد في منطقة رفض H_0، إذن نقبل H_0

ومنه نقول بأن نسبتي الذكور في المؤسستين متساوية عند مستوى خطر 5 .%

الخاتمـــة العامــة

هدفت هذه المطبوعة البيداغوجية إلى تعريف الطلبة والمهتمين بعلم الإحصاء 3 أو الاستدلالي إن صح القول وأهميته ودوره في تسهيل عمل الباحثين في كيفية التعامل مع مجتمع البحث انطلاقاً من نظرية توزيع المعاينة للعينات المسحوبة من المجتمع والتي تُعد القاعدة أو اللبنة الأساسية للاستدلال الإحصائي، ثم تليها نظرية التقدير الإحصائي لمعالم المجتمع المجهولة وصولاً إلى اختبار الفرضيات الإحصائية وذلك لاتخاذ القرار بشأن ادعاء أو تخمين حول معالم المجتمع.

بيد أنه على الرغم من معالجة هذه المطبوعة لمثلث الاستدلال الإحصائي بشقيها النظري والتطبيقي، إلا أنها تبقى بحاجة إلى تنقيح حتى تشمل لكل محاور الاستدلال الإحصائي بكونه حقل واسع يتطلب بذل المزيد من الجهود حتى نتمكن بتوفيق من الله في تخريجها في كتاب شامل لكل هذه المحاور ويكون بمثابة مولود علمي إضافي ومدعم للطلبة والباحثين.

المصطلحـــات الإحصائيـة

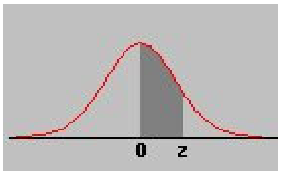
المصطلحات الإحصائيـــة لمعالـــم المجتمـــع وإحصائيـــات العينـــة

الرمز	المعنى الإحصائـــي	الصيغـــة الرياضيـــة
N	حجم المجتمع.	/
n	حجم العينة.	/
μ	متوسط المجتمع.	$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$
σ^2	تباين المجتمع.	$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}$
σ	الانحراف المعياري للمجتمع.	$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}}$
$\bar{x}$	متوسط العينة.	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ أو $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{f_i}$
S^2	تباين العينة.	$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ أو $\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{f_i}$
S	الانحراف المعياري للعينة.	$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ أو $\sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{f_i}}$
$\mu_{\bar{x}}$	متوسط توزيع المعاينة.	$\mu_{\bar{x}} = \mu$
$\sigma_{\bar{x}}^2$	تباين توزيع المعاينة.	$\sigma_{\bar{x}}^2 : \begin{cases} \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} ; si\ n < 0{,}05N \\ \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right] ; si\ \ n \geq 0{,}05N \end{cases}$
$\sigma_{\bar{x}}$	الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة.	$\sigma_{\bar{x}} : \begin{cases} \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; si\ n < 0{,}05N \\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} ; si\ \ n \geq 0{,}05N \end{cases}$
p	نسبة النجاح للمجتمع.	$p = \frac{X}{N}$
$\bar{p}$	نسبة النجاح للعينة.	$\bar{p} = \frac{x}{n}$
σ_p^2	تباين نسبة النجاح للمجتمع.	$\sigma_p^2 : \begin{cases} \sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{n} ; si\ \ n < 0{,}05N \\ \sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right] ;\ si\ \ n \geq 0{,}05N \end{cases}$
σ_p	الانحراف المعياري لنسبة النجاح للمجتمع.	$\sigma_p : \begin{cases} \sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; si\ \ n < 0{,}05N \\ \sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\frac{N-n}{N-1}} ;\ si\ \ n \geq 0{,}05N \end{cases}$

$\sigma_{\bar{p}}^2 : \begin{cases} \sigma_{\bar{p}}^2 = \dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}; si\ \ n < 0,05N \\ \sigma_{\bar{p}}^2 = \dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}\left[\dfrac{N-n}{N-1}\right];\ si\ \ n \geq 0,05N \end{cases}$	تباين نسبة النجاح للعينة.	$\boldsymbol{\sigma_{\bar{p}}^2}$
$\sigma_{\bar{p}} : \begin{cases} \sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-p)}{n}}; si\ \ n < 0,05N \\ \sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}\dfrac{N-n}{N-1}};\ si\ \ n \geq 0,05N \end{cases}$	الانحراف المعياري لنسبة النجاح للعينة.	$\boldsymbol{\sigma_{\bar{p}}}$

الملاحـــــــق

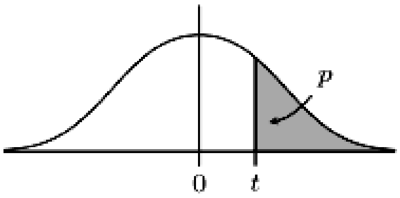
Standard Normal (Z) Table
Area between 0 and z



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

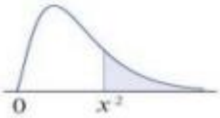
Table inverse de la loi de Student

t en fonction de p tel que $p = \mathbb{P}[T \geqslant t]$
pour T suivant une loi de Student.



ddl \ p	0,2	0,15	0,1	0,05	0,04	0,03	0,025	0,02	0,015	0,01	0,005
1	1,3764	1,9626	3,0777	6,3138	7,9158	10,5789	12,7062	15,8945	21,2049	31,8205	63,6567
2	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	3,3198	3,8964	4,3027	4,8487	5,6428	6,9646	9,9248
3	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	2,6054	2,9505	3,1824	3,4819	3,8960	4,5407	5,8409
4	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,3329	2,6008	2,7764	2,9985	3,2976	3,7469	4,6041
5	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,1910	2,4216	2,5706	2,7565	3,0029	3,3649	4,0321
6	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,1043	2,3133	2,4469	2,6122	2,8289	3,1427	3,7074
7	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,0460	2,2409	2,3646	2,5168	2,7146	2,9980	3,4995
8	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,0042	2,1892	2,3060	2,4490	2,6338	2,8965	3,3554
9	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	1,9727	2,1504	2,2622	2,3984	2,5738	2,8214	3,2498
10	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	1,9481	2,1202	2,2281	2,3593	2,5275	2,7638	3,1693
11	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	1,9284	2,0961	2,2010	2,3281	2,4907	2,7181	3,1058
12	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	1,9123	2,0764	2,1788	2,3027	2,4607	2,6810	3,0545
13	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	1,8989	2,0600	2,1604	2,2816	2,4358	2,6503	3,0123
14	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	1,8875	2,0462	2,1448	2,2638	2,4149	2,6245	2,9768
15	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	1,8777	2,0343	2,1314	2,2485	2,3970	2,6025	2,9467
16	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	1,8693	2,0240	2,1199	2,2354	2,3815	2,5835	2,9208
17	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	1,8619	2,0150	2,1098	2,2238	2,3681	2,5669	2,8982
18	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	1,8553	2,0071	2,1009	2,2137	2,3562	2,5524	2,8784
19	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	1,8495	2,0000	2,0930	2,2047	2,3456	2,5395	2,8609
20	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	1,8443	1,9937	2,0860	2,1967	2,3362	2,5280	2,8453
21	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	1,8397	1,9880	2,0796	2,1894	2,3278	2,5176	2,8314
22	0,8583	1,0614	1,3212	1,7171	1,8354	1,9829	2,0739	2,1829	2,3202	2,5083	2,8188
23	0,8575	1,0603	1,3195	1,7139	1,8316	1,9782	2,0687	2,1770	2,3132	2,4999	2,8073
24	0,8569	1,0593	1,3178	1,7109	1,8281	1,9740	2,0639	2,1715	2,3069	2,4922	2,7969
25	0,8562	1,0584	1,3163	1,7081	1,8248	1,9701	2,0595	2,1666	2,3011	2,4851	2,7874
26	0,8557	1,0575	1,3150	1,7056	1,8219	1,9665	2,0555	2,1620	2,2958	2,4786	2,7787
27	0,8551	1,0567	1,3137	1,7033	1,8191	1,9632	2,0518	2,1578	2,2909	2,4727	2,7707
28	0,8546	1,0560	1,3125	1,7011	1,8166	1,9601	2,0484	2,1539	2,2864	2,4671	2,7633
29	0,8542	1,0553	1,3114	1,6991	1,8142	1,9573	2,0452	2,1503	2,2822	2,4620	2,7564
30	0,8538	1,0547	1,3104	1,6973	1,8120	1,9546	2,0423	2,1470	2,2783	2,4573	2,7500
31	0,8534	1,0541	1,3095	1,6955	1,8100	1,9522	2,0395	2,1438	2,2746	2,4528	2,7440
32	0,8530	1,0535	1,3086	1,6939	1,8081	1,9499	2,0369	2,1409	2,2712	2,4487	2,7385
33	0,8526	1,0530	1,3077	1,6924	1,8063	1,9477	2,0345	2,1382	2,2680	2,4448	2,7333
34	0,8523	1,0525	1,3070	1,6909	1,8046	1,9457	2,0322	2,1356	2,2650	2,4411	2,7284
35	0,8520	1,0520	1,3062	1,6896	1,8030	1,9438	2,0301	2,1332	2,2622	2,4377	2,7238
36	0,8517	1,0516	1,3055	1,6883	1,8015	1,9419	2,0281	2,1309	2,2595	2,4345	2,7195
37	0,8514	1,0512	1,3049	1,6871	1,8001	1,9402	2,0262	2,1287	2,2570	2,4314	2,7154
38	0,8512	1,0508	1,3042	1,6860	1,7988	1,9386	2,0244	2,1267	2,2546	2,4286	2,7116
39	0,8509	1,0504	1,3036	1,6849	1,7975	1,9371	2,0227	2,1247	2,2524	2,4258	2,7079
40	0,8507	1,0500	1,3031	1,6839	1,7963	1,9357	2,0211	2,1229	2,2503	2,4233	2,7045
41	0,8505	1,0497	1,3025	1,6829	1,7952	1,9343	2,0195	2,1212	2,2482	2,4208	2,7012
42	0,8503	1,0494	1,3020	1,6820	1,7941	1,9330	2,0181	2,1195	2,2463	2,4185	2,6981
43	0,8501	1,0491	1,3016	1,6811	1,7931	1,9317	2,0167	2,1179	2,2445	2,4163	2,6951
44	0,8499	1,0488	1,3011	1,6802	1,7921	1,9305	2,0154	2,1164	2,2427	2,4141	2,6923
45	0,8497	1,0485	1,3006	1,6794	1,7911	1,9294	2,0141	2,1150	2,2411	2,4121	2,6896
46	0,8495	1,0483	1,3002	1,6787	1,7902	1,9283	2,0129	2,1136	2,2395	2,4102	2,6870
47	0,8493	1,0480	1,2998	1,6779	1,7894	1,9273	2,0117	2,1123	2,2380	2,4083	2,6846
48	0,8492	1,0478	1,2994	1,6772	1,7885	1,9263	2,0106	2,1111	2,2365	2,4066	2,6822
49	0,8490	1,0475	1,2991	1,6766	1,7878	1,9253	2,0096	2,1099	2,2351	2,4049	2,6800
50	0,8489	1,0473	1,2987	1,6759	1,7870	1,9244	2,0086	2,1087	2,2338	2,4033	2,6778
51	0,8487	1,0471	1,2984	1,6753	1,7863	1,9236	2,0076	2,1076	2,2325	2,4017	2,6757
52	0,8486	1,0469	1,2980	1,6747	1,7856	1,9227	2,0066	2,1066	2,2313	2,4002	2,6737
53	0,8485	1,0467	1,2977	1,6741	1,7849	1,9219	2,0057	2,1055	2,2301	2,3988	2,6718
54	0,8483	1,0465	1,2974	1,6736	1,7843	1,9211	2,0049	2,1046	2,2289	2,3974	2,6700
55	0,8482	1,0463	1,2971	1,6730	1,7836	1,9204	2,0040	2,1036	2,2278	2,3961	2,6682
56	0,8481	1,0461	1,2969	1,6725	1,7830	1,9197	2,0032	2,1027	2,2268	2,3948	2,6665
57	0,8480	1,0459	1,2966	1,6720	1,7825	1,9190	2,0025	2,1018	2,2258	2,3936	2,6649
58	0,8479	1,0458	1,2963	1,6716	1,7819	1,9183	2,0017	2,1010	2,2248	2,3924	2,6633
59	0,8478	1,0456	1,2961	1,6711	1,7814	1,9177	2,0010	2,1002	2,2238	2,3912	2,6618
60	0,8477	1,0455	1,2958	1,6706	1,7808	1,9170	2,0003	2,0994	2,2229	2,3901	2,6603
61	0,8476	1,0453	1,2956	1,6702	1,7803	1,9164	1,9996	2,0986	2,2220	2,3890	2,6589
62	0,8475	1,0452	1,2954	1,6698	1,7799	1,9158	1,9990	2,0979	2,2212	2,3880	2,6575
63	0,8474	1,0450	1,2951	1,6694	1,7794	1,9153	1,9983	2,0971	2,2204	2,3870	2,6561
64	0,8473	1,0449	1,2949	1,6690	1,7789	1,9147	1,9977	2,0965	2,2195	2,3860	2,6549
65	0,8472	1,0448	1,2947	1,6686	1,7785	1,9142	1,9971	2,0958	2,2188	2,3851	2,6536
66	0,8471	1,0446	1,2945	1,6683	1,7781	1,9137	1,9966	2,0951	2,2180	2,3842	2,6524
67	0,8470	1,0445	1,2943	1,6679	1,7776	1,9132	1,9960	2,0945	2,2173	2,3833	2,6512
68	0,8469	1,0444	1,2941	1,6676	1,7772	1,9127	1,9955	2,0939	2,2166	2,3824	2,6501
69	0,8469	1,0443	1,2939	1,6672	1,7769	1,9122	1,9949	2,0933	2,2159	2,3816	2,6490
70	0,8468	1,0442	1,2938	1,6669	1,7765	1,9118	1,9944	2,0927	2,2152	2,3808	2,6479

جدول كاي تربيع $\chi^2_{v,\alpha}$



Critical Values of Chi-Square Distributions

	x^2 Right-Tail Area									
df	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.96	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

0.95 quantiles for F distributions ($f_{0.05,d_1,d_2}$ values)

This table gives $f_{0.05,d_1,d_2}$ values for different (d_1, d_2)'s, where f_{a,d_1,d_2} is defined such that $P(F(d_1,d_2) > f_{a,d_1,d_2}) = a$ and $F(d_1,d_2)$ is the F distribution with (d_1,d_2) degrees of freedom.

d_2 \ d_1 *(degrees of freedom for the numerator)*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39

0.99 quantiles for F distributions ($f_{0.01,d_1,d_2}$ values)

This table gives $f_{0.01,d_1,d_2}$ values for different (d_1, d_2)'s, where f_{a,d_1,d_2} is defined such that $P(F(d_1, d_2) > f_{a,d_1,d_2}) = a$ and $F(d_1, d_2)$ is the F distribution with (d_1, d_2) degrees of freedom.

		d_1 *(degrees of freedom for the numerator)*															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
	1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287
	2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5
	3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4
	4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7
	5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29
	6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14
	7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91
	8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12
	9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57
	10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17
	11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86
	12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62
	13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43
	14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27
	15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13
d_2																	
	16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02
	17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92
	18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84
	19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76
	20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69
	21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64
	22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58
	23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54
	24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49
	25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45
	30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30
	40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11
	60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94
	120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76
	∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59

المراجــع

1. دومينيك سالفاتور، **الإحصاء والاقتصاد القياسي، سلسلة ملخصات شوم**، دار ماكجروهيل للنشر، 1982.
2. عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى، **الاستدلال الإحصائي 1، نظرية التقدير**، مجموعة النيل العربية، مصر، 1999.
3. بوعظم كمال، **الإحصاء الاستدلالي من الجانب النظري والتطبيقي**، دار زهران للنشر والتوزيع، عمان، 2010.
4. أحمد عودة بن عبد المجيد عودة، منصور بن عبد الرحمن القاضي، **الإحصاء الوصفي والاستدلالي، 2 الإحصاء الاستدلالي**، الطبعة الثالثة، مكتبة الفلاح للنشر والتوزيع، 2014.
5. عدنان عوض، **الإحصاء التطبيقي**، الشركة العربية المتحدة بالتعاون مع جامعة القدس المفتوحة، مصر، 2009.
6. سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، **مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، الطبعة الثانية، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2010.
7. طعمة حسين ياسين، حنوش إيمان حسين، **أساليب الإحصاء التطبيقي**، ط1، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.

8. PUPION, Pierre-Charles., ***Statistique pour la gestion***, Applications avec Excel, SPSS, Amos et SmartPLS.,3ème édition, Dunod, Paris, 2012.

9. FOURDRINIER Dominique., ***Statistique inférentielle – cours & exercices corrigés***. 2ème cycle, Dunod édition, 2002.

10. MATHE Armelle., ***L'essentiel des statistiques inférentielles, méthodes expliquées avec cas d'application corrigés***., 1ère édition, Gualino, 2016.

11. BISMANS Francis., ***Probabilités & statistique inférentielle, prélude à l'économétrie***, édition Ellipses., 2016.