



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
People's Democratic Republic of Algeria  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministry of Higher Education and Scientific Research  
جامعة محمد السادس بادريس - مستغانم  
Abdelhamid Ibn Badis University of Mostaganem  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
Faculty of Sciences and Technology  
قسم الهندسة الميكانيكية  
Department of Mechanical Engineering



N° d'ordre: M...../10/2020

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

**Filière: Génie Mécanique**  
**Spécialité: Construction Mécanique**

## *Thème*

Flexion thermomécanique avec effet stretching de plaques FGM sandwich en utilisant la théorie raffinée de déformation par cisaillement (HSDT)

**Présenté par:**

- ❖ BELKHODJA Mohamed
- ❖ BENGUELLA Sidahmed

***Soutenu le 30/09/2020 devant le jury composé de :***

Président	Dr. M. Sahnoun	M.C.A. Université de Mostaganem
Examineur	Mme. A. Belhachemi	M.A.A. Université de Mostaganem
Encadreur	Pr. D.Ouinas	Université de Mostaganem

**Année Universitaire : 2019/2020**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## RÉSUMÉ

Le présent travail apporte aux lecteurs une étude des comportements mécanique des structures plaques sandwich, isotropes et en matériaux fonctionnellement graduées, soumissent à l'effet de la flexion thermomécanique, ou l'objectif majeur de cette analyse est de développer des nouvelles théories raffinée 2D, quasi-3D et 3D de la déformation de cisaillement d'ordre élevé qui considère l'effet d'étirement de l'épaisseur dans une seule formulation théorique ainsi que de démontrer la capacité de ces modèles. Les équations du mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton et les solutions analytiques sont trouvées à partir de la technique de Navier, appliqués à des plaques simplement appuyées. Les résultats numériques obtenus expriment l'effet de différents paramètres non dimensionnels et prédisent des réponses appropriées en comparaison avec des solutions existantes des autres théories trouvée dans littérature.

**Mots clés:** Matériaux fonctionnellement graduées; Théorie 2D, quasi-3D et 3D de déformation de cisaillement d'ordre élevée; L'effet d'étirement; Plaque sandwich; Flexion thermomécanique.

## ABSTRACT

This work provides readers with a study of the mechanical behaviors of sandwich plate structures, isotropic and on functionally graded materials, subjected to the effect of thermo-mechanical bending, where the major objective of this analysis is to develop new refined 2D, quasi-3D and 3D high order shear deformation theories, which consider the thickness stretching effect in a single theoretical formulation as well as to demonstrate the capability of these models. Equations of motion are derived using the Hamilton's principle and analytical solutions are found using Navier's technique, applied to simply supported plates. The obtained numerical results express the effect of various non-dimensional parameters and predict appropriate responses in comparison with existing solutions of other theories found in the literature.

**Keywords:** Functionally graduated materials; 2D, quasi-3D and 3D higher order shear deformation theories; Stretching effect; Sandwich plates; Thermo-mechanical bending.

## المخلص

يزود هذا العمل القراء بدراسة السلوكيات الميكانيكية لألواح بهياكل شطيرة ، متدرجة الخواص وظيفياً و متماثلة، معرضة لتأثير الانحناء الميكانيكي الحراري ، حيث يتمثل الهدف الرئيسي لهذا التحليل في تطوير نظريات ثنائية الأبعاد، شبه ثلاثية الأبعاد وثلاثية الأبعاد ذات إجهاد قص عالي الدرجة والذي يأخذ في الاعتبار تأثير تمدد السماكة في صيغة نظرية واحدة، كما ويظهر قدرة هذه النماذج. تُشتق معادلات الحركة باستخدام مبدأ هاملتون ويتم العثور على الحلول التحليلية باستخدام تقنية نافيه ، المطبقة على اللوحات المدعومة ببساطة. النتائج العددية التي تم الحصول عليها تعبر عن تأثير العديد من المتغيرات اللابعدية وتتنبأ بالاستجابات المناسبة مقارنة بحلول النظريات الأخرى.

**الكلمات المفتاحية:** المواد المتدرجة وظيفياً ؛ نظريات ثنائية الأبعاد، شبه ثلاثية الأبعاد وثلاثية الأبعاد ذات إجهاد قص عالي الدرجة؛ تأثير التمدد ؛ لوحة شطيرة ؛ انحناء ميكانيكي حراري.

# TABLE DES MATIÈRE

<b>RÉSUMÉ</b>	ii
<b>TABLE DES MATIÈRE</b>	iii
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	iv
<b>LISTE DES FIGURES</b>	v
<b>LISTE DES SYMBOLES</b>	vi
<b>LISTE DES ABREVIATIONS</b>	viii
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	1
<b>CHAPITRE 01: LES MATÉRIAUX FGM.</b>	3
1.1. Historique et concept des FGM	3
1.2. Les champs d'utilisation des FGM	4
1.3. Propriété des FGM.	4
➤ Les métaux.	4
➤ Les céramiques.	4
1.4. Processus et technique de fabrication des FGM.	5
1.5. Modèle et mécanique des structures en FGM	5
1.5.1. Les théories des plaques FGM	5
1.5.1.1. Théorie d'ordre supérieur (HSDT- High order shear deformation theory)	6
1.5.1.1.1. Théories de plaques bidimensionnelles (2D)	7
1.5.1.1.2. Approches quasi-tridimensionnelles	7
1.5.1.1.3. Théorie tridimensionnelle	7
1.6. Structures sandwichs en FGM	8
<b>CHAPITRE 02: FORMULATION THÉORIQUE.</b>	9
2. 1. Propriétés matérielles	9
2. 2. Champ des déplacements	10
2. 3. Principe d'Hamilton	14
2. 3.1. L'énergie de déformation :	14
2.3.2. Le travail effectué par des charges externes	15
2. 4. Les équations du mouvement	15
2. 5. Solution analytique de Navier	19
<b>CHAPITRE 03: ANALYSE THERMO-MÉCANIQUE DES PLAQUES SANDWICH EN FGM</b>	22
<b>EN UTILISANT DES NOUVELLES THÉORIES 2D, QUASI-3D ET 3D</b>	
3.1. Résultats numériques et discussions	22
3.1.1. La flèche centrale adimensionnelle	23
3.1.2. Contraintes axiale	33
3.1.3. Contraintes transversales	37
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	42
<b>Références bibliographique</b>	43

# LISTE DES TABLEAUX

## CHAPITRE 2: FORMULATIONS THÉORIQUES DE L'ANALYSE THERMOMÉCANIQUE DES PLAQUES SANDWICH EN FGM

**Tableau 2.1:** Les fonctions de forme pour différentes théories de déformation par cisaillement. 11

## CHAPITRE 3: ANALYSE THERMOMÉCANIQUE DES PLAQUES SANDWICH EN FGM EN UTILISANT DES NOUVELLES THÉORIES 2D, QUASI-3D ET 3D.

**Tableau 3.1.** Propriétés matérielles du métal et de la céramique. 23

**Tableau 3.2.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D), (quasi-3D) et (3D) de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) pour différents types des plaques sandwiches asymétriques en FGM ((Al)<sub>1</sub>/ZrO<sub>2</sub>)<sub>1</sub> avec soft âme en métal. 24

**Tableau 3.3.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D), (quasi-3D) et (3D) de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) pour différents types des plaques sandwiches symétrique en FGM (Ti-6Al-4V/ (ZrO<sub>2</sub>)<sub>3</sub>) avec dure-âme en céramique. 26

**Tableau 3.4.** L'effet du rapport d'aspect géométrique ( $a/b$ ) sur les résultats du modèle (quasi-3D) de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) pour différents types des plaques sandwiches avec ( $k=3$ ). 28

**Tableau 3.5.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D) et (3D) de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) pour différents types des plaques sandwiches en FGM ((Al)<sub>1</sub>/ZrO<sub>2</sub>)<sub>1</sub> avec dure-âme en céramique avec ( $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ ,  $q_0 = 1$  et ( $a/h$ )=10). 29

**Tableau 3.6.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D), (quasi-3D) et (3D) de la contrainte adimensionnelle ( $\bar{\sigma}_x$ ) pour différents types des plaques sandwiches en FGM. 33

**Tableau 3.7.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D), (quasi-3D) et (3D) de la contrainte adimensionnelle ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) pour différents types des plaques sandwiches en FGM. 37

# LISTE DES FIGURES

## CHAPITRE 1: GÉNÉRALITÉ SUR LES MATÉRIAUX FGM

<b>Figure 1.1.a.</b> Graduation par tranche [3].	3
<b>Figure 1.1.b :</b> Graduation continue [3].	3
<b>Figure 1.2.</b> Domaines d'application des matériaux a gradient de propriété [3].	4
<b>Figure 1.3.</b> Schéma de dimension et de géométrie d'une plaque rectangulaire.	6
<b>Figure 1.4.</b> Modèle de la cinématique de l'ordre supérieur.	6
<b>Figure 1.5.</b> Schématisation de l'effet de l'éirement à travers l'épaisseur de la plaque.	7

## CHAPITRE 2: FORMULATIONS THÉORIQUES DE L'ANALYSE THERMOMÉCANIQUE DES PLAQUES SANDWICH EN FGM

<b>Figure 2.1.</b> Modèle géométrique de la plaque sandwich FGM.	9
<b>Figure 2.3.</b> La fonction de forme $f(z)$ et sa dérivation de $f'(z)$ pour différentes théories de déformation par cisaillement.	11

## Chapitre 3: ANALYSE THERMO-MÉCANIQUE DES PLAQUES SANDWICH EN FGM EN UTILISANT DES NOUVELLES THÉORIES 2D, QUASI-3D ET 3D.

<b>Figure 3.1.</b> Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de rapport largeur/épaisseur ( $a/h$ ) pour deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).	31
<b>Figure 3.2.</b> Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de rapport largeur/épaisseur ( $a/h$ ) pour deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).	32
<b>Figure 3.3.</b> Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de rapport d'aspect géométrique ( $a/b$ ) pour deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).	32
<b>Figure 3.4.</b> La variation de la flèche adimensionnelle en fonction de rapport d'aspect géométrique ( $a/b$ ) et l'influence des charges mécaniques, thermiques et thermomécanique sur une plaque sandwich en FGM de type (1-3-1).	33
<b>Figure 3.5.</b> Variation de la contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur des deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).	36
<b>Figure 3.6.</b> Variation de la contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur des deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).	36
<b>Figure 3.7.</b> Variation de la contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM de type (1-3-1) soumise à l'influence des charges mécanique, thermique et thermomécanique.	37
<b>Figure 3.8:</b> La variation de la contrainte transversale adimensionnelle à travers l'épaisseur des deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).	40
<b>Figure 3.9.</b> Variation de la contrainte transversale adimensionnelle à travers l'épaisseur des deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).	40
<b>Figure 3.10.</b> Variation de la contrainte transversale adimensionnelle à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM de type (1-3-1) soumise à l'influence des charges mécaniques, thermiques et thermomécanique.	41

## LISTE DES SYMBOLES

$x$	coordonnées axiale dans le plan horizontal de la plaque
$y$	coordonnées axiale dans le plan horizontal de la plaque
$z$	Coordonnée axiale dans le plan transversale et verticale de la plaque
$(x, y, \theta)$	le plan médian de la plaque
$t$	de temps
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Épaisseur de la plaque
$k$	l'indice de puissance (l'indice matérielle), Paramètre du matériau (Exposant de la loi du la fraction volumique)
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
$V_c$	La fraction volumique du matériau céramique par la loi de puissance
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$u, v, w$	Les déplacements selon les directions $x, y$ et $z$ , respectivement.
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$\partial$	Dérivée partielle
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse), fonction de forme
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à $z$
$f''(z)$	La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à $z$
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Les rotations autour des axes $x, y$ et $z$ ,
$\varphi$	une composante supplémentaire de déplacement transversal, prend en compte l'effet de contrainte normale (effet d'étirement),
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z » dans le plan transversale
$\sigma_x, \sigma_y$	Contraintes axiale dans le plan horizontal de la plaque
$\sigma_z$	la contrainte normale transversale
$\tau_{xz}$	Contrainte de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction $x, y$ et $z$
$\gamma_{xy}$	Déformations dans le plan
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta$	Champ virtuel
$\delta U$	Travail virtuel intérieur = L'énergie de déformation
$A,$	la section
$V$	le volume
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$	Efforts normaux = les résultantes de contraintes
$M^b_x, M^b_y, M^b_{xy}$	Moments de flexion = les résultantes de contraintes
$M^s_x, M^s_y, M^s_{xy}$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse = les résultantes de contraintes

$S_{yz}^s, S_{xz}^s$	Effort de cisaillement = les résultantes de contraintes
$\delta V$	Le travail effectué par des charges externes Travail virtuel extérieur
$q$	Force extérieure (N) charge transversale
$\delta K$	L'énergie cinétique
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \varphi$	Champ virtuel de déplacement
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$Q_{mn}$	un coefficient donné pour deux charges typiques
$T(x, y, z)$	Chargement thermique (K)
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{F\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice

## LISTE DES ABREVIATIONS

FGM	Matériaux Fonctionnellement Graduée
CPT	Théorie Classique des Plaques
FSDT	Théories de la Déformation de Cisaillement de Premier Ordre
TSDT	Théories de la Déformation de Cisaillement de troisième Ordre
HSDT	Théories de la Déformation de Cisaillement D'ordre Élevé
SSDT	Théories de la Déformation de Cisaillement Sinusoïdale
2D	Deux dimensionnelles
Quasi-3D	Quasi Trois dimensionnelles
3D	Trois dimensionnelles

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Depuis le premier homme sur Terre; les matériaux ont un rôle important de tout temps, parce qu'ils définissent le niveau du développement et le progrès de la civilisation à chaque époque. Au première développement, les humains utilisaient les matériaux simples, naturellement disponibles sur la surface de Terre, grâce à leur faciliter d'utilisation dans différente applications, comme la pierre, le silex, le bois, les peaux, les coquillages, diverses fibres, l'argile et la boue.

Avec le temps jusqu'à l'arriver à la technologie moderne, la nécessité à la découverte des nouveaux matériaux est devenir inévitable (en utilisant obligatoirement des techniques de production), la seule solution était des matériaux hybride qui combinent non seulement des matériaux simple mais permet aussi d'avoir des propriétés matérielles plus élevés, allient par exemple la rigidité, la résistance mécanique et la ténacité élevée avec une grande légèreté.

Les matériaux composites (conventionnels) a atteint cet objective, mais ils restent encore incapables de résister à des conditions de travail extrêmes correspond à une différence de température très élevée qui conduit à une défaillance des composants par le processus de délaminage, à cause d'une transition brusque des propriétés à la jonction des matériaux.

Alors, pour surmonter ce problème, la transition nette des propriétés est remplacer par des propriétés variables lisses et continues du matériau dans une direction spatiale souhaitée telles que la résistivité à la corrosion, la conductivité thermique, la chaleur spécifique, la dureté et le rapport de rigidité, dans des nouvelles matériaux composites (avancés), nommés matériaux fonctionnellement graduée (FGM). En raison des caractéristiques importantes et tous ses avantages, les FGMs devenu bien meilleures que les matériaux composites conventionnels à utiliser dans de multiples applications.

Par la suite, plusieurs efforts ont été déployés dans les recherches pour améliorer encore plus les propriétés des FGM, et dans notre travail, une nouvelle solution analytique est développé dont l'objectif est de analyser le comportement statique des plaque sandwich FGM soumissent à des charges due à la flexion thermomécanique, en utilisant une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement hybride (Trigonométrique et polynomiale), en utilisant trois modèles mathématiques 2D, ainsi que Quasi-3D et 3D qui prennent en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur. Cette étude est basée sur les effets du champ de température sur la flèche ainsi que les contraintes de cisaillement axiales et transversales adimensionnelles de la plaque sandwich FGM. Les résultats numériques du déplacement et des contraintes sont étudiés. Le présent mémoire est organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre présente un aperçu sur l'historique des matériaux FGM, définir leur concept, leurs principaux domaines d'application, leur propriétés effectives, ainsi que leurs différentes méthodes d'élaboration. Ensuite les théories et les modèles des plaques utilisés pour l'analyse du comportement mécanique ont été rappelés, suivie par une définition sur les structures sandwiches et leurs types.

Le deuxième chapitre est consacré à la mise en œuvre du modèle mathématique, de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée, qui tient en compte la déformation normale, pour analyser le comportement statique des plaques sandwiches FGM reposant sur des appuis simples, et est soumise à des charges mécanique, thermique et thermomécanique, en utilisant une nouvelle fonction de forme de déformation de cisaillement.

# 1. CHAPITRE 01: LES MATÉRIAUX FGM.

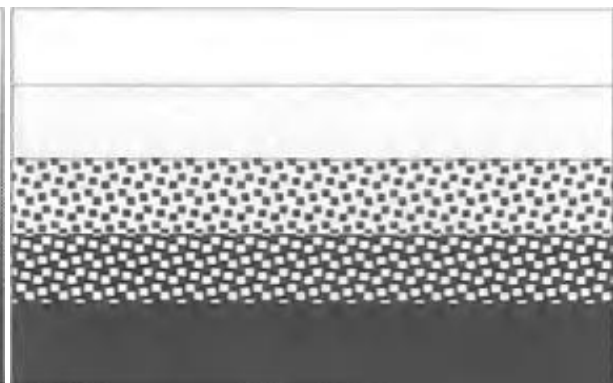
## 1.1. Historique et concept des FGM

La création des FGM est apparue au Japon au début des années 1980, lorsque les chercheurs ont été confrontés à un problème nécessitant un type de matériau composite capable de résister à une différence de température très élevée dans un projet aérospatial [1]. Ils ont d'abord été conçus d'abord comme matériaux de barrière thermique pour les réacteurs de fusion [2].

Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composites, fabriqués d'une manière spéciale, qui garantissait un changement gradué, varier d'un matériau à l'autre soit en continue ou discontinue par étape (Figure 1.1) des constituants à l'intérieur, souvent de la céramique aux métaux dans un seul corps (matériaux microscopiquement inhomogènes) des FGM les plus connus, à travers la direction de l'épaisseur selon des fonctions mathématiques. Et par conséquent, une modification correspondante des propriétés mécaniques effectives et des caractéristiques du matériau apparaît, en font une solution non seulement au problème thermique (supporter des niveaux de température élevés) bien connus en premier lieu dans les industries aérospatiales, mais aussi à certains problèmes des matériaux composites classiques, tels que la discontinuité des matériaux qui génèrent des niveaux de concentration de contraintes élevés, et donc des problèmes d'interface (la rupture de délaminage) ainsi que des déformations, De plus, les FGM supportent également les charges mécaniques appliquées et offrent de bonnes performances dans des conditions d'utilisation dure et exigeante. En conséquence, les FGM ont attirés plusieurs industries à utiliser leurs composants structurels, et donc beaucoup de domaines de l'ingénierie les étudient de manière approfondie afin de prédire leurs comportements et leurs réponses.



**Figure 1.a.** Graduation par tranche [3].



**Figure 1.b :** Graduation continue [3].

## 1.2. Les champs d'utilisation des FGM

Grace à leurs importantes propriétés, les FGM sont devenu un choix favorable dans la plupart des domaines d'ingénierie et d'industrie. Cela inclus une application dans le domaine aérospatial, automobile, biomédical, électrique, énergétique, et maritime

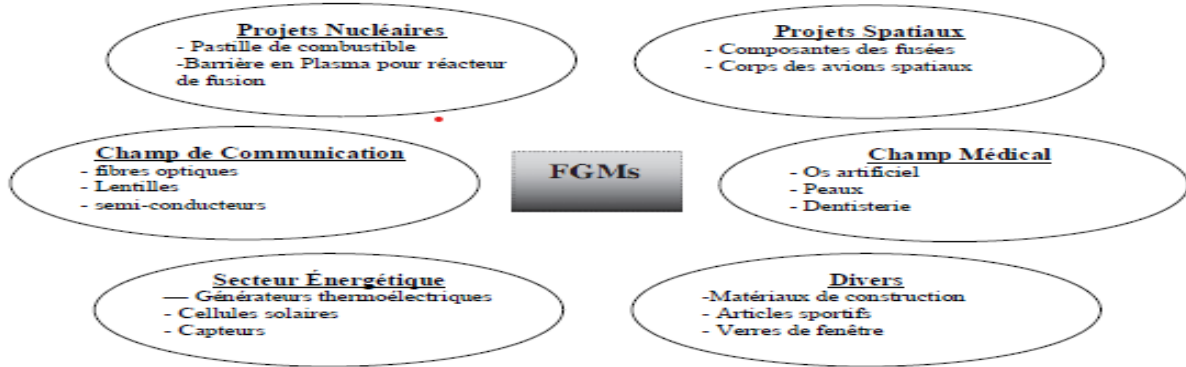


Figure 1.2. Domaines d'application des matériaux a gradient de propriété [3].

## 1.3. Propriété des FGM

Les FGM peuvent incorporer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques avec la ténacité élevée, la résistance élevée, l'usinabilité et la capacité de liaison des métaux sans contrainte thermique interne sévère [1], souvent constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal, choisie en fonction des propriétés physiques de chaque composant [4].

### ➤ Les métaux

Lorsque la majorité des éléments chimiques dans le tableau de Mendeleïev sont les métaux, ils possèdent plusieurs avantages :

- très bons conducteurs de chaleur,
- très bons conducteurs d'électricité,
- plus souvent durs et rigides,
- déformables plastiquement,
- un nombre important possèdent une température de fusion très élevée.

Les métaux les plus souvent utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium [4].

### ➤ Les céramiques

Les céramiques sont en général, des matériaux très durs, résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr...) et non métalliques dont le plus courant est l'oxygène.

Ils sont largement utilisés comme abrasifs et typiquement dans les régions ou les environnements extrêmes (hautes températures, etc.), caractérisés par leurs comportements

réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées [4]. Alors qu'ils ont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques importants. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit [1]:

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion,
- Haute température de fusion ou de décomposition,
- Haut module d'élasticité et haute dureté,
- Charge à la rupture élevée,
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure.

#### **1.4. Processus et technique de fabrication des FGM**

Une variété des méthodes de production des FGM ont été créées, basée souvent sur une variation des méthodes de traitement des différents processus d'élaboration conventionnelles bien établis, des procédés qui sont capables de s'adapter à une étape de gradation, ou on peut citer [2] :

- La compaction sèche des poudres,
- La stratification des feuilles
- Les méthodes de dépôt chimique en phase vapeur.
- Le coulage centrifuge
- Coulage séquentiel en barbotine
- Coulage en bande
- Projection thermique (plasma)

#### **1.5. Modèle et mécanique des structures en FGM**

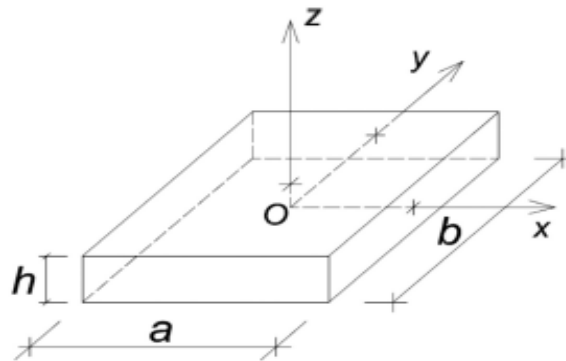
Depuis l'apparition des FGM, les théories particularisées à analyser les structures isotropes ou composites sont établies à nouveau, diverses théories ont été proposées et développées, et plus particulièrement qui sont concernées aux structures plaques, qu'ils ont acquis un intérêt appréciable [5].

##### **1.5.1. Les théories des plaques FGM**

Notre recherche est basée sur des structures plaques, employées par exemple en aéronautique, aérospatial, constructions navales, automobile et nucléaire. À cet axe, qui prend une importance dans la mécanique des structures, diverses théories ont été proposées sur les plaques en FGM qui peuvent être regroupées selon l'approche adoptée [5] aux:

- Théories classiques des plaques (CPT),

- Théories du premier ordre des plaques (FSDT),
- Théories de déformation de cisaillement d'ordre élevée des plaques (HSDT).

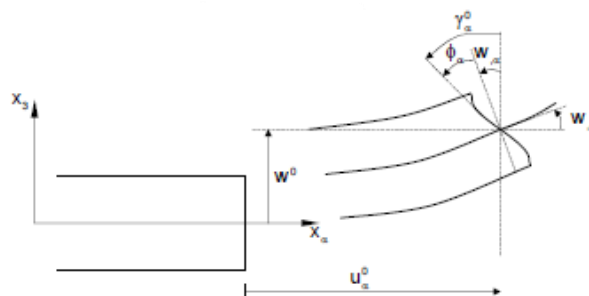


**Figure 1.3.** Schéma de dimension et de géométrie d'une plaque rectangulaire.

### 1.5.1.1. Théorie d'ordre supérieur (HSDT- High order shear deformation theory)

Une théorie fiable, précise et prouve des performances appréciables même pour une étude des plaques épaisses par rapport à la théorie classique de Love-Kirchhoff qui est limitée à l'étude des plaques minces, sans pris en compte de la déformation normale, sachant que les résultats obtenues ne sont pas fiable ainsi que les théories de premier ordre qui s'étend à des plaques modérément épaisses ou les résultats obtenue sont globalement satisfaisants et imparfaite pour les cas des plaques épaisses, et elle nécessite toujours un facteur de correction de contrainte pour satisfaire les conditions de nullités de contraintes de cisaillement tangentiels sur les surfaces supérieur et inférieur de la plaque. Le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de la déformation par cisaillement transversal à travers l'épaisseur qui est tenu en considération, une théorie intéressantes soit pour une présentation correcte de la cinématique ou pour les contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, classé selon l'approche adoptée à l'étude aux:

- Théories des plaques FGM bidimensionnelles (2D),
- Approches Quasi-dimensionnelles des plaques FGM (Quasi-3D),
- Théories des plaques FGM tridimensionnelles (3D).



**Figure 1.4.** Modèle de la cinématique de l'ordre supérieur.

### 1.5.1.1.1. Théories de plaques bidimensionnelles (2D)

Ces Théories appropriées pour les plaques en FGMs minces à modérément épaisses, et non recommandé pour les plaques épaisses [6]. L'ensemble de ces théories sont basées sur l'état de contraintes planes (la déformation normale est négligée ( $\epsilon_z=0$ )) qui cause la négligence ainsi de l'effet de l'étirement de l'épaisseur [7].

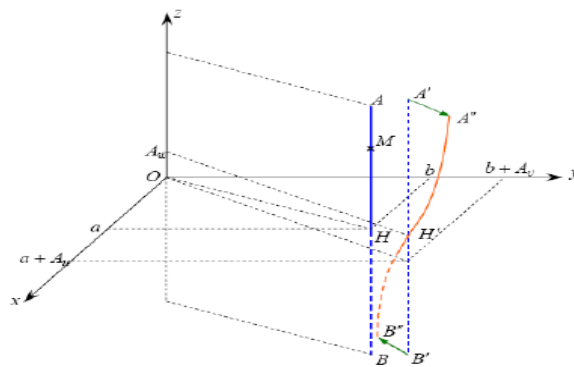
### 1.5.1.1.2. Approches quasi-tridimensionnelles

Dans la recherche à formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques, en statique et dynamique d'une façon générale, ces théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé concèdent l'effet de l'étirement de l'épaisseur. Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle, cette particularité utilise un état de contraintes de la théorie bidimensionnelle, le déplacement transversal est exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque. Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre élevée, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non-linéaire en fonction de la coordonné transversale ( $z$ ), alors la cinématique devient :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y)$$



**Figure 1.5.** Schématisation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur de la plaque.

### 1.5.1.1.3. Théorie tridimensionnelle

Une théorie efficace formulée pour analyser des plaques en statique et dynamique, une nouvelle stratégie qui prise en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur, cet effet a un

impact important dans l'évaluation exact du comportement pour des plaques en FGMs épaisses, qui parmi ainsi une description précise des champs de contraintes à travers l'épaisseur, surtout les contraintes de cisaillement, il est pertinent de mentionner que les coefficients de rigidité sont différentes a celles de la théorie bidimensionnelle, qui sont les mêmes de l'approche quasi-3D, ainsi qu'elle comporte le même champ de la cinématique de l'approche quasi-3D. Et donc le recours à l'élasticité tridimensionnelle est nécessaire pour résoudre de façon fiable les problèmes traité pour obtenir des résultats à précision forte et satisfaisante.

### **1.6. Structures sandwiches en FGM**

La structure sandwich est composée de deux revêtements, et situé entre elle un noyau qui sont réalisées directement de manière continue avec une nature différente des deux composantes entre les céramique ou le FGM, un matériau résultant ayant de très bonnes caractéristiques, permettant de concilier la légèreté et la rigidité. L'utilisation de telle structure aide à éliminer mécaniquement et thermiquement les contraintes induites par la distribution non graduelle des propriétés matérielles (changements brusques de propriétés) et à améliorer l'adhérence, elles peuvent être divisées en trois types:

- Type-A, plaques sandwich avec peau en FGM et noyau homogène;
- Type B, plaques sandwich avec des feuilles de face homogènes et un noyau FGM;
- Type C, plaques sandwich avec une couche Supérieure homogènes et les couches centrale et inférieure en FGM [3].

## 2. CHAPITRE 02: FORMULATION THÉORIQUE.

### 2.1. Propriétés matérielles

On considère une plaque sandwich plate simplement appuyée, composée de trois couches (métal-céramique, céramique, céramique-métal) ayant l'épaisseur  $h$ , la longueur  $a$  et la largeur  $b$ , et les limites avec une régularité convenable, évoluée selon les coordonnées de l'axe  $z$  perpendiculaire au plan médian de la plaque, défini par le système de coordonnées cartésienne  $(x, y, z)$ , comme représenter sur la figure 2.1.

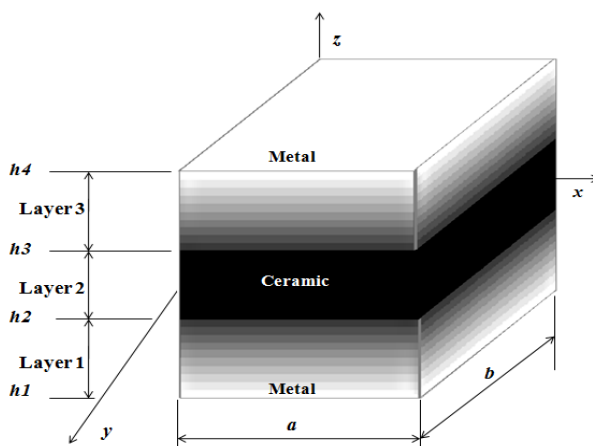


Figure 2.1. Modèle géométrique de la plaque sandwich FGM.

Le plan médian est défini par  $z = 0$  et ses plans de délimitation externes sont définis par  $z = \pm h/2$ . Les couches de face de la plaque sandwich sont constituées d'un matériau isotrope dont les propriétés du matériau varient doucement dans la direction  $z$  uniquement. La couche centrale est constituée d'un matériau homogène isotrope. Les positions verticales de la surface inférieure, des deux interfaces entre les couches de noyau et de faces et la surface supérieure sont désignées respectivement par  $h1 = -h/2$ ,  $h2$ ,  $h3$ ,  $h4 = h/2$ . Les propriétés matérielles effectives de chaque couche, comme le module de Young, le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique, peuvent être exprimées comme

$$P(z) = (P_c - P_m)V^{(n)} + P_m \quad (2.1)$$

Où  $P_c$  et  $P_m$  désignent respectivement les propriétés correspondantes de la céramique et du métal de la plaque sandwich FGM, et désignent aussi les propriétés des faces inférieure et supérieure de la couche 1 et vice-versa pour la couche 3 en fonction de la fraction volumique  $V^{(n)}$

( $n= 1, 2, 3$ ). La fraction volumique à travers l'épaisseur des faces de la plaque sandwich suit une simple loi de puissance alors qu'elle est égale à l'unité dans la couche centrale [8].

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2], \quad (2.2.a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3], \quad (2.2.b)$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4], \quad (2.2.c)$$

Où  $k$  est l'exposant de la fraction volumique, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La couche centrale est indépendante de la valeur de  $k$  qui est une couche entièrement céramique. Cependant, la valeur de  $k$  égale à zéro représente une plaque entièrement céramique. Notez que la fraction volumique du métal est élevée près des surfaces inférieure et supérieure de la plaque, et celle de la céramique est élevée près des interfaces [8].

Nous signalons qu'il y a des rapports importants caractérisant les plaques sont engendrés comme le rapport entre le côté à épaisseur ( $a/h$ ), (qui définit une plaque épaisse, modérément épaisse et mince, respectivement aux rapports de valeurs plus élevée, modérément élevée et faible) et le rapport d'aspect ( $a/b$ ), (qui définit une plaque carrée et rectangulaire respectivement aux rapports de valeurs ( $a=b$ ) et ( $a/b>1$ )).

## 2.2. Champ des déplacements

Sur la base de la théorie de la plaque épaisse et incluant l'effet de la déformation normale transversale (effet d'étirement de l'épaisseur), les hypothèses de base pour le champ de déplacement de la plaque peuvent être décrites comme suit [9] :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\theta_x(x, y) \quad (2.3.a)$$

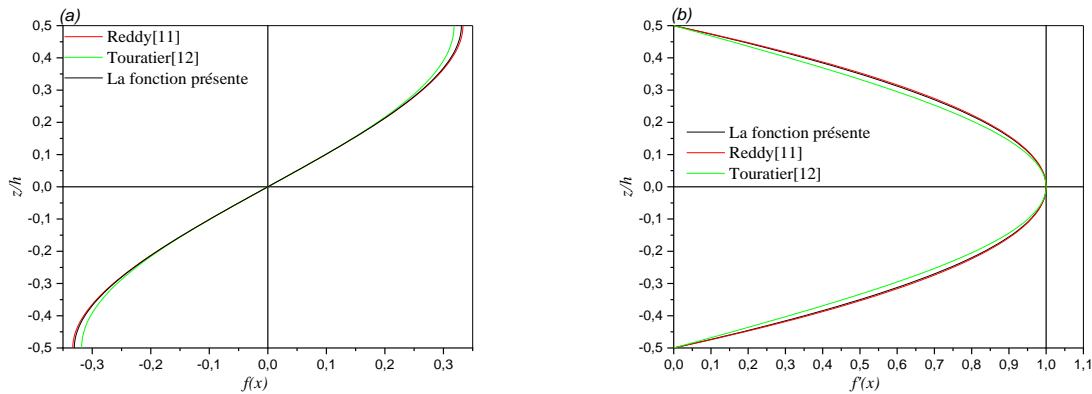
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\theta_y(x, y) \quad (2.3.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + f'(z)\theta_z(x, y) \quad (2.3.c)$$

Où  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont des déplacements dans les directions  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont des déplacements dans le plan médian,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  les rotations des plans  $yz$ ,  $xz$  et  $xy$  dues à la flexion, respectivement.  $f(z)$  représente la fonction de forme déterminant la distribution des déformations et contraintes de cisaillement transversale le long de l'épaisseur. Notez que  $f''(z) = 0$  pour l'analyse 2D [10].

Dans cette étude, une nouvelle fonction de forme de déformation par cisaillement  $f(z)$  est développée comme indiqué dans l'équation. (2.4) et illustré sur la figure 2.3 avec d'autres modèles dans le tableau 2.1. Ce nouveau modèle assure une distribution précise de la déformation de cisaillement en fonction de l'épaisseur de la plaque et considère les contraintes de cisaillement transversales paraboliques sur l'épaisseur comme satisfaisant les conditions de surface sans contrainte de cisaillement sans y compris les facteurs de correction de cisaillement.

$$f(z) = \frac{h}{2} \sin\left(2 \frac{z}{h}\right) - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} \cos(1), \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad f''(z) = \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \quad (2.4)$$



**Figure 2.3.** La fonction de forme  $f(z)$  et sa dérivée de  $f'(z)$  pour différentes théories de déformation par cisaillement.

**Tableau 2.1:** Les fonctions de forme pour différentes théories de déformation par cisaillement.

Modèle	Fonctions de forme $f(z)$ de la déformation par cisaillement
Reddy (TSDT) [11]	$z \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right)$
Touratier (SSDT) [12]	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$

Atmane et al (HSDT) [13]	$\frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]}$
Zaoui et al. (HSDT) [15]	$\frac{\pi z}{h^4 + \pi^4} e^{\frac{hz}{\pi}} \left( \pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) - \frac{\pi h^3}{h^4 + \pi^4}$
La présente théorie	$\frac{h}{2} \sin\left(2\frac{z}{h}\right) - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} \cos(1)$

Sur la base des hypothèses de l'équation. (2.3), les déformations peuvent être liées au champ de déplacement comme

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f(z) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ f(z) \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ f''(z) \theta_z \\ f'(z) \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial y} + \theta_y \right) \\ f'(z) \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + \theta_x \right) \\ f(z) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Il peut être observé à partir de l'équation. (2.5) que les déformations de cisaillement transversal ( $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ ) sont nulles aux surfaces supérieure ( $z = h/2$ ) et inférieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque. Par conséquent, les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces de la plaque sont satisfaites.

Les relations contrainte-déformation tenant compte de la déformation de cisaillement transverse et des effets thermiques pour la  $n$ ème couche peuvent être exprimées comme les relations constitutives du comportement linéaire d'une plaque FGM, regroupant les contraintes et les déformations via la matrice de rigidité, s'écrivent [15] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha^{(n)}T \\ \varepsilon_y - \alpha^{(n)}T \\ \varepsilon_z - \alpha^{(n)}T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$  sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation.  $\alpha^{(n)}$  est le coefficient de dilatation thermique, et T est la distribution de la charge thermique.

### Sans l'effet d'étirement:

Les coefficients de rigidité, définis pour 2D ( $\varepsilon_z = 0$ ) sont:

$$C_{11}(z) = C_{22}(z) = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (2.7.a)$$

$$C_{12}(z) = \nu C_{11}(z), \quad (2.7.b)$$

$$C_{13}(z) = C_{23}(z) = 0 \quad (2.7.c)$$

$$G(z) = C_{44}(z) = C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{(1-\nu)}{2} C_{11}(z) \quad (2.7.d)$$

### Avec l'effet d'étirement:

Les coefficients de rigidité, définis pour le modèle quasi-3D ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) sont :

$$C_{11}(z) = C_{22}(z) = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (2.8.a)$$

$$C_{12}(z) = C_{13}(z) = C_{23}(z) = \nu C_{11}(z), \quad (2.8.b)$$

$$G(z) = C_{44}(z) = C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{(1-\nu)}{2} C_{11}(z) \quad (2.8.c)$$

Les coefficients de rigidité, définis pour le modèle 3D ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) sont :

$$C_{11}(z) = C_{22}(z) = C_{33}(z) = \frac{(1-\nu)E^{(n)}(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (2.8.d)$$

$$C_{12}(z) = C_{13}(z) = C_{23}(z) = \frac{\nu}{(1-\nu)} C_{11}(z), \quad (2.8.e)$$

$$G(z) = C_{44}(z) = C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} C_{11}(z), \quad (2.8.f)$$

Où  $E^{(n)}(z)$  et  $\nu^{(n)}(z)$  sont le module d'Young et le coefficient de Poisson caractérisant les propriétés élastiques dans le plan d'isotropie de la nième couche.

### 2.3. Principe d'Hamilton

Pour déterminer les équations du mouvement d'un solide déformable on utilise le principe d'Hamilton. Ce dernier peut être formulé analytiquement sous la forme suivante :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V) dt \quad (2.9)$$

Où  $T$  désigne une période de temps et  $\delta U$ ,  $\delta V$  sont respectivement, la variation d'énergie de déformation et le travail effectué par les charges externes de la plaque FGM.

#### 2.3.1. L'énergie de déformation :

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (2.10.a)$$

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A & \left[ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + M_x^s \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} \right. \\ & + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + M_y^s \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + N_z \delta \theta_z \\ & + Q_{xz} \left( \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial x} + \delta \theta_x \right) + Q_{yz} \left( \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial y} + \delta \theta_y \right) \\ & \left. + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + M_{xy}^s \left( \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) \right] dA \end{aligned} \quad (2.10.b)$$

Où  $A$ ,  $V$ ,  $N$ ,  $M$  et  $S$  désignent la section, le volume et les résultantes de contraintes définies comme suit:

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \sum_{n=1}^{n=3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (2.11.a)$$

$$(Q_x, Q_y) = \sum_{n=1}^{n=3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} f'(z) (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (2.11.b)$$

$$(M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s) = \sum_{n=1}^{n=3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} f (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (2.11.c)$$

$$(M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b) = \sum_{n=1}^{n=3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} z (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (2.11.d)$$

Où  $h_n$  et  $h_{n+1}$  sont les coordonnées  $z$  du haut et du bas de la  $n$ ème couche,

### 2.3.2. Le travail effectué par des charges externes

La variation de l'énergie potentielle des charges externes dans les directions horizontale et transversale peut être exprimée par :

$$\begin{cases} \delta V = - \int_A (q \delta w) dA \\ \delta V = - \int_A q (\delta w_0 + f'(z) \delta \theta_z) dA \end{cases} \quad (2.12)$$

Où  $q$  est la charge transversale.

### 2.4. Les équations du mouvement

Les équations de mouvement appropriées aux six inconnues du champ de déplacement et des équations du mouvement sont obtenues en substituant les équations des énergies (2.10 et 2.13) dans l'équation (2.9). En regroupant tous les coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \theta_x$ ,  $\delta \theta_y$  et  $\delta \theta_z$  après intégration par partie, le système d'équations s'écrit comme suit:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.13.a)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2.13.b)$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \quad (2.13.c)$$

$$\delta \theta_x : \frac{\partial M_x^s}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} = 0 \quad (2.13.d)$$

$$\delta \theta_y : \frac{\partial M_y^s}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial x} = 0 \quad (2.13.e)$$

$$\delta \theta_z : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - N_z + q f'(z) = 0 \quad (2.13.f)$$

Les contraintes résultantes sont obtenues par substitution de l'équation (2.6) dans (2.10), il vient :

$$(2.14) \quad \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ Q_{yz} \\ Q_{xz} \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & 0 & 0 & L \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & 0 & 0 & L^a \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & 0 & 0 & L^a \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & 0 & 0 & R \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & 0 & 0 & R \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55}^s & 0 \\ L & L & 0 & L^a & L^a & 0 & R & R & 0 & 0 & 0 & R^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial y} + \delta \theta_y \right) \\ \left( \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial x} + \delta \theta_x \right) \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \\ M_x^{Tb} \\ M_y^{Tb} \\ 0 \\ M_x^{Ts} \\ M_y^{Ts} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_z^T \end{Bmatrix}$$

Où pour la théorie 3D et quasi-3D HSDT ( $\varepsilon_z \neq 0$ ), les coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{n=3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \left( 1, z, z^2, f(z), zf'(z), [f'(z)]^2 \right) \begin{Bmatrix} C_{11}(z) \\ C_{12}(z) \\ G(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (2.15.a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (2.15.b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^{n=3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} [f'(z)]^2 G(z) dz \quad (2.15.c)$$

Pour le modèle quasi-3D :

$$\{L \quad L^a \quad R \quad R^a\} = \sum_{n=1}^{n=3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \left( \nu f''(z), \nu z f''(z), \nu f(z) f''(z), \nu [f''(z)]^2 \right) C_{11}(z) dz \quad (2.15.d)$$

Pour le modèle 3D :

$$\{L \quad L^a \quad R \quad R^a\} = \sum_{n=1}^{n=3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \left( \frac{\nu}{1-\nu} f''(z), \frac{\nu}{1-\nu} z f''(z), \frac{\nu}{1-\nu} f(z) f''(z), \frac{\nu}{1-\nu} [f''(z)]^2 \right) C_{11}(z) dz \quad (2.15.e)$$

Les résultantes de contrainte et de moment,  $N_x^T = N_y^T$ ,  $M_x^T = M_y^T$ ,  $M_x^{sT} = M_y^{sT}$  et  $N_z^T$  dues au chargement thermique sont définies par :

Pour le modèle 2D:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^T \\ M_x^{sT} \\ N_z^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{(1 + \nu^{(n)}(z)) E^{(n)}(z)}{1 - [\nu^{(n)}(z)]^2} \alpha^{(n)T} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ f''(z) \end{Bmatrix} dz \quad (2.16.a)$$

Pour le modèle quasi-3D

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^T \\ M_x^{sT} \\ N_z^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{(1 + 2\nu^{(n)}(z)) E^{(n)}(z)}{1 - [\nu^{(n)}(z)]^2} \alpha^{(n)T} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ f''(z) \end{Bmatrix} dz \quad (2.16.b)$$

Pour le modèle 3D :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^T \\ M_{x^s}^T \\ N_z^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E^{(n)}(z)}{1-2\nu^{(n)}(z)} \alpha^{(n)} T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ f''(z) \end{Bmatrix} dz \quad (2.16.c)$$

La variation du champ de température à travers l'épaisseur est supposée être comme suit [15] :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y, z) + \frac{z}{h} T_2(x, y, z) + \frac{f(z)}{h} T_3(x, y, z) \quad (2.17)$$

Où  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont des charges thermiques.

En remplaçant l'équation. (2.14) dans l'équation. (2.13), on obtient,

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + B_{11}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + B_{12}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + L \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ & + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + B_{66}^s \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) = f_1 \end{aligned} \quad (2.18.a)$$

$$\begin{aligned} & A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{12}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + B_{22}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + L \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \\ & + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{66}^s \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) = f_2 \end{aligned} \quad (2.18.b)$$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D_{11}^s \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + B_{12} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 2D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12}^s \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + L^a \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} \\ & + B_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{12}^s \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D_{22}^s \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + L^a \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial y^2} \\ & + 2B_{66} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 2D_{66}^s \left( \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} \right) = f_3 - q \end{aligned} \quad (2.18.c)$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - D_{11}^s \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + H_{11}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - D_{12}^s \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + H_{12}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + R \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\
& + B_{66}^s \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - 2D_{66}^s \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + H_{66}^s \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) - A_{55}^s \left( \theta_x + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) = f_4
\end{aligned} \tag{2.18.d}$$

$$\begin{aligned}
& B_{12}^s \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - D_{12}^s \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + H_{12}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + H_{22}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + R \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\
& + B_{66}^s \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - 2D_{66}^s \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + H_{66}^s \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) - A_{44}^s \left( \theta_y + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) = f_5
\end{aligned} \tag{2.18.e}$$

$$\begin{aligned}
& L \frac{\partial u_0}{\partial x} - L^a \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + R \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + L \frac{\partial v_0}{\partial y} - L^a \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + R \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + R^a \theta_z \\
& - A_{55}^s \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} \right) - A_{44}^s \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial y^2} \right) = f_6 - q f'(z)
\end{aligned} \tag{2.18.f}$$

Où  $\{f\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}^t$  est un vecteur de force généralisé.

Les composantes du vecteur de force généralisé  $\{f\}$  sont données par

$$f_1 = \frac{\partial N_x^T}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial N_y^T}{\partial y}, \quad f_3 = -\frac{\partial^2 M_x^T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^T}{\partial y^2}, \quad f_4 = \frac{\partial M_x^{sT}}{\partial x}, \quad f_5 = \frac{\partial M_y^{sT}}{\partial y}, \quad f_6 = N_z^T. \tag{2.19}$$

## 2.5. Solution analytique de Navier

Considérons une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une longueur  $a$  et une largeur  $b$  sous une charge thermomécanique. Pour résoudre ce problème, nous utilisons la solution de Navier, les charges mécanique et de température sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \tag{2.20}$$

Où  $q_0, t_1, t_2$  et  $t_3$  sont des constantes,  $\lambda$  et  $\mu$  sont déterminées comme suit :

$$\lambda = m\pi/a, \quad \mu = n\pi/b$$

Sur la base de l'approche Navier, la solution des variables de déplacement satisfaisant les conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée sont comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ Y \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ Z \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Avec  $(U, V, W, X, Y, Z)$  sont des fonctions inconnues à déterminer, En considérant les équations (2.15) et (2.19), on obtient l'équation d'opérateur suivante :

$$[A]\{\Delta\} = \{F\} \quad (2.22)$$

Où  $\{\Delta\} = \{U, V, W, X, Y, Z\}'$ , et  $[A]$  est la matrice symétrique donnée par

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -(\lambda^2 A_{11} + \mu^2 A_{66}), \\
a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}), \\
a_{13} &= \lambda^3 B_{11} + \lambda\mu^2(B_{12} + 2B_{66}), \\
a_{14} &= -(\lambda^2 B_{11} + \mu^2 B_{66}^s), \\
a_{15} &= -\lambda\mu(B_{12}^s + B_{66}^s), \\
a_{16} &= L\lambda, \\
a_{22} &= -(\lambda^2 A_{66} + \mu^2 A_{22}), \\
a_{23} &= \mu^3 B_{22} + \lambda^2\mu(B_{12} + 2B_{66}), \\
a_{24} &= -\lambda\mu(B_{12}^s + B_{66}^s), \\
a_{25} &= -(\lambda^2 B_{66}^s + \mu^2 B_{22}^s), \\
a_{26} &= L\mu, \\
a_{33} &= -(\lambda^4 D_{11} + 2\lambda^2\mu^2(D_{12} + 2D_{66}) + \mu^4 D_{22}), \\
a_{34} &= -(\lambda^3 D_{11}^s + 2\lambda^2\mu^2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) + \mu^4 D_{22}^s + K_w + K_s(\lambda^2 + \mu^2)), \\
a_{34} &= \lambda^3 D_{11}^s + \lambda\mu^2(D_{12}^s + 2D_{66}^s), \\
a_{35} &= \mu^3 D_{22}^s + \lambda^2\mu(D_{12}^s + 2D_{66}^s), \\
a_{36} &= -L^a(\lambda^2 + \mu^2), \\
a_{44} &= -\lambda^2 H_{11}^s - \mu^2 H_{66}^s - A_{44}^s, \\
a_{45} &= -\lambda\mu(H_{12}^s + H_{66}^s), \\
a_{46} &= \lambda(R - A_{44}^s), \\
a_{55} &= -\mu^2 H_{22}^s - \lambda^2 H_{66}^s - A_{55}^s, \\
a_{56} &= \mu(R - A_{55}^s), \\
a_{66} &= -\lambda^2 A_{44}^s - \mu^2 A_{55}^s - R^a,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Les composantes du vecteur de force généralisé  $\{F\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}^t$  sont données par

$$\begin{aligned}
F_1 &= \lambda(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3), \\
F_2 &= \mu(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3), \\
F_3 &= -h(\lambda^2 + \mu^2)(B^T t_1 + D^T t_2 + {}^a D^T t_3), \\
F_4 &= \lambda h({}^a B^T t_1 + {}^a D^T t_2 + {}^a F^T t_3), \\
F_5 &= \mu h({}^a B^T t_1 + {}^a D^T t_2 + {}^a F^T t_3), \\
F_6 &= h(L^T t_1 + {}^a L^T t_2 + R^T t_3),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Telle que

$$\{A^T, B^T, D^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E^{(n)}(z)}{1-2\nu^{(n)}(z)} \alpha^{(n)}(z) \{1, \bar{z}, \bar{z}^2\} dz \quad (2.25.a)$$

$$\{{}^a B^T, {}^a D^T, {}^a F^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E^{(n)}(z)}{1-2\nu^{(n)}(z)} \alpha^{(n)}(z) \bar{f}(z) \{1, \bar{z}, \bar{f}(z)\} dz \quad (2.25.b)$$

$$\{L^T, {}^a L^T, R^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E^{(n)}(z)}{1-2\nu^{(n)}(z)} \alpha^{(n)}(z) \bar{f}''(z) \{1, \bar{z}, \bar{f}(z)\} dz \quad (2.25.c)$$

Où  $\bar{z} = \frac{z}{h}$ ,  $\bar{f}(z) = \frac{f(z)}{h}$ , et  $\bar{f}''(z) = \frac{f''(z)}{h}$ .

### 3. CHAPITRE 03: ANALYSE THERMO-MÉCANIQUE DES PLAQUES SANDWICH EN FGM EN UTILISANT DES NOUVELLES THÉORIES 2D, QUASI-3D ET 3D.

#### 3.1. Résultats numériques et discussions

L'objectif de cette théorie est de présenter les résultats numériques adimensionnelle de la flèche centrale ( $\bar{w}$ : déplacement transversal), contraintes normales axiale ( $\bar{\sigma}_x$ ) et les contraintes tangentielles transversales ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) de l'analyse de flexion thermomécanique des plaques FGM sandwichs. Les résultats actuels sont calculés par le modèle (2D) (cinq inconnues), et les modèles quasi-3D et (3D) (six inconnues), ou l'influence d'étirement de l'épaisseur est considérée. Les plaques FGM prises en considération sont fabriquées des combinaisons (Ti-6Al-4V/(ZrO<sub>2</sub>)<sub>3</sub>) et ((Al)<sub>1</sub>/ZrO<sub>2</sub>)<sub>1</sub> de propriétés matérielles indiquée dans le Tableau 3.1, et traiter pour différentes plaques FGM, sandwich symétriques et asymétriques, avec dure-âme en céramique, et soft-âme en métal, et pour différentes gradation de matériaux céramique (du matériau riche en céramique  $k \in ]0,1[$  à un matériau riche en métal  $k \in ]1,\infty[$ ), et sous l'influence de l'épaisseur de la couche céramique ou la couche FGM (rapport de l'épaisseur), carrée et rectangulaire (différentes valeurs de rapport d'aspect géométrique ( $a/b$ )), soumise à des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques, qui varie sur l'épaisseur. Tous les exemples traités par cette nouvelle théorie de déformation de cisaillement, sont calculés avec les formulations mathématiques mentionnés aux équations (3.1) et ils sont comparés aux résultats existants par d'autres théories comme CPT, FSDPT, TSDPT, SSDPT, HSDPT et RHDPT trouvés dans la littérature :

$$\bar{w} = \frac{10^3}{q_0 a^4 / (E_0 h^3) + 10^3 \alpha_0 t_2 a^2 / h} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right), \quad (3.1.a)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{10}{q_0 a^2 / h^2 + 10 E_0 \alpha_0 t_2 a^2 / h^2} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right), \quad (3.1.b)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{q_0 a / h + E_0 \alpha_0 t_2 a / (10h)} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right), \quad (3.1.c)$$

Où les valeurs de référence sont prises comme  $E_0 = 1GPa$  et  $\alpha_0 = 10^{-6}/K$ , et le facteur de correction de cisaillement de la FSDPT est fixé à  $K = 5/6$ .

**Tableau 3.1.** Propriétés matérielles du métal et de la céramique.

Matériaux		Les propriétés matérielles		
		E (GPa)	$\alpha$ ( $10^{-6}/K$ )	$\nu$
Métal	Titanium (Ti-6Al-4V)	66.2	10.3	1/3
	Aluminium (Al)	70	23.0	0.3
Céramique	Alumina ( $Al_2O_3$ )	380	7.4	0.3
	Zirconia-3 ( $ZrO_2$ ) <sub>3</sub>	117	7.11	1/3

Pour tous les tableaux et les figures, il est supposé que les plaques FGM sandwich sont symétriques, avec dure-âme en céramique, carrée ( $a/b=1$ ), modérément épaisse ( $a/h=10$ ), en (Ti-6Al-4V/ ( $ZrO_2$ )<sub>3</sub>), soumise aux charges mécaniques et thermiques, de telle sorte que ( $t_1=0$ ,  $q_0=t_2=t_3=100$ ), sauf indication contraire.

### 3.1.1. La flèche centrale adimensionnelle

Le tableau 3.2 illustre les résultats **2D**, **quasi-3D** et **3D** de la flèche ( $\bar{w}$ ) pour différentes plaques FGM ((Al)<sub>1</sub>/ZrO<sub>2</sub>)<sub>1</sub> sandwich asymétriques avec soft-âme en métal, On constate que les résultats du modèle (2D) sont en bon accord à ceux de (TSDPT) et (SSDPT). De la comparaison entre les solutions obtenue par CPT et les autres théories de déformation par cisaillement, on peut montrer que l'effet de la déformation par cisaillement rend la plaque plus flexible et conduit par conséquent à l'augmentation de la flèche. Pour la variation de rapport de l'épaisseur, la diminution de l'épaisseur de la couche métallique provoque la diminution de la flèche ( $\bar{w}$ ) (la valeur ( $\bar{w}$ ) est minimale pour le type de la plaque FGM (4-1-3)), sauf pour les plaques entièrement en métal ( $k=0$ ), ou la flèche reste constante et par contre l'augmentation de l'indice de puissance ( $k$ ) provoque sa diminution. Il est à observer que les résultats obtenus du modèle (quasi-3D) avec la prise en compte de l'effet de l'étirement pour chaque cas réduit par rapport aux résultats du présent modèle (2D) (il rend par conséquent la plaque plus rigide). Le taux d'erreur maximal entre la présente théorie et la SSDTP est de 3.4% pour ( $k=2$ , la plaque 4-1-3), cette erreur est réduite par rapport à la TSDPT, elle est de l'ordre de 1,9% pour les mêmes conditions.

**Tableau 3.2.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D), (quasi-3D) et (3D) de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) pour différents types des plaques sandwiches asymétriques en FGM ((Al)<sub>1</sub>/ZrO<sub>2</sub>)<sub>1</sub> avec soft âme en métal.

$k$	Théorie	$\varepsilon_z$	$\bar{w}$				
			1-2-2	1-1-3	2-1-4	2-1-3	4-1-3
0	SSDPT	= 0	2.480497	2.480497	2.480498	2.480499	2.480500
	TSDPT	= 0	2.516394	2.516395	2.516396	2.516397	2.516398
	FSDPT	= 0	2.792544	2.792545	2.792546	2.792547	2.792548
	CPT	= 0	1.413445	1.413446	1.413447	1.413448	1.413449
	Présente (2D)	= 0	2.510099	2.510099	2.510099	2.510099	2.510099
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	2,369211	2,369211	2,369211	2,369211	2,369211
	Présente (3D)	≠ 0	2,496035	2,496035	2,496035	2,496035	2,496035
	1	SSDPT	= 0	1.294093	1.241962	1.200486	1.196878
TSDPT		= 0	1.314553	1.261255	1.218898	1.215179	1.199409
FSDPT		= 0	1.474149	1.411991	1.360459	1.354973	1.335921
CPT		= 0	0.741921	0.710711	0.684503	0.681645	0.672022
Présente (2D)		= 0	1.310964	1.257869	1.215670	1.211971	1.161256
Présente (quasi-3D)		≠ 0	1,234605	1,190039	1,145377	1,139657	1,124433
Présente (3D)		≠ 0	1,299207	1,255267	1,206024	1,198868	1,182695
2		SSDPT	= 0	1.070795	1.031881	0.987788	0.980629
	TSDPT	= 0	1.087560	1.047718	1.002660	0.995299	0.980627
	FSDPT	= 0	1.216585	1.170531	1.116160	1.106493	1.089006
	CPT	= 0	0.612412	0.589336	0.561763	0.556820	0.548003
	Présente (2D)	= 0	1.08462	1.044940	1.000053	0.992728	0.947274
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	1,022515	0,990416	0,943265	0,934294	0,920158
	Présente (3D)	≠ 0	1,076397	1,04561	0,993801	0,983316	0,968333
	3	SSDPT	= 0	0.986422	0.958114	0.914012	0.904726
TSDPT		= 0	1.001753	0.972733	0.927670	0.918134	0.904990
FSDPT		= 0	1.119518	1.086034	1.032050	1.020039	1.004485
CPT		= 0	0.563641	0.546881	0.519531	0.513420	0.505581

	Présente (2D)	= 0	0.99906	0.970168	0.925275	0.915785	0.876651
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,942552	0,919895	0,873167	0,862473	0,849829
	Présente (3D)	≠ 0	0,908219	0,971467	0,920336	0,908219	0,894839
4	SSDPT	= 0	0.944143	0.923038	0.879696	0.869252	0.857688
	TSDPT	= 0	0.958751	0.937077	0.892798	0.882086	0.870242
	FSDPT	= 0	1.071010	1.045915	0.993119	0.979903	0.965937
	CPT	= 0	0.539273	0.526725	0.499987	0.493277	0.486239
	Présente (2D)	= 0	0.956191	0.934614	0.890501	0.879837	0.845862
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,902513	0,886072	0,840467	0,828978	0,817591
	Présente (3D)	≠ 0	0,950837	0,935801	0,886213	0,873247	0,86124
5	SSDPT	= 0	0.919386	0.903175	0.860813	0.849771	0.839229
	TSDPT	= 0	0.933568	0.916883	0.873614	0.862296	0.851499
	FSDPT	= 0	1.042661	1.023199	0.971760	0.957965	0.945248
	CPT	= 0	0.525034	0.515312	0.489265	0.482269	0.475860
	Présente (2D)	= 0	0.931082	0.914478	0.871369	0.860101	0.830153
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,879065	0,866744	0,810268	0,797572	0,799717
	Présente (3D)	≠ 0	0,926356	0,91535	0,920418	0,854552	0,848186

Le tableau 3.3 présente les résultats **2D** et **quasi-3D** de la flèche ( $\bar{w}$ ) pour différentes plaques FGM sandwich. On peut observer que les résultats obtenus par le modèle (2D) sont très proches à ceux de (TSDPT) et (SSDPT), ainsi que les résultats (quasi-3D) sont en bon accord avec ceux de (quasi-3D) de Saidi et al. [10] avec un taux d'erreur maximale de 2.0% pour ( $k=0$ ), ou il est remarquable que ces résultats augmente d'une manière considérable entre une plaque entièrement en céramique à une autre modérée entre les deux constituant de la plaque FGM, puis cette variation devient lente jusqu'à la stabilité à partir des plaques plus riche en métal ( $k=4$ ). Ainsi que la même constatation est notée entre les solutions obtenue par CPT et les autres théories d'ordre élevée de déformation par cisaillement, il est à observer de sorte que la flèche devient plus importante. Pour la variation de rapport de l'épaisseur, l'augmentation de l'épaisseur de la couche céramique (diminution de la couche FGM) provoque la diminution de la flèche ( $\bar{w}$ ) sauf pour les plaques entièrement en céramique ( $k=0$ ) ou la flèche reste constante. Il est à observer que les résultats obtenus avec la prise en compte de l'effet de l'étirement sont réduits par rapport aux résultats du présent modèle (2D), qui rend par conséquent la plaque plus rigide.

**Tableau 3.3.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D), (quasi-3D) et (3D) de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) pour différents types des plaques sandwiches symétrique en FGM (Ti-6Al-4V/ $(ZrO_2)_3$ ) avec dure-âme en céramique.

$k$	Théorie	$\varepsilon_z$	$\bar{w}$				
			1-8-1	1-3-1	3-4-3	2-1-2	1-0-1
0	CPT	= 0	0.457873	0.457873	0.457873	0.457873	0.457873
	SSDPT	= 0	0,796783	0,796783	0,796783	0,796783	0,796783
	TSDPT	= 0	0,808168	0,808168	0,808168	0,808168	0,808168
	HSDPT	= 0	0,817556	0,817556	0,817556	0,817556	0,817556
	Présente	= 0	0.806171	0.806171	0.806171	0.806171	0.806171
	Saidi et al. [10]	$\neq 0$	0.771340	0.771340	0.771340	0.771340	0.771340
	Présente (quasi-3D)	$\neq 0$	0.755708	0.755708	0.755708	0.755708	0.755708
	Présente (3D)	$\neq 0$	0.801572	0.801572	0,801572	0.801572	0.801572
1	CPT	= 0	0.501163	0.539886	0.571450	0.594688	0.610331
	SSDPT	= 0	0,873745	0,941636	0,996334	1.036213	1.062840
	TSDPT	= 0	0,886067	0,954808	1,010231	1.050672	1.077690
	HSDPT	= 0	0,896222	0,96566	1,021683	1.062586	1,089928
	Présente	= 0	0,883907	0,952499	1,007795	1.048137	1.075086
	Saidi et al. [10]	$\neq 0$	0.841759	0.906271	0.959745	0.999391	1.026070
	Présente (quasi-3D)	$\neq 0$	0.829864	0.894723	0.946619	0.984292	1.009415
	Présente (3D)	$\neq 0$	0.881255	0.950318	1,005152	1.044735	1.071055
2	CPT	= 0	0.512431	0.562536	0.602673	0.629859	0.645223
	SSDPT	= 0	0,894003	0,981434	1,050237	1.096094	1.121608
	TSDPT	= 0	0,906529	0,995042	1,064791	1.111353	1.137297
	HSDPT	= 0	0,916849	1,006253	1,076785	1.123928	1,15231
	Présente	= 0	0,904333	0,992657	1,06224	1.108677	1.134546
	Saidi et al. [10]	$\neq 0$	0.860395	0.943946	1.011993	1.058388	1.084456
	Présente (quasi-3D)	$\neq 0$	0.849389	0.932854	0.998004	1.041182	1.065165
	Présente (3D)	$\neq 0$	0.902145	0.990857	1,059462	1.104590	1.129535

3	CPT	= 0	0.517716	0.573152	0.616662	0.644176	0.657539
	SSDPT	= 0	0,903467	0,999831	1,073875	1.119793	1.141655
	TSDPT	= 0	0,916083	1,013647	1,088747	1.135420	1.157693
	HSDPT	= 0	0,926476	1,025027	1,101003	1.148302	1,170917
	Présente	= 0	0,913872	1,011225	1,086139	1.13268	1.154881
	Saidi et al. [10]	≠ 0	0.869136	0.961579	1.035332	1.082231	1.104836
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.858507	0.950450	1.020470	1.063611	1.084111
	Présente (3D)	≠ 0	0.911882	1.009504	1,083089	1.128033	1.149254
4	CPT	= 0	0.520783	0.579240	0.624324	0.651345	0.662909
	SSDPT	= 0	0.908934	1.010269	1.086624	1.131428	1.150192
	TSDPT	= 0	0.921602	1.024208	1.101684	1.147260	1.166403
	HSDPT	= 0	0,932037	1,03569	1,114096	1.160313	1,179771
	Présente	= 0	0,919382	1,021764	1,099043	1.144484	1.163560
	Saidi et al. [10]	≠ 0	0.874209	0.971671	1.048073	1.094108	1.113637
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.863772	0.960420	1.032566	1.074593	1.092161
	Présente (3D)	≠ 0	0.917499	1.020048	1,095763	1.139459	1.157584
5	CPT	= 0	0.522783	0.583160	0.629064	0.655445	0.665606
	SSDPT	= 0	0.912488	1.016938	1.094427	1.137993	1.154412
	TSDPT	= 0	0.925190	1.030958	1.109609	1.153952	1.170720
	HSDPT	= 0	0,935651	1,042508	1,122124	1.167111	1.184168
	Présente	= 0	0,922963	1,0285	1,106947	1.151153	1.167860
	Saidi et al. [10]	≠ 0	0.877515	0.978164	1.055935	1.100868	1.100868
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.867192	0.966785	1.039948	1.080778	1.096178
	Présente (3D)	≠ 0	0.921146	1.026769	1,103489	1.145874	1.161677

Le tableau 3.4 présente la variation des résultats **quasi-3D** de la flèche ( $\bar{w}$ ) pour la forme carrée et rectangulaire des plaques FGM sandwichs, en considérant un cas des couches FGM riche en métal ( $k=3$ ) ou la variation de ( $\bar{w}$ ) est lente par rapport à l'augmentation de la teneur en céramique. On peut remarquer les mêmes constatations que le tableau 3.3 concernant la variation du rapport de l'épaisseur pour une plaque carrée et même pour les autres cas des plaques rectangulaires. En plus, la croissance du rapport ( $a/b$ ) provoque la diminution de la flèche d'une manière considérable. Il est pertinent de noter que la comparaison de ces résultats avec ceux de

Saidi et al. [10] présente un taux d'erreur maximal d'une valeur de 2.9% pour ( $a/b=5$ , la plaque 1-0-1).

**Tableau 3.4.** L'effet du rapport d'aspect géométrique ( $a/b$ ) sur les résultats du modèle (quasi-3D) de la flèche adimensionnel ( $\bar{w}$ ) pour différents types des plaques sandwiches avec ( $k=3$ ).

Théorie		$\varepsilon_z$	$\bar{w}$				
			( $a/b=1$ )	( $a/b=2$ )	( $a/b=3$ )	( $a/b=4$ )	( $a/b=5$ )
1-8-1	HSDPT	= 0	0,926476	0,364706	0,181529	0,106696	0,069818
	SSDPT	= 0	0,903467	0,35551	0,176937	0,104	0,068059
	TSDPT	= 0	0,916083	0,360554	0,179457	0,10548	0,069026
	Saidi et al. [10]	= 0	0.869136	0.338962	0.168161	0.097398	0.062531
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,858507	0.334462	0,164351	0,094949	0,060748
1-3-1	HSDPT	= 0	1,025027	0,403196	0,200642	0,117924	0,077167
	SSDPT	= 0	0,999831	0,393146	0,195642	0,115002	0,075273
	TSDPT	= 0	1,013647	0,398658	0,198386	0,116606	0,076314
	Saidi et al. [10]	= 0	0.961579	0.374694	0.184359	0.106737	0.068499
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,95045	0,369993	0,181801	0,105057	0,067246
3-4-3	HSDPT	= 0	1,101003	0,432682	0,215157	0,126351	0,0826
	SSDPT	= 0	1,073875	0,421843	0,209748	0,123178	0,080532
	TSDPT	= 0	1,088747	0,427786	0,212715	0,124919	0,081668
	Saidi et al. [10]	= 0	1.035332	0.402987	0.198087	0.114556	0.073414
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	1,020469	0,396718	0,194686	0,112329	0,071762
2-1-2	HSDPT	= 0	1,148302	0,45094	0,224088	0,131493	0,085879
	SSDPT	= 0	1,119794	0,439521	0.218366	0,128116	0,083662
	TSDPT	= 0	1,13542	0,445781	0,221504	0,129968	0,084879
	Saidi et al. [10]	= 0	1.082229	0.420861	0.206684	0.119392	0.076404
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	1,063611	0,413006	0,20242	0,116601	0,074335
1-0-1	HSDPT	= 0	1,170917	0,459613	0,228305	0,133902	0,087401
	SSDPT	= 0	1,141655	0,447872	0,222403	0,130406	0,085094
	TSDPT	= 0	1,157693	0,454308	0,225639	0,132324	0,08636

Saidi et al. [10]	= 0	1.104836	0.429399	0.210747	0.121649	0.077765
Présente (quasi-3D)	≠ 0	1,084111	0,420656	0,206000	0,118536	0,075462

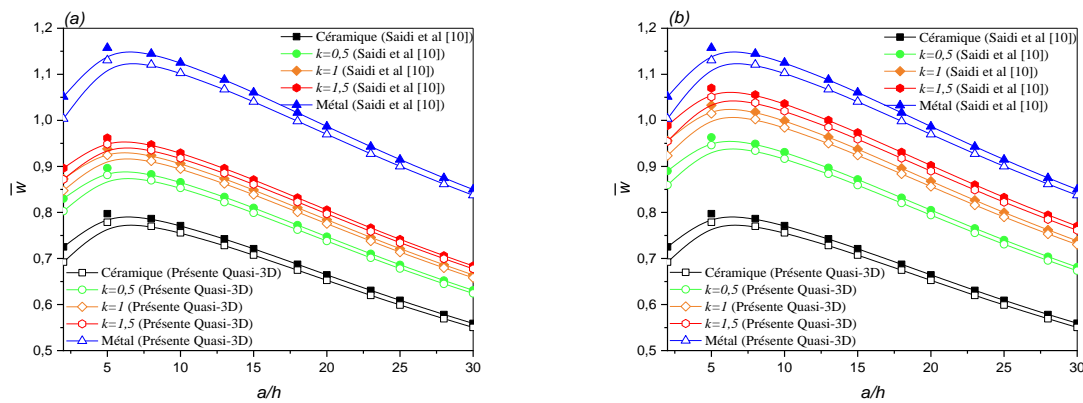
Le tableau 3.5, présente les résultats **2D et 3D** de la flèche pour différentes plaques FGM sandwich en  $((Al)_1/ZrO_2)_1$  en absence des charges thermiques et sous l'influence d'une charge mécanique uniquement. Il est à remarquer que ces résultats soient en bon accord avec toutes les solutions motionner dans le tableau, spécialement la théorie (2D) d'Akavci [18] et (3D) de Bessaim et al. [21], respectivement. Où les résultats sont presque identiques avec un taux d'erreur tend vers 0%. On peut noter que les résultats des modèles de plaques (3D) qui prennent en compte l'effet d'étirement d'épaisseur donnent une flèche plus faible par rapport aux modèles (2D) qui élimine cet effet, ainsi que l'augmentation de la valeur de l'indice ( $k$ ) (teneur en métal) mène à l'augmentation de la flèche dans toutes les séquences de la plaque sandwich. Il est à observer que les résultats obtenus du modèle (quasi-3D) avec la prise en compte de l'effet de l'étirement pour chaque cas sont réduits par rapport aux résultats du présent modèle (2D) (qu'il rend par conséquent la plaque plus rigide).

**Tableau 3.5.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D) et (3D) de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) pour différents types des plaques sandwiches en FGM  $((Al)_1/ZrO_2)_1$  avec dure-âme en céramique avec ( $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ ,  $q_0 = 1$  et  $(a/h)=10$ ).

$k$	Théorie	$\varepsilon_z$	$\bar{w}$			
			2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Neves et al. [16]	= 0	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Zenkour [17]	= 0	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Akavci [18]	= 0	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Présente (2D)	= 0	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Nguyen et al. [19]	= 0	0.1960	0.1960	0.1960	0.1960
	Neves et al. [16]	≠ 0	0.1949	0.1949	0.1949	0.1949
	Zenkour [20]	≠ 0	0.1949	0.1949	0.1949	0.1949
	Bessaim et al. [21]	≠ 0	0.1949	0.1949	0.1949	0.1949
	Akavci [18]	≠ 0	0.1947	0.1947	0.1947	0.1947
	Présente (3D)	≠ 0	0.1949	0.1949	0.1949	0.1949
1	Neves et al. [16]	= 0	0.3090	0.2949	0.2838	0.2740

	Zenkour [17]	= 0	0.3062	0.2919	0.2808	0.2709
	Akavci [18]	= 0	0.3063	0.2920	0.2808	0.2709
	Présente (2D)	= 0	0.3063	0.2920	0.2808	0.2709
	Nguyen et al. [19]	= 0	0.3062	0.2919	0.2808	0.2709
	Neves et al. [16]	≠ 0	0.3070	0.2929	0.2820	0.2722
	Zenkour [20]	≠ 0	0.3028	0.2887	0.2776	0.2682
	Bessaim et al. [21]	≠ 0	0.3043	0.2901	0.2787	0.2692
	Akavci [18]	≠ 0	0.3040	0.2898	0.2785	0.2689
	Présente (3D)	≠ 0	0.3043	0.2901	0.2787	0.2691
2	Neves et al. [16]	= 0	0.3542	0.3351	0.3186	0.3053
	Zenkour [17]	= 0	0.3522	0.3328	0.3161	0.3026
	Akavci [18]	= 0	0.3522	0.3328	0.3161	0.3026
	Présente (2D)	= 0	0.3523	0.3329	0.3162	0.3026
	Nguyen et al. [19]	= 0	0.3522	0.3328	0.3161	0.3026
	Neves et al. [16]	≠ 0	0.3519	0.3329	0.3164	0.3032
	Zenkour [20]	≠ 0	0.3474	0.3282	0.3115	0.2987
	Bessaim et al. [21]	≠ 0	0.3500	0.3307	0.3136	0.3006
	Akavci [18]	≠ 0	0.3496	0.3303	0.3132	0.3003
	Neves et al. [16]	≠ 0	0.3500	0.3306	0.3135	0.3006
10	Neves et al. [16]	= 0	0.4051	0.3868	0.3637	0.3503
	Zenkour [17]	= 0	0.4038	0.3849	0.3492	0.3412
	Akavci [18]	= 0	0.4039	0.3854	0.3620	0.3482
	Présente (2D)	= 0	0.4040	0.3857	0.3693	0.3472
	Nguyen et al. [19]	= 0	0.4039	0.3854	0.3620	0.3482
	Neves et al. [16]	≠ 0	0.4026	0.3843	0.3612	0.3480
	Zenkour [20]	≠ 0	0.3986	0.3792	0.3558	0.3426
	Bessaim et al. [21]	≠ 0	0.4015	0.3830	0.3589	0.3459
	Akavci [18]	≠ 0	0.4009	0.3825	0.3582	0.3455
	Présente (3D)	≠ 0	0.4014	0.3828	0.3607	0.3490

La figure (3.1. a et b) montre la variation de résultats (quasi-3D) de la flèche ( $\bar{w}$ ) en fonction du rapport ( $a/h$ ) pour trois plaques FGM ( $k=0.5, 1, 1.5$ ) sandwich de deux types (1-3-1) et (2-1-2), respectivement. Les allures dans tous les cas ont la même forme générale, soit pour la variation de l'indice ( $k$ ) ou le type de la plaque sandwich. Ils présentent un pic de charge maximale à ( $a/h=7$ ) la seule différence entre les deux types sandwich est présentée pour les plaque FGM ( $k \in ]0, \infty [$ ). Pour la plaque (1-3-1), l'augmentation de l'épaisseur de la couche céramique provoque la diminution des allures vers la plaque homogène en céramique ( $k=0$  ou la rigidité est la plus élevée) qui présente les petites allures, alors que pour le deuxième type (2-1-2), la diminution de l'épaisseur de la couche céramique provoque l'augmentation des allures vers la plaque homogène en métal ( $k=\infty$  ou la rigidité est la plus faible) qui présente les grandes allures. Les allures de la présente théorie (quasi-3D) sont validées avec celle de Saïdi et al [10] où une petite différence est toujours remarquée. Où le taux d'erreur maximal est de 4.55%, signalée pour ( $k=0, a/h=2$ ) dans les deux types de sandwichs (1-3-1) et (2-1-2).

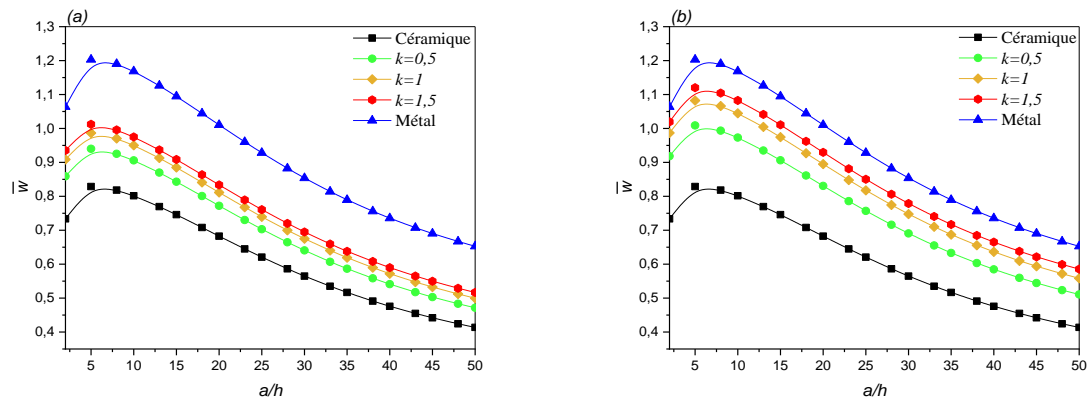


**Figure 3.1.** Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de rapport largeur/épaisseur ( $a/h$ ) pour deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).

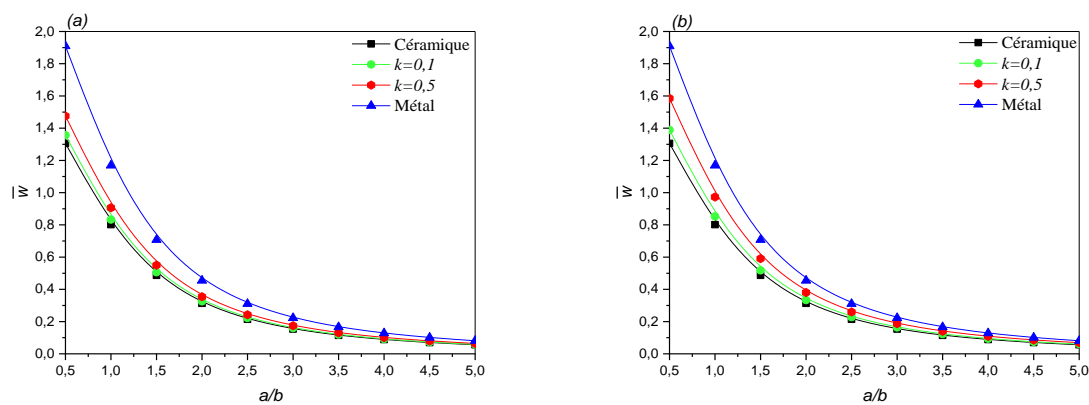
En utilisant le modèle **3D**, les mêmes cas précédents sont traités de nouveau, dans les figures 3.2 et 3.3 (a et b), où les mêmes constatations sont notées dans la Figures 3.1. (quasi-3D) mais avec des valeurs plus grandes.

En continuant cette analyse par l'étude de l'influence du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur la figure 3.3, où on peut observer la diminution de la flèche avec l'augmentation de ce dernier. Comme elle est remarquer précédemment, les allures de la plaque métallique présentent les plus grandes valeurs contrairement à celui de la plaque en céramique, tandis que les autres allures correspondantes aux plaques FGM inhomogènes prennent des valeurs moyennes, ainsi que la forme générale reste la même. On peut tirer profit qu'il est possible de traiter seul le type (1-3-1) dans la figure 3.4 pour étudier l'influence de la présence de la charge thermique, mécanique, ou thermomécanique pour le

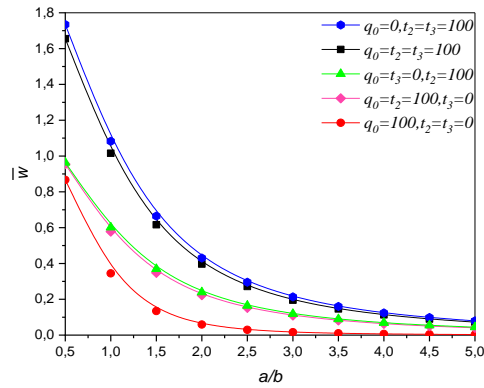
cas de ( $k=3,5$ ). La flèche est plus grande sous l'application d'une charge thermique, tandis que l'inclusion de la charge mécanique (cas thermomécanique) diminue toujours les valeurs de la flèche et par conséquent la plus petite flèche est trouvée pour les plaques soumises à une charge mécanique uniquement et vice versa.



**Figure 3.2.** Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de rapport largeur/épaisseur ( $a/h$ ) pour deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).



**Figure 3.3.** Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de rapport d'aspect géométrique ( $a/b$ ) pour deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).



**Figure 3.4.** La variation de la flèche adimensionnelle en fonction de rapport d'aspect géométrique ( $a/b$ ) et l'influence des charges mécaniques, thermiques et thermomécanique sur une plaque sandwich en FGM de type (1-3-1).

### 3.1.2. Contraintes axiale:

Le tableau 3.6 présente les résultats **2D**, **quasi-3D** et **3D** de la contrainte axiale ( $\bar{\sigma}_x$ ) pour différentes plaques FGM sandwich. Il est à constater que les résultats présents sont en bon accord avec ceux de (HSDPT), ce qui est prouvé par le taux d'erreur maximale de 0.598%. De plus, ces résultats sont sensibles à la fonction de forme de déformation par cisaillement utilisée à chaque théorie d'ordre élevée. Il est remarquable que les résultats augmentent d'une manière considérable entre une plaque entièrement en céramique à une autre modérer entre les deux constituant de FGM, et notamment des modèles (3D) puis ils diminuent lentement. L'augmentation de l'épaisseur de la couche céramique (le rapport de l'épaisseur) provoque la diminution de la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ) sauf pour les plaques entièrement en céramique ( $k=0$ ) ou elle reste constante. L'inclusion de la déformation normale ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) donne des valeurs de contraintes plus précises par rapport au modèle (2D). Pour les résultats du modèle quasi-3D comparés aux solutions de Saidi et al. [10] le taux d'erreur maximal est de 29.24%, signalée pour ( $k=0$ ).

**Tableau 3.6.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D), (quasi-3D) et (3D) de la contrainte adimensionnelle ( $\bar{\sigma}_x$ ) pour différents types des plaques sandwiches en FGM.

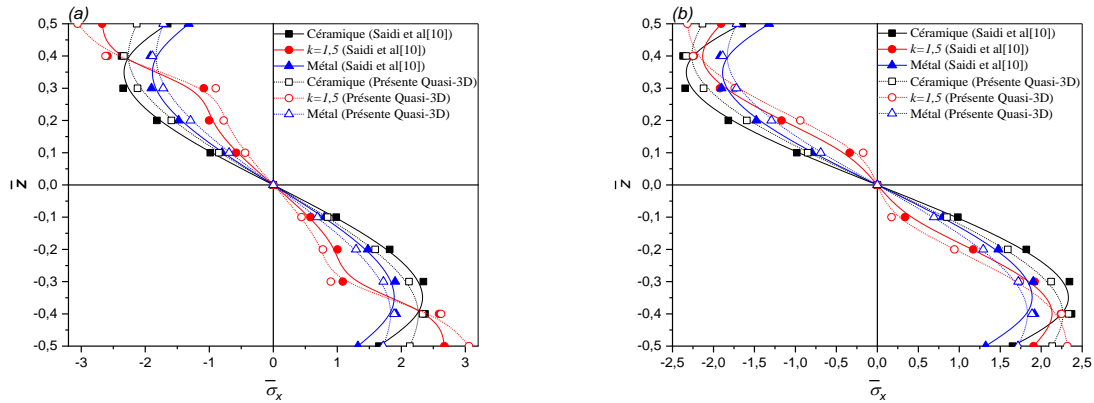
$k$	Théorie	$\varepsilon_z$	$\bar{\sigma}_x$				
			1-8-1	1-3-1	3-4-3	2-1-2	1-0-1
0	SSDPT	= 0	2,523043	2,523043	2,523043	2,523043	2,523043
	TSDPT	= 0	2,388919	2,388919	2,388919	2,388919	2,388919

	HSDPT	= 0	2,461177	2,461177	2,461177	2,461177	2,461177
	Présente	= 0	2,448353	2,448353	2,448353	2,448353	2,448353
	Saidi et al. [10]	≠ 0	1.650736	1.650736	1.650736	1.650736	1.650736
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	2,133544	2,133544	2,133544	2,133544	2,133544
	Présente (3D)	≠ 0	1.860670	1.860670	1.860670	1.860670	1.860670
1	HSDPT	= 0	3,480127	3,140399	2,865768	2,665136	2,53115
	SSDPT	= 0	3,3333	3,001265	2,733086	2,537374	2,406806
	TSDPT	= 0	3,412724	3,076466	2,80475	2,606343	2,473903
	Présente	= 0	3,398668	3,06315	2,792054	2,59412	2,462009
	Saidi et al. [10]	≠ 0	3.372080	2.859305	2.461461	2.179138	1.993540
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	3,681035	3,221046	2,847579	2,574048	2,39132
	Présente (3D)	≠ 0	4.932370	4.125616	3,470942	2.990037	2.669450
2	HSDPT	= 0	3,379455	2,941822	2,595856	2,364496	2,235677
	SSDPT	= 0	3,234499	2,806645	2,469045	2,243809	2,11843
	TSDPT	= 0	3,312889	2,84967	2,53489	2,308903	2,18178
	Présente	= 0	3,299014	2,866735	2,525358	2,297361	2,170596
	Saidi et al. [10]	≠ 0	3.211762	2.556774	2.066031	1.751165	1.580468
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	3,546012	2,953469	2,482561	2,166587	1,990588
	Présente (3D)	≠ 0	4.696816	3.658304	2,833032	2.277643	1.968954
3	HSDPT	= 0	3,332439	2,849905	2,477118	2,244947	2,13433
	SSDPT	= 0	3,188312	2,716593	2,353122	2,127496	2,02025
	TSDPT	= 0	3,266245	2,788595	2,420027	2,190823	2,081515
	Présente	= 0	3,252449	2,775839	2,408166	2,179591	2,070924
	Saidi et al. [10]	≠ 0	3.137344	2.419727	1.898185	1.588667	1.446122
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	3,482977	2,829504	2,321689	2,004186	1,852858
	Présente (3D)	≠ 0	4.586970	3.441930	2,551935	1.993694	1.728222
4	HSDPT	= 0	3,305276	2,797679	2,412894	2,186019	2,091004
	SSDPT	= 0	3,16162	2,665468	2,290552	2,070361	1,978602
	TSDPT	= 0	3,239292	2,736867	2,356554	2,13271	2,039172

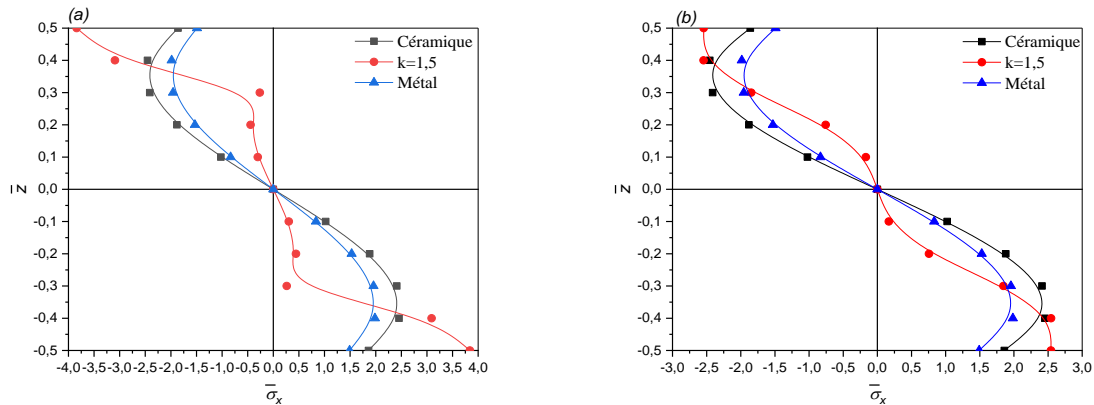
	Présente	= 0	3,225542	2,724217	2,344852	2,12165	2,028425
	Saidi et al. [10]	≠ 0	3.094600	2.343139	1.809688	1.511078	1.390767
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	3,446555	2,759008	2,234548	1,924003	1,793905
	Présente (3D)	≠ 0	4.523527	3.318891	2,399634	1.853443	1.625155
5	HSDPT	= 0	3,287616	2,764272	2,373503	2,152668	2,069541
	SSDPT	= 0	3,144264	2,632792	2,252244	2,038118	1,657968
	TSDPT	= 0	3,221769	2,703791	2,317655	2,099863	2,018086
	Présente	= 0	3,208048	2,691211	2,306057	2,088909	2,007418
	Saidi et al. [10]	≠ 0	3.066950	2.294758	1.756372	1.468147	1.446122
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	3,422872	2,713884	2,181043	1,878571	1,764819
	Présente (3D)	≠ 0	4.482283	3.240129	2,306095	1.773944	1.574172

Les figures (3.5. a et b) illustrent la variation de résultats (quasi-3D) de la contrainte axiale ( $\bar{\sigma}_x$ ) à travers l'épaisseur des plaques homogène et une plaque FGM ( $k=1,5$ ) sandwich de deux types (1-3-1) et (2-1-2). Les allures dans tous les cas ont la même forme générale, soit pour la variation de l'indice ( $k$ ) ou le type de la plaque sandwich. Il est à signaler que les contraintes sont de traction et de compression au dessous et au dessus du plan médian de la plaque, respectivement. Il est à mentionner que les plaques homogènes en céramique présentent des pics de contraintes de traction maximale et de compression minimale, ce qui est le même comportement de la plaque homogène en métal mais avec des valeurs réduites par rapport à celles du premier cas. Les pics prennent les mêmes valeurs pour les deux types de sandwich, parce que ces plaques sont homogènes où la composition reste la même, ainsi que les plaques FGM présentent des contraintes de traction minimale et de compression maximale au niveau des surfaces de la couche centrale, et des contraintes de traction maximale et de compression minimale au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque selon le type de plaque sandwich. Pour la plaque (2-1-2), la diminution de l'épaisseur de la couche céramique provoque la convergence des allures des plaques FGM vers la plaque homogène. Les allures de la présente théorie (quasi-3D) sont validées avec celle de Saidi et al [10] où une petite différence est toujours remarquée sauf pour les valeurs correspondant aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Dans ce cas, le taux d'erreur maximal est de 22.99% pour les deux types.

En utilisant le modèle **3D**, les mêmes cas précédents sont traités de nouveau dans les figures 3.6 (a et b). Les mêmes constatations sont remarquées dans la première que celle des allures des modèles (quasi-3D) présenter dans la figure 3.5 mais avec des valeurs plus grande.

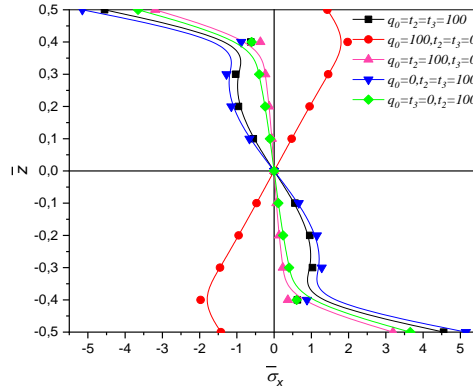


**Figure 3.5.** Variation de la contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur des deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).



**Figure 3.6.** Variation de la contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur des deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).

En continuant cette analyse sur la figure 3.7 par l'étude de la distribution de la contrainte axiale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM ( $k=3.5$ ) sandwich de type (1-3-1). Ces figures montrent la grande influence exerc e par les différentes charges mécanique, thermique et thermomécanique sur les contraintes ( $\bar{\sigma}_x$ ). Comme c'est remarqu e précédemment, les allures de la plaque FGM présentent des valeurs de contraintes ( $\bar{\sigma}_x$ ) de traction maximale au dessous de plan médian sur la surface inférieure de la plaque et celle de la compression minimale au-dessus du plan médian sur la surface supérieure de la plaque sous l'application d'une charge thermique, tandis que l'inclusion de la charge mécanique (cas thermomécanique) diminue toujours les valeurs de la contrainte de traction et augmente celle de la compression et par conséquent, la charge mécanique uniquement, provoque le renversement de contrainte de traction et de compression par rapport au plan médian, en présentant des pics de contraintes.



**Figure 3.7.** Variation de la contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM de type (1-3-1) soumise à l'influence des charges mécanique, thermique et thermomécanique.

### 3.1.3. Contraintes transversales:

Les résultats **2D**, **quasi-3D** et **3D** de la contrainte de cisaillement transversale ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) sont traités dans le tableau 3.7 pour différentes plaques FGM sandwich. Il est à constater que les résultats du présent modèle (2D), (quasi-3D) et (3D) sont en bon accord avec ceux de (HSDPT), (TSDPT) et Saidi et al [10], respectivement. Il est observable que les résultats augmentent d'une manière considérable entre une plaque entièrement en céramique à une autre modérée entre les deux constituants du FGM, et particulièrement celle du présent modèle (3D), puis la variation est sensible à chaque type de plaque sandwich et même à l'augmentation de l'épaisseur de la couche céramique sauf pour les plaques entièrement en céramique ( $k=0$ ) où la contrainte ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) reste constante. Il est à observer que les résultats obtenus avec la prise en compte de l'effet de l'étirement pour chaque cas sont plus grands par rapport aux résultats du présent modèle (2D) (qu'il rend par conséquent la plaque plus rigide) sauf pour la plaque céramique homogène ou pour la plaque de type sandwich sans couche médiane pour ( $k \geq 3$ ). Pour les résultats du modèle quasi-3D comparés aux solutions de Saidi et al. [10] le taux d'erreur maximal est de 17.26%, noté pour ( $k=0$ ).

**Tableau 3.7.** Comparaison entre les résultats du modèle (2D), (quasi-3D) et (3D) de la contrainte adimensionnelle ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) pour différents types des plaques sandwichs en FGM.

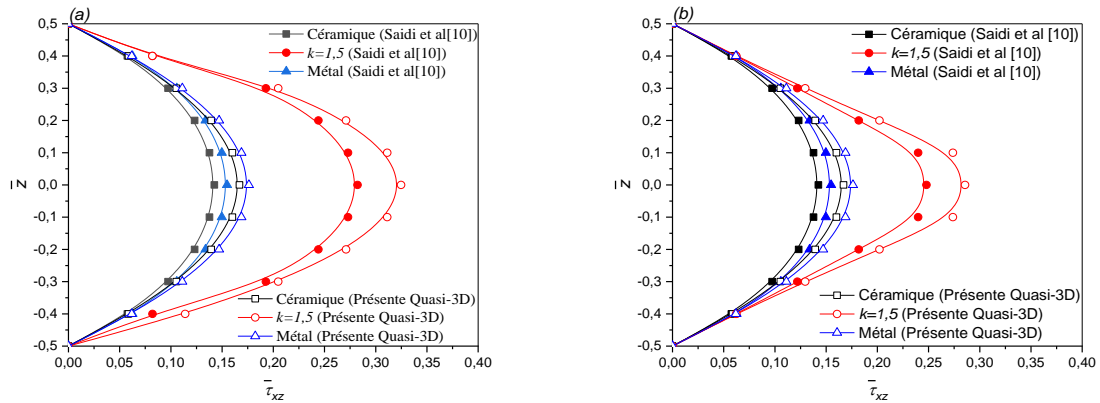
$k$	Théorie	$\varepsilon_z$	$\bar{\tau}_{xz}$				
			1-8-1	1-3-1	3-4-3	2-1-2	1-0-1
0	SSDPT	= 0	0,175814	0,175814	0,175814	0,175814	0,175814
	TSDPT	= 0	0,171604	0,171604	0,171604	0,171604	0,171604

	HSDPT	= 0	0,174481	0,174481	0,174481	0,174481	0,174481
	Présente	= 0	0,174087	0,174087	0,174087	0,174087	0,174087
	Saidi et al. [10]	≠ 0	0.142427	0.142427	0.142427	0.142427	0.142427
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,167013	0,167013	0,167013	0,167013	0,167013
	Présente (3D)	≠ 0	0.139689	0.139689	0.139689	0.139689	0.139689
1	HSDPT	= 0	0,25812	0,280007	0,275689	0,26783	0,267638
	SSDPT	= 0	0,271618	0,300347	0,293865	0,28089	0,277019
	TSDPT	= 0	0,264677	0,289538	0,284236	0,274133	0,272347
	Présente	= 0	0,265977	0,291494	0,285987	0,275393	0,273255
	Saidi et al. [10]	≠ 0	0.245892	0.271139	0.263095	0.250022	0.245207
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,280612	0,311748	0,303585	0,288064	0,281939
	Présente (3D)	≠ 0	0.318869	0.366633	0,350239	0.319727	0.301369
2	HSDPT	= 0	0,274559	0,293708	0,279786	0,265773	0,268627
	SSDPT	= 0	0,292205	0,317892	0,298078	0,27513	0,272583
	TSDPT	= 0	0,28295	0,30791	0,288355	0,270427	0,270952
	Présente	= 0	0,284647	0,307235	0,290118	0,271333	0,271341
	Saidi et al. [10]	≠ 0	0.266548	0.287198	0.265886	0.243455	0.239333
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,303554	0,330784	0,30744	0,280197	0,274158
	Présente (3D)	≠ 0	0.354754	0.395509	0,353084	0.300204	0.275608
3	HSDPT	= 0	0,281176	0,29708	0,277265	0,261228	0,269434
	SSDPT	= 0	0,3006	0,322239	0,294047	0,267073	0,269608
	TSDPT	= 0	0,290349	0,308691	0,285154	0,264327	0,27011
	Présente	= 0	0,292216	0,311116	0,286773	0,264898	0,270138
	Saidi et al. [10]	≠ 0	0.274786	0.290668	0.261357	0.235362	0.235593
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,31284	0,335335	0,302494	0,270305	0,268809
	Présente (3D)	≠ 0	0.369230	0.401993	0,343218	0.279823	0.257601
4	HSDPT	= 0	0,28463	0,298	0,274576	0,258355	0,272013
	SSDPT	= 0	0,305016	0,323396	0,289951	0,261729	0,270017
	TSDPT	= 0	0,294226	0,309711	0,281837	0,260366	0,271755

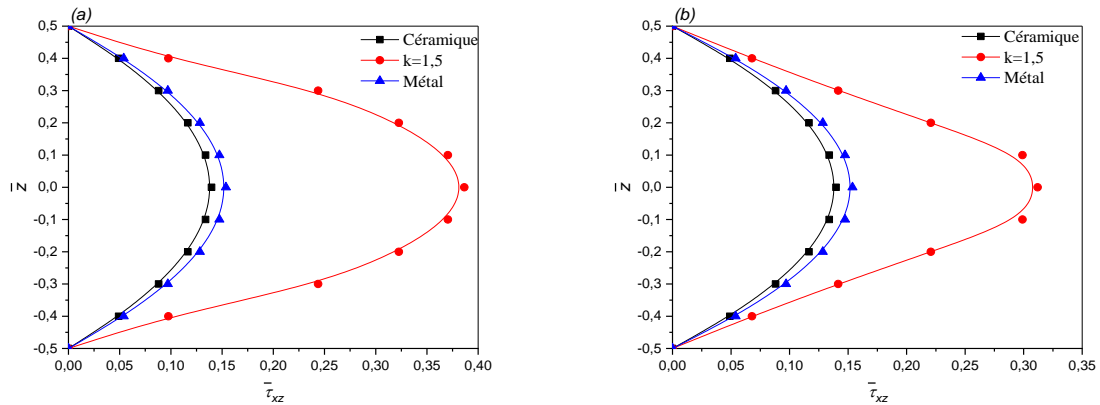
	Présente	= 0	0,296185	0,312153	0,283322	0,260699	0,271574
	Saidi et al. [10]	≠ 0	0,279028	0,291316	0,257131	0,230171	0,235324
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,317704	0,336452	0,29765	0,263705	0,267709
	Présente (3D)	≠ 0	0,376795	0,403289	0,334128	0,265963	0,248723
5	HSDPT	= 0	0,286716	0,298171	0,27244	0,256771	0,275287
	SSDPT	= 0	0,307694	0,323573	0,286687	0,258433	0,272071
	TSDPT	= 0	0,296571	0,309879	0,2792	0,258029	0,274512
	Présente	= 0	0,298587	0,312322	0,280576	0,258199	0,274215
	Saidi et al. [10]	≠ 0	0,281670	0,291163	0,253889	0,227025	0,236707
	Présente (quasi-3D)	≠ 0	0,320646	0,336539	0,293821	0,259545	0,269845
	Présente (3D)	≠ 0	0,381362	0,403088	0,327008	0,256790	0,243807

Les figures 3.7 et 3.8 (a et b) illustrent la variation des résultats (quasi-3D) de la contrainte de cisaillement transversale ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) à travers l'épaisseur des deux plaques homogènes et plaques FGM ( $k=1.5$ ) sandwich de deux types (1-3-1) et (2-1-2). Il est à remarquer toujours que, les allures dans tous les cas ont la même forme générale, soit pour la variation de l'indice ( $k=0, 1.5, \infty$ ) ou le type de la plaque sandwich sous forme parabolique à travers l'épaisseur de la plaque. La valeur maximale de chaque allure se produit toujours en un point sur le plan médian des plaques, alors que l'amplitude de la contrainte ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) la plus grande est obtenue pour la plaque FGM. Ainsi que toutes les plaques FGM présentent des contraintes nulles au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Il est à mentionner que les plaques homogènes en céramique présentent les valeurs de contrainte les plus faibles, convergente à celle de la plaque métallique, et reste les mêmes pour les deux types de sandwich, tandis que la plaque sandwich prennent des grandes valeurs avec l'augmentation de la couche céramique. Pour la plaque (2-1-2), l'allure parabolique de plaque FGM est accentuée par rapport à celle des plaques homogènes. Les allures de la présente théorie (quasi-3D) sont validées avec celle de Saidi et al [10] où une petite différence est toujours remarquée sauf pour les valeurs correspondant au plan médian ( $z=0$ ) de la plaque où le taux d'erreur maximal est de 14.72% pour les deux types.

En utilisant le modèle **3D**, les mêmes cas précédentes sont de nouveau traiter dans les figures 3.9 (a et b), ou les mêmes constatations sont remarquer dans la première que celle des allures des modèles (quasi-3D) présenter dans la figure 3.8 mais avec des valeurs plus grande.

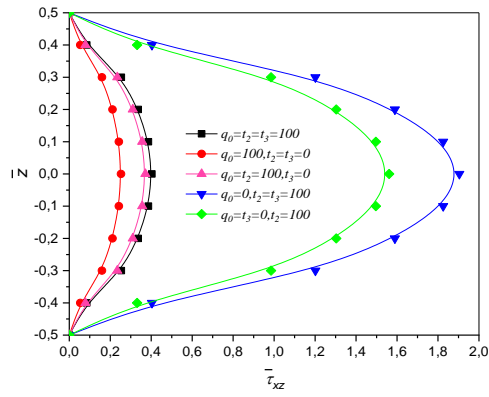


**Figure 3.8:** La variation de la contrainte transversale adimensionnelle à travers l'épaisseur des deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).



**Figure 3.9.** Variation de la contrainte transversale adimensionnelle à travers l'épaisseur des deux types de plaques sandwich en FGM: (a) la plaque (1-3-1). (b) la plaque (2-1-2).

En continuant cette analyse sur la figure 3.10 par l'étude de la répartition de la contrainte de cisaillement transversale ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM sandwich de type (1-3-1), soumise à l'influence de différentes charges mécanique, thermique et thermomécanique. Comme c'est remarqué précédemment, les allures de la plaque FGM présentent des valeurs de contrainte maximale sous l'application d'une charge thermique, tandis que l'inclusion de la charge mécanique (cas thermomécanique) conduit à la diminution des valeurs de la contrainte et par conséquent, la charge mécanique seule provoque la plus petite valeur de contrainte par rapport aux autres charges.



**Figure 3.10.** Variation de la contrainte transversale adimensionnelle à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM de type (1-3-1) soumise à l'influence des charges mécaniques, thermiques et thermomécanique.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Des nouveaux modèles mathématiques 2D, Quasi-3D et 3D sont utilisées dans la théorie hybride de déformation par cisaillement (polynômiale-trigonométrique) pour l'analyse de la flexion thermomécanique d'une plaque FGM sandwich simplement appuyée. La formulation théorique commence par un champ de déplacement à cinq inconnues pour le modèle 2D et six inconnues pour les modèles quasi-3D et 3D, qui considèrent le déplacement dû à l'étirement transversal de l'épaisseur de la plaque, développé par l'effet de contrainte de cisaillement transversal, satisfait les conditions aux limites de contrainte nulle sur les surfaces libres de la plaque. Les effets de plusieurs paramètres tels que l'indice de fraction volumique, les rapports géométriques, l'épaisseur de la couche centrale (type de sandwich), les types de la charge appliquée et sa grandeur, et les propriétés des matériaux, sur la flèche, les contraintes axiale et transversale sont analysés. La précision du modèle proposé est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux des références de la littérature. En conclusion, cette théorie est appropriée, simple et précise, d'où on tire les constatations suivantes:

- Les résultats obtenus sont en bonne concordance et sont très proches aux différents résultats 2D, quasi-3D dans de nombreux cas, ce qui démontre la convergence de la théorie.
- L'effet de la déformation par cisaillement rend la plaque plus flexible et conduit par conséquent à l'augmentation de la flèche.
- Pour les plaques sandwichs en FGM avec une âme dure en céramique, la flèche  $\bar{w}$  devient plus importante avec la diminution de l'indice ( $k$ ) et du rapport ( $a/h$ ) et l'augmentation du rapport ( $b/a$ ). Cependant, pour les plaques sandwichs en FGM avec soft-âme en métal,  $\bar{w}$  croît avec l'accroissement de l'indice ( $k$ ).
- La prise en compte de l'effet d'étirement réduit la flèche par rapport à celle du modèle (2D) (qu'il rend par conséquent la plaque plus rigide).
- La flèche est plus grande sous l'application d'une charge thermique, tandis que l'inclusion de la charge mécanique (cas thermomécanique) diminue toujours les valeurs de la flèche et par conséquent la plus petite flèche est trouvée pour les plaques soumises à une charge mécanique uniquement et vice versa.
- L'inclusion de la déformation normale ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) donne des valeurs de contraintes plus précises à celles du modèle (2D).
- Les contraintes tangentielles  $\bar{\tau}_{xz}(z)$  sont moins importantes que  $\bar{\sigma}_{xx}(z)$ .

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1]. Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG. Functionally graded materials design, processing and applications, materials technology series. Springer science+ business media, llc. Ta418.9. F85f86 1999 :2-3
- [2]. Mahmoudi A. Thèse de doctorat en sciences. Étude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM. Université Djillali Liabes. Sidi Bel Abbes. Faculté de Technologie. Département de Génie Civil et Travaux Publics. 2019 :7-8 ; 10-11 ;
- [3]. Belabed Z. Thèse de doctorat en sciences. Étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes. Université Djillali Liabes. Sidi Bel Abbes. Faculté de Technologie. Département de Génie Civil. 2016 : 9-12 ; 20-21 ; 28-29
- [4]. Ait Sidhoum I. Thèse de doctorat en sciences. Analyse de la vibration libre des plaques épaisses en matériaux fonctionnellement gradué. Universités Mohamed-Boudiaf. Oran. Faculté des sciences et de la technologie. 2019 :19-21
- [5]. Menasria A. Thèse Doctorat En Sciences. Étude De L'effet De La Microstructure Sur Le Flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées. Université Djillali Liabes. Sidi Bel Abbes. Faculté de Technologie. Département de Génie Civil. 2019 :56-57
- [6]. L.F. Qian, R.C. Batra, L.M. Chen. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Comp. Part B: Eng.* 35 (2004) 685-697.
- [7]. Elishakoff I, Pentras D, Gentilini C. *Mechanics of Functionally Graded Material Structures*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2016. 12.
- [8]. Zenkour, A.M. and Alghamdi, N. (2010), "Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads", *Mech. Adv. Mater. Struct.* **17**(6), 419-432.
- [9]. Akavci SS. Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Compos B Eng* 2016; 96:136-152.
- [10]. Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 15(2), 221-245. 2013.
- [11]. Reddy JN. A simple higher order shear deformation theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 1984; 51(4): 745-753.
- [12]. Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991; 29(8): 901-916.

- [13]. H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, 2010.
- [14]. Fatima Zohra Zaoui, Djamel Ouinas, Abdelouahed Tounsi, New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Composites Part B* 159 (2019) 231–247.
- [15]. Zenkour, A.M. and Alghamdi, N. (2008), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Mater. Sci*, **43**(8), 2574-2589.
- [16]. Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Jorge RMN, Soares CMM. Static analysis of functionally graded sandwich plates according to a hyperbolic theory considering zig-zag and warping effects. *Adv Eng Softw* 2012;52:30-43.
- [17]. Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 1-Deflection and stresses. *Int J Solids Struct* 2005;42:5224-42.
- [18]. Akavci SS. Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Compos B Eng* 2016; 96:136-152.
- [19]. Nguyen V-H, Nguyen T-K, Thai H-T, Vo TP. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Compos B Eng* 2014;66:233–46.
- [20]. Zenkour A. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four unknown shear and normal deformation theory. *J Sandwich Struct Mater* 2013; 15(6):629-656.
- [21]. Bessaim A, Houari MSA, Tounsi A, Mahmoud SR, El Abbas AB. A new higherorder shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *J Sand Struct Mat* 2013;15(6):671e703.