UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire

Présenté par

Mr HAOUA Rabah

pour l'obtention du diplôme de

Magister de Mathématiques

Intitulé

# Etude de la limite d'un problème de transmission sur une couche mince par la théorie des sommes d'opérateurs

Soutenu le  2010

Devant le jury :

Président :
M. BELAIDI Benharrat, Professeur, Université de Mostaganem.

Examinateurs :
M. AMIR Abdelssamad, Maître de Conférences, Université de Mostaganem.

M. CHEGGAG Mustapha Maître de Conférences, ENSET d'Oran.

Encadreur :
M. A. MEDEGHRI Ahmed, Maître de Conférences, Université de Mostaganem.

# Table des matières

# Remerciements

A l'occasion d'achèvement de ce mémoire,je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont apporté leur soutien à l'élaboration de ce mémoire.

D'abord et notamment au professeur l'encadreur "Medeghri Ahmed",et ainsi au présent jury Belaidi Benharrat,Amir Abdelssamad et Cheggag Mustapha et aussi je remercie mon docteur qui m'aide patiemment à mon mémoire :Mr Belhamiti Omar et à tout le monde de proche ou / et de loin.

# Introduction

On étudie une famille de problèmes de transmission $(P_\delta)_{\delta>0}$, à coefficients raides en $\dfrac{1}{\delta}$, modélisant par exemple un phénomène physique dans la juxtaposition d'un milieu cylindrique $]-1,0[\times G$ et d'une couche mince $]0,\delta[\times G$ de caractéristique physique en $\dfrac{1}{\delta}$.

Aprés un changement d'échelle sur l'épaisseur de la couche mince, on applique la théorie des sommes d'opérateurs de Da prato-Grisvard,dans le cadre des espaces de Sobolev construits sur

$$L^p\left(]-1,1[\times G\right),$$

avec $p>1$.

On montre notamment, que la famille des solutions $(u_\delta)_{\delta>0}$ donnée par cette théorie, converge vers une fonction $u$ dans $L^p$ pour un second membre $L^p$ et converge dans $W^{1+2\theta,p}$ pour un second membre $W^{2\theta,p}$, $\left(\theta\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)$ . On montre aussi, que la restriction de la limite $u$ à $]-1,0[\times G$ est solution d'une problème aux limites de type Ventcel et possède la régularité optimale.

On considère le problème de transmission suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{b_\delta}div\left(b_\delta\nabla v^\delta\right)=g^\delta & \text{sur } \Omega^\delta \\ v^\delta=0 & \text{sur } \partial\Omega^\delta\smallsetminus\Gamma^\delta \\ \partial_\zeta v^\delta=0 & \text{sur } \Gamma^\delta, \end{cases} \tag{1}$$

où $\delta$ est un paramètre dans ]0,1[, $\Omega^\delta=\left(]-1,0[\cup]0,\delta[\right)\times G$ avec $G$ un ouvert dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $\Gamma^\delta=\{\delta\}\times G$ et $b_\delta$ est une fonction définie par

$$b_\delta(\zeta)=\begin{cases} 1 & \text{si } \zeta\in\,]-1,0[ \\ \dfrac{1}{\delta} & \text{si } \zeta\in\,]0,\delta[\,, \end{cases}$$

$g^\delta$ est une fonction dans $L^p\left(\Omega^\delta\right)$ et $1<p<\infty$.

On se propose d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème (1), en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs pour cela on écrit le problème (1) sous une forme abstraite, puis on vérifie les hypothèses de Da-prato-Grisvard cadre commutatif. Ce travail fait suite à celui de Favini et al [5] ou les auteurs ont considéré le problème (1) dans le cadre $L^p$ et de Belhamiti et al [1] ou le meme problème avec conditions non homogènes a été étudié dans le cadre continu.

On pose

$$\Omega_{\_}=\,]-1,0[\times G,$$

un domaine fixe, et

$$\Omega_+^\delta = ]0,\delta[ \times G,$$

un domaine variable dépendant de $\delta$.

Le but principal de l'étude est de résoudre (1 pour un $\delta > 0$ fixé (petit) puis d'étudier la convergence de la famille $(P_\delta)$ quand $\delta \to 0$.

Notons $v_-^\delta$ et $v_+^\delta$ les restrictions respectives de$v^\delta$ à $\Omega_-$ et à $\Omega_+^\delta$ (de même pour $g_-^\delta$ et $g_+^\delta$). Le problème (1) est équivalent au problème

$$\begin{cases} -\Delta v_-^\delta = g_-^\delta & \text{sur} \quad \Omega_- \\ -\Delta v_+^\delta = g_+^\delta & \text{sur} \quad \Omega_+^\delta, \end{cases} \tag{2}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} v_-^\delta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ v_+^\delta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_+^\delta \setminus \Gamma^0 \cup \Gamma^\delta \\ \partial_\zeta v_+^\delta = 0 & \text{sur} \quad \Gamma^\delta, \end{cases}$$

et les conditions de transmission

$$\begin{cases} v_-^\delta = v_+^\delta & \text{sur} \quad \Gamma^0 \\ \partial_x v_-^\delta = \dfrac{1}{\delta}\partial_x v_+^\delta & \text{sur} \quad \Gamma^0, \end{cases}$$

où $\Gamma^0 = \{0\} \times G$.

Pour utiliser la théorie des sommes d'opérateurs on doit fixer le domaine donc on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_-^\delta = f_-^\delta & \text{sur} \quad \Omega_- = ]-1,0[ \times G \\ -\left(\dfrac{1}{\delta^2}\partial_x^2 u_+^\delta + \Delta_y u_+^\delta\right) = f_+^\delta & \text{sur} \quad \Omega_+ = ]0,1[ \times G, \end{cases} \tag{3}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_-^\delta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_- \diagdown \Gamma^0 \\ u_+^\delta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_+ \diagdown (\Gamma^0 \cup \Gamma^1) \\ \partial_x u_+^\delta = 0 & \text{sur} \quad \Gamma^1, \end{cases}$$

et les conditions de transmission

$$\begin{cases} u_-^\delta = u_+^\delta & \text{sur} \quad \Gamma^0 \\ \partial_x u_-^\delta = \dfrac{1}{\delta^2}\partial_x u_+^\delta & \text{sur} \quad \Gamma^0. \end{cases}$$

On introduit les opérateurs $A$ et $B_\delta$ définis par

$$D(A) = L^p(-1,1,D(Q)) \text{ et } (A\omega)(x) = Q(\omega(x)), \omega \in D(A),$$

avec $Q$ la réalisation de $A$ dans $X = L^p(G)$,

$$\begin{cases} D(Q) = W^{2,p}(G) \cap W_0^{1,p}(G) \\ (Q\Psi)(y) = -\Delta_y \Psi(y), \ \Psi \in D(Q), \end{cases}$$

et

$$D(B_\delta) = \left\{ \begin{array}{l} \omega \in L^p(-1,1;X) : \omega_-^\delta \in W^{2,p}(-1,0;X), \ \omega_+^\delta \in W^{2,p}(0,1;X), \\ \omega_-^\delta(-1) = 0, \omega_-^\delta(0) = \omega_+^\delta(0), \partial_x \omega_-^\delta(0) = \frac{1}{\delta^2}\partial_x \omega_+^\delta(0), \partial_x \omega_+^\delta(1) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left(B_\delta \omega^\delta\right)(x) = -\partial_x\left(a_\delta(x)\,\partial_x \omega^\delta\right)(x), \text{ avec } x \in [-1, 1], \text{ et } \omega^\delta \in D(B_\delta),$$

où

$$a_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]-1,0\right[ \\ \dfrac{1}{\delta^2} & \text{si } x \in \left]0,1\right[. \end{cases}$$

Ainsi le problème (3) est équivalent au problème suivant

$$Au^\delta + B_\delta u^\delta = f^\delta,$$

où $A$ et $B_\delta$ sont deux opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach complexe $E$, de domaines $D_A$ et $D_{B_\delta}$ respectivement.On utilisera la théorie des sommes d'opérateurs linéaires pour étudier l'existence, l'unicité et la régularité des solutions. En 1975, Da Prato et Grisvard, ont montré que le probléme

$$Au^\delta + B_\delta u^\delta = f^\delta,$$

admet une solution si on suppose que les opérateurs $A$ et $B_\delta$ vérifient les hypothèses suivantes

$$(DG0) \begin{cases} \overline{D(A) + D(B)} = E \\ A \text{ ou } B \text{ inversible} \end{cases}$$

$$(DG1) \begin{cases} \rho(-A) \supset \sum_{\varepsilon_A} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \geqslant R \text{ et } |\arg(z)| < \varepsilon_A\} \\ \forall z \in \sum_{\varepsilon_A} : \ \left\|(A + zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C_A}{|z|} \\ \rho(-B) \supset \sum_{\varepsilon_B} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \geqslant R \text{ et } |\arg(z)| < \varepsilon_B\} \\ \forall z \in \sum_{\varepsilon_B} : \ \left\|\left((B + zI)^{-1}\right)\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C_B}{|z|} \\ \varepsilon_A + \varepsilon_B > \pi \\ \sigma(-A) \cap \sigma(B) = \varnothing \end{cases}$$

$$(DG2) \begin{cases} \forall \zeta \in \rho(A), \forall \eta \in \rho(-B) \\ (A + \zeta I)^{-1}(B + \eta I)^{-1} = (B + \eta I)^{-1}(A + \zeta I)^{-1}, \end{cases}$$

de plus si $f$ est dans l'espace d'interpolation entre $D_A$ et $E$ noté $D_A(\theta,p)$ avec $\theta \in ]0,1[$ et $1 \leq p \leq +\infty$ où ($f \in D_B(\theta,p)$), alors la solution a la régularité suivante

$$Au,\ Bu \in D_A(\theta,p) \ \text{(resp. } D_B(\theta,p)\text{)}.$$

La résolution de ce problème est basée sur une construction explicite de la solution $u$ sous la forme :

$$u = \left(\overline{A+B}\right)^{-1} f = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (B - zI)^{-1}(A + zI)^{-1} f dz,$$

où $\gamma$ est une courbe dans $\rho(-A) \cap \rho(B)$ et qui sépare $\sigma(-A)$ et $\sigma(B)$.

Ce mémoire est composé de cinq chapitres.

**Le premier chapitre** à pour but de résumer tous les outils nécessaires et pour maitriser la méthode des sommes d'opérateurs linéaires fermés. On donne aussi un bref rappel sur :

1. La théorie spectrale des opérateurs linéaires et l'intégrale de Dunford.
2. La théorie d'interpolation.
3. Quelques lemmes techniques.

**Dans le second chapitre,** on écrit le problème $(P_\delta)$ sous la forme abstraite (somme de deux opérateurs). On applique alors la théorie des sommes d'opérateurs dans le cas commutatif (Da-Prato et Grisvard). Pour cela on vérifie les hypothèses, on obtient alors des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution. Par exemple pour le cas des solutions fortes on obtient le résultat

**Théorème 0.1** *Soit* $1 < p < \infty$ *:*

1. *Pour tout* $f^\delta \in L^p(\Omega)$ *il existe une solution forte*
$$u^\delta = \begin{cases} u_-^\delta & \text{sur } \Omega_- \\ u_+^\delta & \text{sur } \Omega_+, \end{cases}$$
*dans* $L^p(G)$ *de la problème* (3)
2. *Pour tout* $f^\delta \in W^{2\theta,p}(G)$ *telle que* $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *alors* $u^\delta$ *est une solution stricte satisfaisant*
   (a) $u^\delta \in L^p\left(-1,1; W^{2,p}(G) \cap W_0^{1,p}(G)\right)$,
   (b) $u_-^\delta \in W^{2,p}(-1,0; L^p(G))$,
   (c) $u_+^\delta \in W^{2,p}(0,1; L^p(G))$,
   (d) $\Delta_y u^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega)$, $\partial_x^2 u_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ *et* $\left(\frac{1}{\delta^2}\partial_x^2 u_+^\delta\right) \in W^{2\theta,p}(\Omega_+)$.

**le troisième chapitre** est consacré à l'étude du problème limite quand $\delta$ tend vers 0. On donne des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution limite. Par exemple pour le cas des solutions strictes on obtient le résultat

**Théorème 0.2** *Soit* $1 < p < +\infty$ *et* $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$ *pour* $f^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega)$ *vérifiant*

1. $f_-^\delta$ *tend vers* $f_-$ *dans* $W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ *quand* $\delta$ *tend vers* 0,

2. $f_+^\delta$ *est bornée dans* $W^{2\theta,p}(\Omega_+)$,
3. $\int_0^1 f_+^\delta(x,.)\,dx = m_+^\delta$ *tend vers* $m$ *dans* $W^{2\theta,p}(G)$ *quand* $\delta$ *tend vers* $0$,

*alors il existe a unique* $(u_-,u_+) \in W^{2,p}(\Omega_-)\times W^{2,p}(G)$ *et* $u_-$ *est une solution stricte de problème*

$$\begin{cases} -\Delta u_- = f_- & sur\ \ \Omega_- \\ u_- = 0 & sur\ \ \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ \partial_x u_-(0,\cdot) - \Delta_y u_-(0,\cdot) & sur\ \ G. \end{cases}$$

**Dans le quatrième chapitre,** on fait le retour au problème $(P_\delta)$. Par exemple pour le cas des solutions strictes on obtient le résultat

**Théorème 0.3** *Pour* $g_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ *et* $g_+^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_+^\delta\right)$ *telle que* $0<\theta<\frac{1}{2}$, *alors* $v^\delta$ *est une solution stricte satisfié :*

1. $v^\delta \in L^p\left(-1,\delta; W^{2,p}(G)\cap W_0^{1,p}(G)\right)$,
2. $v_-^\delta \in W^{2,p}(-1,0;L^p(G))$,
3. $v_+^\delta \in W^{2,p}(0,\delta;L^p(G))$,
4. $\Delta_\eta v^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_+^\delta\right)$, $\partial_\zeta^2 v_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ *et* $\partial_\zeta^2 v_+^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_+^\delta\right)$.

**Dans le cinquième chapitre,** on étudie le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} \left(v^\delta\right)''(x) + Av^\delta(x) = g^\delta(x)\ \ sur\ \Omega^\delta \\ v^\delta(-1) = 0 \\ \left(v^\delta\right)'(\delta) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

où $\delta$ est un paramètre dans $]0,1[$, et $\Omega^\delta = ]-1,0[\times]0,\delta[$,et $g^\delta$ est une fonction dans $L^P\left(\Omega^\delta\right)$, avec $1<p<\infty$, $A$ un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans un espace de Banach complexe $E$.

On suppose l'hypothèse d'ellipticité suivante

$$\rho(A) \supset [0,+\infty[\ \text{ et } \exists C>0 : \forall\lambda>0, \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C}{1+\lambda},$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de $A$.

Cette hypothèse implique qu'il existe $\theta_0 \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $r_0>0$ telle que

$$\rho(A) \supset S_{\theta_0} = \{z\in\mathbb{C}^* :\ \ |\arg(z)| \leqslant \theta_0\} \cup \overline{B(0,r_0)}.$$

On se propose d'étudier le problème (4) en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs linéaire de Da prato et Grisvard (cadre commutatif), pour obtenir des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution.

# Chapitre 1

# Rappels et outils

## 1.1 Quelques rappels sur les opérateurs

### 1.1.1 Opérateurs fermés

Soit $L\colon D(L) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire (non borné), $L$ est dit fermé ssi il est continu sur son domaine i.e :

$$\begin{cases} \forall (u_n)_{n\succeq 0} \subset D(L) \\ u_n \xrightarrow{X} u \\ Lu_n \longrightarrow y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \in D(L) \\ Lu = y. \end{cases}$$

Ceci est équivalent à dire que le graphe de $L$

$$G(L) = \{(u, Lu) : u \in D(L)\} \subset X \times X,$$

est fermé dans $X \times X$.

### 1.1.2 Opérateurs fermables

Soit $L\colon D(L) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire (non borné) $L$ est dit fermable ssi $L$ admet une extension fermée. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \forall (u_n)_{n\succeq 0} \subset D(L) \\ u_n \xrightarrow{X} 0 \\ Lu_n \longrightarrow y \end{cases} \Rightarrow y = 0.$$

La plus petite extension fermée de $L$ est alors notée $\overline{L}$ et s'appelle la fermeture de $L$.

On note par $R(\lambda, A)$ l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1} : E \longrightarrow D(A)$ telle que $(A - \lambda I)^{-1} \in L(E)$,

$R(\lambda,A)$ est appelé l'opérateur résolvante de $A$ s'il n'ya pas de confusion on écrira $R(\lambda)$ ou lieu de $R(\lambda, A)$.

L'ensemble des nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $R(\lambda, A)$ existe est appelé l'ensemble résolvant de $A$.

Le spectre de $A$ noté $\sigma(A)$ l'ensemble complémentaire de l'ensemble $\rho(A)$.

Signalons que $\sigma(A)$ est la réunion de trois ensembles disjoints notés respectivement $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, et $\sigma_r(A)$ où:

$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon A - \lambda I$ est non inversible$\}$, $\sigma_p(A)$ est le spectre ponctuel,

$\sigma_c(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon (A - \lambda I)^{-1}\right.$ non borné de domaine non dense dans $\left.E\right\}$, $\sigma_c(A)$ est le spectre continu,

$\sigma_r(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon (A - \lambda I)^{-1}\right.$ existe de domaine non dense dans $\left.E\right\}$, $\sigma_r(A)$ est le spectre résiduel.

### 1.1.3 Solution forte

Soient $A$ et $B$ deux opérateurs linéaires et fermés de domaines $D(A) \subset X, D(B) \subset X, X$ un espace de Banach complexe, $u$ est dite solution forte de l'équation

$$Au + Bu = f,$$

si $\exists (u_n)_{n \succeq 0} \subset D(A) \cap D(B)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } X \text{ et } Au_n + Bu_n \longrightarrow f \text{ dans } X,$$

$u$ dans ce cas, ne possède pas forcément la bonne régularité.

Ce sont des solutions ,appelées, aussi, faibles et correspondent aux solutions (distributions) même pas variationnelles.

### 1.1.4 Solution stricte

Soient $A$ et $B$ deux opérateurs linéaires et fermés de domaines $D(A) \subset X, D(B) \subset X$, un espace de Banach complexe $u$ est dite solution stricte de l'équation

$$Au + Bu = f,$$

si $u \in D(A) \cap D(B)$ et vérifie l'équation.

### 1.1.5 Intégrale de Dunford

Soit $X$ un espace de Banach complexe et $A$ un opérateur linéaire fermé Notons $H(A)$ l'espace des fonctions à variable complexe qui sont holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de $A$, la formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définie par l'intégrale de Dunford suivante:

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(zI - A)^{-1} dz,$$

ou $\gamma$ est une courbe simple et $f \in H(A)$, l'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas de $\gamma$.

## 1.2 Les espaces d'interpolation

Soient $X_0$ et $X_1$ deux espaces de Banach et $E$ un espace topologique séparé avec $X_1 \hookrightarrow E$.

Considérons maintenant les espaces de Banach $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$ munis des normes

$$\begin{cases} \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1} \\ \|x\|_{X_0+X_1} = \inf\limits_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_i \in X_i}} \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}, \end{cases}$$

le couple $\{X_0; X_1\}$ est dit couple d'interpolation.

**Définition 1.1** *Soit $\{X_0; X_1\}$ un couple, on appelle espace intermédiaire entre $X_0$ et $X_1$ tout espace de Banach $X$ telle que*

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

**Théorème 1.1 (Mercel-Riaz)** *Soit $K\colon L^{p_0}(\Omega_0) + L^{p_1}(\Omega_0) \longrightarrow L^{q_0}(\Omega_1) + L^{q_1}(\Omega_1)$ un opérateur linéaire avec $p_i, q_i \in [1 : +\infty[$ et $\Omega_i$ sont ouverts dans $\mathbb{R}^n$ $(i = 1; 2)$ telle que*

$$\begin{cases} K \diagup L^{p_0}(\Omega_0) \in L(L^{p_0}; L^{q_0}) \\ \\ K \diagup L^{p_1}(\Omega_0) \in L(L^{p_1}; L^{q_1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall \theta \in ]0; 1[ \\ \\ K \diagup L^{p_0}(\Omega_0) \in l\left(L^{p\theta} : L^{q\theta}\right), \end{cases}$$

*où*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p\theta} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1} \\ \dfrac{1}{q\theta} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}. \end{cases}$$

On appelle espace d'interpolation entre $X_0$ et $X_1$ l'espace $(X_0; X_1)_{\theta,p}$ avec $p \in [1; +\infty[$, telle que :

$$x \in (X_0; X_1)_{\theta,p} \iff \begin{cases} (i)\ \ \forall t > 0; \exists u_0(t) \in X_0;\ \exists u_1(t) \in X_1\colon x = u_0(t) + u_1(t) \\ (ii)\ \ t^{-\theta} u_0 \in L_*^P(\mathbb{R}_+; X_0) \text{ et } t^{1-\theta} u_1 \in L_*^P(\mathbb{R}_+; X_1). \end{cases}$$

**Définition 1.2** *1. $x \in (X_0; X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} (i)\ \ \forall y > 0; \exists u_0(y) \in X_0; \exists u_1(y) \in X_1\colon x = u_0(y) + u_1(y) \\ (ii)\ \ e^{-\theta y} u_0 \in L^p(X_0) \text{ et } e^{(1-\theta)y} u_1 \in L^p(X_1). \end{cases}$$

*On pose $t = e^y$ dans la définition précédente, on obtient.*

*2. $x \in (X_0; X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} \exists u\colon \mathbb{R} \longrightarrow X_0 \cap X_1 \text{ telle que } y \mapsto u(y) \\ (i)\ \ x = \int_{\mathbb{R}} u(y)\, dy \\ (ii)\ \ e^{-\theta y} u \in L^p(X_0) \text{ et } e^{(1-\theta)y} u \in L^p(X_1). \end{cases}$$

*3.* $x \in (X_0; X_1)_{\theta,p}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} \exists u \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow X_0 \cap X_1 \text{ telle que} \\ t \mapsto u(t) \\ (i)\ \ x = \int_0^{+\infty} u(s) \dfrac{ds}{s} \\ (ii)\ \ e^{-\theta} u \in L_*^p(X_0) \ \text{ et } e^{(1-\theta)} u \in L_*^p(X_1). \end{cases}$$

**Définition 1.3** *Pour* $\theta \in ]0,1[$ *et* $p \in [1,+\infty[$ *on note* $D_A(\theta,p)$ *le sous espace de* $X$ *suivant :*

$$D_A(\theta,p) = \left\{ x \in X : \left\| r^\theta A (A + rI)^{-1} x \right\|_X \in L_*^p \right\},$$

*où* $L_*^p$ *est l'espaces des fonctions boréliennes de puissance p intégrable pour la mesure* $\dfrac{dr}{r}$.

*Pour* $P = +\infty$

$$D_A(\theta,\infty) = \left\{ x \in X : \sup_{r \geq 0} \left\| r^\theta A (A + rI)^{-1} x \right\|_X < \infty \right\},$$

*muni de la norme*

$$\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} = \|x\|_X + \sup_{r \geq 0} \left\| r^\theta A (A + rI)^{-1} x \right\|_X.$$

*et de plus*

$$\begin{cases} \left\| u_-^\delta - u_- \right\|_{D_{A_-}\left(\theta + \frac{1}{2}, \infty\right)} = \sup\limits_{r \succeq 0} \left\| r^{\theta + \frac{1}{2}} \cdot A_- (A_- + rI)^{-1} \cdot \left( u_-^\delta - u_- \right) \right\|_{E_-} \\ \left\| u_-^\delta - u_- \right\|_{D_{A+}\left(\theta + \frac{1}{2}, \infty\right)} = \sup\limits_{r \succeq 0} \left\| r^{\theta + \frac{1}{2}} \cdot A_+ (A_+ + rI)^{-1} \cdot \left( u_-^\delta - u_- \right) \right\|_{E_-}, \end{cases}$$

*telle que*

$$\begin{cases} D_{A_-}\left(\theta + \frac{1}{2}, p\right) = \left\{ u \in L^p\left(-1, 0; W^{2\theta+1,p}(G)\right) : u = 0 \text{ sur } ]-1,0[ \times G \right\} \\ D_{A_+}\left(\theta + \frac{1}{2}, p\right) = \left\{ u \in L^p\left(0, 1; W^{2\theta+1,p}(G)\right) : u = 0 \text{ sur } ]0,1[ \times G \right\}. \end{cases}$$

**Remarque 1.1** *Ces espaces vérifient*

$$D_A(\theta,p) \subset D_A(\theta,\infty),$$

*pour* $\theta \in ]0,1[$ *et* $p \in [1,+\infty[$.

## 1.3 La théorie des sommes d'opérateurs de Da-Prato-Grisvard (cas commutatif)

Soient $E$ un espace de Banach complexe, $A$ et $B$ deux opérateurs linéaires fermés dans $E$, de domaine respectifs $D(A)$ et $D(B)$.On s'intéresse alors à l'équation

$$Au + Bu = f, \tag{1.1}$$

où $f$ est un vecteur donné de $X$.

L'opérateur somme $L = A + B$ est défini par

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B) \\ Lu = Au + Bu \quad \text{si} \quad u \in D(L), \end{cases}$$

et (1.1) s'écrit encore

$$Lu = f.$$

une solution stricte de (1.1) est un élément $u \in D(L)$ satisfaisant (1.1).

L'idéal est de trouver une telle solution lorsque $f$ est quelconque dans $X$, mais ce n'est pas toujours possible on introduit donc une nouvelle notion :

$u$ est une solution forte de (1.1) si et seulement si, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $D(L)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Lu_n = f. \tag{1.2}$$

Evidemment, une solution stricte de (1.1) est une solution forte de (1.1).

La notion de solution forte est donc plus faible.

Notons que si $L$ est fermé les deux notions de solution stricte et forte sont équivalentes, mais la somme des deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermée.

D'autre part si l'on suppose que $L$ est fermable (i.e. $L$ admet une extention fermée) et si on note $\overline{L}$ sa fermeture (i.e. $\overline{L}$ est la plus petite extention fermée de $L$) alors (1.2) équivaut à

$$u \in D\left(\overline{L}\right) \text{ et } \overline{L}u = f.$$

Enfin dans le cas où $L$ est fermable, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $f$ de $X$, il existe une solution forte de (1.1).
2. $0 \in \rho\left(\overline{L}\right)$.

Et si $L$ est fermé, les propositions suivantes sont équivalentes :

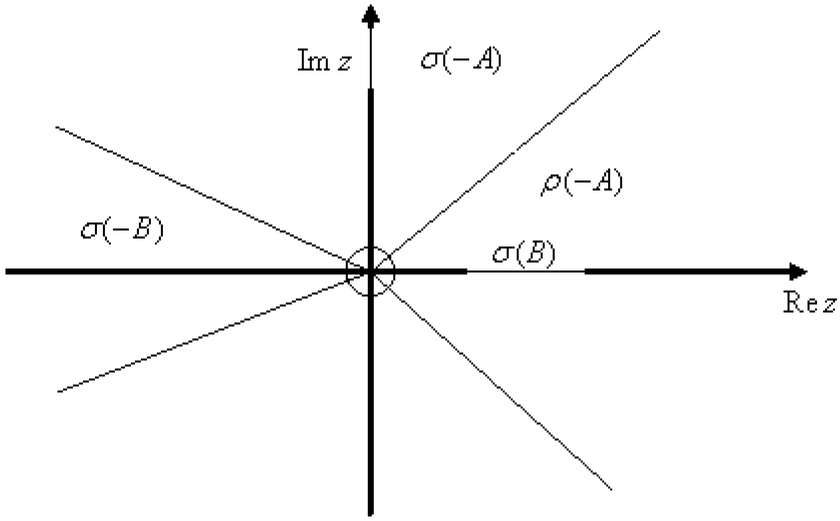
1. Pour tout $f$ de $X$, il existe une solution stricte de (1.1)
2. $0 \in \rho(L)$.

Dans ce contexte, on comprend l'inportance de trouver des conditions raisonnables sur les opérateurs $A$ et $B$,qui assurent que $L$ est fermable (voire fermé) et que $0 \in \rho\left(\overline{L}\right)$.

les deux théorèmes de Daprato et Grisvard, énoncés plus loin, répondent positivement à ce problème sur les sommes d'opérateurs sous les conditions suivantes.

### 1.3.1 Les hypothèses sur $A$ et $B$

Soit $R > 0$, on suppose que les opérateurs vérifient




$$(DG0)\begin{cases} \overline{D(A)+D(B)} = E \\ A \text{ ou } B \text{ inversible} \end{cases}$$

$$(DG1)\begin{cases} \rho(-A) \supset \sum_{\varepsilon_A} = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| \geqslant R \text{ et } |\arg(z)| < \varepsilon_A\} \\ \forall z \in \sum_{\varepsilon_A}:\ \left\|(A+zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C_A}{|z|} \\ \rho(-B) \supset \sum_{\varepsilon_B} = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| \geqslant R \text{ et } |\arg(z)| < \varepsilon_B\} \\ \forall z \in \sum_{\varepsilon_B}:\ \left\|\left((B+zI)^{-1}\right)\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C_B}{|z|} \\ \varepsilon_A + \varepsilon_B > \pi \\ \sigma(-A) \cap \sigma(B) = \varnothing \end{cases}$$

$$(DG2)\begin{cases} \forall \zeta \in \rho(-A),\ \forall \eta \in \rho(-B) \\ (A+\zeta I)^{-1}(B+\eta I)^{-1} = (B+\eta I)^{-1}(A+\zeta I)^{-1}, \end{cases}$$

telle que $\rho(-A)$ et $\rho(-B)$ domaines résolvants de $(-A)$ et $(-B)$
$\sigma(-A)$ et $\sigma(B)$ spectres de $(-A)$ et $B$.

sous les hypothèses précédentes, G. Da Prato et P. Grisvard ont construit directement l'inverse de $\overline{L}$ à l'aide d'une intégrale de Dunford pour obtenir :

**Théorème 1.2** *Sous les hypothèses $(DG0)$, $(DG1)$, et $(DG2)$ on a*

1. *La somme L est fermable,*
2. $0 \in \rho\left(\overline{L}\right)$,

3. *l'inverse de $\overline{\mathrm{L}}$ est donné par une intégrale de Dunford :*

$$u = \left(\overline{A+B}\right)^{-1} f = \frac{-1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma} (B - zI)^{-1} (A + zI)^{-1} f dz,$$

*ou $\gamma$ serait une courbe de jordan séparant le spectre de $(-A)$ et $B$.*

La fonction $u$ est alors l'unique solution forte de 1.1.

**Théorème 1.3** *Sous les hypothèses $(DG0)$,$(DG1)$,et $(DG2)$ et pour $0 < \theta < 1$,$1 \leq q \leq +\infty$, on a*

1. *Si $f \in D_B(\theta, q)$ alors $u \in D(A) \cap D(B)$ et $Au,\ Bu \in D_B(\theta, q)$.*
2. *Si$f \in D_A(\theta,q)$ alors $u \in D(A) \cap D(B)$ et $Au,\ Bu \in D_A(\theta, q)$.*

## 1.4 Rappels de quelques lemmes techniques

**Lemme 1.1 (de Shur)** *Soit $K\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et telle que*

$$\begin{aligned} \exists a &> 0\colon \forall x_2 \in \Omega_2,\ \int_{\Omega_1} |K(x_1,x_2)|\, dx_1 < a \\ \exists b &> 0\colon \forall x_1 \in \Omega_1,\ \int_{\Omega_2} |K(x_1,x_2)|\, dx_2 < b, \end{aligned}$$

*alors l'opérateur $F$ défini par*

$$F(f)(x_2) = \int_{\Omega_1} |K(x_1,x_2)|\, f(x_1)\, dx_1,$$

*vérifie*

$$F \in \pounds\left(L^P(\Omega_1), L^P(\Omega_2)\right).$$

**Lemme 1.2** 1. *Il existe $C > 0$ telle que pour $z \in \gamma$ et $r > 0$ on a*

$$|z \pm r| \geqslant Cr,$$

*et*

$$|z \pm r| \geqslant C|z|,$$

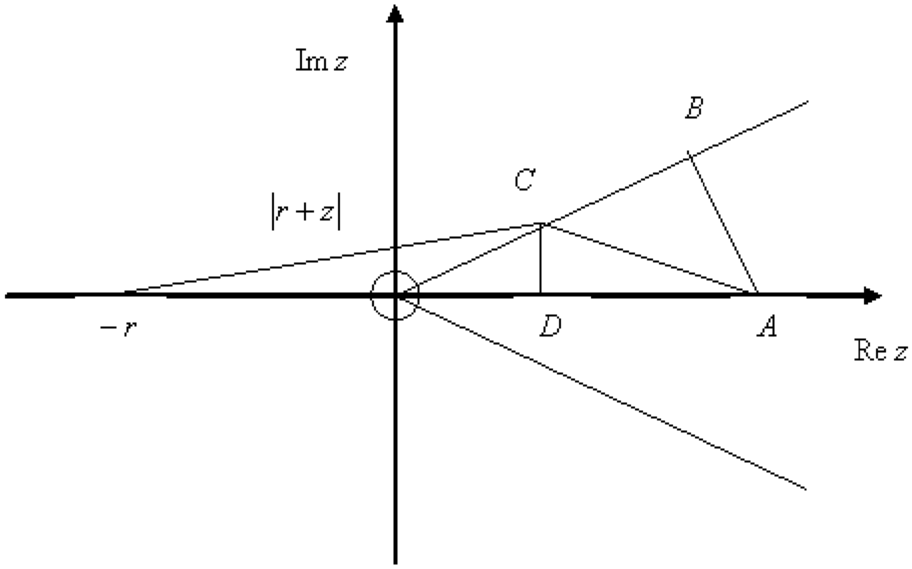
2. *Soit $\nu \in ]0, 1[$ alors il existe $C > 0$ telle que pour $r > 0$*

$$\int_{\gamma} \frac{1}{|r \pm z| \cdot |z|^{\nu}} |dz| \leqslant \frac{C}{r^{\nu}}.$$

**Preuve.**

(1) pour $z \in \Gamma$ et $r > 0$, on a

$$\begin{aligned} |z \pm r| &\geqslant AB = r \sin\theta_0 \geqslant Kr \\ &\geqslant CD = |z| \sin\theta_0 \geqslant K|z|. \end{aligned}$$




(2) Pour $\nu \in ]0,1[$ et $r > 0$, on a

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|r \pm z| \cdot |z|^{\nu}} = \int_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|r \pm z| \cdot |z|^{\nu}} + \int_{\gamma \diagdown \gamma_r} \frac{|dz|}{|r \pm z| \cdot |z|^{\nu}},$$

avec

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_r \cup (\gamma \diagdown \gamma_r) \\ \gamma_r = \{z \in \gamma : |z| \leq r\} \\ \gamma \diagdown \gamma_r = \{z \in \gamma : |z| \geq r\}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|r \pm z|\,|z|^{\nu}} &= \int_{\substack{z \in \gamma \\ |z| \leq r}} \frac{|dz|}{|r \pm z|\,|z|^{\nu}} \\ &\leqslant \frac{1}{Kr} \int_0^r \frac{|dz|}{|z|^{\nu}} \leq \frac{1}{Kr} \left[ |z|^{1-\nu} \right]_0^r \\ &\leqslant \frac{1}{Kr} r^{1-\nu} = \frac{K}{r^{\nu}}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \diagdown \gamma_r} \frac{|dz|}{|r \pm z| \cdot |z|^{\nu}} &= \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|r \pm z| \cdot |z|^{\nu}} \\ &\leqslant \frac{1}{K} \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z|^{1+\nu}} \\ &\leqslant \frac{1}{K} \left[ \frac{|z|^{-\nu}}{-\nu} \right]_r^{+\infty} \\ &\leqslant \frac{K}{r^{\nu}}. \end{aligned}$$

■

# Chapitre 2

# Problème de Transmission

**Position du problème**

On considère le problème de transmission suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{b_\delta} div\left(b_\delta \nabla v^\delta\right) = g^\delta & sur\ \Omega^\delta \\ v^\delta = 0 & sur\ \partial\Omega^\delta \setminus \Gamma^\delta \\ \partial_\zeta v^\delta = 0 & sur\ \Gamma^\delta, \end{cases}$$

tel que $\delta \in ]0{,}1[$, $\Omega^\delta = (]-1{,}0[ \cup ]0{,}\delta[) \times G$ avec $G$ un ouvert dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\Gamma^\delta = \{\delta\} \times G$ et $b_\delta$ est une fonction définie par

$$b_\delta(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta \in ]-1, 0[ \\ \dfrac{1}{\delta} & \text{si } \zeta \in ]0, \delta[, \end{cases}$$

$g^\delta$ est une fonction dans $L^P\left(\Omega^\delta\right)$ et $1 < p < \infty$.

On se propose d'étudier le problème (1) en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs pour obtenir des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution pour cela on écrit le problème (1) sous forme abstraite, puis on vérifie les hypothèses de Da-prato-Grisvard cadre commutatif.

On pose

$$\Omega_{\_} = ]-1, 0[ \times G,$$

un domain fixe, et

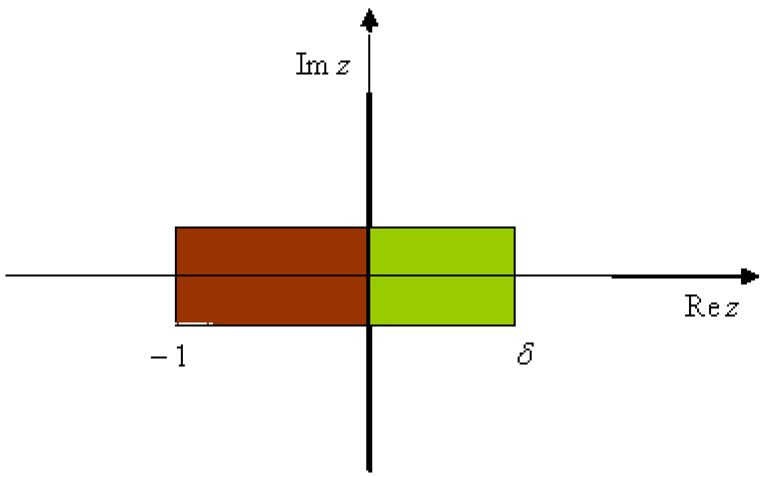
$$\Omega_+^\delta = ]0, \delta[ \times G,$$

un domaine variable.

On rappele que $\nabla V^\delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \\ \frac{\partial v^\delta}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial v^\delta}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix}$ et $div \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + ... + \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n}.$

Alors le problème (1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} -\Delta v_-^\delta = g_-^\delta & \text{sur } \Omega_- \\ -\Delta v_+^\delta = g_+^\delta & \text{sur } \Omega_+^\delta \\ v_-^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ v_+^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega_+^\delta \setminus \Gamma^0 \cup \Gamma^\delta \\ v_-^\delta = v_+^\delta \text{ et } \partial_\zeta v_-^\delta = \frac{1}{\delta}\partial_\zeta v_+^\delta & \text{sur } \Gamma^0 \\ \partial_\zeta v_+^\delta = 0 & \text{sur } \Gamma^\delta. \end{cases} \tag{2.1}$$




## 2.1 Changement d'échelle

Le problème (2) est posé sur un ouvert qui dépend de $\delta$, on opère donc un changement d'échelle pour se ramener à un domaine fixe

$$\Omega = ]-1,1[ \times G.$$

On montre alors que résoudre $(P_\delta)$ dans $\Omega^\delta$ revient à résoudre un nouveau problème dans $\Omega$.La donnée $g^\delta$ se transforme après changement d'échelle en $f^\delta$, la solution du problème cherchée est notée $u^\delta$.

Soit $\Psi^\delta$une fonction telle que

$$\begin{array}{llll} \Psi^\delta : & \Omega = ]-1,1[ \times G & \longrightarrow & \Omega^\delta = ]-1,\delta[ \times G \\ & (x,y) & \rightarrow & \Psi^\delta(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } x \in [-1;0] \\ (\delta x, y) & \text{si } x \in [0;1]. \end{cases} \end{array}$$

On pose

$$u^\delta = v^\delta \circ \Psi^\delta,$$

donc

$$\begin{array}{llll} u^\delta : & \Omega = ]-1,1[ \times G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightarrow & u^\delta(x,y) = \begin{cases} v^\delta(x,y) & \text{si } x \in [-1;0] \\ v^\delta(\delta x, y) & \text{si } x \in [0;1], \end{cases} \end{array}$$

et

$$f^{\delta} = g^{\delta} \circ \Psi^{\delta},$$

donc

$$\begin{array}{rlll} f^{\delta}: & \Omega = ]-1,1[ \times G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & f^{\delta}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} g^{\delta}(x,y) & \text{si } x \in [-1;0] \\ g^{\delta}(\delta x, y) & \text{si } x \in [0;1]. \end{array} \right. \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rlll} u_{-}^{\delta} = v_{-}^{\delta} \circ \Psi^{\delta} \diagup \Omega_{-}: & \Omega_{-} = ]-1,0[ \times G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & u_{-}^{\delta}(x,y) = v_{-}^{\delta}(x,y), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rlll} u_{+}^{\delta} = v_{+}^{\delta} 0 \Psi^{\delta} \diagup \Omega_{+}: & \Omega_{+} = ]0,1[ \times G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & u_{+}^{\delta}(x,y) = v_{+}^{\delta}(\delta x,y), \end{array}$$

et de plus

$$\begin{array}{rlll} f_{-}^{\delta} = g^{\delta} \circ \Psi^{\delta} \diagup \Omega_{-}: & \Omega_{-} = ]-1,0[ \times G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & f_{-}^{\delta}(x,y) = g_{-}^{\delta}(x,y), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rlll} f_{+}^{\delta} = g_{+}^{\delta} \circ \Psi^{\delta} \diagup \Omega_{+}: & \Omega_{+} = ]0,1[ \times G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & f_{+}^{\delta}(x,y) = g_{+}^{\delta}(\delta x,y). \end{array}$$

Alors le problème (2) se transforme en le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_{-}^{\delta} = f_{-}^{\delta} & \text{sur } \Omega_{-} \\ -\left( \dfrac{1}{\delta^2} \partial_x^2 u_{+}^{\delta} + \Delta_y u_{+}^{\delta} \right) = f_{+}^{\delta} & \text{sur } \Omega_{+} \\ u_{-}^{\delta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{-} \diagdown \Gamma^0 \\ u_{+}^{\delta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{+} \diagdown (\Gamma^0 \cup \Gamma^1) \\ \partial_x u_{+}^{\delta} = 0 & \text{sur } \Gamma^1 \\ u_{-}^{\delta} = u_{+}^{\delta} \text{ et } \partial_x u_{-}^{\delta} = \dfrac{1}{\delta^2} \partial_x u_{+}^{\delta} & \text{sur } \Gamma^0, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

telle que $\Gamma^1 = \{1\} \times G$.

Posons $X = L^p(G)$, $E = L^p(\Omega) = L^p(-1,1;L^p(G))$, et définissons l'opérateur $A$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = L^p(-1,1;D(Q)) \\ (A\omega)(x) = Q(\omega(x)), \ \omega \in D(A), \end{array} \right.$$

où $Q$ est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} D(Q) = W^{2,p}(G) \cap W_0^{1,p}(G) \\ (Q\Psi)(y) = -\Delta_y \Psi(y), \ \Psi \in D(Q). \end{array} \right.$$

On définit aussi $B_{\delta}$ par son domaine

$$\begin{array}{l} D(B_{\delta}) \\ = \Big\{ \omega \in L^p(-1,1;X) : \omega_{-}^{\delta} \in W^{2,p}(-1,0;X), \ \omega_{+}^{\delta} \in W^{2,p}(0,1;X) \\ \omega_{-}^{\delta}(-1) = 0, \omega_{-}^{\delta}(0) = \omega_{+}^{\delta}(0), \ \partial_x \omega_{-}^{\delta}(0) = \dfrac{1}{\delta^2} \partial_x \omega_{+}^{\delta}(0), \partial_x \omega_{+}^{\delta}(1) = 0 \Big\}, \end{array}$$

et son action

$$\left(B_\delta \omega^\delta\right)(x) = -\partial_x \left(a_\delta (x) \partial_x \omega^\delta\right)(x), \text{ avec } x \in [-1,1], \text{ et } \omega^\delta \in D(B_\delta),$$

telle que

$$a_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]-1,0\right[ \\ \dfrac{1}{\delta^2} & \text{si } x \in \left]0,1\right[. \end{cases}$$

Donc le problème (3) devient

$$Au^\delta + B_\delta u^\delta = f^\delta.$$

**Remarque 2.1** *On a :*

$$\overline{D(A) + D(B_\delta)} = E.$$

## 2.2 Vérification des hypothèses de Da-prato-Grisvard (Cas Commutatif)

Une étude spectrale des opérateurs $A$ et $B_\delta$ permet d'obtenir :

**Proposition 2.1** *Les opérateurs $A$ et $B_\delta$ précédents sont linéaires fermés densément définis et satisfont les hypothèses $(DG0)$ $(DG1)$ et $(DG2)$.*

**Preuve.** $(a)$ **L'hypothèse** $(DG\ 1)$

**Calcul de la résolvante de l'opérateur** $B_\delta$.

On pose l'équation

$$B_\delta \omega^\delta + \lambda \omega^\delta = h.$$

On considère le cas scalaire

$$\begin{cases} -\partial_x^2 \omega_-^\delta(x) + \lambda \omega_-^\delta(x) = h_-(x) & \text{si } x \in [-1,0] \\ -\dfrac{1}{\delta^2}\partial_x^2 \omega_+^\delta(x) + \lambda \omega_+^\delta(x) = h_+(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ \omega_-^\delta(-1) = 0,\ \partial_x \omega_+^\delta(1) = 0 & \\ \omega_-^\delta(0) = \omega_+^\delta(0),\ \partial_x \omega_-^\delta(0) = \dfrac{1}{\delta^2}\partial_x \omega_+^\delta(0), & \end{cases}$$

alors

$$-\partial_x^2 \omega_-^\delta(x) + \lambda \omega_-^\delta(x) = h_-(x) \iff \partial_x^2 \omega_-^\delta(x) - \lambda \omega_-^\delta(x) = -h(x).$$

Pour l'équation homogène, on a :

$$-\partial_x^2 \omega_-^\delta(x) + \lambda \omega_-^\delta(x) = 0 \iff \omega_-^\delta(x) = C_1 e^{\rho x} + C_2 e^{-\rho x},$$

telle que $\rho = \sqrt{\lambda}$.

**Variation de la constante.**

On a

$$\omega_-^\delta(x) = C_1(x) e^{\rho x} + C_2(x) e^{-\rho x},$$

alors

$$\begin{aligned}\partial_x \omega_-^\delta (x) &= (\partial_x C_1 (x)) e^{\rho x} + \rho C_1 (x) e^{\rho x} + (\partial_x C_2 (x)) e^{-\rho x} - \rho C_2 (x) e^{-\rho x} \\ &= \rho C_1 (x) e^{\rho x} - \rho C_2 (x) e^{-\rho x},\end{aligned}$$

et de plus

$$\partial_x^2 \omega_-^\delta (x) = \lambda C_1 (x) e^{\rho x} + \rho (\partial_x C_1 (x)) e^{\rho x} - \rho (\partial_x C_2 (x)) e^{-\rho x} + \lambda C_2 (x) e^{-\rho x},$$

donc

$$\begin{aligned}\partial_x^2 \omega_-^\delta (x) - \lambda \omega_-^\delta (x) &= -h(x) \iff \begin{cases} \lambda C_1 (x) e^{\rho x} + \rho (\partial_x C_1 (x)) e^{\rho x} - \rho (\partial_x C_2 (x)) e^{-\rho x} \\ +\lambda C_2 (x) e^{-\rho x} - \lambda C_1 (x) e^{\rho x} - \lambda C_2 (x) e^{-\rho x} = -h_- (x) \end{cases} \\ &\iff \rho (\partial_x C_1 (x)) e^{\rho x} - \rho (\partial_x C_2 (x)) e^{-\rho x} = -h_- (x).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} (\partial_x C_1 (x)) e^{\rho x} + (\partial_x C_2 (x)) e^{-\rho x} = 0 \\ \rho (\partial_x C_1 (x)) e^{\rho x} - \rho (\partial_x C_2 (x)) e^{-\rho x} = -h_- (x). \end{cases}$$

On a

$$\det = -2\rho,$$

donc

$$\begin{cases} \partial_x C_1 (x) = \dfrac{-1}{2\rho} e^{-\rho x} h_- (x) \\ \partial_x C_2 (x) = \dfrac{1}{2\rho} e^{\rho x} h_- (x), \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} C_1 (x) = \dfrac{1}{2\rho} \int_x^0 e -^{\rho s} h_- (s) \, ds + k_1 \\ C_2 (x) = \dfrac{-1}{2\rho} \int_x^0 e^{\rho s} h_- (s) \, ds + k_2. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}\omega_-^\delta (x) &= \left( \frac{1}{2\rho} \int_x^0 e -^{\rho s} h_- (s) \, ds + k_1 \right) e^{\rho x} ds + \left( \frac{-1}{2\rho} \int_x^0 e^{\rho s} h_- (s) \, ds + k_2 \right) e^{-\rho x} ds \\ &= \frac{1}{\rho} \int_x^0 \sinh \rho (x - s) \, h_- (s) \, ds + k_1 e^{\rho x} + k_2 e^{-\rho x}.\end{aligned}$$

**2$^{\text{ème}}$ équation :**

$$-\frac{1}{\delta^2} \partial_x^2 \omega_+^\delta (x) + \lambda \omega_+^\delta (x) = h_+ (x).$$

Pour l'équation homogène on a :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\delta^2} \partial_x^2 \omega_+^\delta (x) + \lambda \omega_+^\delta (x) &= 0 \iff \partial_x^2 \omega_+^\delta (x) - \delta^2 \lambda \omega_+^\delta (x) = 0 \\ &\iff \omega_+^\delta (x) = C_3 e^{\delta \rho x} + C_4 e^{-\delta \rho x}.\end{aligned}$$

**Variation de la constante.**

On a

$$\omega_+^\delta(x) = C_3(x)\, e^{\delta\rho x} + C_4(x)\, e^{-\delta\rho x},$$

alors

$$\begin{aligned}\partial_x \omega_+^\delta(x) &= (\partial_x C_3(x))\, e^{\delta\rho x} + \delta\rho C_3(x)\, e^{\delta\rho x} + (\partial_x C_4(x))\, e^{-\delta\rho x} - \delta\rho C_4(x)\, e^{-\delta\rho x} \\ &= \delta\rho C_3(x)\, e^{\delta\rho x} - \delta\rho C_4(x)\, e^{-\delta\rho x},\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}\partial_x^2 \omega_+^\delta(x) &= \delta\rho\,(\partial_x C_3(x))\, e^{\delta\rho x} + \lambda\delta^2 C_3(x)\, e^{\delta\rho x} \\ &\quad -\delta\rho\,(\partial_x C_4(x))\, e^{-\delta\rho x} + \lambda\delta^2 C_4(x)\, e^{-\delta\rho x}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases}(\partial_x C_3(x))\, e^{\delta\rho x} + (\partial_x C_4(x))\, e^{-\delta\rho x} = 0 \\ \dfrac{-\rho}{\delta}(\partial_x C_3(x))\, e^{\delta\rho x} + \dfrac{\rho}{\delta}(\partial_x C_4(x))\, e^{-\delta\rho x} = h_+(x).\end{cases}$$

On a

$$\det = \frac{2\rho}{\delta},$$

donc

$$\begin{aligned}\partial_x C_3(x) &= \frac{\delta}{2\rho}\begin{vmatrix} 0 & e^{-\delta\rho x} \\ h_+(x) & \frac{\rho}{\delta} e^{-\delta\rho x}\end{vmatrix} = \frac{-\delta}{2\rho} e^{-\delta\rho x} h_+(x) \\ \partial_x C_4(x) &= \frac{\delta}{2\rho}\begin{vmatrix} e^{\delta\rho x} & 0 \\ \frac{-\rho}{\delta} e^{\delta\rho x} & h_+(x)\end{vmatrix} \frac{\delta}{2\rho} e^{\delta\rho x} h_+(x),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} C_3(x) = \dfrac{-\delta}{2\rho}\int_0^x e^{-\delta\rho s} h_+(s)\, ds + k_3 \\ C_4(x) = \dfrac{\delta}{2\rho}\int_0^x e^{\delta\rho s} h_+(s)\, ds + k_4.\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\omega_+^\delta(x) &= \left(\frac{-\delta}{2\rho}\int_0^x e^{-\delta\rho s} h_+(s)\, ds + k_3\right) e^{\delta\rho x} \\ &\quad + \left(\frac{\delta}{2\rho}\int_0^x e^{\delta\rho s} h_+(s)\, ds + k_4\right) e^{-\delta\rho x} \\ &= \frac{-\delta}{\rho}\int_0^x \sinh \delta\rho\,(x-s)\, h_+(s)\, ds \\ &\quad + k_3 e^{\delta\rho x} + k_4 e^{-\delta\rho x}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\omega_+^\delta(0) &= \omega_-^\delta(0) \iff k_1 + k_2 = k_3 + k_4 \\
\omega_-^\delta(-1) &= 0 \iff \frac{-1}{\rho}\int_{-1}^{0} \sinh\rho(1+s)\, h_-(s)\, ds + k_1 e^{-\rho} + k_2 e^{\rho} = 0 \\
\partial_x \omega_+^\delta(1) &= 0 \iff -\delta \int_0^1 \cosh\delta\rho(1-s)\, h_+(s)\, ds + k_3\rho e^{\delta\rho} - k_4 \rho e^{-\delta\rho} = 0 \\
\partial_x \omega_-^\delta(0) &= \frac{1}{\delta^2}\partial_x\omega_+^\delta(0) \iff k_1 - k_2 = \frac{1}{\delta}(k_3 - k_4),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases}
e^{-\rho}k_1 + e^{\rho}k_2 = \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{0}\sinh\rho(1+s)\, h_-(s)\, ds \\
k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 0 \\
k_1 - k_2 - \frac{1}{\delta}k_3 + \frac{1}{\delta}k_4 = 0 \\
\rho e^{\delta\rho}k_3 + \rho e^{-\delta\rho}k_4 = \delta\int_0^1 \cosh\delta\rho(1-s)\, h_+(s)\, ds,
\end{cases}$$

on pose

$$\begin{cases}
R = \int_{-1}^{0}\sinh\rho(1+s)\, h_-(s)\, ds \\
S = \int_0^1 \cosh\delta\rho(1-s)\, h_+(s)\, ds
\end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned}
\det &= 4\rho\left[\frac{1}{\delta}\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho + \cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho\right] \\
&= \frac{4\rho}{\delta}\Delta_0(\rho,\delta),
\end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{\det}\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}R & e^{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{-1}{\delta} & \frac{1}{\delta} \\ \delta S & 0 & \rho e^{\delta\rho} & -\rho e^{-\delta\rho} \end{vmatrix} \\
&= \frac{-\sinh\delta\rho\cdot R + \delta\cosh\delta\rho\cdot R + \delta e^{\rho}S}{2\rho\Delta_0(\rho,\delta)},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
k_2 &= \frac{1}{\det}\begin{vmatrix} e^{-\rho} & \frac{1}{\rho}R & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{\delta} & \frac{1}{\delta} \\ 0 & \delta S & \rho e^{\delta\rho} & -\rho e^{-\delta\rho} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\sinh\delta\rho\cdot R + \delta\cosh\delta\rho\cdot R - e^{-\rho}B}{2\rho\Delta_0(\rho,\delta)}.
\end{aligned}$$

**Calculons** $\omega_{-}^{\delta}(x)$ :

$$\begin{aligned}
\omega_{-}^{\delta}(x) &= \frac{1}{\rho}\int_{x}^{0}\sinh\rho(x-s)\cdot h_{-}(s)\,ds+\frac{-\sinh\delta\rho\cdot R+\delta\cosh\delta\rho\cdot R+e^{\rho}S}{2\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}e^{\rho x}\\
&\quad+\frac{\sinh\delta\rho\cdot R+\delta\cosh\delta\rho\cdot R-\delta e^{-\rho}S}{2\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}e^{-\rho x}\\
&= \frac{1}{\rho}\int_{x}^{0}\sinh\rho(x-s)\cdot h_{-}(s)\,ds\\
&\quad+\frac{-\sinh\delta\rho\cdot R\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)+\delta\cosh\delta\rho\cdot R\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right)}{2\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\\
&\quad+\frac{\delta S\left(e^{\rho(1+x)}-e^{-\rho(1+x)}\right)}{2\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\\
&= \frac{1}{\rho}\int_{x}^{0}\sinh\rho(x-s)\cdot h_{-}(s)\,ds\\
&\quad+\int_{-1}^{0}\frac{-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\sinh\rho(1+s)\cdot h_{-}(s)\,ds\\
&\quad+\int_{0}^{1}\frac{\delta\sinh\rho(1+x)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-s)\cdot h_{+}(s)\,ds\\
&= \frac{1}{\rho}\int_{x}^{0}\sinh\rho(x-s)\cdot h_{-}(s)\,ds\\
&\quad+\int_{-1}^{x}\frac{-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\sinh\rho(1+s)\cdot h_{-}(s)\,ds\\
&\quad+\int_{x}^{0}\frac{-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\sinh\rho(1+s)\cdot h_{-}(s)\,ds\\
&\quad+\int_{0}^{1}\frac{\delta\sinh\rho(1+x)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-s)\cdot h_{+}(s)\,ds\\
&= \int_{x}^{0}\frac{(\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho)\cdot\sinh\rho(x-s)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}h_{-}(s)\,ds\\
&\quad+\int_{x}^{0}\frac{(-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho)\cdot\sinh\rho(1+s)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}h_{-}(s)\,ds\\
&\quad+\int_{-1}^{x}\frac{-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\sinh\rho(1+s)\cdot h_{-}(s)\,ds\\
&\quad+\int_{0}^{1}\frac{\delta\sinh\rho(1+x)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-s)\cdot h_{+}(s)\,ds.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&(\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho)\cdot\sinh\rho(x-s)\\
&+(-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho)\cdot\sinh\rho(1+s)\\
=\;&(-\sinh\rho s\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho s\cdot\cosh\delta\rho)\cdot\sinh\rho(1+x),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\omega_{-}^{\delta}(x) &= \int_{x}^{0} \frac{-\sinh\delta\rho\cdot\sinh\rho s+\delta\cosh\delta\rho\cdot\cosh\rho s}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(x+1)\cdot h_{-}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{-1}^{x} \frac{-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(1+s)\cdot h_{-}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{0}^{1} \frac{\delta\sinh\rho(1+x)}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&= \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\,h_{-}(s)\,ds+\int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\,h_{+}(s)\,ds \\
&= \left(K_{\rho,\delta}^{-}h_{-}\right)(x)+\left(T_{\rho,\delta}^{-}h_{+}\right)(x),
\end{aligned}$$

où le noyau est donné par

$$H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)=\begin{cases}\dfrac{\Delta_{-}(\rho,\delta,x)}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(s+1) \text{ si } -1<s\le x\\[2ex] \dfrac{\Delta_{-}(\rho,\delta,s)}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(x+1) \text{ si } x\le s<0,\end{cases}$$

avec

$$\begin{cases}\Delta_0(\rho,\delta)=\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho\\ \Delta_{-}(\rho,\delta,\xi)=-\sinh\rho\xi\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho\xi\cdot\cosh\delta\rho.\end{cases}$$

**Calculons $k_3$ et $k_4$.**

On a

$$\begin{aligned}
k_3 &= \frac{1}{\det}\begin{vmatrix} e^{-\rho} & e^{\rho} & \frac{1}{\rho}R & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{\delta}\\ 0 & 0 & \delta S & -\rho e^{-\delta\rho}\end{vmatrix}\\
k_3 &= \frac{\delta\left(\sinh\rho\cdot S+\delta\cosh\rho\cdot S+e^{-\delta\rho}\cdot R\right)}{2\rho\Delta_0(\rho,\delta)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
k_4 &= \frac{1}{\det}\begin{vmatrix} e^{-\rho} & e^{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho}R\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & \frac{-1}{\delta} & 0\\ 0 & 0 & \rho e^{\delta\rho} & \delta S\end{vmatrix}\\
k_4 &= \frac{\delta\left(\sinh\rho\cdot S-\delta\cosh\rho\cdot S+e^{\delta\rho}\cdot R\right)}{2\rho\Delta_0(\rho,\delta)}.
\end{aligned}$$

**Calculons** $\omega_{+}^{\delta}(x)$ :

$$
\begin{aligned}
\omega_{+}^{\delta}(x) &= \frac{-\delta}{\rho}\int_{0}^{x}\sinh\delta\rho(x-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\frac{\delta\left(\sinh\rho\cdot S+\delta\cosh\rho\cdot S+e^{-\delta\rho}\cdot R\right)}{2\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}e^{\delta\rho x} \\
&\quad+\frac{\delta\left(\sinh\rho\cdot S-\delta\cosh\rho\cdot S+e^{\delta\rho}\cdot R\right)}{2\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}e^{-\delta\rho x} \\
&= \frac{-\delta}{\rho}\int_{0}^{x}\sinh\delta\rho(x-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\frac{\delta\left(e^{\delta\rho(x-1)}+e^{-\delta\rho(x-1)}\right)}{2\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}R \\
&\quad+\frac{\delta\left(\sinh\rho\cdot\left(e^{\delta\rho x}+e^{-\delta\rho x}\right)+\delta\cosh\rho\cdot\left(e^{\delta\rho x}-e^{-\delta\rho x}\right)\right)}{2\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}S \\
&= \frac{-\delta}{\rho}\int_{0}^{x}\sinh\delta\rho(x-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\frac{\delta\cosh\delta\rho(x-1)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}R \\
&\quad+\frac{\delta(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}S \\
&= \frac{-\delta}{\rho}\int_{0}^{x}\sinh\delta\rho(x-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{0}^{1}\frac{\delta(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{-1}^{0}\frac{\delta\cosh\delta\rho(x-1)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\sinh\rho(1+s)\cdot h_{-}(s)\,ds \\
&= \frac{-\delta}{\rho}\int_{0}^{x}\sinh\delta\rho(x-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{0}^{x}\frac{\delta(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{x}^{1}\frac{\delta(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{-1}^{0}\frac{\delta\cosh\delta\rho(x-1)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\sinh\rho(1+s)\cdot h_{-}(s)\,ds \\
&= \int_{0}^{x}\frac{\delta(-\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho-\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho)\cdot\sinh\delta\rho(x-s)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{0}^{x}\frac{(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)\cdot\cosh\delta\rho(1-s)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{x}^{1}\frac{\delta(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-s)\cdot h_{+}(s)\,ds \\
&\quad+\int_{-1}^{0}\frac{\delta\cosh\delta\rho(x-1)}{\rho\Delta_{0}(\rho,\delta)}\sinh\rho(1+s)\cdot h_{-}(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

on a

$$\begin{aligned} & \left(-\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho-\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho\right)\sinh\delta\rho\left(x-s\right) \\ & +\left(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x\right)\cosh\delta\rho\left(1-s\right) \\ = \; & \left(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho s+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho s\right)\cdot\cosh\delta\rho\left(1-x\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \omega_{+}^{\delta}\left(x\right) &= \int_{0}^{x}\frac{\delta\left(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho s+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho s\right)}{\rho\Delta_{0}\left(\rho,\delta\right)}\cosh\delta\rho\left(1-x\right)\cdot h_{+}\left(s\right)ds \\ & +\int_{x}^{1}\frac{\delta\left(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x\right)}{\rho\Delta_{0}\left(\rho,\delta\right)}\cosh\delta\rho\left(1-s\right)\cdot h_{+}\left(s\right)ds \\ & +\int_{-1}^{0}\frac{\delta\cosh\delta\rho\left(x-1\right)}{\rho\Delta_{0}\left(\rho,\delta\right)}\sinh\rho\left(1+s\right)\cdot h_{-}\left(s\right)ds \\ &= \int_{0}^{1}N_{\rho,\delta}^{+}\left(x,s\right)h_{+}\left(s\right)ds+\int_{-1}^{0}H_{\rho,\delta}^{+}\left(x,s\right)h_{-}\left(s\right)ds \\ &= \left(T_{\rho,\delta}^{+}h_{+}\right)\left(x\right)+\left(K_{\rho,\delta}^{+}h_{-}\right)\left(x\right), \end{aligned}$$

où le noyau est donné par

$$N_{\rho,\delta}^{+}\left(x,s\right)=\begin{cases} \dfrac{\Delta_{+}\left(\rho,\delta,s\right)}{\rho\Delta_{0}\left(\rho,\delta\right)}\cosh\rho\delta\left(1-x\right) & \text{si } \; 0<s<x \\ \dfrac{\Delta_{+}\left(\rho,\delta,x\right)}{\rho\Delta_{0}\left(\rho,\delta\right)}\cosh\rho\delta\left(1-s\right) & \text{si } \; x<s<1, \end{cases}$$

et

$$H_{\rho,\delta}^{+}\left(x,s\right)=\frac{\delta\cosh\rho\delta\left(x-1\right)}{\rho\Delta_{0}\left(\rho,\delta\right)}\sinh\rho\left(1+s\right),$$

avec

$$\Delta_{+}\left(\rho,\delta,\xi\right)=\delta\left(\sinh\rho\cdot\cosh\rho\delta\xi+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\rho\delta\xi\right).$$

On a

$$\inf_{\rho\geq0}\Delta_{0}\left(\rho,\delta\right)=\delta>0.$$

On a

$$\omega^{\delta}=\begin{cases} \omega_{-}^{\delta}\left(x\right) & \text{si } \; x\in\left[-1,0\right] \\ \omega_{-}^{\delta}\left(x\right) & \text{si } \; x\in\left[0,1\right]. \end{cases}$$

**Estimation de la résolvante de $B_{\delta}$ :**

On a :

$$\begin{aligned} \left\|\omega^{\delta}\right\|_{L^{p}(-1,1;X)} &= \left\|\left(B_{\delta}+\lambda\right)^{-1}h\right\|_{E} \\ &\leqslant \left\|\omega_{-}^{\delta}\right\|_{L^{p}(-1,0;X)}+\left\|\omega_{+}^{\delta}\right\|_{L^{p}(0,1;X)} \\ &\leqslant \left\|K_{\rho,\delta}^{-}h_{-}\right\|_{L^{p}(-1,0;X)}+\left\|T_{\rho,\delta}^{-}h_{+}\right\|_{L^{p}(-1,0;X)} \\ & \quad +\left\|K_{\rho,\delta}^{+}h_{-}\right\|_{L^{p}(0,1;X)}+\left\|T_{\rho,\delta}^{+}h_{+}\right\|_{L^{p}(0,1;X)}. \end{aligned}$$

Comme $K^{-}_{\rho,\delta}$ et $T^{+}_{\rho,\delta}$ est symétrique d'après le lemme de schur on a

$$\begin{aligned}
&\left\|K^{-}_{\rho,\delta}\right\|_{L(L^p(-1,0;X))}\\
\leqslant\ & \sup_{-1\leq x\leq\ 0}\left(\int_{-1}^{0}\left|H^{-}_{\rho,\delta}(x,s)\right|ds\right)\\
\leqslant\ & \sup_{-1\leq x\leq\ 0}\left(\int_{-1}^{x}\frac{-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(s+1)\,ds\right.\\
&\left.+\int_{x}^{0}\frac{-\sinh\rho s\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho s\cdot\cosh\delta\rho}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(x+1)\,ds\right)\\
\leqslant\ & \sup_{-1\leq x\leq\ 0}\left(\frac{\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\int_{-1}^{x}\sinh\rho(s+1)\,ds\right.\\
&\left.+\sinh\rho(x+1)\int_{x}^{0}\frac{\delta\cosh\rho s\cdot\cosh\delta\rho-\sinh\rho s\cdot\sinh\delta\rho}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}ds\right)\\
\leqslant\ & \sup_{-1\leq x\leq\ 0}\left(\frac{(\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho)(\cosh\rho(x+1)-1)}{\lambda\Delta_0(\rho,\delta)}\right.\\
&\left.+\frac{(-\delta\cosh\delta\rho\cdot\sinh\rho x+\sinh\delta\rho\cdot\cosh\rho x-\sinh\delta\rho)\sinh\rho(x+1)}{\lambda\Delta_0(\rho,\delta)}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&(\delta\cosh\rho x\cdot\cosh\delta\rho-\sinh\rho x\cdot\sinh\delta\rho)(\cosh\rho x\cdot\cosh\rho+\sinh\rho x\cdot\sinh\rho)+\\
&(-\delta\cosh\delta\rho\cdot\sinh\rho x+\sinh\delta\rho\cdot\cosh\rho x-\sinh\delta\rho)(\sinh\rho x\cdot\cosh\rho+\cosh\rho x\cdot\sinh\rho)\\
=\ &\Delta_0(\rho,\delta)-(\sinh\rho(x+1)-\sinh\rho x)\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\delta\rho\cdot\cosh\rho x.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left\|K^{-}_{\rho,\delta}\right\|_{L(L^p(-1,0;X))}\\
\leqslant\ & \sup_{-1\leq x\leq\ 0}\left(\frac{\Delta_0(\rho,\delta)-(\sinh\rho(x+1)-\sinh\rho x)\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\delta\rho\cdot\cosh\rho x}{\lambda\Delta_0(\rho,\delta)}\right)\\
\leqslant\ & \frac{\Delta_0(\rho,\delta)}{\lambda\Delta_0(\rho,\delta)}\\
\leqslant\ & \frac{1}{\lambda},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
&\left\|T^{+}_{\rho,\delta}\right\|_{L(L^p(0,1;X))}\\
\leqslant\ & \sup_{0\leq x\leq\ 1}\left(\int_{0}^{1}\left|N^{+}_{\rho,\delta}(x,s)\right|ds\right)\\
\leqslant\ & \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\int_{0}^{x}\frac{\delta(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho s+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho s)}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-x)\,ds\right.\\
&\left.+\int_{x}^{1}\frac{\delta(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho(1-s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{\delta\cosh\delta\rho\,(1-x)}{\rho\Delta_0\,(\rho,\delta)}\int_0^x(\sinh\rho\cdot\cosh\rho s+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho s)\,ds\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\delta\,(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)}{\rho\Delta_0\,(\rho,\delta)}\int_x^1\cosh\delta\rho\,(1-s)\,ds\right)\\
&\leqslant \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{\delta\cosh\delta\rho\,(1-x)\left(\frac{1}{\delta}\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho x+\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho x-\cosh\rho\right)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)\sinh\delta\rho\,(1-x)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\right)\\
&\leqslant \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{\cosh\delta\rho\,(1-x)\,(\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho x-\delta\cosh\rho)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(\sinh\rho\cdot\cosh\delta\rho x+\delta\cosh\rho\cdot\sinh\delta\rho x)\sinh\delta\rho\,(1-x)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\right)\\
&\leqslant \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{\sinh\rho\cdot(\cosh\delta\rho\,(x-1)\cdot\sinh\delta\rho x+\sinh\delta\rho\,(1-x)\cdot\cosh\delta\rho x)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\right.\\
&\qquad+\frac{\delta\cosh\rho\cdot(\cosh\delta\rho\,(x-1)\cdot\cosh\delta\rho x+\sinh\delta\rho\,(1-x)\cdot\sinh\delta\rho x)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\\
&\qquad\left.-\frac{\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho\,(x-1)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\right)\\
&\leqslant \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{(\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho+\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho)-\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho\,(x-1)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\right)\\
&\leqslant \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{\Delta_0\,(\rho,\delta)-\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho\,(x-1)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\right)\leqslant\frac{\Delta_0\,(\rho,\delta)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\leqslant\frac{1}{\lambda},
\end{aligned}
$$

et de plus

$$
\begin{aligned}
&\left\|T^-_{\rho,\delta}\right\|_{L(L^p(-1,0;X),L^p(0,1;X))}\\
&\leqslant \sup_{-1\leq x\leq 0}\left(\int_0^1\left|N^-_{\rho,\delta}\,(x,s)\right|ds\right)+\sup_{0\leq s\leq 1}\left(\int_{-1}^0\left|N^-_{\rho,\delta}\,(x,s)\right|dx\right)\\
&\leqslant \sup_{-1\leq x\leq 0}\left(\int_0^1\frac{\delta\sinh\rho\,(x+1)}{\rho\Delta_0\,(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho\,(1-s)\,ds\right)\\
&\qquad+\sup_{0\leq s\leq 1}\left(\int_{-1}^0\frac{\delta\sinh\rho\,(x+1)}{\rho\Delta_0\,(\rho,\delta)}\cosh\delta\rho\,(1-s)\,dx\right)\\
&\leqslant \sup_{-1\leq x\leq 0}\left(\frac{\delta\sinh\rho\,(x+1)}{\rho\Delta_0\,(\rho,\delta)}\int_0^1\cosh\delta\rho\,(1-s)\,ds\right)\\
&\qquad+\sup_{0\leq s\leq 1}\left(\frac{\delta\cosh\delta\rho\,(1-s)}{\rho\Delta_0\,(\rho,\delta)}\int_{-1}^0\sinh\rho\,(x+1)\,dx\right)\\
&\leqslant \sup_{-1\leq x\leq 0}\left(\frac{\delta\sinh\rho\,(x+1)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\sinh\delta\rho\right)+\sup_{0\leq s\leq 1}\left(\frac{\delta\cosh\delta\rho\,(1-s)}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}(\cosh\rho-1)\right)\\
&\leqslant \frac{\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}+\frac{\delta\cosh\rho\cdot\cosh\delta\rho}{\lambda\Delta_0\,(\rho,\delta)}\leqslant\frac{1}{\lambda},
\end{aligned}
$$

et de plus

$$
\begin{aligned}
&\left\| K^{+}_{\rho,\delta} \right\|_{L(L^p(-1,0;X),L^p(0,1;X))} \\
\leqslant\ & \sup_{0\leq x\leq 1}\left[\int_{-1}^{0}\left|H^{+}_{\rho,\delta}(x,s)\right| ds\right] + \sup_{-1\leq s\leq\ 0}\left[\int_{0}^{1}\left|H^{+}_{\rho,\delta}(x,s)\right| dx\right] \\
\leqslant\ & \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\int_{-1}^{0}\frac{\delta\cosh\delta\rho\,(1-x)}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho\,(s+1)\,ds\right) \\
& + \sup_{-1\leq s\leq\ 0}\left(\int_{0}^{1}\frac{\delta\cosh\delta\rho\,(1-x)}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho\,(s+1)\,dx\right) \\
\leqslant\ & \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{\delta\cosh\delta\rho\,(1-x)}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\int_{-1}^{0}\sinh\rho\,(s+1)\,ds\right) \\
& + \sup_{-1\leq s\leq\ 0}\left(\frac{\delta\sinh\rho\,(s+1)}{\rho\Delta_0(\rho,\delta)}\int_{0}^{1}\cosh\delta\rho\,(1-x)\,dx\right) \\
\leqslant\ & \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{\delta\cosh\delta\rho\,(1-x)}{\lambda\Delta_0(\rho,\delta)}(\cosh\rho-1)\right) \\
& + \sup_{-1\leq s\leq\ 0}\left(\frac{\delta\sinh\rho\,(s+1)}{\lambda\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\delta\rho\right) \\
\leqslant\ & \frac{\delta\cosh\delta\rho\cdot\cosh\rho}{\lambda\Delta_0(\rho,\delta)} + \frac{\sinh\rho\cdot\sinh\delta\rho}{\lambda\Delta_0(\rho,\delta)} \leqslant \frac{\Delta_0(\rho,\delta)}{\lambda\Delta_0(\rho,\delta)} \leqslant \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$\left\|\omega^{\delta}\right\|_{L^p(-1,0;X)} = \left\|(B_\delta+\lambda)^{-1}h\right\|_E \leqslant \frac{C_1}{\lambda}\cdot\|h\|_E\,,$$

telle que $C_1\ >0$ indépandante de $\delta$.

**Montrons que $B_\delta$ est inversible.**

On a

$$B_\delta\cdot\phi^{\delta}(x) = h(x)\,,$$

alors

$$
\begin{cases}
-\partial_x^2\phi^{\delta}_{-}(x) = h_{-}(x) \quad \text{si} \quad x\in[-1,0] \\
\frac{-1}{\delta^2}\partial_x^2\phi^{\delta}_{+}(x) = h_{+}(x) \quad \text{si} \quad x\in[0,1] \\
\phi^{\delta}_{-}(-1) = 0\ ,\ \partial_x\phi^{\delta}_{+}(1) = 0 \\
\phi^{\delta}_{-}(0) = \phi^{\delta}_{+}(0)\ \ ,\ \partial_x\phi^{\delta}_{-}(0) = \frac{1}{\delta^2}\partial_x\phi^{\delta}_{+}(0)\,.
\end{cases}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\partial_x^2\phi^{\delta}_{-}(x) \quad &= \quad -h_{-}(x) \iff \partial_x\phi^{\delta}_{-}(x) = \int_{-1}^{x} -h_{-}(s)\,ds + k_1 \\
&\iff \quad \phi^{\delta}_{-}(x) = \int_{-1}^{x}(s-x)\,h_{-}(s)\,ds + k_1x + k_2,
\end{aligned}
$$

et de plus

$$
\begin{aligned}
\partial_x^2\phi^{\delta}_{+}(x) \quad &= \quad -\delta^2h_{+}(x) \iff \partial_x\phi^{\delta}_{+}(x) = \int_{0}^{x} -\delta^2h_{+}(s)\,ds + k_3 \\
&\iff \quad \phi^{\delta}_{+}(x) = \delta^2\int_{0}^{x}(s-x)\,h_{+}(s)\,ds + k_3x + k_4.
\end{aligned}
$$

Les conditions aux limites et les conditions de transmission donnent

$$\begin{cases} \phi_-^\delta(0)=0 \\ \phi_-^\delta(0)=\phi_+^\delta(0) \\ \partial_x\phi_+^\delta(1)=0 \\ \partial_x\phi_-^\delta(0)=\dfrac{1}{\delta^2}\partial_x\phi_+^\delta(0) \end{cases} \iff \begin{cases} -k_1+k_2=0 \\ \int_{-1}^0 s\cdot h_-(s)\,ds+k_2=k_4 \\ -\delta^2\int_0^1 h_+(s)\,ds+k_3=0 \\ -\int_{-1}^0 h_-(s)\,ds+k_1=\frac{1}{\delta^2}k_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k_1=\int_{-1}^0 h_-(s)\,ds+\int_0^1 h_+(s)\,ds \\ k_2=\int_{-1}^0 h_-(s)\,ds+\int_0^1 h_+(s)\,ds \\ k_3=\delta^2\int_0^1 h_+(s)\,ds \\ k_4=\int_{-1}^0 s\cdot h_-(s)\,ds+\int_{-1}^0 h_-(s)\,ds+\int_0^1 h_+(s)\,ds, \end{cases}$$

**Calculons $\phi_-^\delta(x)$.**

On a :

$$\begin{aligned}
\phi_-^\delta(x) &= \int_{-1}^x (s-x)\,h_-(s)\,ds + x\int_{-1}^0 h_-(s)\,ds + x\int_0^1 h_+(s)\,ds \\
&\quad + \int_{-1}^0 h_-(s)\,ds + \int_0^1 h_+(s)\,ds \\
&= \int_{-1}^x (s-x)\,h_-(s)\,ds + x\left(\int_{-1}^x h_-(s)\,ds + \int_x^0 h_-(s)\,ds\right) \\
&\quad + x\int_0^1 h_+(s)\,ds + \left(\int_{-1}^x h_-(s)\,ds + \int_x^0 h_-(s)\,ds\right) + \int_0^1 h_+(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\phi_-^\delta(x) = \int_{-1}^x (s+1)\,h_-(s)\,ds + (x+1)\int_x^0 h_-(s)\,ds + (x+1)\int_0^1 h_+(s)\,ds.$$

**Calculons $\phi_+^\delta(x)$.**

On a

$$\begin{aligned}
\phi_+^\delta(x) &= \delta^2\int_0^x (s-x)\,h_+(s)\,ds + x\delta^2\int_0^1 h_+(s)\,ds + \int_{-1}^0 s\cdot h_-(s)\,ds \\
&\quad + \int_{-1}^0 h_-(s)\,ds + \int_0^1 h_+(s)\,ds \\
&= \delta^2\int_0^x (s-x)\,h_+(s)\,ds + x\delta^2\left(\int_0^x h_+(s)\,ds + \int_x^1 h_+(s)\,ds\right) \\
&\quad + \int_{-1}^0 s\cdot h_-(s)\,ds + \int_{-1}^0 h_-(s)\,ds + \left(\int_0^x h_+(s)\,ds + \int_x^1 h_+(s)\,ds\right) \\
&= \int_0^x \left(\delta^2 s+1\right) h_+(s)\,ds + \left(\delta^2 x+1\right)\int_x^1 h_+(s)\,ds + \int_{-1}^0 (1+s)\,h_-(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$B_\delta \phi^\delta (x) = h(x) \iff \left((B_\delta)^{-1} h\right) = \phi^\delta = \begin{cases} \phi_-^\delta (x) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \phi_+^\delta (x) & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} & \left\| \phi_-^\delta \right\|_{L^p(-1,0;X)} \\ \leqslant & \sup_{-1 \leq s \leq 0} \left( \int_{-1}^{x} (s+1)\, ds + (x+1) \int_x^0 ds + (x+1) \int_0^1 ds \right) \|h\|_{L^p(-1,0;X)} \\ \leqslant & \sup_{-1 \leq s \leq 0} \left( \left( \frac{1}{2} s^2 + s \right)_{-1}^{x} + (x+1)(-x) + (x+1) \right) \|h\|_{L^p(-1,0;X)} \\ \leqslant & \sup_{-1 \leq s \leq 0} \left[ \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{2} - 1 - x^2 - x + x + 1 \right] \|h\| \leqslant C_1^{\grave{}} \|h\|_{L^p(-1,0;X)}, \end{aligned}$$

telle que $C_1^{\grave{}} > 0$,

et de plus

$$\begin{aligned} & \left\| \phi_+^\delta \right\|_{L^p(0,1;X)} \\ \leqslant & \sup_{0 \leq s \leq 1} \left( \int_0^x \left(\delta^2 s + 1\right) ds + \left(\delta^2 x + 1\right) \int_x^1 ds + \int_{-1}^0 (1+s)\, ds \right) \|h\|_{L^p(0,1;X)} \\ \leqslant & \sup_{0 \leq s \leq 1} \left( \left( \frac{1}{2} \delta^2 s^2 + s \right)_0^x + \left(\delta^2 x + 1\right)(1-x) + \left( s + \frac{1}{2} s^2 \right)_{-1}^0 \right) \|h\| \leqslant C_2^{\grave{}\grave{}} \|h\|_{L^p(0,1;X)}, \end{aligned}$$

telle que $C_2^{\grave{}\grave{}} > 0$.

Donc

$$\left\| (B_\delta)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant C_2,$$

telle que $C_2 = \max\left(C_2^{\grave{}}, C_2^{\grave{}\grave{}}\right)$, donc il existe une constante positive $M_{B_\delta} = M_1$ et $\epsilon_{B\ \delta} = \epsilon_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $r_{B_\delta} = r_1$ (indépendante de $\delta$), telle que pour $\lambda$ dans

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^* : \ |\arg(\lambda)| < \epsilon_1\} \cup b(0, r_1),$$

on a

$$\left\| (B_\delta + \lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{M_1}{1 + |\lambda|}.$$

**En effet :**

Pour $\lambda > 0$ il existe $(B_\delta + \lambda)^{-1}$, on pose

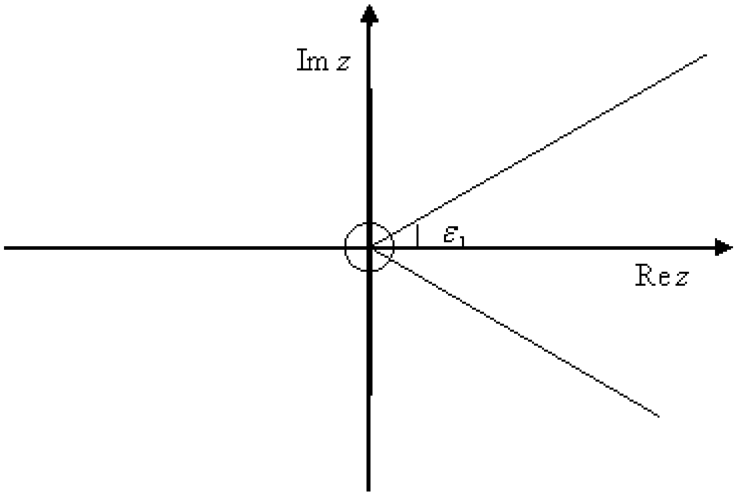
$$\lambda = x + iy, \text{ telle que } x > 0.$$

On a

$$(B_\delta + \lambda) = (B_\delta + x + iy) = (B_\delta + x)\left[I + iy\,(B_\delta + x)^{-1}\right],$$

donc $(B_\delta + \lambda)$ est inversible si est seulement si

$$\left\| iy \cdot (B_\delta + x)^{-1} \right\| < 1.$$




On a

$$\left\| iy \cdot (B_\delta + x)^{-1} \right\| < \frac{C\,|y|}{x} < 1,$$

donc

$$\lambda = x + iy = |\lambda| \left(\cos(\arg\lambda) + i \sin(\arg\lambda)\right).$$

**Pour l'opérateur $A$ on a :**
Pour $\rho = \sqrt{\lambda}$ telle que $\operatorname{Re}\rho > 0$ l'équation :

$$A\omega + \lambda\omega = g \in E,$$

est équivalente à

$$\begin{cases} -\Delta_y \Psi_x(y) + \lambda \Psi_x(y) = g_x(y) & \text{sur } G \\ \Psi_x = 0 & \text{sur } \partial G, \end{cases}$$

telle que $\Psi_x = \omega(x,\cdot)$ et $g_x = g(x,\cdot) \in L^p(G)$, $x \in (-1,1)$. Alors il existe une unique solition $\Psi_x(\cdot) \in W^{2,p}(G) \cap W_0^{1,p}(G)$ et $\varepsilon_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $M_Q > 0$ telle que

$$\left\| (Q + \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{M_Q}{1 + |\lambda|}$$

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^* : \ |Arg(\lambda)| < (\pi - \varepsilon_0) = \varepsilon_Q\} \cup b(0, r_Q).$$

On considère $\epsilon_0 < \epsilon_1$ donc

$$\epsilon_A + \epsilon_{B_\delta} = \pi - \epsilon_0 + \epsilon_1 > \pi.$$

$(b)$ **L'hypothèse** $(DG\ 2)$
Soient $\zeta \in \rho(-A)$ et $\eta \in \rho((B_\delta)$ montrons que

$$(A + \zeta I)^{-1} \cdot (B + \eta I)^{-1} = (B + \eta I)^{-1} \cdot (A + \zeta I)^{-1}.$$

Soit $h \in L^p(\Omega)$.

(**i**)Pour $x \in [-1,0]$, on a

$$\begin{aligned}
& \left((A+\zeta I)^{-1} \cdot (B+\eta I)^{-1} h\right)(x) \\
= \; & (A+\zeta I)^{-1} \left[(B+\eta I)^{-1} h\right](x) \\
= \; & (A+\zeta I)^{-1} \left[\int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, h_{-}(s)\, ds + \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, h_{+}(s)\, ds\right] \\
= \; & \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, (Q+\zeta I)^{-1} h_{-}(s)\, ds + \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, (Q+\zeta I)^{-1} h_{+}(s)\, ds. \\
& + \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, (Q+\zeta I)^{-1} h_{+}(s)\, ds.
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
& \left((B+\eta I)^{-1} \cdot (A+\zeta I)^{-1} h\right)(x) \\
= \; & (B+\eta I)^{-1} \left[(A+\zeta I)^{-1} h\right](x) \\
= \; & (B+\eta I)^{-1} \left[(Q+\zeta I)^{-1} h(x)\right] \\
= \; & \left[\int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, h_{-}(s)\, ds + \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, h_{+}(s)\, ds\right] (A+\zeta I)^{-1} \\
= \; & \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, (Q+\zeta I)^{-1} h_{-}(s)\, ds + \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, (Q+\zeta I)^{-1} h_{+}(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Donc pour $x \in [-1,0]$ on a :

$$\left((A+\zeta I)^{-1} \cdot (B+\eta I)^{-1} h\right)(x) = \left((B+\eta I)^{-1} \cdot (A+\zeta I)^{-1} h\right)(x).$$

(**ii**) Pour $x \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned}
& \left((A+\zeta I)^{-1} \cdot (B+\eta I)^{-1} h\right)(x) \\
= \; & (A+\zeta I)^{-1} \left[(B+\eta I)^{-1} h\right](x) \\
= \; & (A+\zeta I)^{-1} \left[\int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, h_{+}(s)\, ds + \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, h_{-}(s)\, ds\right] \\
= \; & \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, (Q+\zeta I)^{-1} h_{+}(s)\, ds + \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, (Q+\zeta I)^{-1} h_{-}(s)\, ds,
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
& \left((B+\eta I)^{-1} (A+\zeta I)^{-1} h\right)(x) \\
= \; & (B+\eta I)^{-1} \left[(A+\zeta I)^{-1} h\right](x) \\
= \; & (B+\eta I)^{-1} \left[(Q+\zeta I)^{-1} h(x)\right] \\
= \; & \left[\int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, h_{+}(s)\, ds + \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, h_{-}(s)\, ds\right] (A+\zeta I)^{-1} \\
= \; & \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, (Q+\zeta I)^{-1} h_{+}(s)\, ds \\
& + \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, (Q+\zeta I)^{-1} h_{-}(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Donc pour $x \in [0,1]$ on a :

$$\left((A+\zeta I)^{-1} \cdot (B+\eta I)^{-1} h\right)(x) = \left((B+\eta I)^{-1} \cdot (A+\zeta I)^{-1} h\right)(x).$$

D'où le résultat. ■

## 2.3 Application des résultats de Da Prato-Grisvard

En appliquant les théorèmes de Da prato et Grisvard on obtient

**Théorème 2.1** *:Soit* $1 < p < \infty$ *:*

1. *Pour tout* $f^\delta \in L^p(\Omega)$ *il existe une solution forte*

$$u^\delta = \begin{cases} u_-^\delta & sur \quad \Omega_- \\ u_+^\delta & sur \quad \Omega_+, \end{cases}$$

*dans* $L^p(G)$ *du problème (3).*

2. *Pour tout* $f^\delta \in W^{2\theta,p}(G)$ *telle que* $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *alors* $u^\delta$ *est une solution stricte satisfaisant*
   (a) $u^\delta \in L^p\left(-1,1; W^{2,p}(G) \cap W_0^{1,p}(G)\right)$,
   (b) $u_-^\delta \in W^{2,p}(-1,0; L^p(G))$,
   (c) $u_+^\delta \in W^{2,p}(0,1; L^p(G))$,
   (d) $\Delta_y u^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega)$, $\partial_x^2 u_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ *et* $\left(\dfrac{1}{\delta^2}\partial_x^2 u_+^\delta\right) \in W^{2\theta,p}(\Omega_+)$.

## 2.4 Représentation de la solution

Il s'agit de donner maintenant une formule de représentation de la solution $u^\delta$ à l'aide de noyaux.

On a $\rho(B_\delta)$ est contient le secteur (indépendant de $\delta$)

$$\{z \in \mathbb{C}^\star : \ |\arg(z)| \geqslant \pi - \varepsilon_1\} \cup b_0(0, r_0),$$

telle que $r_0 = \min(r_A, r_1)$

la solution du problème

$$Au^\delta + B_\delta u^\delta = f^\delta,$$

est donnée sous la forme

$$u^\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (B_\delta - zI)^{-1}(A+zI)^{-1} f^\delta dz.$$

Donc on a pour $-1 \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Q+zI)^{-1}\left(K_{\rho,\delta}^-\left(f_-^\delta\right)(x)\right) dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Q+zI)^{-1}\left(T_{\rho,\delta}^-\left(f_+^\delta\right)(x)\right) dz, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
u_{-}^{\delta} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(A+zI)^{-1}K_{\rho,\delta}^{-}\left(f_{-}^{\delta}\right)dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(A+zI)^{-1}T_{\rho,\delta}^{-}\left(f_{+}^{\delta}\right),
\end{aligned}$$

et pour $0 \leq x \leq 1$ on a

$$\begin{aligned}
u_{+}^{\delta}(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(Q+zI)^{-1}\left(K_{\rho,\delta}^{+}\left(f_{-}^{\delta}\right)(x)\right)dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(Q+zI)^{-1}\left(T_{\rho,\delta}^{+}\left(f_{+}^{\delta}\right)(x)\right)dz,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
u_{+}^{\delta} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(A+zI)^{-1}K_{\rho,\delta}^{+}\left(f_{-}^{\delta}\right)dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(A+zI)^{-1}T_{\rho,\delta}^{+}\left(f_{+}^{\delta}\right)dz,
\end{aligned}$$

telle que $u_{\pm}^{\delta}(x) = u_{\pm}^{\delta}(x,\cdot)$ et $f_{\pm}^{\delta}(x) = f_{\pm}^{\delta}(x,\cdot)$.

# Chapitre 3

# Problème limite

Sous de bonnes hypothèses sur le comportement de la suite $f^\delta$ quand $\delta \to 0$, on montre que la suite $(u_\delta)$ converge dans $L^p(\Omega_-)$ vers une fonction $u_-$ quand $\delta \to 0$ généralisant les résultats obtenus, dans le cas hilbertien. On obtient de plus que $u_-$ est solution forte d'un problème aux limites de type Ventcel. En exigeant plus de régularité sur $\left(f^\delta\right)$, on obtient notamment que $u_-$ est une solution stricte d'un problème aux limites de type Ventcel.

Soit $1 < p < +\infty$ et pour tout $f^\delta \in L^p(\Omega)$. On supposera dans la suite que

1. $f_-^\delta$ tend vers $f_-$ dans $L^p(\Omega_-)$ quand $\delta$ tend vers 0,
2. $f_+^\delta$ est bornée dans $L^p(\Omega_+)$,
3. $\int_0^1 f_+^\delta(x,\cdot) = m_+^\delta$ tend vers $m$ dans $L^p(G)$ quand $\delta$ tend vers 0.

On pose $X = L^p(G)$ et $E_- = L^p(-1,0;X)$ et $E_+ = L^p(0,1;X)$ et $\rho = \sqrt{-z}$.

## 3.1 Limites des solutions $u_-^\delta$ et $u_+^\delta$ quand $\delta \to 0$

**Proposition 3.1** *Soit $z \in \gamma$, on a*

*1. $u_-^\delta$ tend sinplement quand $\delta \longrightarrow 0$ vers*

$$u_- = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K_{\sqrt{-z}}^-(f_-)\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-(m)\,dz.$$

*2. $u_+^\delta$ tend sinplement quand $\delta \longrightarrow 0$ vers*

$$u_+ = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K_{\sqrt{-z}}^+(f_-)\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^+(m)\,dz.$$

**Preuve.** $(i)$ Montrons que $u_-^\delta$ tend sinplement quand $\delta \longrightarrow 0$ vers

$$u_- = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K_{\sqrt{-z}}^-(f_-)\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-(m)\,dz.$$

On rappelle que la représentation formelle de $u_-^\delta$ pour $x \in [-1,0]$ et $\delta \in [0,1]$

$$u_-^\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K_{\sqrt{-z},\delta}^-\left(f_-^\delta\right)dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z},\delta}^-\left(f_+^\delta\right)dz.$$

On a
$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_-^\delta\right)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K^-_{\sqrt{-z}}\left(f_-\right)dz,$$
en effet on a d'une part
$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} K^-_{\sqrt{-z},\delta} = K^-_{\sqrt{-z}} \text{ et } \lim_{\delta\longrightarrow 0} f_-^\delta = f_-,$$
et l'estimation uniforme
$$\left\|K^-_{\sqrt{-z},\delta}\right\|_{L^p(E_-)} \leqslant \frac{C}{|z|},$$
et d'autre part
$$\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_-^\delta\right)dz\right\| \leqslant K_1 \left\|f_-^\delta\right\|,$$
d'ou le résultat pour le premier terme.
$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_+^\delta\right)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^-_{\sqrt{-z}}\left(f_+\right)dz,$$
en effet on a d'une part
$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} T^-_{\sqrt{-z},\delta} = T^-_{\sqrt{-z}} \text{ et } \lim_{\delta\longrightarrow 0} f_+^\delta = f_+,$$
et l'estimation uniforme
$$\left\|T^-_{\sqrt{-z},\delta}\right\|_{L^p(E_-)} \leqslant \frac{C}{|z|},$$
et d'autre part
$$\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_+^\delta\right)dz\right\|_{L^p(E_-)} \leqslant K_2 \left\|f_+^\delta\right\|_{E_+},$$
par conséquent
$$\begin{aligned} u_- &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K^-_{\sqrt{-z}}\left(f_-\right)dz \\ &\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^-_{\sqrt{-z}}\left(m\right)dz. \end{aligned}$$
Donc
$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} u_-^\delta = u_-.$$
$(ii)$ Montrons que $u_+^\delta$ tend sinplement quand $\delta \longrightarrow 0$ vers
$$u_+ = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K^+_{\sqrt{-z}}\left(f_-\right)dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^+_{\sqrt{-z}}\left(m\right)dz.$$
On rappelle que pour $x \in [0,1]$ et $\delta \in ]0,1[$
$$u_+^\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K^+_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_-^\delta\right)dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^+_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_+^\delta\right)dz.$$

On a

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1}K^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(f^{\delta}_{-}\right)dz=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1}K^{+}_{\sqrt{-z}}\left(f_{-}\right)dz,$$

en effet on a d'une part

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}K^{+}_{\sqrt{-z},\delta}=K^{+}_{\sqrt{-z}}\text{ et }\lim_{\delta\longrightarrow 0}f^{\delta}_{-}=f_{-},$$

et l'estimation uniforme

$$\left\|K^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\right\|_{L(E_+)}\leqslant\frac{C}{|z|},$$

et d'autre part

$$\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1}K^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(f^{\delta}_{-}\right)dz\right\|_{L^p(E_+)}\leqslant K'\left\|f^{\delta}_{-}\right\|_{E_-},$$

par conséquent

$$\begin{aligned}u_{+} &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1}K^{-}_{\sqrt{-z}}\left(f_{-}\right)dz\\ &\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1}T^{+}_{\sqrt{-z}}\left(m\right)dz.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}u^{\delta}_{+}=u_{+}.$$

■

**Lemme 3.1** *Soit $z\in\gamma$, on a*

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)=\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}.$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right) &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta+\delta\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\delta}{\sqrt{-z}\delta}+\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta\right)\\ &= \sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\end{aligned}$$

■

**Lemme 3.2** *Soient $x\in[-1,0]$ et $z\in\gamma$.*

1. *quand $\delta\to 0$, $H^{-}_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)$ tend vers*

$$H^{-}_{\sqrt{-z}}(x,s)=\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}x+\cosh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)}{\sqrt{-z}} & si\quad -1<s<x\\[2ex] \dfrac{-\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}s+\cosh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}} & si\quad x<s<0.\end{cases}$$

2. *quand $\delta \to 0$, $N^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)$ tend vers*

$$N^-_{\sqrt{-z}}(x,s) = N^-_{\sqrt{-z}}(x) = \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}\cdot\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} = H^-_{\sqrt{-z}}(x,0)$$

**Preuve.** (1) **On commence par calculer $H^-_{\sqrt{-z}}(x,s)$ :**

On rappelle que la représentation formulle de $H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)$

$$H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta,x\right)}{\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\dfrac{\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)}{\sqrt{-z}} & \text{si} \quad -1<s<x \\[2ex] \dfrac{\Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta,s\right)}{\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\dfrac{\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}} & \text{si} \quad x<s<0, \end{cases}$$

avec

$$\Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta,\zeta\right) = -\sinh\sqrt{-z}\zeta\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta + \delta\cosh\rho\delta\cdot\cosh\sqrt{-z}\zeta.$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta,\zeta\right) &= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{-1}{\delta}\sinh\sqrt{-z}\zeta\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta + \cosh\rho\delta\cdot\cosh\sqrt{-z}\zeta\right) \\ &= \lim_{\delta\to 0}\left(-\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\zeta\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\delta}{\sqrt{-z}\delta} + \cosh\rho\delta\cdot\cosh\sqrt{-z}\zeta\right) \\ &= -\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\zeta + \cosh\sqrt{-z}\zeta, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} H^-_{\sqrt{-z}}(x,s) &= \lim_{\delta\to 0} H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) \\ &= \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}x+\cosh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)}{\sqrt{-z}} & \text{si} \quad -1<s<x \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}s+\cosh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}} & \text{si} \quad x<s<0. \end{cases} \end{aligned}$$

On pose

$$K^-_{\sqrt{-z}}(f_-)(x) = \int_{-1}^{0} H^-_{\sqrt{-z}}(x,s)\,f_-(s)\,ds.$$

**On commence par Calculer $N^-_{\sqrt{-z}}(x,s)$ :**

$$\begin{aligned} N^-_{\sqrt{-z}}(x,s) &= \lim_{\delta\longrightarrow 0} N^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) = \lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{\delta\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\cosh\sqrt{-z}\delta\,(1-s) \\ &= \lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta\,(1-s)}{\dfrac{\sqrt{-z}}{\delta}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)} \\ &= \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}\cdot\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} = N^-_{\sqrt{-z}}(x) = H^-_{\sqrt{-z}}(x,0)\,. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} T^{-}_{\sqrt{-z}}(m)(x) = N^{-}_{\sqrt{-z}}(x)\, m \\ M^{-}_{\sqrt{-z}}\left(f^{\delta}_{+}\right)(x) = N^{-}_{\sqrt{-z}}(x)\, m^{\delta}_{+} = N^{-}_{\sqrt{-z}}(x)\int_0^1 f^{\delta}_{+}(s)\, ds. \end{cases}$$

■

**Lemme 3.3** *Soient $x \in [0,1]$ et $z \in \gamma$, on a*

1. *Quand $\delta \to 0$, $H^{+}_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)$ tend vers*

$$H^{+}_{\sqrt{-z}}(s) = \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)}{\sqrt{-z}\cdot\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z} + \cosh\sqrt{-z}\right)} = H^{-}_{\sqrt{-z}}(0,s)$$

2. *Quand $\delta \to 0$, $N^{+}_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)$ tend vers*

$$N^{+}_{\sqrt{-z}} = \frac{\sinh\sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z} + \cosh\sqrt{-z}\right)} = N^{-}_{\sqrt{-z}}(0)$$

**Preuve. Calculons $H^{+}_{\sqrt{-z}}(x,s)$ :**

On a

$$\begin{aligned} H^{+}_{\sqrt{-z}}(x,s) &= \lim_{\delta\to 0} H^{+}_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) \\ &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta\cosh\sqrt{-z}\delta\,(1-x)}{\sqrt{-z}\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\sinh\sqrt{-z}\,(s+1) \\ &= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\cosh\sqrt{-z}\delta\,(1-x)\cdot\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)}{\frac{\sqrt{-z}}{\delta}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\right) \\ &= \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)}{\sqrt{-z}\cdot\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z} + \cosh\sqrt{-z}\right)} = H^{-}_{\sqrt{-z}}(0,s). \end{aligned}$$

**On commence par Calculer $N^{+}_{\sqrt{-z}}$ :**On rappelle que

$$N^{+}_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\Delta_{+}\left(\sqrt{-z},\delta,s\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\cosh\delta\sqrt{-z}\,(1-x) & \text{si } 0 \le s \le x \\ \dfrac{\Delta_{+}\left(\sqrt{-z},\delta,x\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\cosh\delta\sqrt{-z}\,(1-s) & \text{si } 0 \le s \le x, \end{cases}$$

avec

$$\Delta_{+}\left(\sqrt{-z},\delta,\zeta\right) = \delta\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta\zeta + \delta\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta\zeta\right).$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{1}{\delta}\Delta_{+}\left(\sqrt{-z},\delta,\zeta\right) &= \lim_{\delta\longrightarrow 0}\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta\zeta + \delta\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta\zeta\right) \\ &= \sinh\sqrt{-z}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} N^+_{\sqrt{-z}}(x,s) &= \lim_{\delta\to 0} N^+_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) \\ &= \frac{\sinh\sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} = N^-_{\sqrt{-z}}(0). \end{aligned}$$

On pose que pour $x \in [0,1]$ et $z \in \gamma$

$$\begin{cases} K^+_{\sqrt{-z}}(f_-)(x) = \int_{-1}^0 H^+_{\sqrt{-z}}(s) f_-(s)\,ds \\ T^+_{\sqrt{-z}}(m)(x) = N^+_{\sqrt{-z}} \cdot m \\ M^+_{\sqrt{-z}}\left(f_+^\delta\right)(x) = N^+_{\sqrt{-z}} \cdot m_+^\delta. \end{cases}$$

■

**Estimations**

Rappelons que $X = L^p(G)$ et notons

$$E_- = L^p(-1,0;X) \text{ et } E_+ = L^p(0,1;X).$$

On obtient notamment par l'utilisation du lemme de Schur, les estimations suivantes pour les noyaux.

**Lemme 3.4** *Soient $z \in \gamma$ et $\delta \in ]0,1[$, on a l'estimation suivante*

$$\left\| K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_-^\delta\right)(x) - K^-_{\sqrt{-z}}(f_-)(x)\right\|_{E_-} \leqslant C\left(\frac{\delta}{\sqrt{-z}}\left\|f_-^\delta\right\|_{E_-} + \frac{1}{|z|}\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{E_-}\right).$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} & K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_-^\delta\right)(x) - K^-_{\sqrt{-z}}(f_-)(x) \\ = & \int_{-1}^0 H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) f_-^\delta(s)\,ds - \int_{-1}^0 H^-_{\sqrt{-z}}(x,s) f_-(s)\,ds \\ = & \int_{-1}^0 H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) f_-^\delta(s)\,ds - \int_{-1}^0 H^-_{\sqrt{-z}}(x,s) f_-(s)\,ds \\ & + \int_{-1}^0 H^-_{\sqrt{-z}}(x,s) f_-^\delta(s)\,ds - \int_{-1}^0 H^-_{\sqrt{-z}}(x,s) f_-^\delta(s)\,ds \\ = & \int_{-1}^0 \left[H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) - H^-_{\sqrt{-z}}(x,s)\right] f_-^\delta(s)\,ds \\ & + \int_{-1}^0 H^-_{\sqrt{-z}}(x,s)\cdot\left[f_-^\delta(s) - f_-(s)\right] ds, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \left\| K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_-^\delta\right)(x) - K^-_{\sqrt{-z}}(f_-)(x)\right\|_{E_-} \\ \leqslant & \sup_{-1\le x\le 0}\left(\int_{-1}^0 \left|H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) - H^-_{\sqrt{-z}}(x,s)\right| \cdot \left\|f_-^\delta(s)\right\| ds + \int_{-1}^0 \left|H^-_{\sqrt{-z}}(x,s)\right| \cdot \left\|f_-^\delta(s) - f_-(s)\right\| ds\right) \\ \leqslant & \left\|K^-_{\sqrt{-z},\delta} - K^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)} \cdot \left\|f_-^\delta\right\|_{E_-} + \frac{C}{|z|}\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{E_-}. \end{aligned}$$

Comme $K^-_{\sqrt{-z},\delta} - K^-_{\sqrt{-z}}$ est symétrique d'aprés le lemme de schur on a :

$$\left\| K^-_{\sqrt{-z},\delta} - K^-_{\sqrt{-z}} \right\|_{L(E_-)} \leqslant \sup_{-1\leq x\leq\ 0} \int_{-1}^{0} \left| \left( H^-_{\sqrt{-z},\delta} - H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x,s) \right| ds.$$

**Calculons $\left( H^-_{\sqrt{-z},\delta} - H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x,s)$.**

D'aprés le théorème de la valeure moyenne il existe $\delta^\star \in ]0,\delta[$ telle que

$$\begin{aligned} & \left( H^-_{\sqrt{-z},\delta} - H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x,s) \\ = & \begin{cases} \frac{\delta\cdot\sinh\sqrt{-z}(1+x)}{\sqrt{-z}} \cdot \frac{\partial_\delta \Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta^\star,s\right)\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right) - \partial_\delta\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)\cdot\Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta^\star,s\right)}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)} & \text{si } -1 < s \leq x \\ \frac{\delta\cdot\sinh\sqrt{-z}(1+s)}{\sqrt{-z}} \cdot \frac{\partial_\delta \Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta^\star,x\right)\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right) - \partial_\delta\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)\cdot\Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta^\star,x\right)}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)} & \text{si } x \leq s < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} & \partial_\delta \Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta^\star,\zeta\right)\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right) - \partial_\delta\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)\cdot\Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta^\star,\zeta\right) \\ = \; & \sinh\sqrt{-z}\,(1+\zeta)\cdot\left[\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star - \sqrt{-z}\delta^\star\right], \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \sup_{-1\leq x\leq 0}\int_{-1}^{0}\left|\left(H^-_{\sqrt{-z},\delta} - H^-_{\sqrt{-z}}\right)(x,s)\right| ds \\ \leqslant \; & \sup_{-1\leq x\leq 0}\int_{-1}^{x}\left|\delta\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}}\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)\left[\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star - \sqrt{-z}\delta^\star\right]}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\right| ds \\ & + \int_{x}^{0}\left|\delta\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}}\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)\left[\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star - \sqrt{-z}\delta^\star\right]}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\right| ds \\ \leqslant \; & \sup_{-1\leq x\leq 0}\left(\frac{\delta\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star - \sqrt{-z}\delta^\star\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\int_{-1}^{x}\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)\,ds\right. \\ & \left. + \frac{\delta\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star - \sqrt{-z}\delta^\star\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\int_{x}^{0}\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)\,ds\right) \\ \leqslant \; & \frac{\delta}{\sqrt{-z}}\cdot\sinh\sqrt{-z}\cdot\frac{\sqrt{-z}\delta^\star - \sinh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\cdot\frac{\cosh\sqrt{-z}-1}{\sqrt{-z}} \\ & + \frac{\delta}{\sqrt{-z}}\cdot\sinh\sqrt{-z}\cdot\frac{\sqrt{-z}\delta^\star - \sinh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\cdot\frac{\cosh\sqrt{-z}-1}{\sqrt{-z}} \\ \leqslant \; & 2\frac{\delta}{\sqrt{-z}}\cdot\frac{\cosh\sqrt{-z}-1}{\sqrt{-z}}\cdot\frac{\sqrt{-z}\delta^\star - \sinh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2\frac{\delta}{\sqrt{-z}} \cdot \frac{\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\cdot\rho\delta^{\star}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^{\star}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^{\star}}{\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^{\star}\cdot\sqrt{-z}\cdot\delta^{\star}\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^{\star}} \times \\
&\quad \left|\frac{1}{\sinh\sqrt{-z}\delta^{\star}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^{\star}} - \frac{1}{\sqrt{-z}\delta^{\star}}\right| \\
&\leqslant 2\frac{\delta}{\sqrt{-z}} \cdot \sup_{t\succeq 0}\left|\frac{1}{t} - \frac{2}{\sinh 2t}\right| \\
&\leqslant C\frac{\delta}{\sqrt{-z}}.
\end{aligned}
$$

Car la fonction $t \longrightarrow \left|\dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{\sinh 2t}\right|$ est continue et borné dans $\mathbb{R}$. Alors

$$
\left\| K_{\sqrt{-z},\delta}^{-}\left(f_{-}^{\delta}\right)(x) - K_{\sqrt{-z}}^{-}\left(f_{-}\right)(x)\right\|_{E_{-}} \leqslant C\left(\frac{\delta}{\sqrt{-z}}\left\|f_{-}^{\delta}\right\|_{E_{-}} + \frac{1}{|z|}\left\|f_{-}^{\delta} - f_{-}\right\|_{E_{-}}\right).
$$

■

**Lemme 3.5** *Soient $z \in \gamma$ et $\delta \in \left]0,1\right[$, on a l'estimation suivante*

$$
\left\| T_{\sqrt{-z},\delta}^{-}\left(f_{+}^{\delta}\right) - T_{\sqrt{-z}}^{-}(m)\right\|_{E_{-}} \leqslant \frac{C\cdot\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{E_{+}} + \frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2P}}}\left\|m_{+}^{\delta} - m\right\|_{E_{+}}.
$$

**Preuve.** On a :

$$
\begin{aligned}
& T_{\sqrt{-z},\delta}^{-}\left(f_{+}^{\delta}\right)(x) - T_{\sqrt{-z}}^{-}(m)(x) \\
= {} & \int_{0}^{1} N_{\sqrt{-z},\delta}^{-}(x,s)\, f_{+}^{\delta}(s)\, ds - N_{\sqrt{-z}}^{-}(x)\, m \\
= {} & \int_{0}^{1}\left(N_{\sqrt{-z},\delta}^{-}(x,s) - N_{\sqrt{-z}}^{-}(x)\right) f_{+}^{\delta}(s)\, ds + N_{\sqrt{-z}}^{-}(x)\, m_{+}^{\delta} - N_{\sqrt{-z}}^{-}(x)\, m \\
= {} & T_{\sqrt{-z},\delta}^{-}\left(f_{+}^{\delta}\right)(x) - M_{\sqrt{-z}}^{-}\left(f_{+}^{\delta}\right)(x) + N_{\sqrt{-z}}^{-}(x)\cdot\left(m_{+}^{\delta} - m\right) \\
= {} & \left(T_{\sqrt{-z},\delta}^{-} - M_{\sqrt{-z}}^{-}\right)\left(f_{+}^{\delta}\right) + N_{\sqrt{-z}}^{-}(x)\cdot\left(m_{+}^{\delta} - m\right),
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
& \left\| T_{\sqrt{-z},\delta}^{-}\left(f_{+}^{\delta}\right) - T_{\sqrt{-z}}^{-}(m)\right\|_{E_{-}} \\
\leqslant {} & \left\|\left(T_{\sqrt{-z},\delta}^{-} - M_{\sqrt{-z}}^{-}\right)\left(f_{+}^{\delta}\right)\right\|_{E_{-}} + \left\| N_{\sqrt{-z}}^{-}(x)\cdot\left(m_{+}^{\delta} - m\right)\right\|_{E_{-}} \\
\leqslant {} & \left\| T_{\sqrt{-z},\delta}^{-} - M_{\sqrt{-z}}^{-}\right\|_{L(E_{+},E_{-})}\cdot\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{E_{+}} + \left\| N_{\sqrt{-z}}^{-}(\cdot)\right\|_{L^{P}(-1,0)}\cdot\left\|m_{+}^{\delta} - m\right\|_{E_{+}}.
\end{aligned}
$$

**Calculons** $N_{\sqrt{-z},\delta}^{-}(x,s) - N_{\sqrt{-z}}^{-}(x,s)$.

D'aprés le théorème de la valeure moyenne il existe $\delta^{\star} \in \left]0,\delta\right[$ telle que pour $-1 \leq x \leq 0$ et

$0 \leq s \leq 1$, on a

$$
\begin{aligned}
& \left(N^{-}_{\sqrt{-z},\delta} - N^{-}_{\sqrt{-z}}\right)(x,s) \\
= \;& \delta \frac{\partial_{\delta^\star}\left(\delta^\star \sinh \sqrt{-z}\,(1+x)\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\right)\cdot \Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)} \\
& -\delta \frac{\partial_{\delta^\star}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)\cdot\left(\delta^\star \sinh \sqrt{-z}\,(1+x)\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)} \\
= \;& \delta \frac{\sinh \sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\left\{\left(\cosh \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s) + \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\sinh \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\right)\times\right. \\
& \left(\sinh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star + \delta^\star \cosh \sqrt{-z}\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star\right) \\
& -\left(\sqrt{-z}\sinh \sqrt{-z}\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star + \cosh \sqrt{-z}\left(\cosh \sqrt{-z}\delta^\star + \sqrt{-z}\delta^\star \sinh \sqrt{-z}\delta^\star\right)\right) \\
& \left.\times\left(\delta^\star \cosh \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\right)\right\} \\
= \;& \delta \frac{\sinh \sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\left\{\cosh \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\times\right. \\
& \left(\sinh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star - \sqrt{-z}\delta^\star\left[\sinh \sqrt{-z}\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star + \delta^\star \cosh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star\right]\right) \\
& \left.+\sinh \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\cdot \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\left(\sinh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star + \delta^\star \cosh \sqrt{-z}\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star\right)\right\},
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
& \sup_{-1\leq x\leq 0}\left[\int_0^1\left|\left(N^{-}_{\sqrt{-z},\delta} - N^{-}_{\sqrt{-z}}\right)(x,s)\right| ds\right] \\
\leqslant \;& \sup_{-1\leq x\leq 0}\delta \frac{\sinh \sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\left\{\sinh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star\right. \\
& \left.-\sqrt{-z}\delta^\star\left[\sinh \sqrt{-z}\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star + \delta^\star \cosh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star\right]\right\}\times \int_0^1 \cosh \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\,ds \\
& +\delta \frac{\sinh \sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\sqrt{-z}\delta^\star\left(\sinh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star + \delta^\star \cosh \sqrt{-z}\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star\right)\times \\
& \int_0^1 (1-s)\sinh \sqrt{-z}\delta^\star\,(1-s)\,ds \\
\leqslant \;& \frac{\delta \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\left\{\sinh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star - \right. \\
& \left.\sqrt{-z}\delta^\star\left[\sinh \sqrt{-z}\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star + \delta^\star \cosh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star\right]\right\}\times \\
& \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta^\star}{\sqrt{-z}\delta^\star} + \frac{\delta \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\cdot \sqrt{-z}\delta^\star\cdot \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta^\star}{\sqrt{-z}\delta^\star} \\
\leqslant \;& \frac{\delta}{\sqrt{-z}}\sinh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star \times \frac{\sinh \sqrt{-z}\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star + \delta^\star \cosh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star}{\sinh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star\cdot \Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\times \\
& \left|\frac{\sinh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star}{\sqrt{-z}\delta^\star\left(\sinh \sqrt{-z}\cdot \cosh \sqrt{-z}\delta^\star + \delta^\star \cosh \sqrt{-z}\cdot \sinh \sqrt{-z}\delta^\star\right)} - 1\right| + \frac{\delta}{\sqrt{-z}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{\delta}{\sqrt{-z}}\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\delta^\star}{\sqrt{-z}\delta^\star\left(\cosh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\right)}-1\right|+\frac{\delta}{\sqrt{-z}}\\
&\leqslant C\cdot\frac{\delta}{\sqrt{-z}},
\end{aligned}
$$

telle que $C>0$ indépendante de $\delta$. Car la fonction $t\longmapsto \dfrac{\sinh t}{t\cdot\cosh t}$ est bornée dans $\mathbb{R}_+$. et de plus pour $x\in\left]-1;0\right[$ on a :

$$
\left|N^-_{\sqrt{-z}}(x)\right| = \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}\cdot\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)}\right|,
$$

donc

$$
\left|N^-_{\sqrt{-z}}(\cdot)\right| = O\left(\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|}\right).
$$

Pour $|z|\to\infty$, on a:

$$
\begin{aligned}
\left\|N^-_{\sqrt{-z}}(x)\right\|_{L^p(-1;0)} &\leqslant \left(\int_{-1}^0\left(\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2p}}}\left(1-e^{-p\cdot\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2p}}},
\end{aligned}
$$

telle que $C>0$, indépendante de $\delta$.

Donc

$$
\begin{aligned}
&\left\|T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_+^\delta\right)-T^-_{\sqrt{-z}}(m)\right\|_{E_-}\\
\leqslant\ &\left\|T^-_{\sqrt{-z},\delta}-M^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_+,E_-)}\cdot\left\|f_+^\delta\right\|_{E_+}\\
&+\left\|N^-_{\sqrt{-z}}(\cdot)\right\|_{L^p(-1,0)}\cdot\left\|m_+^\delta-m\right\|_{E_+},
\end{aligned}
$$

alors

$$
\left\|T^-_{\sqrt{-z};\delta}\left(f_+^\delta\right)-T^-_{\sqrt{-z}}(m)\right\|_{E_-}\leqslant\frac{C\cdot\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\left\|f_+^\delta\right\|_{E_+}+\frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2P}}}\left\|m_+^\delta-m\right\|_{E_+}.
$$

■

**Lemme 3.6** *Soient $z\in\gamma$ et $\delta\in\left]0,1\right[$, on a l'estimation suivante*

$$
\left\|K^+_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_-^\delta\right)-K^+_{\sqrt{-z}}(f_-)\right\|_{E_+}\leqslant\frac{C\cdot\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\left\|f_-^\delta\right\|_{E_-}+\frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2q}}}\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{E_-}.
$$

**Preuve.** On a

$$\left|H^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\right| = \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)}{\sqrt{-z}\cdot\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)}\right| = O\left(\frac{e^{\sqrt{-z}s}}{|z|}\right),$$

alors,

$$\begin{aligned}
\left\|K^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\right\|_{L(E_-,E_+)} &\leqslant \left(\int_{-1}^{0}\left|H^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\right|^{q}ds\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant \left(\int_{-1}^{0}\left(\frac{e^{\sqrt{-z}s}}{|z|}\right)^{q}ds\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant \frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2q}}}\left(1-e^{-q\sqrt{-z}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant \frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2q}}},
\end{aligned}$$

telle que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

On a

$$\begin{aligned}
&K^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(f^{\delta}_{+}\right)(x)-K^{+}_{\sqrt{-z}}\left(f_{-}\right)(x)\\
= &\int_{-1}^{0}H^{+}_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)\,f^{\delta}_{-}(s)\,ds - \int_{-1}^{0}H^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\,f_{-}(s)\,ds\\
= &\int_{-1}^{0}H^{+}_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)\,f^{\delta}_{-}(s)\,ds - \int_{-1}^{0}H^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\,f_{-}(s)\,ds\\
&+\int_{-1}^{0}H^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\,f^{\delta}_{-}(s)\,ds-\int_{-1}^{0}H^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\,f^{\delta}_{-}(s)\,ds\\
= &\int_{-1}^{0}\left(H^{+}_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)-H^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\right)f^{\delta}_{-}(s)\,ds\\
&+\int_{-1}^{0}H^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\cdot\left(f^{\delta}_{-}(s)-f_{-}(s)\right)ds,
\end{aligned}$$

alors

$$\left\|K^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(f^{\delta}_{+}\right)-K^{+}_{\sqrt{-z}}\left(f_{-}\right)\right\|_{E_+}\leqslant\left\|K^{+}_{\sqrt{-z},\delta}-K^{+}_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-,E_+)}\left\|f^{\delta}_{-}\right\|_{E_-}+\frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2q}}}\left\|f^{\delta}_{-}-f_{-}\right\|_{E_-}.$$

**Calculons** $\left(H^{+}_{\sqrt{-z},\delta}-H^{+}_{\sqrt{-z}}\right)(x,s)$ **:**

On rappelle que

$$H^{+}_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)=\frac{\delta\cosh\sqrt{-z}\delta\,(1-x)}{\sqrt{-z}\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\sinh\sqrt{-z}\,(1+s),$$

d'aprés le théorème de la valeure moyenne il existe $\delta^\star\in\,]0,\delta[$ telle que

$$\begin{aligned}
&\left(H^+_{\sqrt{-z},\delta}-H^+_{\sqrt{-z}}\right)(x,s)\\
=\;&\frac{\delta\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)}{\sqrt{-z}\cdot\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\cdot\left\{\partial_{\delta^\star}\left[\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\right]\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)\right.\\
&\left.-\partial_{\delta^\star}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)\cdot\left(\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\right)\right\}\\
=\;&\frac{\delta\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)}{\sqrt{-z}\cdot\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\left\{\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\times\right.\\
&\left[\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star-\sqrt{-z}\delta^\star\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\right)\right]\\
&+\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\cdot\left[\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\right)\right],
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left\|K^+_{\sqrt{-z},\delta}-K^+_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-,E_+)}\\
\leqslant\;&\sup_{0\le x\le 1}\int_{-1}^{0}\left|\left(H^+_{\sqrt{-z},\delta}-H^+_{\sqrt{-z}}\right)(x,s)\right|ds\\
\leqslant\;&\sup_{0\le x\le 1}\frac{\delta}{\sqrt{-z}\cdot\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\left\{\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\times\right.\\
&\left[\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star-\sqrt{-z}\delta^\star\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\right)\right]\\
&\left.+\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\cdot\left[\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\right)\right]\right\}\\
&\times\int_{-1}^{0}\sinh\sqrt{-z}\,(1+s)\,ds\\
\leqslant\;&\sup_{0\le x\le 1}\frac{\delta}{\sqrt{-z}\cdot\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\left\{\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\times\right.\\
&\left[\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star-\sqrt{-z}\delta^\star\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\right)\right]\\
&\left.+\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\cdot\left[\sqrt{-z}\delta^\star\,(1-x)\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\right)\right]\right\}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{-z}}\left(\cosh\sqrt{-z}-1\right)\\
\leqslant\;&\delta\frac{\cosh\sqrt{-z}}{\sqrt{-z}}\cdot\frac{\cosh\sqrt{-z}\delta^\star}{\sqrt{-z}}\cdot\frac{1}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\times\\
&\left[\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star-\sqrt{-z}\delta^\star\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\right)\right]\\
&+\delta\frac{\cosh\sqrt{-z}}{\sqrt{-z}}\cdot\frac{\delta^\star\sinh\sqrt{-z}\delta^\star}{\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\\
\leqslant\;&\frac{\delta}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\frac{\sqrt{-z}\delta^\star\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\right)}{\sqrt{-z}\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^\star\right)}\times\\
&\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star}{\sqrt{-z}\delta^\star\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^\star+\delta^\star\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^\star\right)}-1\right|+\frac{\delta}{\sqrt{-z}}
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{\delta}{\sqrt{-z}}\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\delta^{\star}}{\sqrt{-z}\delta^{\star}\left(\cosh\sqrt{-z}\delta^{\star}+\delta^{\star}\sinh\sqrt{-z}\delta^{\star}\right)}-1\right|+\frac{\delta}{\sqrt{-z}}\\
&\leqslant C\cdot\frac{\delta}{\sqrt{-z}},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left\|K^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(f^{\delta}_{-}\right)-K^{+}_{\sqrt{-z}}\left(f_{-}\right)\right\|_{E_{+}}\\
\leqslant\ &\left\|K^{+}_{\sqrt{-z},\delta}-K^{+}_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_{-},E_{+})}\left\|f^{\delta}_{-}\right\|_{E_{-}}+\frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2q}}}\left\|f^{\delta}_{-}-f_{-}\right\|_{E_{-}}\\
\leqslant\ &\frac{C\cdot\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\left\|f^{\delta}_{-}\right\|_{E_{-}}+\frac{C}{|z|^{1+\frac{1}{2q}}}\left\|f^{\delta}_{-}-f_{-}\right\|_{E_{-}}.
\end{aligned}$$

**Lemme 3.7** *Soient $z\in\gamma$ et $\delta\in\,]0,1[\,,$ on a l'estimation suivante*

$$\left\|T^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(f^{\delta}_{+}\right)-T^{+}_{\sqrt{-z}}\left(m\right)\right\|_{E_{+}}\leq\frac{C\cdot\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\left\|f^{\delta}_{+}\right\|_{E_{+}}+\frac{C}{|z|}\left\|m^{\delta}_{+}-m\right\|_{E_{+}}.$$

**Preuve.** On a :

$$\begin{aligned}
T^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(f^{\delta}_{+}\right)(x)-T^{+}_{\sqrt{-z}}\left(m\right)(x) &= \int_{0}^{1}N^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(x,s\right)f^{\delta}_{+}\left(s\right)ds-N^{+}_{\sqrt{-z}}m\\
&= \int_{0}^{1}\left(N^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(x,s\right)-N^{+}_{\sqrt{-z}}\right)f^{\delta}_{+}\left(s\right)ds+N^{+}_{\sqrt{-z}}m^{\delta}_{+}-N^{+}_{\sqrt{-z}}m\\
&= \left(T^{+}_{\sqrt{-z},\delta}-M^{+}_{\sqrt{-z}}\right)\left(f^{\delta}_{+}\right)(x)+T^{+}_{\sqrt{-z}}\left(m^{\delta}_{+}-m\right)(x).
\end{aligned}$$

**Calculons** $N^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(x,s\right)-N^{+}_{\sqrt{-z}}$.

D'aprés le théorème de la valeure moyenne il existe $\delta^{*}\in\,]0,\delta[$ telle que pour $-1<s<x$

$$\begin{aligned}
&N^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(x,s\right)-N^{+}_{\sqrt{-z}}\\
=\ &\frac{\delta}{\sqrt{-z}\Delta_{0}^{2}\left(\sqrt{-z},\delta^{*}\right)}\left(\partial_{\delta^{*}}\cosh\sqrt{-z}\delta\left(1-x\right)\cdot\Delta_{0}\left(\sqrt{-z},\delta^{*}\right)\right)-\partial_{\delta^{*}}\Delta_{0}\left(\sqrt{-z},\delta^{*}\right)\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta\left(1-x\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\partial_{\delta^{*}}\cosh\sqrt{-z}\delta^{*}\left(1-x\right)\cdot\Delta_{0}\left(\sqrt{-z},\delta^{*}\right)-\partial_{\delta^{*}}\Delta_{0}\left(\sqrt{-z},\delta^{*}\right)\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^{*}\left(1-x\right)\\
=\ &\sqrt{-z}\left(1-x\right)\sinh\sqrt{-z}\delta^{*}\left(1-x\right)\times\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^{*}+\delta^{*}\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^{*}\right)\\
&-\left[\frac{1}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^{*}+\cosh\sqrt{-z}\cdot\left(\cosh\sqrt{-z}\delta^{*}+\frac{\delta^{*}}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}\delta^{*}\right)\right]\\
&\times\cosh\sqrt{-z}\delta^{*}\left(1-x\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\left\|N^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(x,s\right)-N^{+}_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_{-},E_{+})}\leqslant\frac{C\cdot\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}},$$

alors

$$\left\| T^{+}_{\sqrt{-z},\delta}\left(f^{\delta}_{+}\right) - T^{+}_{\sqrt{-z}}(m)\right\|_{E_{+}} \leqslant \frac{C\cdot\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\left\|f^{\delta}_{+}\right\|_{E_{+}} + \frac{C}{|z|}\left\|m^{\delta}_{+}-m\right\|_{E_{+}}.$$

■

## 3.2 La Convergence dans $L^{p}(\Omega)$

**Théorème 3.1** *Soit $f^{\delta}\in L^{P}(\Omega)$ vérifiant*

1. *$f^{\delta}_{-}$ tend vers $f_{-}$ dans $L^{p}(\Omega_{-})$ quand $\delta$ tend vers 0,*
2. *$f^{\delta}_{+}$ est bornée dans $L^{p}(\Omega_{+})$,*
3. *$\int_0^1 f^{\delta}_{+}(x,.) = m^{\delta}_{+}$ tend vers $m$ dans $L^{p}(G)$ quand $\delta$ tend vers 0.*
   *Alors il existe un unique couple $(u_{-},u_{+})\in L^{p}(\Omega_{-})\times L^{p}(G)$ tel que*

$$\lim_{\delta\to 0}\left(u^{\delta}_{\pm}-u_{\pm}\right)=0,$$

*dans $L^{p}(\Omega_{\pm})$ et plus précisement*

$$\begin{aligned}
&\left\|u^{\delta}_{\pm}-u_{\pm}\right\|_{L^{p}(\Omega_{\pm})}\\
\leqslant\ & C\ \delta\left(\left\|f^{\delta}_{-}\right\|_{L^{P}(\Omega_{-})}+\left\|f^{\delta}_{+}\right\|_{L^{P}(\Omega_{+})}\right)\\
&+C\left(\left\|f^{\delta}_{-}-f_{-}\right\|_{L^{p}(\Omega_{-})}+\left\|m^{\delta}_{+}-m\right\|_{L^{p}\left(\Omega_{\circ +}\right)}\right),
\end{aligned}$$

*où $C$ ne dépend pas de $\delta$, (ici, $u_{+}$ se comprend comme la fonction $(x,y)\mapsto u_{+}(y)$).*

**Preuve.** On suppose $f^{\delta}_{-}\in L^{p}(\Omega_{-})$ et $f^{\delta}_{+}\in L^{p}(\Omega_{+})$ vérifiant les hypothèses $(DG1)$,$(DG2)$,et $(DG3)$.Montrons que

$$u_{+}(x)=u_{+}\in L^{p}(G).$$

On rappelle que

$$\begin{cases} u_{-}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(A+zI)^{-1}K^{-}_{\sqrt{-z}}(f_{-})\,dz+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(A+zI)^{-1}T^{-}_{\sqrt{-z}}(m)\,dz\\ u_{+}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(A+zI)^{-1}K^{+}_{\sqrt{-z}}(f_{-})\,dz+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(A+zI)^{-1}T^{+}_{\sqrt{-z}}(m)\,dz,\end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
u_{+}(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(Q+zI)^{-1}\left(K^{+}_{\sqrt{-z}}(f_{-})(x)\right)dz\\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(Q+zI)^{-1}\left(T^{+}_{\sqrt{-z}}(m)(x)\right)dz\\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(Q+zI)^{-1}\left(\int_{-1}^{0}H^{+}_{\sqrt{-z}}(s)\,ds\right)dz\\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}N^{+}_{\sqrt{-z}}(Q+zI)^{-1}(m)\,dz\\
&= u_{+}
\end{aligned}$$

danc $u_+$ indépendant de $x$, et $u_+ \in L^p(G)$.

$(iv)$ Montrons que

$$\left\|u_-^\delta - u_-\right\|_{E_-} \leqslant C \cdot \delta \left(\left\|f_-^\delta\right\|_{E_-} + \left\|f_+^\delta\right\|_{E_+}\right) + C \cdot \left(\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{E_-} + \left\|m_+^\delta - m\right\|_{E_+}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
u_-^\delta - u_- &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K_{\sqrt{-z},\delta}^-\left(f_-^\delta\right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{1} T_{\sqrt{-z},\delta}^-\left(f_+^\delta\right) dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K_{\sqrt{-z}}^-\left(f_-\right) dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{1} T_{\sqrt{-z}}^-\left(m\right) dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} \left(K_{\sqrt{-z},\delta}^-\left(f_-^\delta\right) - K_{\sqrt{-z}}^-\left(f_-\right)\right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} \left(T_{\sqrt{-z},\delta}^-\left(f_+^\delta\right) - T_{\sqrt{-z}}^-\left(m\right)\right) dz,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
u_-^\delta - u_- &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} \left(K_{\sqrt{-z},\delta}^- - K_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(f_-^\delta\right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K_{\sqrt{-z}}^-\left(f_-^\delta - f_-\right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} \left(T_{\sqrt{-z},\delta}^- - M_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(f_+^\delta\right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-\left(m_+^\delta - m\right) dz \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Pour $\|I_1\|_{E_-}$ on a :

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{E_-} &= \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} \left(K_{\sqrt{-z},\delta}^- - K_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(f_-^\delta\right) dz\right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \cdot \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}} \cdot |dz| \cdot \left\|f_-^\delta\right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \cdot \delta \left\|f_-^\delta\right\|_{E_-}.
\end{aligned}$$

Pour $\|I_2\|_{E_-}$ on a :

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{E_-} &= \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K_{\sqrt{-z}}^-\left(f_-^\delta - f_-\right) dz\right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \cdot \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} \cdot |dz| \cdot \left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{E_-}.
\end{aligned}$$

Pour $\|I_3\|_{E_-}$ on a :

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_{E_-} &= \left\| \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1}\left(T^-_{\sqrt{-z},\delta} - M^-_{\sqrt{-z}}\right)\left(f_+^\delta\right)dz \right\|_{E_-} \\
&\leqslant C\cdot\delta \int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}}\cdot|dz|\cdot\left\|f_+^\delta\right\|_{E_+} \\
&\leqslant C\cdot\delta\left\|f_+^\delta\right\|_{E_+}.
\end{aligned}$$

Pour $\|I_4\|_{E_-}$ on a :

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_{E_-} &= \left\| \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^-_{\sqrt{-z}}\left(m_+^\delta - m\right)dz \right\|_{E_-} \\
&\leqslant C\cdot\int_\gamma \frac{1}{|z|}\cdot\frac{1}{|z|^{1+\frac{1}{2P}}}\cdot|dz|\cdot\left\|m_+^\delta - m\right\|_{E_+} \\
&\leqslant C\left\|m_+^\delta - m\right\|_{E_+}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\left\|u_-^\delta - u_-\right\|_{E_-} \leqslant C\cdot\delta\left(\left\|f_-^\delta\right\|_{E_-} + \left\|f_+^\delta\right\|_{E_+}\right) + C\cdot\left(\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{E_-} + \left\|m_+^\delta - m\right\|_{E_+}\right),$$

telle que $C$ indépendante de $\delta$.

Montrons que

$$\left\|u_+^\delta - u_+\right\|_{E+} \leqslant C\cdot\delta\left(\left\|f_-^\delta\right\|_{E_-} + \left\|f_+^\delta\right\|_{E_+}\right) + C\cdot\left(\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{E_-} + \left\|m_+^\delta - m\right\|_{E_+}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
u_+^\delta - u_+ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K^+_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_-^\delta\right)dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^+_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_+^\delta\right)dz \\
&\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K^+_{\sqrt{-z}}\left(f_-\right)dz \\
&\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^+_{\sqrt{-z}}\left(m\right)dz,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
u_+^\delta - u_+ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1}\left(K^+_{\sqrt{-z},\delta} - K^+_{\sqrt{-z}}\right)\left(f_-^\delta\right)dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K^+_{\sqrt{-z}}\left(f_-^\delta - f_-\right)dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1}\left(T^+_{\sqrt{-z},\delta} - M^+_{\sqrt{-z}}\right)\left(f_+^\delta\right)dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T^+_{\sqrt{-z}}\left(m_+^\delta - m\right)dz \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned}$$

On a pour $\|J_1\|_{E_-}$

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{E_-} &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A+zI)^{-1} \left( K^+_{\sqrt{-z},\delta} - K^+_{\sqrt{-z}} \right) \left( f^\delta_- \right) dz \right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \cdot \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}}} \cdot |dz| \cdot \left\| f^\delta_- \right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \cdot \delta \left\| f^\delta_- \right\|_{E_-} .
\end{aligned}$$

On a pour $\|J_2\|_{E_-}$

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_{E_-} &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A+zI)^{-1} K^+_{\sqrt{-z}} \left( f^\delta_- - f_- \right) dz \right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \int_\gamma \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{|z|^{1+\frac{1}{2q}}} \cdot |dz| \cdot \left\| f^\delta_- - f_- \right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \cdot \left\| f^\delta_- - f_- \right\|_{E_-} .
\end{aligned}$$

On a pour $\|J_3\|_{E_-}$

$$\begin{aligned}
\|J_3\|_{E_-} &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A+zI)^{-1} \left( T^+_{\sqrt{-z},\delta} - M^+_{\sqrt{-z}} \right) \left( f^\delta_+ \right) dz \right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \cdot \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}} \cdot |dz| \cdot \left\| f^\delta_+ \right\|_{E_+} \\
&\leqslant C \cdot \delta \left\| f^\delta_+ \right\|_{E_+} .
\end{aligned}$$

On a pour $\|J_4\|_{E_-}$

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_{E_-} &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A+zI)^{-1} T^+_{\sqrt{-z}} \left( m^\delta_+ - m \right) dz \right\|_{E_-} \\
&\leqslant C \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} |dz| \cdot \left\| m^\delta_+ - m \right\|_{E_+} \\
&\leqslant C \left\| m^\delta_+ - m \right\|_{E_+} ,
\end{aligned}$$

donc

$$\left\| u^\delta_+ - u_+ \right\|_{E_+} \leqslant C \cdot \delta \left( \left\| f^\delta_- \right\|_{E_-} + \left\| f^\delta_+ \right\|_{E_+} \right) + C \left[ \left\| f^\delta_- - f_- \right\|_{E_-} + \left\| m^\delta_+ - m \right\|_{E_+} \right],$$

telle que $C$ indépendante de $\delta$. ■

**Théorème 3.2** *:Soit $f^\delta \in L^p(\Omega)$ vérifiant*

1. *$f^\delta_-$ tend vers $f_-$ dans $L^p(\Omega_-)$ quand $\delta$ tend vers $0$,*
2. *$f^\delta_+$ est bornée dans $L^p(\Omega_+)$,*
3. *$\int_0^1 f^\delta_+(x,.) = m^\delta_+$ tend vers $m$ dans $L^p(G)$ quand $\delta$ tend vers $0$.*

*Alors $u_-$ est l'unique solution forte du problème :de Ventcel non homogène suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u_- = f_- & \textit{sur} \quad \Omega_- \\ u_- = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega_- \diagdown \Gamma^0 \\ \partial_x u_-(0,\cdot) - \Delta_y u_-(0,\cdot) = m & \textit{sur} \quad G. \end{cases}$$

**Preuve.** Montrons que $u_-$ est une solution forte du problème

$$\begin{cases} -\Delta u_- = f_- & \text{sur} \quad \Omega_- \\ u_- = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_- \diagdown \Gamma^0 \\ \partial_x u_-(0,\cdot) - \Delta_y u_-(0,\cdot) = m & \text{sur} \quad G. \end{cases}$$

Le calcul opératinnel de Dunford montre que $u_-$ satisfait formellement

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u_-(x) + Qu_-(x) = f_-(x) & \text{si} \ \ x \in ]-1,0[ \\ u_-(-1) = 0. \end{cases}$$

quand $\delta \to 0$, on obtient formellement la condition de type Ventcel

$$-\left(\frac{1}{\delta^2}\partial_x^2 u_+^\delta + \Delta_y u_+^\delta\right) = f_+^\delta,$$

donc

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f_+^\delta(\tau,y)\,d\tau + \int_0^1 \Delta_y u_+^\delta(\tau,y)\,d\tau \\ = & -\frac{1}{\delta^2}\int_0^1 \partial_x^2 u_+^\delta(\tau,y)\,d\tau - \int_0^1 \Delta_y u_+^\delta(\tau,y)\,d\tau + \int_0^1 \Delta_y u_+^\delta(\tau,y)\,d\tau \\ = & -\frac{1}{\delta^2}\int_0^1 \partial_x^2 u_+^\delta(\tau,y)\,d\tau = -\frac{1}{\delta^2}\left[\partial_x u_+^\delta(\tau,y)\right]_0^1 \\ = & -\frac{1}{\delta^2}\left(\partial_x u_+^\delta(1,y) - \partial_x u_+^\delta(0,y)\right) \\ = & \frac{1}{\delta^2}\partial_x u_+^\delta(0,y) \\ = & \partial_x u_-^\delta(0,y), \end{aligned}$$

quand $\delta$ tend vers 0 on obtient

$$\begin{aligned} \partial_x u_-(0,y) &= \lim_{\delta\to 0}\left[\int_0^1 f_+^\delta(\tau,y)\,d\tau + \int_0^1 \Delta_y u_+^\delta(\tau,y)\,d\tau\right] \\ &= m(y) + \Delta_y u_-(0,y), \end{aligned}$$

alors

$$\partial_x u_-(0,y) - \Delta_y u_-(0,y) = m(y),$$

donc

$$\partial_x u_-(0) - Qu_-(0) = m.$$

Ainsi $u_-$ satisfait formellement

$$\begin{cases} -\Delta u_- = f_- & \text{sur } \Omega_- \\ u_- = 0 & \text{sur } \partial\Omega_- \diagdown \Gamma^0 \\ \partial_x u_-(0,\cdot) - \Delta_y u_-(0,\cdot) = m & \text{sur } G. \end{cases}$$

**Etude du problème de Ventcel**

On a

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u(x) + Qu(x) = f_-(x) & \text{si } x \in ]-1,0[ \\ u(-1) = 0 \\ \partial_x u(0) - Qu(0) = m, \end{cases}$$

on pose

$$u_- = u_-(f,m) = u_-^1(f) + u_-^2(m),$$

telle que $u_-^1$ est une solution du problème de Ventcel avec les conditions homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u_-^1(x) + Qu_-^1(x) = f_-(x) & \text{si } x \in ]-1,0[ \\ u_-^1(-1) = 0 \\ \partial_x u_-^1(0) - Qu_-^1(0) = 0, \end{cases}$$

et $u_-^2$ est une solution du problème de Ventcsl avec les conditions non homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u_-^2(x) + Qu_-^2(x) = 0 & \text{si } x \in ]-1,0[ \\ u_-^2(-1) = 0 \\ \partial_x u_-^2(0) - Qu_-^2(0) = m. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} D(A_-) = L^p(-1,0;D(Q)), \ (A_-\Phi)(x) = Q(\Phi(x)) \\ D(A_+) = L^p(0,1;D(Q)), \ (A_+\Phi)(x) = Q(\Phi(x)) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(B_-) = \{\Psi \in W^{2,p}(-1,0;X), \ \Psi(-1) = 0, \ \Psi(0) \in D(Q), \ \partial_x \Psi(0) = Q(\Psi(0))\} \\ (B_-\Psi)(x) = -\partial_x^2 \Psi(x). \end{cases}$$

D'aprés le théorème des sommes d'opérateurs on a $A_-$ et $B_-$ vérifiant $D(G_0)$ $D(G_1)$, et $D(G_2)$. Ainsi la solution forte, du problème de Ventcel avec les conditions homogènes dans $E_-$ est donnée par

$$\begin{aligned} u_-^1 &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A_- + zI)^{-1} K_{\sqrt{-z}}^-(f_-)\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A_- + zI)^{-1}(B_- - zI)^{-1} f_- dz. \end{aligned}$$

Pour le problème de Ventcel avec les conditions non homogènes on pose dans $E_-$

$$u_-^2 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A_- + zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-(m)\,dz.$$

On a

$$\begin{aligned} u_-^2(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Q+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-(m)\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Q+zI)^{-1} \frac{\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} m dz, \end{aligned}$$

donc

$$\partial_x u_-^2(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Q+zI)^{-1} \frac{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} m dz,$$

et

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u_-^2(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Q+zI)^{-1} \frac{-z\cdot\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} m dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma -z(Q+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-(m)(x)\,dz, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} Qu_-^2(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Q+zI-zI)(Q+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-(m)(x)\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\left[\int_\gamma T_{\sqrt{-z}}^-(m)(x)\,dz - \int_\gamma z(Q+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-(m)(x)\,dz\right], \end{aligned}$$

donc

$$-\partial_x^2 u_-^2(x) + Qu_-^2(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma T_{\sqrt{-z}}^-(m)(x)\,dz = 0.$$

Pour tout $x \in (-1,0)$, on a

$$\begin{aligned} \partial_x u_-^2(x) - Qu_-^2(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Q+zI)^{-1} \frac{\cosh\sqrt{-z}(x+1)}{\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} m dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} m dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Q+zI)^{-1} \frac{\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}(x+1)+\cosh\sqrt{-z}(x+1)}{\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)} (Q+zI)^{-1} m dz, \end{aligned}$$

l'intégrale est absolument convergent

$$\left|\frac{\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}(x+1)+\cosh\sqrt{-z}(x+1)}{\left(\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}+\cosh\sqrt{-z}\right)}\right| = O\left(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\cdot|x|}\right),$$

alors il existe une constante $C>0$ telle que pour toute $x \in (-1,0)$, on a

$$\left\|\partial_x u_-^2(x) - Qu_-^2(x)\right\|_X \leqslant C\cdot\|m\|_X,$$

qui conduit à

$$\partial_x u_-^2(0) - Qu_-^2(0) = m.$$

Ainsi $u_-^2$ est la solution forte, du problème de Ventcel avec les conditions non homogènes.

■

## 3.3 La Convergence dans $\mathbf{W}^{2\theta,P}$

Dans ce paragraphe, on supposera les hypothèses suivantes.
Soit $f^{\delta} \in W^{2\theta,p}$ telle que $1 < p < \infty$, et $0 < \theta < \frac{1}{2}$
$(R1)$ $f_{-}^{\delta}$ admet une limit $f_{-}$ dans $W^{2\theta,p}(\Omega_{-})$ quand $\delta \to 0$,
$(R2)$ $f_{+}^{\delta}$ est bornée dans $W^{2\theta,p}(\Omega_{+})$,
$(R3)$ $\int_0^1 f_{+}^{\delta}(x,\cdot)\,dx = m_{+}^{\delta}$ tend vers $m$ dans $W^{2\theta,p}(G)$ quand $\delta \to 0$.

**Lemme 3.8** *Soit* $\theta \in \left]0, \frac{1}{2p}\right[$ *et* $p \in ]1,\infty[$ *et* $X = L^p(G)$, *on a*

1. $D_{B_\delta}(\theta,p) = W^{2\theta,p}(-1,1;X)$,
2. $W^{2\theta,p}(\Omega) = L^p\left(-1,1; W^{2\theta,p}(G) \cap W^{2\theta,p}(-1,1;X)\right)$,
3. $D_{A_-}(\theta,p) = L^p\left(-1,0; W^{2\theta,p}(G)\right) = L^p\left(-1,0; D_Q(\theta,p)\right)$,
4. $D_{A_+}(\theta,p) = L^p\left(0,1; W^{2\theta,p}(G)\right) = L^p\left(0,1; D_Q(\theta,p)\right)$,
5. $D_{B_-}(\theta,p) = W^{2\theta,p}(-1,0;X)$.

**Preuve.** On a

$$\begin{cases} W_0^{2,p}(-1,0;X) = \left\{f \in W^{2,p}(-1,0;X) : f(-1) = f(0) = (f)'(0) = (f)'(-1) = 0\right\} \\ W_0^{2,p}(0,1;X) = \left\{f \in W^{2,p}(0,1;X) : f(0) = f(1) = (f)'(0) = (f)'(1) = 0\right\} \end{cases}.$$

Alors

$$\left\{u \in L^p(-1,1;X) : u_- \in W_0^{2,p}(-1,0;X) \text{ et } u_+ \in W_0^{2,p}(0,1;X)\right\} \subset D(B_\delta),$$

et

$$D(B_\delta) \subset \left\{u \in L^p(-1,1;X) : u_- \in W^{2,p}(-1,0;X) \text{ et } u_+ \in W^{2,p}(0,1;X)\right\},$$

donc

$$\left\{\begin{array}{c} u \in L^p(-1,1;X) : u_- \in \left(W_0^{2,p}(-1,0;X); L^p(-1,0;X)\right)_{1-\theta,p} \text{ et} \\ u_+ \in \left(W_0^{2,p}(0,1;X), L^p(0,1;X)\right)_{1-\theta,p} \end{array}\right\} \subset D_{B_\delta}(\theta,p),$$

et

$$D_{B_\delta}(\theta,p) \subset \begin{cases} u \in L^p(-1,1;X) : u_- \in \left(W^{2,p}(-1,0;X); L^p(-1,0;X)\right)_{1-\theta,p} \text{ et} \\ u_+ \in \left(W^{2,p}(0,1;X), L^p(0,1;X)\right)_{1-\theta,p}. \end{cases}$$

Alors

$$\left\{u \in L^p(-1,1;X) : u_- \in W^{2\theta,p}(-1,0;X) \text{ et } u_+ \in W^{2\theta,p}(0,1;X)\right\} \subset D_{B_\delta}(\theta,p),$$

et

$$D_{B_\delta}(\theta,p) \subset \left\{u \in L^p(-1,1;X) : u_- \in W^{2\theta,p}(-1,0;X) \text{ et } u_+ \in W^{2\theta,p}(0,1;X)\right\}.$$

On déduit que

$$D_{B_\delta}(\theta,p) = W^{2\theta,p}(-1,1;X),$$

■

donc les hypothèses $(R1)$ $(R2)$, et $(R3)$ sont équivalentes aux hypothèses suivantes :
$(D1)$ $f_-^\delta$ tend vers $f_-$ dans $D_{A_-}(\theta,p) \cap D_{B_-}(\theta,p)$ quand $\delta \longrightarrow 0$,
$(D2)$ $f_+^\delta$ est bornée dans $L^p\left(0,1;W^{2\theta,p}(G)\right) = D_{A_+}(\theta,p)$,
$(D3)$ $\int_0^x f_+^\delta(x)\,dx = m_+^\delta$ tend vers $m \in D_Q(\theta,p)$ quand $\delta \longrightarrow 0$,
et $f^\delta \in D_A(\theta,p) \cap D_{B_\delta}(\theta,p) = D_{A+B_\delta}(\theta,p)$.

**Théorème 3.3** *Soit $1 < p < +\infty$ et $0 < \theta < \frac{1}{2}$, pour $f^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega)$ vérifiant*

1. *$f_-^\delta$ tend vers $f_-$ dans $W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ quand $\delta$ tend vers $0$,*
2. *$f_+^\delta$ est bornée dans $W^{2\theta,p}(\Omega_+)$,*
3. *$\int_0^1 f_+^\delta(x,.)\,dx = m_+^\delta$ tend vers $m$ dans $W^{2\theta,p}(G)$ quand $\delta$ tend vers $0$.*

*Alors il existe un unique couple $(u_-,u_+) \in W^{2,p}(\Omega_-) \times W^{2,p}(G)$, et pour $y \in G$ on a*

$$u_+(y) = u_-(0,y).$$

**Preuve.** Montrons que :$u_+(y) = u_-(0,y)$.
Soit $y \in G$ on rappelle que la représentation formelle de $u_-$et $u_+$

$$\begin{aligned}
u_- &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A+zI)^{-1} K_{\sqrt{-z}}^-(f_-)\,dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A+zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-(m)\,dz \\
u_+ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (Q+zI)^{-1}\left(\int_{-1}^0 H_{\sqrt{-z}}^+ f_-(s)\,ds\right)dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma N_{\sqrt{-z}}^+ (Q+zI)^{-1}(m)\,dz.
\end{aligned}$$

Donc pour $x \in [-1,0]$ on a :

$$\begin{aligned}
u_-(x)(\cdot) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (Q+zI)^{-1}\left(K_{\sqrt{-z}}^-(f_-)(x)\right)dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (Q+zI)^{-1}\left(T_{\sqrt{-z}}^-(m)(x)\right)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (Q+zI)^{-1}\left(\int_{-1}^0 H_{\sqrt{-z}}^-(x,s)\,f_-(s)\right)dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (Q+zI)^{-1} N_{\sqrt{-z}}^-(x)\,m dz,
\end{aligned}$$

alors pour $x = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} u_-(0,\cdot) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (Q+zI)^{-1}\left(\int_{-1}^{0} H^-_{\sqrt{-z}}(0,s)\, f_-(s)\right) dz \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (Q+zI)^{-1} N^-_{\sqrt{-z}}(0)\, m dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (Q+zI)^{-1}\left(\int_{-1}^{0} H^+_{\sqrt{-z}}(s)\, f_-(s)\right) dz \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma N^+_{\sqrt{-z}}(Q+zI)^{-1}(m)\, dz \\ &= u_+. \end{aligned}$$

■

## 3.4 La convegence dans $W^{1+2\theta,p}(-1,0,X)$

On a le résultat :

**Théorème 3.4** *Soit* $1 < p < +\infty$ *et* $0 < \theta < \frac{1}{2}$*, pour* $f^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega)$ *vérifiant*

1. $f^\delta_-$ *tend vers* $f_-$ *dans* $W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ *quand* $\delta$ *tend vers* $0$,
2. $f^\delta_+$ *est bornée dans* $W^{2\theta,p}(\Omega_+)$,
3. $\int_0^1 f^\delta_+(x,.)\,dx = m^\delta_+$ *tend vers* $m$ *dans* $W^{2\theta,p}(G)$ *quand* $\delta$ *tend vers* $0$, *on a*

$$\lim_{\delta\to 0}\left(u^\delta_\pm - u_\pm\right) = 0$$

*dans* $W^{1+2\theta,p}(\Omega_\pm)$, *et il existe* $C > 0$ *indépendante de* $\delta$, *telle que*

$$\begin{aligned} &\left\|u^\delta_\pm - u_\pm\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_-)} \\ \leqslant\ & C\ \delta\left(\left\|f^\delta_-\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_-)} + \left\|f^\delta_+\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_+)}\right) \\ & +C\left(\left\|f^\delta_- - f_-\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_-)} + \left\|m^\delta_+ - m\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_+)}\right). \end{aligned}$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} u^\delta_- &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left((A_-+zI)^{-1} f^\delta_-\right) dz \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left((A_++zI)^{-1} f^\delta_+\right) dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_-(A_-+zI)^{-1} f^\delta_-\right)\frac{dz}{z} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_+(A_++zI)^{-1} f^\delta_+\right)\frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)\frac{dz}{z} \\
= & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(\left(A_-+zI-zI\right)\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)\frac{dz}{z} \\
= & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_-^\delta\right)\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(-z\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)\frac{dz}{z} \\
= & -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(z\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)\frac{dz}{z},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_+\left(A_++zI\right)^{-1}f_+^\delta\right)\frac{dz}{z} \\
= & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(\left(A_++zI-zI\right)\left(A_++zI\right)^{-1}f_+^\delta\right)\frac{dz}{z} \\
= & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(f_+^\delta\right)\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(-z\left(A_++zI\right)^{-1}f_+^\delta\right)\frac{dz}{z} \\
= & -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(z\left(A_++zI\right)^{-1}f_+^\delta\right)\frac{dz}{z},
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
u_- &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^-_{\sqrt{-z}}\left(\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-\right)dz \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma T^-_{\sqrt{-z}}\left(\left(A+zI\right)^{-1}m\right)dz \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^-_{\sqrt{-z}}\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-\right)\frac{dz}{z} \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma T^-_{\sqrt{-z}}\left(A\left(A+zI\right)^{-1}m\right)\frac{dz}{z}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\partial_x u_-^\delta(x)-\partial_x u_-(x) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)\frac{dz}{z} \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \partial_x T^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_+\left(A_++zI\right)^{-1}f_+^\delta\right)\frac{dz}{z} \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \partial_x K^-_{\sqrt{-z}}\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-\right)\frac{dz}{z} \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \partial_x T^-_{\sqrt{-z}}\left(A\left(A+zI\right)^{-1}m\right)\frac{dz}{z},
\end{aligned}$$

telle que

$$\left\{\begin{array}{l}
\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(h_-\right)(x)=\int_{-1}^0\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}h_-(s)\,ds \\
\partial_x K^-_{\sqrt{-z}}\left(h_-\right)(x)=\int_{-1}^0\partial_x H^-_{\sqrt{-z}}h_-(s)\,ds
\end{array}\right.$$

avec

$$\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\partial_x \Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta,x\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)} \sinh\sqrt{-z}\,(s+1) \text{ si } -1 < s < x \\[2ex] \dfrac{\partial_x \Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta,s\right)}{\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)} \cosh\sqrt{-z}\,(x+1) \text{ si } x \leq s < 0, \end{cases}$$

telle que

$$\partial_x \Delta_-\left(\sqrt{-z},\delta,\zeta\right) = \sqrt{-z}\left(-\cosh\sqrt{-z}\zeta\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta + \delta\cosh\sqrt{-z}\delta\cdot\sinh\sqrt{-z}\zeta\right),$$

et

$$\partial_x H^-_{\sqrt{-z}}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}x + \sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z} + \cosh\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}\,(s+1) \text{ si } -1 < s < x \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}s + \sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z} + \cosh\sqrt{-z}} \cosh\sqrt{-z}\,(x+1) \quad \text{si} \quad x \leq s < 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \partial_x u^\delta_- - \partial_x u_- &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_-\left(A_- + zI\right)^{-1}\left(f^\delta_- - f_-\right)\right)\frac{dz}{z} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x K^-_{\sqrt{-z}}\right)\left(A_-\left(A_- + zI\right)^{-1} f_-\right)\frac{dz}{z} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\partial_x T^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x M^-_{\sqrt{-z}}\right)\left(A_+\left(A_+ + zI\right)^{-1} f^\delta_+\right)\frac{dz}{z} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \partial_x T^-_{\sqrt{-z}}\left(A\left(A + zI\right)^{-1}\left(m^\delta_+ - m\right)\right)\frac{dz}{z} \\ &= \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4. \end{aligned}$$

■

**Lemme 3.9** *Soient $z \in \gamma$ et $\delta \in \left]0,1\right[$, il existe $C > 0$ indépendante de $\delta$, on a les estimations suivantes*

1. $\left\|\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}\right\|_{L(E_-)} \leqslant \dfrac{C}{|z|^{\frac{1}{2}}}$,
2. $\left\|\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x K^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)} \leqslant C\ \delta$,
3. $\left\|\partial_x T^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x M^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)} \leqslant C\ \delta$,
4. $\left\|\partial_x T^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)} \leqslant \dfrac{C}{|z|^{1/2+1/2p}}$.

**Preuve.** $(i)$ Montrons que

$$\left\|\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}\right\|_{L(E_-)} \leqslant \frac{C}{|z|^{\frac{1}{2}}}.$$

En effet

$$
\begin{aligned}
&\left\|\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}\right\|_{L(E_-)}\\
\leqslant\ & \sup_{-1\leq x\leq 0}\int_{-1}^{0}\left|\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x,s)\right|ds\\
\leqslant\ & \sup_{-1\leq x\leq 0}\left(\int_{-1}^{x}\left|\frac{\sqrt{-z}\left(-\cosh\sqrt{-z}x\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta+\delta\cosh\sqrt{-z}\delta\cdot\sinh\sqrt{-z}x\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)\right|ds\right.\\
&\left.+\int_{x}^{0}\left|\frac{-\sinh\sqrt{-z}s\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta+\delta\cosh\sqrt{-z}\delta\cdot\cosh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\cosh\sqrt{-z}\,(x+1)\right|ds\right)\\
\leqslant\ & \sup_{-1\leq x\leq 0}\left(\left|\frac{\sqrt{-z}\left(-\cosh\sqrt{-z}x\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta+\delta\cosh\sqrt{-z}\delta\cdot\sinh\sqrt{-z}x\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\right|\int_{-1}^{x}\left|\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)\right|ds\right.\\
&\left.+\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\int_{x}^{0}\left|-\sinh\sqrt{-z}s\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta+\delta\cosh\sqrt{-z}\delta\cdot\cosh\sqrt{-z}s\right|ds\right)\\
\leqslant\ & \sup_{-1\leq x\leq\ 0}\left(\left|\frac{\left(\left(-\cosh\sqrt{-z}x\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta+\delta\cosh\sqrt{-z}\delta\cdot\sinh\sqrt{-z}x\right)\right)\left(\cosh\sqrt{-z}-1\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\right|\right.\\
&\left.+\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(x+1)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}\delta\cdot\left(1-\cosh\sqrt{-z}x\right)+\frac{\delta}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}\delta\cdot\left(-\sinh\sqrt{-z}x\right)\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\right|\right)\\
\leqslant\ & \frac{\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta\cdot\cosh\sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\\
&+\frac{\cosh\sqrt{-z}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}\delta\cdot\cosh\sqrt{-z}+\frac{\delta}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}\delta\cdot\sinh\sqrt{-z}\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\\
\leqslant\ & \frac{\cosh\sqrt{-z}\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta+\delta\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\\
&+\frac{\frac{1}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta+\delta\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\\
\leqslant\ & \frac{\left(\cosh\sqrt{-z}+\dfrac{1}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}\right)\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}{\sqrt{-z}\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta\right)}\\
\leqslant\ & \frac{C}{|z|^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
$$

$(ii)$ Montrons que

$$\left\|\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x K^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)}\leqslant C\cdot\delta.$$

On a

$$\left\|\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x K^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)}\leqslant\sup_{-1\leq x\leq 0}\int_{-1}^{0}\left|\partial_x\left(H^-_{\sqrt{-z},\delta}-H^-_{\sqrt{-z}}\right)\right|ds,$$

avec

$$\left(H^-_{\sqrt{-z},\delta}-H^-_{\sqrt{-z}}\right)(x,s)=\delta\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)}{\sqrt{-z}}\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\delta^*-\sqrt{-z}\delta^*\right)}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)},$$

donc

$$\begin{aligned}&\partial_x\left(H^-_{\sqrt{-z},\delta}-H^-_{\sqrt{-z}}\right)\\ =\;&\delta\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)\cdot\cosh\sqrt{-z}\,(x+1)\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\delta^*\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*-\sqrt{-z}\delta^*}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}&\left\|\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x K^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)}\\
\leqslant\;&\sup_{-1\leq x\leq 0}\int_{-1}^{0}\left|\delta\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)\cdot\cosh\sqrt{-z}\,(x+1)\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\delta^*\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*-\sqrt{-z}\delta^*}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}\right|ds\\
\leqslant\;&\sup_{-1\leq x\leq 0}\left(\frac{\left|\delta\cosh\sqrt{-z}\,(x+1)\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\delta^*\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*-\sqrt{-z}\delta^*\right)\right|}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}\int_{-1}^{0}\sinh\sqrt{-z}\,(s+1)\,ds\right)\\
\leqslant\;&\sup_{-1\leq x\leq 0}\left(\frac{\left|\delta\cosh\sqrt{-z}\,(x+1)\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\delta^*\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*-\sqrt{-z}\delta^*\right)\right|}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{-z}}\left(\cosh\sqrt{-z}-1\right)\right)\\
\leqslant\;&\frac{\delta\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\cdot\left(\sqrt{-z}\delta^*\right)\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*}{\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\right)\cdot\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*}\times\\
&\left|\frac{1}{\sinh\sqrt{-z}\delta^*\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*}-\frac{1}{\sqrt{-z}\delta^*}\right|\\
\leqslant\;&\delta\sqrt{-z}\cdot\sup_{t\;\succeq 0}\left|\frac{1}{t}-\frac{2}{\sinh 2t}\right|\\
\leqslant\;&C\cdot\delta.\end{aligned}$$

Car la fonction $t\longrightarrow\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{\sinh 2t}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

$(iii)$ Montrons que $\left\|\partial_x T^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x M^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)}\leqslant C\cdot\delta.$

On a

$$\left\|\partial_x T^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x M^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)}\leqslant\sup_{-1\leq x\leq 0}\int_0^1\left|\partial_x\left(N^-_{\sqrt{-z},\delta}-N^-_{\sqrt{-z}}\right)\right|ds.$$

On rappelle que

$$\begin{aligned}&\left(N^-_{\sqrt{-z},\delta}-N^-_{\sqrt{-z}}\right)(x,s)\\
=\;&\delta\frac{\sinh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\sqrt{-z}\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}\times\left\{\cosh\sqrt{-z}\delta^*\times\right.\\
&\left[\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*-\delta^*\sqrt{-z}\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\right)\right]\\
&\left.+\left[\sinh\sqrt{-z}\delta^*\,(1-s)\cdot\sqrt{-z}\delta^*\,(1-s)\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*\right)\right]\right\},\end{aligned}$$

donc

$$
\begin{aligned}
& \partial_x\left(N^-_{\sqrt{-z},\delta}-N^-_{\sqrt{-z}}\right)(x,s) \\
= \; & \delta\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}\times\left\{\cosh\sqrt{-z}\delta^*\times\right. \\
& \left[\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*-\delta^*\sqrt{-z}\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\right)\right] \\
& \left.+\left[\sinh\sqrt{-z}\delta^*(1-s)\cdot\sqrt{-z}\delta^*(1-s)\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*\right)\right]\right\},
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
& \left\|\partial_x T^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x M^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)} \\
\leqslant \; & \sup_{-1\leq x\leq 0}\int_0^1\left|\partial_x\left(N^-_{\sqrt{-z},\delta}-N^-_{\sqrt{-z}}\right)\right|ds \\
\leqslant \; & \sup_{-1\leq x\leq\ 0}\int_0^1\left|\delta\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}\times\left\{\cosh\sqrt{-z}\delta^*(1-s)\times\right.\right. \\
& \left[\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*-\delta^*\sqrt{-z}\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\right)\right] \\
& \left.\left.+\left[\sinh\sqrt{-z}\delta^*(1-s)\cdot\sqrt{-z}\delta^*(1-s)\cdot\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*\right)\right]\right|\right. \\
\leqslant \; & \sup_{-1\leq x\leq\ 0}\frac{\delta\cosh\sqrt{-z}\,(1+x)}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}\times \\
& \left\{\left[\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*-\sqrt{z}\delta^*\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\right)\right]\times\right. \\
& \int_0^1\cosh\sqrt{-z}\delta^*(1-s)\,ds \\
& \left.+\sqrt{-z}\delta^*\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*\right)\int_0^1(1-s)\sinh\sqrt{-z}\delta^*(1-s)\,ds\right\} \\
\leqslant \; & \delta\cosh\sqrt{-z}\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\delta^*}{\sqrt{-z}\delta^*}\cdot\frac{1}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}\times \\
& \left[\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*-\sqrt{-z}\delta^*\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\right)\right] \\
& +\delta\sinh\sqrt{-z}\cdot\frac{\cosh\sqrt{-z}\delta^*}{\sqrt{-z}\delta^*}\cdot\frac{\sqrt{-z}\delta^*}{\Delta_0^2\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)} \\
\leqslant \; & \delta\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\cdot\frac{\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*}{\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\cdot\Delta_0\left(\sqrt{-z},\delta^*\right)}\times \\
& \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*}{\sqrt{-z}\delta^*\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\right)}-1\right|+\delta \\
\leqslant \; & \delta\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*}{\sqrt{-z}\delta^*\left(\sinh\sqrt{-z}\cdot\cosh\sqrt{-z}\delta^*+\delta^*\cosh\sqrt{-z}\cdot\sinh\sqrt{-z}\delta^*\right)}-1\right|+\delta \\
\leqslant \; & C\cdot\delta.
\end{aligned}
$$

$(vi)$ Montrons que $\left\|\partial_x T^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)}\leqslant\dfrac{C}{|z|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}}$.

On a

$$\left\|\partial_x T^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)} \leqslant \sup_{-1\leq x\leq 0}\int_0^1 \left|\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}(x)\right| ds.$$

On rappelle que

$$\left|N^-_{\sqrt{-z}}(x)\right| = O\left(\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|}\right),$$

donc

$$\left|\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}(x)\right| = O\left(\frac{\sqrt{-z}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|}\right),$$

on a

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}(x)\right\|_{L^p(-1,0)} &\leqslant \left(\int_{-1}^0\left(\frac{\operatorname{Re}\sqrt{-z}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \frac{|z|^{\frac{1}{2}}}{|z|}\left(\int_{-1}^0 e^{p\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \frac{C}{|z|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}}\left(1-e^{-p\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \frac{C}{|z|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x T^-_{\sqrt{-z}}\right\|_{L(E_-)} &\leqslant \sup_{-1\leq x\leq 0}\int_0^1 \left|\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}(x)\right| ds\\
&\leqslant \frac{C}{|z|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}}.
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\left\|\partial_x u^\delta_- - \partial_x u_-\right\|_{L^p(-1,0;X)} \leqslant \|\Psi_1\|_{L(E_-)} + \|\Psi_2\|_{L(E_-)} + \|\Psi_3\|_{L(E_-)} + \|\Psi_4\|_{L(E_-)},$$

pour $\|\Psi_1\|_{L(E_-)}$ on a

$$\begin{aligned}
\|\Psi_1\|_{L(E_-)} &= \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_-(A_-+zI)^{-1}\left(f^\delta_- - f_-\right)\right)\frac{dz}{z}\right\|_{L(E_-)}\\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|z|^\theta\left(A_-(A_-+zI)^{-1}\left(f^\delta_- - f_-\right)\right)|dz|\\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}+\theta}}|dz|\cdot\left\|f^\delta_- - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}\\
&\leqslant C\left\|f^\delta_- - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)},
\end{aligned}$$

pour $\|\Psi_2\|_{L(E_-)}$ on a

$$\begin{aligned}
\|\Psi_2\|_{L(E_-)} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x K^-_{\sqrt{-z}} \right) \left( A_- (A_- + zI)^{-1} f_- \right) \frac{dz}{z} \right\|_{L(E_-)} \\
&\leqslant C \cdot \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{|z|^\theta} \cdot |z|^\theta A_- (A_- + zI)^{-1} f_- \, |dz| \\
&\leqslant C \cdot \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|^{1+\theta}} \cdot \|f_-\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C \cdot \delta \|f_-\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)},
\end{aligned}$$

pour $\|\Psi_3\|_{L(E_-)}$ on a

$$\begin{aligned}
\|\Psi_3\|_{L(E_-)} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \partial_x T^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x M^-_{\sqrt{-z}} \right) \left( A_+ (A_+ + zI)^{-1} f_+^\delta \right) \frac{dz}{z} \right\|_{L(E_-)} \\
&\leqslant C \cdot \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{|z|^\theta} \cdot |z|^\theta A_+ (A_+ + zI)^{-1} f_+^\delta \, |dz| \\
&\leqslant C \cdot \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|^{1+\theta}} |dz| \cdot \left\| f_+^\delta \right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C \cdot \delta \left\| f_+^\delta \right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)},
\end{aligned}$$

pour $\|\Psi_4\|_{L(E_-)}$ on a

$$\begin{aligned}
\|\Psi_4\|_{L(E_-)} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \partial_x T^-_{\sqrt{-z}} \left( A (A + zI)^{-1} \left( m_+^\delta - m \right) \right) \frac{dz}{z} \right\|_{L(E_-)} \\
&\leqslant C \int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}} \cdot \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{|z|^\theta} \cdot |z|^\theta A (A + zI)^{-1} \left( m_+^\delta - m \right) |dz| \\
&\leqslant C \int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}+\theta}} \cdot \left\| m_+^\delta - m \right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C \left\| m_+^\delta - m \right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\| u_-^\delta - u_- \right\|_{W^{1,p}(-1,0;X)} &= \left\| u_-^\delta - u_- \right\|_{L^p(-1,0;X)} + \left\| \partial_x u_-^\delta - \partial_x u_- \right\|_{L^p(-1,0;X)} \\
&\leqslant C \cdot \delta \left( \|f_-\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} + \left\| f_+^\delta \right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)} \right) \\
&\quad + C \left( \left\| f_-^\delta - f_- \right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} + \left\| m_+^\delta - m \right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)} \right).
\end{aligned}$$

■

Pour montrer la convergence dans $W^{1+2\theta,\infty}$ on utilise le lemme suivant :

**Lemme 3.10** *Soit* $\theta \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$, *on a*

$$W^{1+2\theta,\infty}(-1,0;X) = C^{1+2\theta,\infty}([-1,0];X).$$

Soit $x_1$ et $x_2$ telle que $-1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 0$ on a :

$$\left\| \left( \partial_x u_-^\delta - \partial_x u_- \right)(x_2) - \left( \partial_x u_-^\delta - \partial_x u_- \right)(x_1) \right\|_X \leq \sum_{i=1}^{4} \left\| \Psi_i (x_2) - \Psi_i (x_1) \right\|.$$

**Lemme 3.11** *On a l' estimation suivante :*

$$\begin{aligned} & \left\| \Psi_2 (x_2) - \Psi_2 (x_1) \right\|_X + \left\| \Psi_3 (x_2) - \Psi_3 (x_1) \right\|_X \\ \leq \; & C \cdot \delta \left| x_2 - x_1 \right|^{2\theta} \cdot \left\| f_- \right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\ & + C \cdot \delta \left| x_2 - x_1 \right|^{2\theta} \cdot \left\| f_+^\delta \right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}. \end{aligned}$$

**Preuve. Calculon** $\Psi_2 (x_2) - \Psi_2 (x_1)$ :
On a

$$\begin{aligned} & \Psi_2 (x_2) - \Psi_2 (x_1) \\ = \; & \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x K^-_{\sqrt{-z}} \right) \left( A_- (A_- + zI)^{-1} f_- \right)(x_2) \frac{dz}{z} \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x K^-_{\sqrt{-z}} \right) \left( A_- (A_- + zI)^{-1} f_- \right)(x_1) \frac{dz}{z} \\ = \; & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{x_2} \left( \int_\gamma \left( \partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x_2, s) \, Q (Q + zI)^{-1} f_- (s) \frac{dz}{z} \right) ds \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{x_1} \left( \int_\gamma \left( \partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x_1, s) \, Q (Q + zI)^{-1} f_- (s) \frac{dz}{z} \right) ds \\ = \; & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{x_1} \left( \int_\gamma \left( \partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x_2, s) \, Q (Q + zI)^{-1} f_- (s) \frac{dz}{z} \right) ds \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_\gamma \left( \partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x_2, s) \, Q (Q + zI)^{-1} f_- (s) \frac{dz}{z} \right) ds \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{x_1} \left( \int_\gamma \left( \partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x_1, s) \, Q (Q + zI)^{-1} f_- (s) \frac{dz}{z} \right) ds \\ = \; & \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_\gamma \left( \partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x_2, s) \, Q (Q + zI)^{-1} f_- (s) \frac{dz}{z} \right) ds \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{x_1} \int_\gamma \left( \left( \partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x_2, s) - \left( \partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}} \right)(x_1, s) \right) \\ & \times \left\{ Q (Q + zI)^{-1} f_- (s) \frac{dz}{z} ds \right\} \\ = \; & J_1 + J_2, \end{aligned}$$

pour $-1 \leq x_1 \leq s \leq x_2$ et $\rho > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left( \partial_x H^-_{\rho,\delta} - \partial_x H^-_\rho \right)(x, s) & = \delta \sinh \rho (1 + x) \frac{\partial_\delta \Delta_- (\rho, \delta^*, s) \cdot \Delta_0 (\rho, \delta^*) - \partial_\delta \Delta_0 (\rho, \delta^*) \cdot \Delta_- (\rho, \delta^*, s)}{\Delta_0^2 (\rho, \delta^*)} \\ & = \delta \cosh \rho (1 + x) \cdot \frac{\sinh \rho (1 + s) \cdot [\sinh \rho\delta^* \cdot \cosh \rho\delta^* - \rho\delta^*]}{\Delta_0^2 (\rho,\delta^*)}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \left|\left(\partial_x H^-_{\rho,\delta} - \partial_x H^-_{\rho}\right)(x_2,s)\right| \\
= & \left|\delta \cosh\rho\,(1+x_2)\,\frac{\sinh\rho\,(1+s)\cdot[\sinh\rho\delta^*\cdot\cosh\rho\delta^* - \rho\delta^*]}{\Delta_0^2(\rho,\delta^*)}\right| \\
\leqslant & \ \delta\frac{\sinh\rho\,(x_2+1)\cdot\cosh\rho\,(s+1)\cdot(\rho\delta^*)\cdot\cosh\rho\delta^*\cdot\sinh\rho\delta^*}{(\sinh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*)\,(\delta^*\cosh\rho\delta^*\cdot\cosh\rho)}\times \\
& \left|\frac{1}{\sinh\rho\delta^*\cdot\cosh\rho\delta^*} - \frac{1}{\rho\delta^*}\right| \\
\leqslant & \ \delta\rho\frac{\sinh\rho\,(x_2+1)\cdot\cosh\rho\,(s+1)}{\sinh\rho\cdot\cosh\rho}\cdot\sup_{t\ \succeq 0}\left|\frac{1}{t} - \frac{2}{\cosh 2t}\right| \\
\leqslant & \ \delta\rho\frac{\sinh\rho\,(x_2+1)\cdot\cosh\rho\,(s+1)}{\sinh\rho\cdot\cosh\rho} \\
\leqslant & \ C\cdot\delta\rho e^{-\rho(x_2-s)},
\end{aligned}$$

telle que $\rho = \operatorname{Re}\sqrt{-z} = C\,|z|^{\frac{1}{2}}$ sur $\gamma$.

Alors

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_X &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_\gamma\left(\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}}\right)(x_2,s)\,Q\,(Q+zI)^{-1} f_-(s)\,\frac{dz}{z}\right)ds\right\|_X \\
&\leqslant C\cdot\delta\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma |z|^{\frac{1}{2}}\,e^{-c|z|^{\frac{1}{2}}(x_2-s)}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot\frac{|dz|}{|z|}ds\cdot\|f_-\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C\cdot\delta\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma \frac{|z|^{\frac{1}{2}}\,e^{-c|z|^{\frac{1}{2}}(x_2-s)}}{|z|^{\theta+1}}\,|dz|\,ds\cdot\|f_-\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C\cdot\delta\int_{x_1}^{x_2}\int_0^\infty \frac{e^{-c\mu}}{\left(\frac{\mu^2}{(x_2-s)^2}\right)^{\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\mu d\mu}{(x_2-s)^2}ds\cdot\|f_-\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C\cdot\delta\int_{x_1}^{x_2}(x_2-s)^{2\theta-1}\left(\int_0^\infty\frac{e^{-c\mu}d\mu}{\mu^{2\theta}}\right)ds\cdot\|f_-\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C\cdot\delta\,|x_2-x_1|^{2\theta}\cdot\|f_-\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_X &= \left\|\begin{array}{c}\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{x_1}\int_\gamma\left(\left(\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}}\right)(x_2,s) - \left(\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}}\right)(x_1,s)\right)\times \\ \left\{Q\,(Q+zI)^{-1} f_-(s)\,\frac{dz}{z}ds\right\}\end{array}\right\|_X \\
&\leqslant \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_\gamma\left(\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta} - \partial_x H^-_{\sqrt{-z}}\right)(x_2,s)\,Q\,(Q+zI)^{-1} f_-(s)\,\frac{dz}{z}\right)ds\right\| \\
&\leqslant C\cdot\delta\,|x_2-x_1|^{2\theta}\cdot\|f_-\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}.
\end{aligned}$$

**Calculons** $\Psi_3(x_2) - \Psi_3(x_1)$ :

On a

$$\begin{aligned}
&\Psi_3(x_2)-\Psi_3(x_1)\\
=\;&\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\partial_x T^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x M^-_{\sqrt{-z}}\right)\left(A_+(A_++zI)^{-1}f_+^\delta\right)(x_2)\frac{dz}{z}\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\partial_x T^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x M^-_{\sqrt{-z}}\right)\left(A_+(A_++zI)^{-1}f_+^\delta\right)(x_1)\frac{dz}{z}\\
=\;&\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\left(\int_\gamma\left(\partial_x N^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}\right)(x_2,s)\,Q(Q+zI)^{-1}f_+^\delta(s)\frac{dz}{z}\right)ds\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\left(\int_\gamma\left(\partial_x N^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}\right)(x_1,s)\,Q(Q+zI)^{-1}f_+^\delta(s)\frac{dz}{z}\right)ds\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\int_\gamma\left(\left(\partial_x N^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}\right)(x_2,s)-\left(\partial_x N^-_{\sqrt{-z},\delta}-\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}\right)(x_1,s)\right)\\
&\times\left\{Q(Q+zI)^{-1}f_+^\delta(s)\frac{dz}{z}ds\right\},
\end{aligned}$$

pour $-1\leq x_1\leq x_2\leq 0$ et $\rho>0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_x N^-_{\rho,\delta}-\partial_x N^-_\rho\right)(x_2,s)-\left(\partial_x N^-_{\rho,\delta}-\partial_x N^-_\rho\right)(x_1,s)\\
=\;&\delta\frac{\cosh\rho(1+x_2)-\cosh\rho(1+x_1)}{\Delta_0^2(\rho,\delta^*)}\times\{\cosh\rho\delta^*(1-s)\times\\
&[\sinh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*-\rho\delta^*(\sinh\rho\cdot\cosh\rho\delta^*+\delta^*\cosh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*)]\\
&+\sinh\rho\delta^*(1-s)\cdot[\rho\delta^*(1-s)(\sinh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*+\delta^*\cosh\rho\cdot\cosh\rho\delta^*)]\},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left(\left(\partial_x N^-_{\rho,\delta}-\partial_x N^-_\rho\right)(x_2,s)-\left(\partial_x N^-_{\rho,\delta}-\partial_x N^-_\rho\right)(x_1,s)\right)ds\\
\leqslant\;&\delta(\cosh\rho(1+x_2)-\cosh\rho(1+x_1))\cdot\frac{\sinh\rho\delta^*}{\rho\delta^*}\cdot\frac{1}{\Delta_0^2(\rho,\delta^*)}\times\\
&[\sinh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*-\rho\delta^*(\sinh\rho\cdot\cosh\rho\delta^*+\delta^*\cosh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*)]\\
&+\delta(\cosh\rho(1+x_2)-\cosh\rho(1+x_1))\cdot\frac{\cosh\rho\delta^*}{\rho\delta^*}\cdot\frac{\rho\delta^*}{\Delta_0(\rho,\delta^*)}\\
\leqslant\;&\delta(\cosh\rho(1+x_2)-\cosh\rho(1+x_1))\cdot\sinh\rho\delta^*\times\frac{\sinh\rho\cdot\cosh\rho\delta^*+\delta^*\cosh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*}{\sinh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*\cdot\Delta_0(\rho,\delta^*)}\\
&\times\left|\frac{\sinh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*}{\rho\delta^*(\sinh\rho\cdot\cosh\rho\delta^*+\delta^*\cosh\rho\cdot\sinh\rho\delta^*)}-1\right|\\
&+\delta(\cosh\rho(1+x_2)-\cosh\rho(1+x_1))\cdot\frac{\cosh\rho\delta^*}{\rho\delta^*}\cdot\frac{\rho\delta^*}{\Delta_0(\rho,\delta^*)}\\
\leqslant\;&\frac{\delta(\cosh\rho(1+x_2)-\cosh\rho(1+x_1))}{\sinh\rho}\cdot\left|\frac{\sinh\rho\delta^*}{\rho\delta^*(\cosh\rho\delta^*+\delta^*\sinh\rho\delta^*)}-1\right|\\
&+\frac{\delta(\cosh\rho(1+x_2)-\cosh\rho(1+x_1))}{\sinh\rho}\\
\leqslant\;&C\cdot\delta\frac{\cosh\rho(1+x_2)-\cosh\rho(1+x_1)}{\sinh\rho}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\|\Psi_3(x_2)-\Psi_3(x_1)\right\|_X &\leqslant C\cdot\delta\int_\gamma \frac{\cosh\rho(1+x_2)-\cosh\rho(1+x_1)}{\sinh\rho}Q(Q+zI)^{-1}f_+^\delta(s)\frac{dz}{z}\\ &\leqslant C\cdot\delta\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma\frac{\sinh\rho(1+x)}{\rho\sinh\rho}Q(Q+zI)^{-1}f_+^\delta(s)\frac{dz}{z}dx\\ &\leqslant C\cdot\delta\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma e^{\rho x}Q(Q+zI)^{-1}f_+^\delta(s)\frac{dz}{z}dx,\end{aligned}$$

on a $\rho=\operatorname{Re}\sqrt{-z}=c\,|z|^{\frac{1}{2}}$ sur $\gamma$ donc

$$\begin{aligned}\left\|\Psi_3(x_2)-\Psi_3(x_1)\right\|_X &\leqslant C\cdot\delta\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma\frac{e^{c|z|^{\frac{1}{2}}x}}{|z|^{\theta+1}}|dz|\,dx\cdot\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}\\ &\leqslant C\cdot\delta\int_{x_1}^{x_2}\int_0^\infty\frac{e^{-c\mu}}{\left(\frac{\mu^2}{x^2}\right)^{\theta+1}}\cdot\frac{\mu d\mu}{x^2}dx\cdot\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}\\ &\leqslant C\cdot\delta\int_{x_1}^{x_2}x^{2\theta}\left(\int_0^\infty\frac{e^{-c\mu}}{\mu^{2\theta+1}}d\mu\right)dx\cdot\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}\\ &\leqslant C\cdot\delta\,|x_2-x_1|^{2\theta}\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)},\end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned}&\left\|\Psi_2(x_2)-\Psi_2(x_1)\right\|_X+\left\|\Psi_3(x_2)-\Psi_3(x_1)\right\|_X\\ \leqslant\;& C\cdot\delta\,|x_2-x_1|^{2\theta}\cdot\left\|f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}\\ &+C\cdot\delta\,|x_2-x_1|^{2\theta}\cdot\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}.\end{aligned}$$

■

**Lemme 3.12** *On a l'estimation suivante*

$$\begin{aligned}&\left\|\Psi_1(x_2)-\Psi_1(x_1)\right\|_X+\left\|\Psi_4(x_2)-\Psi_4(x_1)\right\|_X\\ \leqslant\;& C\,|x_2-x_1|^{2\theta}\cdot\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}\\ &+C\,|x_2-x_1|^{2\theta}\cdot\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}.\end{aligned}$$

**Preuve. Calculons** $\Psi_1(x_2)-\Psi_1(x_1)$ :

$$\begin{aligned}&\Psi_1(x_2)-\Psi_1(x_1)\\ =\;&\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_-(A_-+zI)^{-1}\left(f_-^\delta-f_-\right)\right)(x_2)\frac{dz}{z}\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\partial_x K^-_{\sqrt{-z},\delta}\left(A_-(A_-+zI)^{-1}\left(f_-^\delta-f_-\right)\right)(x_1)\frac{dz}{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{x_2}\int_{\gamma}\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_2,s)\left(Q\left(Q+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)(s)\frac{dz}{z}ds \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{x_1}\int_{\gamma}\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_1,s)\left(Q\left(Q+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)(s)\frac{dz}{z}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{x_1}\int_{\gamma}\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_2,s)\left(Q\left(Q+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)(s)\frac{dz}{z}ds \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_{x_1}^{x_2}\int_{\gamma}\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_2,s)\left(Q\left(Q+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)(s)\frac{dz}{z}ds \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{x_1}\int_{\gamma}\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_1,s)\left(Q\left(Q+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)(s)\frac{dz}{z}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{x_1}^{x_2}\int_{\gamma}\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_2,s)\left(Q\left(Q+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)(s)\frac{dz}{z}ds \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{x_1}\int_{\gamma}\left(\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_2,s)-\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_1,s)\right)\times \\
&\quad \left\{\left(Q\left(Q+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)(s)\frac{dz}{z}ds\right\} \\
&= J_5 + J_6.
\end{aligned}$$

on rappelle que

$$\partial_x H^-_{\rho,\delta}(x_2,s) = \begin{cases} \dfrac{-\cosh\rho x_2\cdot\sinh\rho\delta + \delta\sinh\rho x_2\cdot\cosh\rho\delta}{\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(s+1) & \text{si } \ -1<s<x_2 \\[2ex] \dfrac{-\sinh\rho s\cdot\sinh\rho\delta + \delta\cosh\rho s\cdot\cosh\rho\delta}{\Delta_0(\rho,\delta)}\cosh\rho(x_2+1) & \text{si } \ x_2\le s<0, \end{cases}$$

et

$$\partial_x H^-_{\rho,\delta}(x_1,s) = \begin{cases} \dfrac{-\cosh\rho x_1\cdot\sinh\rho\delta + \delta\sinh\rho x_1\cdot\cosh\rho\delta}{\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(s+1) & \text{si } \ -1<s<x_1 \\[2ex] \dfrac{-\sinh\rho s\cdot\sinh\rho\delta + \delta\cosh\rho s\cdot\cosh\rho\delta}{\Delta_0(\rho,\delta)}\cosh\rho(x_1+1) & \text{si } \ x_1\le s<0, \end{cases}$$

Soit $-1\le x_1\le s\le x_2$ et $\rho>0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x H^-_{\rho,\delta}(x_2,s)\right| &= \frac{\cosh\rho x_2\cdot\sinh\rho\delta - \delta\sinh\rho x_2\cdot\cosh\rho\delta}{\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(s+1) \\
&\leqslant \frac{\cosh\rho x_2\cdot\sinh\rho\delta + \delta\cosh\rho x_2\cdot\cosh\rho\delta}{\sinh\rho\cdot\sinh\rho\delta + \delta\sinh\rho\cdot\cosh\rho\delta}\sinh\rho(s+1) \\
&\leqslant \frac{\cosh\rho x_2\cdot(\sinh\rho\delta + \delta\cosh\rho\delta)}{\sinh\rho\cdot(\sinh\rho\delta + \delta\cosh\rho\delta)}\sinh\rho(s+1) \\
&\leqslant \frac{\cosh\rho x_2\cdot\sinh\rho(s+1)}{\sinh\rho} \\
&\leqslant Ce^{-\rho(x_2-s)},
\end{aligned}$$

on a $\rho = \operatorname{Re}\sqrt{-z} = c\,|z|^{\frac{1}{2}}$ sur $\gamma$ donc

$$\begin{aligned}
\|J_5\|_X &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma \partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_2,s)\left(Q(Q+zI)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)(s)\frac{dz}{z}ds\right\|_X \\
&\leqslant C\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma e^{-c|z|^{\frac{1}{2}}(x_2-s)}\cdot\frac{1}{|z|}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}|dz|\,ds\cdot\left\||z|^\theta Q(Q+zI)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right\|_{E_-} \\
&\leqslant C\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma e^{-c|z|^{\frac{1}{2}}(x_2-s)}\cdot\frac{1}{|z|^{1+\theta}}|dz|\,ds\cdot\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)},
\end{aligned}$$

on pose

$$|z|^{\frac{1}{2}}(x_2-s) = \mu,$$

alors

$$\begin{aligned}
\|J_5\|_X &\leqslant C\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-c\mu}}{\left(\frac{\mu^2}{(x_2-s)^2}\right)^{1+\theta}}\cdot\frac{\mu d\mu}{(x_2-s)^2}ds\cdot\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C\int_{x_1}^{x_2}(x_2-s)^{2\theta}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-c\mu}d\mu}{\mu^{2\theta+1}}\right)ds\cdot\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C\,|x_2-x_1|^{2\theta+1}\cdot\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\
&\leqslant C\,|x_2-x_1|^{2\theta}\cdot\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}.
\end{aligned}$$

Soit $-1 \leq s \leq x_1 \leq x_2$ et $\rho > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\partial_x H^-_{\rho,\delta}(x_2,s) - \partial_x H^-_{\rho,\delta}(x_1,s) \\
= &\frac{-\cosh\rho x_2\cdot\sinh\rho\delta + \delta\sinh\rho x_2\cdot\cosh\rho\delta}{\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(s+1) \\
&-\frac{-\cosh\rho x_1\cdot\sinh\rho\delta + \delta\sinh\rho x_1\cdot\cosh\rho\delta}{\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(s+1) \\
= &\frac{\sinh\rho\delta\cdot(-\cosh\rho x_2 + \cosh\rho x_1) + \delta\cosh\rho\delta\cdot(\sinh\rho x_2 - \sinh\rho x_1)}{\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(s+1),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_x H^-_{\rho,\delta}(x_2,s) - \partial_x H^-_{\rho,\delta}(x_1,s)\right| \\
\leqslant &\frac{\sinh\rho\delta\cdot(-\cosh\rho x_2 + \cosh\rho x_1) + \delta\cosh\rho\delta\cdot(\sinh\rho x_2 - \sinh\rho x_1)}{\Delta_0(\rho,\delta)}\sinh\rho(s+1) \\
\leqslant &\frac{\sinh\rho\delta\cdot\cosh\rho x_1 + \delta\cosh\rho\delta\cdot(-\sinh\rho x_1)}{\sinh\rho\cdot(\sinh\rho\delta + \delta\cosh\rho\delta)}\sinh\rho(s+1) \\
\leqslant &\frac{\sinh\rho\delta\cdot\cosh\rho x_1 + \delta\cosh\rho\delta\cdot\cosh\rho x_1}{\sinh\rho\cdot(\sinh\rho\delta + \delta\cosh\rho\delta)}\sinh\rho(s+1) \\
\leqslant &\frac{\cosh\rho x_1\cdot(\sinh\rho\delta + \delta\cosh\rho\delta)}{\sinh\rho\cdot(\sinh\rho\delta + \delta\cosh\rho\delta)}\sinh\rho(s+1) \\
\leqslant &\frac{\cosh\rho x_1\cdot\sinh\rho(s+1)}{\sinh\rho} \\
\leqslant &Ce^{-\rho(x_1-s)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|J_6\|_X &\leqslant C\int_{-1}^{x_1}\int_\gamma \left|\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_2,s)-\partial_x H^-_{\sqrt{-z},\delta}(x_1,s)\right|\frac{1}{|z|}\,|dz|\,ds\cdot\left\|Q\,(Q+zI)^{-1}\left(f_-^\delta-f_-\right)\right\|_{E_-}\\
&\leqslant C\int_{-1}^{x_1}\int_\gamma e^{-\rho(x_1-s)}\frac{1}{|z|^{1+\theta}}\,|dz|\,ds\cdot\left\||z|^\theta Q\,(Q+zI)^{-1}\left(f_-^\delta-f_-\right)\right\|_{E_-}\\
&\leqslant C\int_{-1}^{x_1}\int_\gamma e^{-c|z|^{\frac{1}{2}}(x_1-s)}\frac{1}{|z|^{1+\theta}}\,|dz|\,ds\cdot\left\||z|^\theta Q\,(Q+zI)^{-1}\left(f_-^\delta-f_-\right)\right\|_{E_-}\\
&\leqslant C\int_{-1}^{x_1}\int_0^\infty \frac{e^{-c\mu}}{\left(\frac{\mu^2}{(x_1-s)^2}\right)^{1+\theta}}\frac{\mu d\mu}{(x_1-s)^2}ds\cdot\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}\\
&\leqslant C\int_{-1}^{x_1}(x_1-s)^{2\theta}\left(\int_0^\infty\frac{e^{-c\mu}d\mu}{\mu^{2\theta+1}}\right)ds\cdot\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}\\
&\leqslant C\int_{-1}^{x_1}(x_2-s)^{2\theta}\left(\int_0^\infty\frac{e^{-c\mu}d\mu}{\mu^{2\theta+1}}\right)ds\cdot\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}\\
&\leqslant C\,|x_2-x_1|^{2\theta}\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\Psi_1(x_2)-\Psi_1(x_1)\|_X\leqslant C\,|x_2-x_1|^{2\theta}\cdot\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}.$$

Maintenant montrons que

$$\|\Psi_4(x_2)-\Psi_4(x_1)\|_X\leqslant C\,|x_2-x_1|^{2\theta}\cdot\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}.$$

On a

$$\begin{aligned}
&\Psi_4(x_2)-\Psi_4(x_1)\\
=\;&\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \partial_x T^-_{\sqrt{-z}}\left(A\,(A+zI)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)\right)(x_2)\,\frac{dz}{z}\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \partial_x T^-_{\sqrt{-z}}\left(A\,(A+zI)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)\right)(x_1)\,\frac{dz}{z}\\
=\;&\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\int_\gamma \partial_x N^-_{\sqrt{-z}}(x_2)\,Q\,(Q+zI)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)(s)\,\frac{dz}{z}ds\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\int_\gamma \partial_x N^-_{\sqrt{-z}}(x_1)\,Q\,(Q+zI)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)(s)\,\frac{dz}{z}ds\\
=\;&\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}(x_2)-\partial_x N^-_{\sqrt{-z}}(x_1)\right)Q\,(Q+zI)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)\frac{dz}{z},
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\partial_x N^-_\rho(x_2)-\partial_x N^-_\rho(x_1) &= \frac{\cosh\rho\,(x_2+1)}{\rho\sinh\rho+\cosh\rho}-\frac{\cosh\rho\,(x_1+1)}{\rho\sinh\rho+\cosh\rho}\\
&= \frac{\cosh\rho\,(x_2+1)-\cosh\rho\,(x_1+1)}{\rho\sinh\rho+\cosh\rho}\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\frac{\cosh\rho\,(x+1)}{\rho\,(\rho\sinh\rho+\cosh\rho)},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left\|\Psi_4(x_2)-\Psi_4(x_1)\right\|_X \\
\leqslant\ & C\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma \frac{\cosh\rho(x+1)}{\rho(\rho\sinh\rho+\cosh\rho)}\cdot\frac{1}{|z|^{1+\theta}}\,|dz|\,dx\cdot\left\||z|^\theta Q(Q+zI)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)\right\|_{E_+} \\
\leqslant\ & C\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma \frac{e^{\rho(x+1)}}{e^\rho\left(1+|z|^{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\frac{1}{|z|^{1+\theta}}\,|dz|\,dx\cdot\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)} \\
\leqslant\ & C\int_{x_1}^{x_2}\int_\gamma e^{c|z|^{\frac{1}{2}}x}\cdot\frac{1}{|z|^{1+\theta}}\,|dz|\,dx\cdot\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)},
\end{aligned}$$

on pose

$$|z|^{\frac{1}{2}}x=-\mu,$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left\|\Psi_4(x_2)-\Psi_4(x_1)\right\|_X \\
\leqslant\ & C\int_{x_1}^{x_2}\int_0^\infty \frac{e^{-c\mu}}{\left(\frac{\mu^2}{x^2}\right)^{1+\theta}}\cdot\frac{-\mu d\mu}{x^2}dx\cdot\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)} \\
\leqslant\ & C\int_{x_1}^{x_2} x^{2\theta}\left(\int_0^\infty\frac{e^{-c\mu}d\mu}{\mu^{2\theta+1}}\right)dx\cdot\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)} \\
\leqslant\ & C\left|x_2-x_1\right|^{2\theta}\cdot\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left\|\Psi_1(x_2)-\Psi_1(x_1)\right\|_X+\left\|\Psi_4(x_2)-\Psi_4(x_1)\right\|_X \\
\leqslant\ & C\left|x_2-x_1\right|^{2\theta}\cdot\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)} \\
& +C\left|x_2-x_1\right|^{2\theta}\cdot\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}.
\end{aligned}$$

■

Donc

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\partial_x u_-^\delta-\partial_x u_-\right)(x_2)-\left(\partial_x u_-^\delta-\partial_x u_-\right)(x_1)\right\|_X \\
\leqslant\ & C\cdot\delta\left|x_2-x_1\right|^{2\theta}\left(\left\|f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}+\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}\right) \\
& +C\left|x_2-x_1\right|^{2\theta}\left(\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}+\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}\right),
\end{aligned}$$

alors

$$\left(\partial_x u_-^\delta-\partial_x u_-\right)\in C^{2\theta,\infty}([-1,0];X),$$

donc

$$\left(u_-^\delta-u_-\right)\in C^{1+2\theta,\infty}([-1,0];X),$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left\|u_-^\delta-u_-\right\|_{W^{1+2\theta,\infty}(-1,0;X)} \\
\leqslant\ & C\cdot\delta\left(\left\|f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}+\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}\right) \\
& +C\left(\left\|f_-^\delta-f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,\infty)}+\left\|m_+^\delta-m\right\|_{D_{A_+}(\theta,\infty)}\right).
\end{aligned}$$

## 3.5 La Régularité de $u_-$

**Théorème 3.5** *Soit* $1 < p < +\infty$ *et* $0 < \theta < \frac{1}{2}$, *pour* $f^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega)$ *vérifiant*

1. $f_-^\delta$ *tend vers* $f_-$ *dans* $W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ *quand* $\delta$ *tend vers* $0$,
2. $f_+^\delta$ *est bornée dans* $W^{2\theta,p}(\Omega_+)$,
3. $\int_0^1 f_+^\delta(x,.)\,dx = m_+^\delta$ *tend vers* $m$ *dans* $W^{2\theta,p}(G)$ *quand* $\delta$ *tend vers* $0$.

*Alors il existe une unique* $(u_-, u_+) \in W^{2,p}(\Omega_-) \times W^{2,p}(G)$ *et* $u_-$ *est une solution stricte du problème de Ventcel non homogène suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u_- = f_- & sur \;\; \Omega_- \\ u_- = 0 & sur \;\; \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ \partial_x u_-(0,\cdot) - \Delta_y u_-(0,\cdot) = m & sur \;\; G. \end{cases}$$

**Preuve.** On rappelle que la représentation formelle de $u_-^1$et $u_-^2$ pour $x \in [-1,0]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} u_-^1 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A_- + zI)^{-1} K_{\sqrt{-z}}^-(f_-)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A_- + zI)^{-1}(B_- - zI)^{-1}\,dz \\ u_-^2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A_- + zI)^{-1} T_{\sqrt{-z}}^-(m)\,dz. \end{aligned}$$

Alors

$$u_-^1 \in D(A_-) \cap D(B_-),$$

donc

$$u_-^1 \in W^{2,p}(\Omega_-) \;\text{ et }\; u_-^1\backslash\Gamma^0 \in W^{2,p}\left(\Gamma^0\right) \cap W_0^{1,p}\left(\Gamma^0\right),$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u_-^1 = f_- & \text{sur} \;\; \Omega_- \\ u_-^1 = 0 & \text{sur} \;\; \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ \partial_x u_-^1(0,\cdot) - \Delta_y u_-^1(0,\cdot) = 0 & \text{sur} \;\; G. \end{cases}$$

et de plus

$$\partial_x^2 u_-^1 \in W^{2\theta,p}(\Omega_-) \;\text{ et }\; \Delta_y u_-^1 \in W^{2\theta,p}(\Omega_-),$$

et de même

$$m \in W^{2\theta,p}(G) = D_Q(\theta,p).$$

On a $u_-^2 \in W^{2,p}(-1,0;X) \cap L^p(-1,0;D(A_-))$ et

$$\begin{cases} \partial_x^2 u_-^2 \in W^{2\theta,p}(-1,0;L^p(G)) \\ A_- u_-^2 \in W^{2\theta,p}(-1,0;L^p(G)) \\ \partial_x^2 u_-^2 \in L^p(-1,0;D_Q(\theta,p)) = D_{A_-}(\theta,p), \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} u_-^2 &\in W^{2,p}\left(\Omega_-\right) \\ \partial_x^2 u_-^2 &\in W^{2\theta,p}\left(\Omega_-\right) \text{ et } \Delta_y u_-^2 \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_-\right). \end{aligned}$$

■

## 3.6 La convergence dans $D_{\mathbf{A}_\pm}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{1}{2},\mathbf{p}\right)$

### 3.6.1 La convergence dans $D_{\mathbf{A}_-}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{1}{2},\infty\right)$.

On doit prouver que

$$\sup_{r\succeq 0}\left\|r^{\theta+\frac{1}{2}}\cdot A_=\left(A_=+rI\right)^{-1}\cdot\left(u_-^\delta-u_-\right)\right\|_{E_-}<+\infty.$$

On rappelle que la représentation formelle de $\left(u_-^\delta-u_-\right)$ pour $x\in[-1{,}0]$,et $\delta\in\,]0,1[$ est donnée par

$$\begin{aligned} \left(u_-^\delta-u_-\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(A_-+rI\right)^{-1}\left(K^-_{\sqrt{-z},\delta}-K^-_{\sqrt{-z}}\right)f_-^\delta dz \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(A_-+rI\right)^{-1}K^-_{\sqrt{-z}}\left(f_-^\delta-f_-\right)dz \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(A+rI\right)^{-1}\left(T^-_{\sqrt{-z},\delta}-M^-_{\sqrt{-z}}\right)f_+^\delta dz \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(A+rI\right)^{-1}T^-_{\sqrt{-z}}\left(m_+^\delta-m\right)dz. \end{aligned}$$

Soit $r>0$, on a

$$\begin{aligned} & (z-r)\left(A_-+rI\right)^{-1}\cdot\left(A_-+zI\right)^{-1} \\ =\; & z\left(A_-+rI\right)^{-1}\left(A_-+zI\right)^{-1}-r\left(A_-+rI\right)^{-1}\left(A_-+zI\right)^{-1} \\ =\; & (A+z-A)\left(A_-+rI\right)^{-1}\left(A_-+zI\right)^{-1}-(A+r-A)\left(A_-+rI\right)^{-1}\left(A_-+zI\right)^{-1} \\ =\; & \left(A_-+rI\right)^{-1}-A\left(A_-+rI\right)^{-1}\left(A_-+zI\right)^{-1}-\left(A_-+zI\right)^{-1}+A\left(A_-+rI\right)^{-1}\left(A_-+zI\right)^{-1} \\ =\; & \left(A_-+rI\right)^{-1}-\left(A_-+zI\right)^{-1}, \end{aligned}$$

donc

$$\left(A_-+rI\right)^{-1}\left(A_-+zI\right)^{-1}=\frac{1}{z-r}\left(\left(A_-+rI\right)^{-1}-\left(A_-+zI\right)^{-1}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}
& A_-\left(A_-+rI\right)^{-1}\cdot\left(u_-^\delta-u_-\right) \\
= \; & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}\left(K_{\sqrt{-z},\delta}^- - K_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(A_-\left(A_-+rI\right)^{-1}f_-^\delta\right)dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}\left(K_{\sqrt{-z},\delta}^- - K_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}K_{\sqrt{-z}}^-\left(A_-\left(A_-+rI\right)^{-1}\left(f_-^\delta-f_-\right)\right)dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}K_{\sqrt{-z}}^-\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta-f_-\right)\right)dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}\left(T_{\sqrt{-z},\delta}^- - M_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(A\left(A+rI\right)^{-1}f_+^\delta\right)dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}\left(T_{\sqrt{-z},\delta}^- - M_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(A\left(A+zI\right)^{-1}f_+^\delta\right)dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}T_{\sqrt{-z}}^-\left(A\left(A+rI\right)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)\right)dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}T_{\sqrt{-z}}^-\left(A\left(A+zI\right)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)\right)dz,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& A_-\left(A_-+rI\right)^{-1}\cdot\left(u_-^\delta-u_-\right) \\
= \; & -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}\left(K_{\sqrt{-z},\delta}^- - K_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}K_{\sqrt{-z}}^-\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta-f_-\right)\right)dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}\left(T_{\sqrt{-z},\delta}^- - M_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(A\left(A+zI\right)^{-1}f_+^\delta\right)dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}T_{\sqrt{-z}}^-\left(A\left(A+zI\right)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)\right)dz \\
= \; & I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left\|I_1\right\|_E &= \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}\left(K_{\sqrt{-z},\delta}^- - K_{\sqrt{-z}}^-\right)\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)dz\right\|_E \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|z|^\theta\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)|dz| \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}|dz|\cdot\left\|f_-^\delta\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant \frac{C}{r^{\;\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\delta\cdot\left\|f_-^\delta\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_E &= \left\| -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}K^-_{\sqrt{-z}}\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)dz\right\|_E \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{1}{|z|}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|z|^\theta\left(A_-\left(A_-+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta - f_-\right)\right)|dz| \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{1}{|z|}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|dz|\cdot\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|^{\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z-r|^{-\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|^{\theta+1}}\cdot|dz|\cdot\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant \frac{C}{r^{\theta+\frac{1}{2}}}\int_\gamma \frac{1}{|z|^{1+\frac{1}{2}}}\cdot|dz|\cdot\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant \frac{C}{r^{\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &= \left\| -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}\left(T^-_{\sqrt{-z},\delta} - M^-_{\sqrt{-z}}\right)\left(A\left(A+rI\right)^{-1}f_+^\delta\right)dz\right\|_E \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|z|^\theta\left(A\left(A+rI\right)^{-1}f_+^\delta\right)\cdot|dz| \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|dz|\cdot\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant \frac{C}{r^{\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\delta\cdot\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_E &= \left\| -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}T^-_{\sqrt{-z}}\left(A\left(A+rI\right)^{-1}\left(m_+^\delta - m\right)\right)dz\right\|_E \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{1}{|z|^{1+\frac{1}{2p}}}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|z|^\theta A\left(A+rI\right)^{-1}\left(m_+^\delta - m\right)\cdot|dz| \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{1}{|z|^{\theta+1+\frac{1}{2p}}}\cdot|dz|\cdot\left\|m_+^\delta - m\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant \frac{C}{r^{\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\left\|m_+^\delta - m\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left\|u_-^\delta - u_-\right\|_{D_{A_-}\left(\theta+\frac{1}{2},\infty\right)} \\
\leqslant\ & C\cdot\delta\left(\left\|f_-^\delta\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} + \left\|f_+^\delta\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)}\right) \\
&+C\left(\left\|f_-^\delta - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} + \left\|m_+^\delta - m\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)}\right).
\end{aligned}$$

### 3.6.2 La convergence dans $D_{\mathbf{A}_+}\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\infty\right)$

On doit prouver que

$$\sup_{r\succeq 0}\left\|r^{\theta+\frac{1}{2}}\cdot A_+\left(A_++rI\right)^{-1}\cdot\left(u_+^\delta-u_+\right)\right\|_{E_+}<+\infty.$$

On rappelle que la représentation formelle de $\left(u_+^\delta-u_+\right)$ pour $x\in[0,1]$, et $\delta\in]0,1[$ est donnée par

$$\begin{aligned}\left(u_+^\delta-u_+\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A+zI)^{-1}\left(K^+_{\sqrt{-z},\delta}-K^+_{\sqrt{-z}}\right)f_-^\delta dz\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A+zI)^{-1}K^+_{\sqrt{-z}}\left(f_-^\delta-f_-\right)dz\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A_++zI)^{-1}\left(T^+_{\sqrt{-z},\delta}-M^+_{\sqrt{-z}}\right)f_+^\delta dz\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A_++zI)^{-1}T^+_{\sqrt{-z}}\left(m_+^\delta-m\right)dz.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}&A_+\left(A_++rI\right)^{-1}\cdot\left(u_+^\delta-u_+\right)\\ =\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{z-r}\left(K^+_{\sqrt{-z},\delta}-K^+_{\sqrt{-z}}\right)\left(A\left(A+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)dz\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{z-r}K^+_{\sqrt{-z}}\left(A\left(A+zI\right)^{-1}\left(f_-^\delta-f_-\right)\right)dz\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{z-r}\left(T^+_{\sqrt{-z},\delta}-M^+_{\sqrt{-z}}\right)\left(A_+\left(A_++zI\right)^{-1}f_+^\delta\right)dz\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{z-r}T^+_{\sqrt{-z}}\left(A_+\left(A_++zI\right)^{-1}\left(m_+^\delta-m\right)\right)dz\\ =\ &J_1+J_2+J_3+J_4.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\left\|J_1\right\|_E &= \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{z-r}\left(K^+_{\sqrt{-z},\delta}-K^+_{\sqrt{-z}}\right)\left(A\left(A+zI\right)^{-1}f_-^\delta\right)dz\right\|_E\\ &\leqslant C\int_\gamma\frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|z|^\theta A\left(A+zI\right)^{-1}f_-^\delta\cdot|dz|\\ &\leqslant C\int_\gamma\frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|dz|\cdot\left\|f_-^\delta\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)}\\ &\leqslant \frac{C\cdot\delta}{r^{\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\left\|f_-^\delta\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)},\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_E &= \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}K^+_{\sqrt{-z}}\left(A\left(A+zI\right)^{-1}\left(f^\delta_- - f_-\right)\right)dz\right\|_E \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{1}{|z|}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|z|^\theta A\left(A+zI\right)^{-1}\left(f^\delta_- - f_-\right)\cdot|dz| \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|^{\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z-r|^{-\theta+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|^{\theta+1}}\,|dz|\cdot\left\|f^\delta_- - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant \frac{C}{r^{\theta+\frac{1}{2}}}\int_\gamma \frac{1}{|z|^{1+\frac{1}{2}}}\,|dz|\left\|f^\delta_- - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant \frac{C}{r^{\theta+\frac{1}{2}}}\left\|f^\delta_- - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\|J_3\|_E &= \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}\left(T^+_{\sqrt{-z},\delta} - M^+_{\sqrt{-z}}\right)\left(A_+\left(A_+ + zI\right)^{-1}f^\delta_+\right)dz\right\|_E \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{\delta}{|z|^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|z|^\theta A_+\left(A_+ + zI\right)^{-1}f^\delta_+\cdot|dz| \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{\delta}{|z|^{\theta+\frac{1}{2}}}\,|dz|\left\|f^\delta_+\right\|_{D_{A_+}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant \frac{C\cdot\delta}{r^{\theta+\frac{1}{2}}}\left\|f^\delta_+\right\|_{D_{A_+}(\theta,+\infty)},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_E &= \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-r}T^+_{\sqrt{-z}}\left(A_+\left(A_+ + zI\right)^{-1}\left(m^\delta_+ - m\right)\right)dz\right\|_E \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z-r|}\cdot\frac{1}{|z|}\cdot\frac{1}{|z|^\theta}\cdot|z|^\theta A_+\left(A_+ + zI\right)^{-1}\left(m^\delta_+ - m\right)\cdot|dz| \\
&\leqslant C\int_\gamma \frac{1}{|z|^{\theta+\frac{1}{2}}}\,|dz|\left\|m^\delta_+ - m\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)} \\
&\leqslant \frac{C}{r^{\theta+\frac{1}{2}}}\left\|m^\delta_+ - m\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left\|u^\delta_+ - u_+\right\|_{D_{A_+}\left(\theta+\frac{1}{2},\infty\right)} \\
\leqslant\ & C\cdot\delta\left(\left\|f^\delta_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} + \left\|f^\delta_+\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)}\right) \\
&+C\left(\left\|f^\delta_- - f_-\right\|_{D_{A_-}(\theta,+\infty)} + \left\|m^\delta_+ - m\right\|_{D_{A+}(\theta,+\infty)}\right).
\end{aligned}$$

# Chapitre 4

# Résultats essentiels

Dans ce chapitre, on donne les résultats concernant le problème (2), obtenus à partir des résultats précédents.

On rappelle que le problème (2)

$$\begin{cases} -\Delta v_-^\delta = g_-^\delta & \text{sur} \quad \Omega_- \\ -\Delta v_+^\delta = g_+^\delta & \text{sur} \quad \Omega_+^\delta, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} v_-^\delta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ v_+^\delta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_+^\delta \setminus \Gamma^0 \cup \Gamma^\delta \\ \partial_\zeta v_+^\delta = 0 & \text{sur} \quad \Gamma^\delta, \end{cases}$$

et les conditions de transmission

$$\begin{cases} v_-^\delta = v_+^\delta & \text{sur} \quad \Gamma^0 \\ \partial_x v_-^\delta = \dfrac{1}{\delta}\partial_x v_+^\delta & \text{sur} \quad \Gamma^0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} v_-^\delta = u_-^\delta & \text{sur} \quad \Omega_- = [-1,0] \times G \\ g_-^\delta = f_-^\delta & \text{sur} \quad \Omega_- = [-1,0] \times G, \end{cases}$$

et que, pour $(\zeta, \eta) \in \Omega_+^\delta = [0, \delta] \times G$

$$\begin{cases} v_+^\delta(\zeta,\eta) = u_+^\delta\left(\frac{\zeta}{\delta}, \eta\right) \\ g_+^\delta(\zeta,\eta) = f_+^\delta\left(\frac{\zeta}{\delta}, \eta\right), \end{cases}$$

en posant

$$v^\delta = \begin{cases} v_-^\delta & \text{sur} \quad \Omega_- \\ v_+^\delta & \text{sur} \quad \Omega_+^\delta \end{cases}$$

et

$$u^\delta = \begin{cases} u_-^\delta & \text{sur} \quad \Omega_- \\ u_+^\delta & \text{sur} \quad \Omega_+^\delta \end{cases}$$

# 4.1 Solution forte

**Théorème 4.1** *Soit* $1 < p < \infty$, *pour* $g^\delta \in L^p\left(\Omega^\delta\right)$, *il existe une solution forte*

$$v^\delta = \begin{cases} v_-^\delta & sur \quad \Omega_- \\ v_+^\delta & sur \quad \Omega_+^\delta \end{cases}$$

*du problème (2).*

**Preuve.** Montrons que $v^\delta$ est une solution forte du problème (2).

On considérons $\delta > 0$ fixé, on doit prouver que $f^\delta \in L^p(\Omega)$.

On a

$$f_-^\delta = g_-^\delta \in L^p(\Omega_-),$$

montrons que $f_+^\delta \in L^p(\Omega_+)$.

Pour $g_+^\delta \in L^p\left(\Omega_+^\delta\right)$ on a

$$\begin{aligned} \left\|f_+^\delta\right\|_{L^p(\Omega_+)}^p &= \int_{\Omega_+} \left|f_+^\delta(x,y)\right|^p dxdy \\ &= \int_G \left(\int_0^1 \left|f_+^\delta(x,y)\right|^p dx\right) dy, \end{aligned}$$

on pose

$$x = \frac{\zeta}{\delta} \text{ et } y = \eta,$$

alors

$$\begin{aligned} \left\|f_+^\delta\right\|_{L^p(\Omega_+)}^p &= \int_G \left(\int_0^1 \left|f_+^\delta(x,y)\right|^p dx\right) dy \\ &= \frac{1}{\delta} \int_G \left(\int_0^\delta \left|f_+^\delta\left(\frac{\zeta}{\delta},\eta\right)\right|^p d\zeta\right) d\eta \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_+^\delta} \left|g_+^\delta(\zeta,\eta)\right|^p d\zeta d\eta < \infty, \end{aligned}$$

donc

$$f_+^\delta \in L^p(\Omega_+).$$

On a, $g^\delta \in L^p\left(\Omega^\delta\right)$ alors $f^\delta \in L^p(\Omega)$ d'aprés le théorème 3.3.1 il existe une solution forte $u^\delta$ du problème (3) dans $L^p(\Omega)$, donc il existe une solution forte $v^\delta$ du problème (2) dans $L^p\left(\Omega^\delta\right)$. ∎

**Théorème 4.2** *Soit* $g^\delta \in L^p\left(\Omega^\delta\right)$ *avec* $1 < p < \infty$, *on a*

1. $g_-^\delta$ *tend vers* $g_-$ *dans* $L^p(\Omega_-)$ *quand* $\delta \longrightarrow 0$,
2. *il existe une constante* $M > 0$ *telle que pour* $\delta > 0$

$$\frac{1}{\delta} \int_{\Omega_+^\delta} \left|g_+^\delta(\zeta,\eta)\right|^p d\zeta \; d\eta \leq M,$$

*3.* $\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} g_+^{\delta}(\zeta,\cdot)^p\, d\zeta = m_+^{\delta}$ *tend vers* $m$ *dans* $L^p(G)$ *quand* $\delta \longrightarrow 0$.

*Alors il existe une unique* $(v_-, v_+) \in L^p(\Omega_-)\times L^p(G)$ *et une constante* $C > 0$ *indépendante de* $\delta$ *telle que*

1. $\lim\limits_{\delta\longrightarrow 0} \left\|v_-^{\delta} - v_-\right\|_{L^p(\Omega_-)} = 0$, et

$$\begin{aligned}&\left\|v_-^{\delta} - v_-\right\|_{L^p(\Omega_-)}\\ \leqslant\ & C\cdot\delta\left(\left\|g_-^{\delta}\right\|_{L^p(\Omega_-)} + \delta^{-\frac{1}{p}}\left\|g_+^{\delta}\right\|_{L^p\left(\Omega_+^{\delta}\right)}\right)\\ & +C\left(\left\|g_-^{\delta} - g_-\right\|_{L^p(\Omega_-)} + \left\|m_+^{\delta} - m\right\|_{L^p(G)}\right).\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{\delta\longrightarrow 0} \delta^{-\frac{1}{p}}\left\|v_+^{\delta} - v_+\right\|_{L^p\left(\Omega_+^{\delta}\right)} = 0$, et

$$\begin{aligned}&\delta^{-\frac{1}{p}}\left\|v_+^{\delta} - v_+\right\|_{L^p\left(\Omega_+^{\delta}\right)}\\ \leqslant\ & C\cdot\delta\left(\left\|g_-^{\delta}\right\|_{L^p(\Omega_-)} + \delta^{-\frac{1}{p}}\left\|g_+^{\delta}\right\|_{L^p\left(\Omega_+^{\delta}\right)}\right)\\ & +C\left(\left\|g_-^{\delta} - g_-\right\|_{L^p(\Omega_-)} + \left\|m_+^{\delta} - m\right\|_{L^p(G)}\right).\end{aligned}$$

3. $v_-$ est une solution forte du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_- = g_- & \text{sur } \ \Omega_- \\ v_- = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ \partial_{\zeta} v_-(0,\cdot) - \Delta_{\eta} v_-(0,\cdot) = m & \text{sur } \ G. \end{cases}$$

**Preuve.** $(i)$ Montrons que : $\lim\limits_{\delta\longrightarrow 0} \left\|v_-^{\delta} - v_-\right\|_{L^p(\Omega_-)} = 0$, et

$$\begin{aligned}&\left\|v_-^{\delta} - v_-\right\|_{L^p(\Omega_-)}\\ \leqslant\ & C\cdot\delta\left(\left\|g_-^{\delta}\right\|_{L^p(\Omega_-)} + \delta^{-\frac{1}{p}}\left\|g_+^{\delta}\right\|_{L^p\left(\Omega_+^{\delta}\right)}\right)\\ & +C\left(\left\|g_-^{\delta} - g_-\right\|_{L^p(\Omega_-)} + \left\|m_+^{\delta} - m\right\|_{L^p(G)}\right).\end{aligned}$$

$f_- = g_-$ sur $\Omega_-$ alors

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} \left\|f_-^{\delta} - f_-\right\|_{L^p(\Omega_-)} = \lim_{\delta\longrightarrow 0} \left\|g_-^{\delta} - g_-\right\|_{L^p(\Omega_-)} = 0,$$

et de plus

$$\int_{\Omega_+} \left|f_+^{\delta}(x,y)\right|^p dx\ dy = \frac{1}{\delta}\int_{\Omega_+^{\delta}} \left|g_+^{\delta}(\zeta,\eta)\right|^p d\zeta\ d\eta \leq M,$$

et

$$\int_0^1 f_+^{\delta}(x,\cdot)\, dx = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} g_+^{\delta}(\zeta,\cdot)\, d\zeta = m_+^{\delta} \text{ tend vers } m \text{ dans } L^p(G) \text{ quand } \delta \longrightarrow 0,$$

donc d'prés le théorème 3.3.1 il existe une unique $(u_-, u_+) \in L^p(\Omega_-) \times L^p(G)$ telle que :

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \left\| u_\pm^\delta - u_\pm \right\|_{L^p(\Omega_\pm)} = 0,$$

et

$$\begin{aligned}
& \left\| u_-^\delta - u_- \right\|_{L^p(\Omega_-)} \\
\leqslant \; & C \cdot \delta \left( \left\| f_-^\delta \right\|_{L^p(\Omega_-)} + \left\| f_+^\delta \right\|_{L^p(\Omega_+)} \right) \\
& + C \left( \left\| f_-^\delta - f_- \right\|_{L^p(\Omega_-)} + \left\| m_+^\delta - m \right\|_{L^p(\Omega_+)} \right),
\end{aligned}$$

on a $u_- = v_-$ sur $\Omega_-$,et $u_+ = v_+$ sur $G$ alors

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \left\| v_-^\delta - v_- \right\|_{L^p(\Omega_-)} = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \left\| u_-^\delta - u_- \right\|_{L^p(\Omega_-)} = 0,$$

et de plus on a

$$\left\| f_-^\delta \right\|_{L^p(\Omega_-)} = \left\| g_-^\delta \right\|_{L^p(\Omega_-)} \text{ et } \left\| f_-^\delta - f_- \right\|_{L^p(\Omega_-)} = \left\| g_-^\delta - g_- \right\|_{L^p(\Omega_-)},$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\left\| f_+^\delta \right\|_{L^p(\Omega_+)} &= \int_{\Omega_+} \left( \left| f_+^\delta (x,y) \right|^p dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \int_G \left( \int_0^1 \left| f_+^\delta (x,y) \right|^p dx \right) dy \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

on pose $x = \dfrac{\zeta}{\delta}$ et $y = \eta$ alors

$$\begin{aligned}
\left\| f_+^\delta \right\|_{L^p(\Omega_+)} &= \left( \frac{1}{\delta} \int_G \left( \int_0^\delta \left| f_+^\delta \left( \frac{\zeta}{\delta}, \eta \right) \right|^p d\zeta \right) d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \delta^{-\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega_+^\delta} \left| g_+^\delta (\zeta, \eta) \right|^p d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \delta^{-\frac{1}{p}} \cdot \left\| g_+^\delta \right\|_{L^p\left(\Omega_+^\delta\right)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \left\| v_-^\delta - v_- \right\|_{L^p(\Omega_-)} \\
\leqslant \; & C \cdot \delta \left( \left\| g_-^\delta \right\|_{L^p(\Omega_-)} + \delta^{-\frac{1}{p}} \left\| g_+^\delta \right\|_{L^p\left(\Omega_+^\delta\right)} \right) \\
& + C \left( \left\| g_-^\delta - g_- \right\|_{L^p(\Omega_-)} + \left\| m_+^\delta - m \right\|_{L^p(G)} \right).
\end{aligned}$$

$(ii)$ Montrons que

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \delta^{-\frac{1}{p}} \left\| v_+^\delta - v_+ \right\|_{L^p\left(\Omega_+^\delta\right)} = 0,$$

et

$$\begin{aligned}
& \delta^{-\frac{1}{p}} \left\| v_+^\delta - v_+ \right\|_{L^p\left(\Omega_+^\delta\right)} \\
\leqslant\ & C \cdot \delta \left( \left\| g_-^\delta \right\|_{L^p(\Omega_-)} + \delta^{-\frac{1}{p}} \left\| g_+^\delta \right\|_{L^p\left(\Omega_+^\delta\right)} \right) \\
& + C \left( \left\| g_-^\delta - g_- \right\|_{L^p(\Omega_-)} + \left\| m_+^\delta - m \right\|_{L^p(G)} \right).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \longrightarrow 0} \delta^{-\frac{1}{p}} \left\| v_+^\delta - v_+ \right\|_{L^p\left(\Omega_+^\delta\right)} &= \lim_{\delta \longrightarrow 0} \left( \frac{1}{\delta} \int_G \left( \int_0^\delta \left| v_+^\delta (\zeta,\eta) - v_+ (\eta) \right|^p d\zeta \right) d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{\delta \longrightarrow 0} \left( \frac{1}{\delta} \int_G \left( \int_0^\delta \left| u_+^\delta \left( \frac{\zeta}{\delta},\eta \right) - v_+ (\eta) \right|^p d\zeta \right) d\eta \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

on pose

$$\frac{\zeta}{\delta} = x \text{ et } \eta = y,$$

alors

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \longrightarrow 0} \delta^{-\frac{1}{p}} \left\| v_+^\delta - v_+ \right\|_{L^p\left(\Omega_+^\delta\right)} &= \lim_{\delta \longrightarrow 0} \left( \int_G \left( \int_0^1 \left| u_+^\delta (x,y) - u_+ (y) \right|^p dx \right) \ dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{\delta \longrightarrow 0} \left\| u_+^\delta - u_+ \right\|_{L^p(\Omega_+)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et de plus on a :

$$\begin{aligned}
\delta^{-\frac{1}{p}} \left\| v_+^\delta - v_+ \right\|_{L^p\left(\Omega_+^\delta\right)} &= \left\| u_+^\delta - u_+ \right\|_{L^p(\Omega_+)} \\
&\leqslant C \cdot \delta \left( \left\| g_-^\delta \right\|_{L^p(\Omega_-)} + \delta^{-\frac{1}{p}} \cdot \left\| g_+^\delta \right\|_{L^p\left(\Omega_+^\delta\right)} \right) \\
&\quad + C \left( \left\| g_-^\delta - g_- \right\|_{L^p(\Omega_-)} + \left\| m_+^\delta - m \right\|_{L^p(G)} \right).
\end{aligned}$$

$(iii)$ Le problème (2), et le problème (3) coinside dans $\Omega_-$ alors $v_- = u_-$ est une solution forte du problème

$$\begin{cases}
-\Delta v_- = g_- & \text{sur } \ \Omega_- \\
v_- = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\
\partial_\zeta v_- (0,\cdot) - \Delta_\eta v_- (0,\cdot) = m & \text{sur } \ G.
\end{cases}$$

■

## 4.2 Solution stricte :

**Théorème 4.3** *Pour* $g_-^\delta \in W^{2\theta,p} (\Omega_-)$ *et* $g_+^\delta \in W^{2\theta,p} \left(\Omega_+^\delta\right)$ *telle que* $0 < \theta < \frac{1}{2}$, *alors* $v^\delta$ *est une solution stricte satisfié*

1. $v^\delta \in L^p\left(-1,\delta; W^{2,p}(G)\cap W_0^{1,p}(G)\right)$,
2. $v_-^\delta \in W^{2,p}(-1,0;L^p(G))$,
3. $v_+^\delta \in W^{2,p}(0,\delta;L^p(G))$,
4. $\Delta_\eta v^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_+^\delta\right)$, $\partial_\zeta^2 v_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ *et* $\partial_\zeta^2 v_+^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_+^\delta\right)$.

**Preuve.** :Montrons que $v^\delta$ est une solution stricte.

On doit prouver que $f^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_+)$.

Soit $g_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-)$,et $g_+^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_+^\delta\right)$, on a

$$f_-^\delta = g_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-).$$

Pour $g_+^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_+^\delta\right)$,on a

$$\left\|f_+^\delta\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_+)}^p = \left\|f_+^\delta\right\|_{L^p(\Omega_+)}^p + \left[f_+^\delta\right]_{2\theta,p,\Omega_+},$$

d'aprés le théorème précédent on a :

$$\left\|f_+^\delta\right\|_{L^p(\Omega_+)}^p < \infty,$$

Donc pour montrer que $\left\|f_+^\delta\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_+)}^p < \infty$ il suffit montrer que $\left[f_+^\delta\right]_{2\theta,p,\Omega_+} < \infty$.

On a

$$\begin{aligned}
\left[f_+^\delta\right]_{2\theta,p,\Omega_+} &= \int\int_{\Omega_+\times\Omega_+} \frac{\left|f_+^\delta(x,y) - f_+^\delta(x',y')\right|^p}{\|(x,y)-(x',y')\|^{2\theta p+n}} dx\ dy\ dx'\ dy' \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left(\int_{G\times G} \frac{\left|g_+^\delta(\delta x,y) - g_+^\delta(\delta x',y')\right|^p}{\|(x,y)-(x',y')\|^{2\theta p+n}} dy\ dy\right) dx\ dx'.
\end{aligned}$$

On pose $\delta x = \zeta$, $y = \eta$, $\delta x' = \zeta'$, $y' = \eta'$, donc

$$\begin{aligned}
\left[f_+^\delta\right]_{2\theta,p,\Omega_+} &= \frac{1}{\delta^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \left(\int_{G\times G} \frac{\left|g_+^\delta(\zeta,\eta) - g_+^\delta(\zeta',\eta')\right|^p}{\|(\zeta,\eta)-(\zeta',\eta')\|^{2\theta p+n}} d\eta\ d\eta'\right) d\zeta\ d\zeta' \\
&\leqslant C(\delta)\int_{\Omega_+^\delta}\int_{\Omega_+^\delta} \frac{\left|g_+^\delta(\zeta,\eta) - g_+^\delta(\zeta',\eta')\right|^p}{\|(\zeta,\eta)-(\zeta',\eta')\|^{2\theta p+n}} d\eta\ d\eta' d\zeta\ d\zeta' \\
&\leqslant C(\delta)\cdot\left[g_+^\delta\right]_{2\theta,p,\Omega_+^\delta} < \infty,
\end{aligned}$$

alors

$$\left\|f_+^\delta\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_+)}^p = \left\|f_+^\delta\right\|_{L^p(\Omega_+)}^p + \left[f_+^\delta\right]_{2\theta,p,\Omega_+} < \infty,$$

donc

$$f_+^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_+).$$

On a, pour $g^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega^\delta\right)$ alors $f^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega)$ d'prés le théorème 3.3.5 il existe une solution stricte $u^\delta$ du problème (3), donc il existe une solution stricte $v^\delta$du problème(2) et de plus on a :

1. $u^\delta \in L^p\left(-1,1; W^{2,p}(G)\cap W_0^{1,p}(G)\right)$ alors $v^\delta \in L^p\left(-1,\delta; W^{2,p}(G)\cap W_0^{1,p}(G)\right)$,
2. $v_-^\delta = u_-^\delta \in W^{2,p}(-1,0;L^p(G))$,

3. $u_+^\delta \in W^{2,p}(0,1;L^p(G))$ alors $v_+^\delta \in W^{2,p}(0,\delta;L^p(G))$,
4. $\Delta_\eta u^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega)$ alors $\Delta_\eta v^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_+^\delta\right)$,
5. $\partial_\zeta^2 v_-^\delta = \partial_\zeta^2 u_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-)$,
6. $\dfrac{1}{\delta^2}\partial_\zeta^2 u_+^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_+)$ alors $\partial_\zeta^2 v_+^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega_+^\delta\right)$.

■

**Théorème 4.4** *:Soit* $g^\delta \in W^{2\theta,p}\left(\Omega^\delta\right)$ *avec* $1 < p < \infty$, *et* $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *telle que :*

1. $g_-^\delta$ *tend vers* $g_-$ *dans* $W^{2\theta,p}(\Omega_-)$ *quand* $\delta \longrightarrow 0$,
2. *il existe une constante* $M > 0$ *telle que pour* $\delta > 0$
$$\left\|g_+^\delta(\delta\cdot,\cdot)\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_+)} \leq M,$$
3. $\dfrac{1}{\delta}\int_0^\delta g_+^\delta(\zeta,\cdot)\,d\zeta = m_+^\delta$ *tend vers* $m$ *dans* $W^{2\theta,p}(G)$ *quand* $\delta \longrightarrow 0$.
   (a) *Alors* $(v_-,v_+) \in W^{2,p}(\Omega_-) \times W^{2,p}(G)$, *et*
   *pour* $\eta \in G$
$$v_+(\eta) = v_-(0,\eta),$$
   (b) $\lim\limits_{\delta\longrightarrow 0}\left\|v_-^\delta - v_-\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_-)} = 0$, *et*
$$\begin{aligned}&\left\|v_-^\delta - v_-\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_-)}\\ \leqslant\ & C\cdot\delta\left(\left\|g_-^\delta\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_-)} + \left\|g_+^\delta(\delta\cdot,\cdot)\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_+)}\right)\\ &+C\left(\left\|g_-^\delta - g_-\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_-)} + \left\|m_+^\delta - m\right\|_{W^{2\theta,p}(G)}\right).\end{aligned}$$
   (c) $\lim\limits_{\delta\longrightarrow 0}\left\|v_+^\delta(\delta\cdot,\cdot) - v_+\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_+)} = 0$,
   (d) $v_-$ *est une unique solution stricte du problème*
$$\begin{cases}-\Delta v_- = g_- & \textit{sur}\ \ \Omega_-\\ v_- = 0 & \textit{sur}\ \ \partial\Omega_-\setminus\Gamma^0\\ \partial_\zeta v_-(0,\cdot) - \Delta_\eta v_-(0,\cdot) = m & \textit{sur}\ \ G.\end{cases}$$

**Preuve.** On a
$$g_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-) \text{ alors } f_-^\delta \in W^{2\theta,p}(\Omega_-),$$
et
$$\begin{aligned}\left\|f_+^\delta\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_+)} &= \left\|g_+^\delta(\delta\cdot,\cdot)\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_+)} \leqslant M\\ \int_{\Omega_+}\left|f_+^\delta(x,y)\right|^p dx\,dy &= \frac{1}{\delta}\int_{\Omega_+^\delta}\left|g_+^\delta(\zeta,\eta)\right|^p d\zeta\,d\eta < M,\end{aligned}$$
alors il existe $(u_-,u_+) \in W^{2,p}(\Omega_-) \times W^{2,p}(G)$ telle que
$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\left(u_\pm^\delta - u_\pm\right) = 0 \ \textit{dans}\ W^{1+2\theta,p}(\Omega_\pm),$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\|u_{\pm}^{\delta}-u_{\pm}\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_{\pm})}\\
\leqslant\ & C\cdot\delta\left(\left\|f_{-}^{\delta}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})}+\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{+})}\right)\\
&+C\left(\left\|f_{-}^{\delta}-f_{-}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})}+\left\|m_{+}^{\delta}-m\right\|_{W^{2\theta,p}(G)}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$v_{-}=u_{-}\in W^{2,p}\left(\Omega_{-}\right) \text{ et } v_{+}^{\delta}\in W^{2,p}\left(G\right),$$

alors

$$\left(v_{-},v_{+}\right)W^{2,p}\left(\Omega_{-}\right)\times W^{2,p}\left(G\right).$$

$(i)$ Montrons que pour $\eta\in G$ $v_{-}\left(0,\eta\right)=v_{+}\left(\eta\right)$.
Soit $\eta\in G$ on a

$$\begin{aligned}
v_{-}\left(0,\eta\right) &= u_{-}\left(0,\eta\right)\\
&= u_{+}\left(\eta\right)\\
&= v_{+}\left(\eta\right).
\end{aligned}$$

$(ii)$On a :

$$\lim_{\delta\longrightarrow0}\left\|v_{-}^{\delta}-v_{-}\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_{-})}=\lim_{\delta\longrightarrow0}\left\|u_{-}^{\delta}-u_{-}\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_{-})}=0,$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\left\|v_{-}^{\delta}-v_{-}\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_{-})} &= \left\|u_{-}^{\delta}-u_{-}\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_{-})}\\
&\leqslant C\cdot\delta\left(\left\|f_{-}^{\delta}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})}+\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{+})}\right)\\
&\quad+C\left(\left\|f_{-}^{\delta}-f_{-}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})}+\left\|m_{+}^{\delta}-m\right\|_{W^{2\theta,p}(G)}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left\|f_{-}^{\delta}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})} &= \left\|g_{-}^{\delta}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})}\\
\left\|f_{-}^{\delta}-f_{-}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})} &= \left\|g_{-}^{\delta}-g_{-}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})},
\end{aligned}$$

et de plus on a

$$f_{+}^{\delta}\left(x,y\right)=g_{+}^{\delta}\left(\delta x,y\right),$$

alors

$$\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{+})}=\left\|g_{+}^{\delta}\left(\delta\cdot,\cdot\right)\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{+})},$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left\|v_{-}^{\delta}-v_{-}\right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_{-})}\\
\leqslant\ & C\cdot\delta\left(\left\|g_{-}^{\delta}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})}+\left\|g_{+}^{\delta}\left(\delta\cdot,\cdot\right)\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{+})}\right)\\
&+C\left(\left\|g_{-}^{\delta}-g_{-}\right\|_{W^{2\theta,p}(\Omega_{-})}+\left\|m_{+}^{\delta}-m\right\|_{W^{2\theta,p}(G)}\right).
\end{aligned}$$

$(iii)$

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \left\| v_+^\delta (\delta \cdot, \cdot) - v_+ \right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_+)} = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \left\| u_+^\delta - u_+ \right\|_{W^{1+2\theta,p}(\Omega_+)} = 0.$$

$(iv)$ On a $v_- = u_-$ est une solution stricte du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_- = g_- & \text{sur} \quad \Omega_- \\ v_- = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ \partial_\zeta v_- (0, \cdot) - \Delta_\eta v_- (0, \cdot) = m & \text{sur} \quad G. \end{cases}$$

■

# Chapitre 5

# Problème de Transmission abstrait

## 5.1 Position du problème :

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \left(v^{\delta}\right)''(x) + Av^{\delta}(x) = g^{\delta}(x) \ \text{ si } x \in \left]-1, \delta\right[ \\ v^{\delta}(-1) = 0 \\ \left(v^{\delta}\right)'(\delta) = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $A$ est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans un espace de Banach complexe $E$, $\delta$ est un paramètre fixe dans $]0,1[$ et $g^{\delta}$ est une fonction telle que

$$g^{\delta} = \begin{cases} g^{\delta}_{\diagup ]-1,0[} = g^{\delta}_{-} \in L^{p}\left((-1,0);E\right) \\ g^{\delta}_{\diagup ]0,\delta[} = g^{\delta}_{+} \in L^{p}\left((0,\delta);E\right), \end{cases}$$

avec $1 < p < \infty$ etOn suppose l'hypothèse d'ellipticité suivante

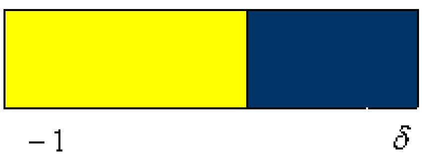
$$\rho(A) \supset [0,+\infty[ \ \text{ et } \exists C > 0 : \forall \lambda > 0, \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C}{1 + |\lambda|},$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de $A$.

Cette h'ypothèse implique qu'il existe $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $r_0 > 0$ telle que

$$\rho(A) \supset S_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |\arg(z)| \leqslant \theta_0\} \cup \overline{B(0, r_0)}.$$

On se propose d'étudier le problème (5.1) en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs linéaire de Da prato et Grisvard (cadre commutatif), pour obtenir des résultats d'existence,



d'unicité et de régularité de la solution.En supposant que

$$v^{\delta}=\begin{cases} v_{-}^{\delta} & \text{sur} \quad ]-1,0[ \\ v_{+}^{\delta} & \text{sur} \quad ]0,\delta[\,, \end{cases}$$

alors le problème (5.1) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \left(v_{+}^{\delta}\right)''(x)+Av_{+}^{\delta}(x)=g_{+}^{\delta}(x) & \text{sur} \quad ]0,\delta[ \\ \left(v_{-}^{\delta}\right)''(x)+Av_{-}^{\delta}(x)=g_{-}(x) & \text{sur} \quad ]-1,0[\,, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} v_{-}^{\delta}(-1)=0 \\ \left(v_{+}^{\delta}\right)'(\delta)=0, \end{cases}$$

et les conditions de transmission

$$\begin{cases} v_{-}^{\delta}(0)=v_{+}^{\delta}(0) \\ \left(v_{-}^{\delta}\right)'(0)=\dfrac{1}{\delta}\left(v_{+}^{\delta}\right)'(0)\,, \end{cases}$$

il est difficile d'appliqué la théorie des sommes d'opérateurs linéaires (cadre commutatif) directement à ce problème, car le domaine dépend de $\delta$.

Pour fixe le domaine, on a :

soit $\phi^{\delta}$ une fonction telle que

$$\begin{aligned} \phi^{\delta}\colon \Omega \quad &= \quad ]-1,1[\longrightarrow \Omega^{\delta}=]-1,\delta[ \\ x \quad &\mapsto \quad \phi^{\delta}(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[-1,0] \\ \delta x & \text{si } x\in[0,1]\,. \end{cases} \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} u^{\delta}=v^{\delta}\circ\phi^{\delta} \\ f^{\delta}=g^{\delta}\circ\phi^{\delta}, \end{cases}$$

on obtient, donc

$$\begin{aligned} & u^{\delta}\colon \Omega \xrightarrow{\phi^{\delta}} \Omega^{\delta} \xrightarrow{v^{\delta}} \mathbb{R} \\ x \quad \longrightarrow \quad & u^{\delta}(x)=v^{\delta}\circ\phi^{\delta}(x)=\begin{cases} u_{-}^{\delta}(x)=v_{-}^{\delta}(x) & \text{si } x\in[-1,0] \\ u_{+}^{\delta}(x)=v_{+}^{\delta}(\delta x) & \text{si } x\in[0,1]\,, \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$f^{\delta}=g^{\delta}\circ\phi^{\delta},$$

donc

$$\begin{aligned} & f^{\delta}\colon \Omega \xrightarrow{\phi^{\delta}} \Omega^{\delta} \xrightarrow{g^{\delta}} \mathbb{R} \\ x \quad \rightarrowtail \quad & f^{\delta}(x)=g^{\delta}\circ\phi^{\delta}(x)=\begin{cases} f_{-}^{\delta}(x)=g_{-}^{\delta}(x) & \text{si } x\in[-1,0] \\ f_{+}^{\delta}(x)=g_{+}^{\delta}(\delta x) & \text{si } x\in[0,1]\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement le problème (5.1) devient

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\delta^2}\left(u_+^\delta\right)'' + Au_+^\delta(x) = f_+^\delta(x) & \text{sur} \quad ]0,\delta[ \\ \left(u_+^\delta\right)'' + Au_-^\delta(x) = f_-(x) & \text{sur} \quad ]-1,0[\,, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_-^\delta(-1) = 0 \\ \left(u_+^\delta\right)'(1) = 0, \end{cases}$$

et les conditions de transmission

$$\begin{cases} u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0) \\ \left(u_-^\delta\right)'(0) = \dfrac{1}{\delta^2}\left(u_+^\delta\right)'(0)\,. \end{cases}$$

On défini l'opérateur $B_\delta$ tel que

$$D(B_\delta) = \left\{ \begin{array}{l} \omega \in L^p(-1,1;E) : \omega_-^\delta \in W^{2,p}(-1,0;E)\,, \omega_+^\delta \in W^{2,p}(0,1;E) \\ \omega_-^\delta(-1) = 0, \omega_-^\delta(0) = \omega_+^\delta(0)\,,\ \left(\omega_+^\delta\right)'(0) = \dfrac{1}{\delta^2}\left(\omega_+^\delta\right)'(0)\,,\ \left(\omega_+^\delta\right)'(1) = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left(B_\delta\omega^\delta\right)(x) = \partial_x\left(a_\delta(x)\left(\omega_+^\delta\right)'\right)(x)\,, \text{ avec } x \in [-1,1]\,, \text{ et } \omega^\delta \in D(B_\delta)\,,$$

avec

$$a_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]-1,0[ \\ \dfrac{1}{\delta^2} & \text{si } x \in ]0,1[\,, \end{cases}$$

par conséquent le problème s'écrit sous la forme

$$Au^\delta + B_\delta u^\delta = f^\delta.$$

Dans la section suivante, on montre que les opérateurs $A$ et $B_\delta$ verifient les hypothèses de Da prato-Grisvard.

## 5.2 Vérification des hypothèses $(DG0)$ $(DG1)$ $(DG2)$

**Calcul de la résolvante de l'opérateur $B_\delta$.**
soit

$$\sum_{\beta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg\lambda| > \beta_0\}\,,$$

avec $\beta_0$ fixé dans $]0,\pi[$.
Pour $\lambda \in \sum_{\beta_0}$,on considère le problème aux limites et de transmission

$$\begin{cases} \left(u_-^\delta\right)''(x) + \lambda u_-^\delta(x) = f_-^\delta(x) & \text{si } x \in ]-1{,}0[ \\ \dfrac{1}{\delta^2}\left(u_+^\delta\right)''(x) + \lambda u_+^\delta(x) = f_+^\delta(x) & \text{si } x \in ]0{,}1[ \\ u_-^\delta(-1) = 0,\ \left(u_+^\delta\right)'(1) = 0 & \\ u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0)\,,\ \left(u_-^\delta\right)'(0) = \dfrac{1}{\delta^2}\left(u_+^\delta\right)'(0)\,, & \end{cases}$$

comme au chapitre 2, section 2, la résolvante de l'opérateur $B_\delta$ est donne par

$$\begin{aligned}
u_-^\delta(x) &= -\int_{-1}^{0} H^-_{\sqrt{-\lambda},\delta}(x,s)\, f_-^\delta(s)\, ds \\
&\quad -\int_0^1 \frac{\delta \sinh \sqrt{-\lambda}\,(1+x)}{\sqrt{-\lambda}\left[\sinh\sqrt{-\lambda}\cdot \sinh\sqrt{-\lambda}\delta + \delta\cosh\sqrt{-\lambda}\cdot\cosh\sqrt{-\lambda}\delta\right]} \cosh\sqrt{-\lambda}\delta\,(1-s)\, f_+^\delta(s)\, ds \\
&= -\left(K^-_{\sqrt{-\lambda},\delta} f_-^\delta\right)(x) - \left(T^-_{\sqrt{-\lambda},\delta} f_+^\delta\right)(x),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_+^\delta(x) &= -\int_0^1 N^+_{\sqrt{-\lambda},\delta}(x,s)\, f_+^\delta(s)\, ds \\
&\quad -\int_{-1}^{0} \frac{\delta\cosh\sqrt{-\lambda}\delta\,(x-1)}{\sqrt{-\lambda}\left(\sinh\sqrt{-\lambda}\cdot\sinh\sqrt{-\lambda}\delta + \delta\cosh\sqrt{-\lambda}\cdot\cosh\sqrt{-\lambda}\delta\right)} \sinh\sqrt{-\lambda}\,(1+s)\, f_-^\delta(s)\, ds \\
&= -\left(T^+_{\sqrt{-\lambda},\delta} f_+^\delta\right)(x) - \left(K^+_{\sqrt{-\lambda},\delta} f_-^\delta\right)(x),
\end{aligned}$$

où les noyaux sont donnés par

$$H^-_{\sqrt{-\lambda},\delta}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\Delta_-\left(\sqrt{-\lambda},\delta,x\right)}{\sqrt{-\lambda}\Delta_0\left(\sqrt{-\lambda},\delta\right)} \sinh\sqrt{-\lambda}\,(s+1) & \text{si} \quad -1 < s \le x \\[2ex] \dfrac{\Delta_-\left(\sqrt{-\lambda},\delta,s\right)}{\sqrt{-\lambda}\Delta_0\left(\sqrt{-\lambda},\delta\right)} \sinh\sqrt{-\lambda}\,(x+1) & \text{si} \quad x \le s < 0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \Delta_0\left(\sqrt{-\lambda},\delta\right) = \sinh\sqrt{-\lambda}\cdot\sinh\sqrt{-\lambda}\delta + \delta\cosh\sqrt{-\lambda}\cdot\cosh\sqrt{-\lambda}\delta \\ \Delta_-\left(\sqrt{-\lambda},\delta,\xi\right) = -\sinh\sqrt{-\lambda}\xi\cdot\sinh\sqrt{-\lambda}\delta + \delta\cosh\sqrt{-\lambda}\xi\cdot\cosh\sqrt{-\lambda}\delta. \end{cases}$$

et

$$N^+_{\sqrt{-\lambda},\delta}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\Delta_+\left(\sqrt{-\lambda},\delta,s\right)}{\sqrt{-\lambda}\Delta_0\left(\sqrt{-\lambda},\delta\right)} \sinh\sqrt{-\lambda}\,(s+1) & \text{si} \quad -1 < s < x \\[2ex] \dfrac{\Delta_+\left(\sqrt{-\lambda},\delta,x\right)}{\sqrt{-\lambda}\Delta_0\left(\sqrt{-\lambda},\delta\right)} \sinh\sqrt{-\lambda}\,(x+1) & \text{si} \quad x < s < 0, \end{cases}$$

avec

$$\Delta_+\left(\sqrt{-\lambda},\delta,\xi\right) = \delta\left(\sinh\sqrt{-\lambda}\cdot\cosh\sqrt{-\lambda}\delta\xi + \delta\cosh\sqrt{-\lambda}\cdot\sinh\sqrt{-\lambda}\delta\xi\right).$$

De la même manière qu'au chapitre 2, on peut montrer que l'opérateur $B_\delta$ est vérifie les hypothèses $(DG0)$ et $(DG1)$.

Pour l'hypothèse $(DG2)$, on a

Soient $\zeta \in \rho(A)$ et $\eta \in \rho(B_\delta)$ montrons que

$$(A-\zeta I)^{-1}\cdot(B+\eta I)^{-1} = (B+\eta I)^{-1}\cdot(A-\zeta I)^{-1}.$$

$(i)$ Pour $x \in [-1, 0]$ et $h \in L^p(-1, \delta)$ on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left((A - \zeta I)^{-1} \cdot (B + \eta I)^{-1} h\right)(x) \\
= \ & (A - \zeta I)^{-1} \left[(B + \eta I)^{-1} h\right](x) \\
= \ & (A - \zeta I)^{-1} \left[(B + \eta I)^{-1} h(x)\right] \\
= \ & (A - \zeta I)^{-1} \left[-\int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, h_{-}(s)\, ds - \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, h_{+}(s)\, ds\right] \\
= \ & -\int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, (A - \zeta I)^{-1} h_{-}(s)\, ds - \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, (A - \zeta I)^{-1} h_{+}(s)\, ds,
\end{aligned}
$$

et de plus

$$
\begin{aligned}
& \left((B + \eta I)^{-1} \cdot (A - \zeta I)^{-1} h\right)(x) \\
= \ & (B + \eta I)^{-1} \left[(A - \zeta I)^{-1} h\right](x) \\
= \ & (B + \eta I)^{-1} \left[(A - \zeta I)^{-1} h(x)\right] \\
= \ & \left[-\int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, h_{-}(s)\, ds - \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, h_{+}(s)\, ds\right] (A - \zeta I)^{-1} \\
= \ & -\int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, (A - \zeta I)^{-1} h_{-}(s)\, ds - \int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{-}(x,s)\, (A - \zeta I)^{-1} h_{+}(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\left((A - \zeta I)^{-1} \cdot (B + \eta I)^{-1} h\right)(x) = \left((B + \eta I)^{-1} \cdot (A - \zeta I)^{-1} h\right)(x).$$

$(ii)$ Maintenant pour $x \in [0, 1]$ et $h \in L^p(-1, \delta)$, on a

$$
\begin{aligned}
& \left((A - \zeta I)^{-1} \cdot (B + \eta I)^{-1} h\right)(x) \\
= \ & (A - \zeta I)^{-1} \left[(B + \eta I)^{-1} h\right](x) \\
= \ & (A - \zeta I)^{-1} \left[(B + \eta I)^{-1} h(x)\right] \\
= \ & (A - \zeta I)^{-1} \left[-\int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, h_{+}(s)\, ds - \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, h_{-}(s)\, ds\right] \\
= \ & -\int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, (A - \zeta I)^{-1} h_{+}(s)\, ds - \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, (A - \zeta I)^{-1} h_{-}(s)\, ds,
\end{aligned}
$$

et de plus

$$
\begin{aligned}
& \left((B + \eta I)^{-1} (A - \zeta I)^{-1} h\right)(x) \\
= \ & (B + \eta I)^{-1} \left[(A - \zeta I)^{-1} h\right](x) \\
= \ & (B + \eta I)^{-1} \left[(A - \zeta I)^{-1} h(x)\right] \\
= \ & \left[-\int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, h_{+}(s)\, ds - \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, h_{-}(s)\, ds\right] (A - \zeta I)^{-1} \\
= \ & -\int_{0}^{1} N_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, (A - \zeta I)^{-1} h_{+}(s)\, ds - \int_{-1}^{0} H_{\rho,\delta}^{+}(x,s)\, (A - \zeta I)^{-1} h_{-}(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\left((A - \zeta I)^{-1} \cdot (B + \eta I)^{-1} h\right)(x) = \left((B + \eta I)^{-1} \cdot (A - \zeta I)^{-1} h\right)(x).$$

## 5.3 Representation de la solution.

On rappelle que,pour $\beta_0 \in ]0, \pi[$ et $r_0 > 0$, on a :$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_0}{2}$

$$\rho(A) \supset S_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |\arg(z)| \leqslant \theta_0\} \cup \overline{B(0, r_0)}.$$

La courbe $\Gamma$ est la frontière de $S_{\theta_0}$ orientée de $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$ Enutilisant les même technique qu'au chapitre 2 la solution du problème est donnée par

$$u^\delta = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (B_\delta - zI)^{-1} (A - zI)^{-1} f^\delta dz.$$

avec

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= \frac{-1}{2i\pi} \int_\Gamma (A - zI)^{-1} \left(K_{\rho,\delta}^- \left(f_-^\delta\right)(x)\right) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (A - zI)^{-1} \left(T_{\rho,\delta}^- \left(f_+^\delta\right)(x)\right), \end{aligned}$$

pour $x \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= \frac{-1}{2i\pi} \int_\Gamma (A - zI)^{-1} \left(K_{\rho,\delta}^+ \left(f_-^\delta\right)(x)\right) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (A - zI)^{-1} \left(T_{\rho,\delta}^+ \left(f_+^\delta\right)(x)\right) dz, \end{aligned}$$

pour $x \in [0, 1]$.

**Conclusion 5.1** (1) *On a vérifié les hypothèses* $(DG0)$, $(DG1)$ *et* $(DG2)$,*donc on peut appliquer la théorie des sommes d'opérateurs Da prato-Grisvard.On obtient donc des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution.on résoud ainsi une classe de problèmes de transmission.*

(2) *On peut aussi étudier le passage à la limite* $(\delta \to 0)$ *pour ce problème abstrait.*

*On obtiendra un problème de Sturm liouville abstrait.*

# Bibliographie


[1] Belhamiti O., Labbas R., Lemrabet K. and Medeghri A. : Study of boundary value and transmission problems in the Hölder spaces, Appl. Math. Comput (2008), doi :10.1016/J.AMC.2008.03.003.

[2] Da Prato G., Grisvard P. : Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54, pp 305-387, 1975.

[3] Caloz G., Costabel M., Dauge M. and Vial G. : Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. Asymptotic Analysis Vol. 50, n° 1/2, pp 121-173, 2006.

[4] Dore G., Favini A., Labbas R., Lemrabet K. and Maingot S. : A Transmission Problem in a Thin Layer, Part I, Sharp Estimates, to appear.

[5] Favini A., Labbas R., Lemrabet K. and Maingot S. : Study of The limit of Transmission Problems in a Thin Layer by The Sum Theory of Linear Operators, Rev. Mat. Complut. 18 ; Num 1,pp 143-176, 2005.

[6] Grisvard P. : Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, J. Math. pures et appl. 45, pp 143-290, 1966.

[7] Grisvard P. : Spazi di Tracce e Applicazioni, Rendiconti di Matematica (4) Vol. 5, série VI, p. 657-729, 1972.

[8] Lemrabet K. : Etude globale d'un problème de transmission dans un polygone ou un polyèdre, Thèse $3^{ème}$ cycle, Université de Nice, 1976.

[9] Lemrabet K. : Régularité de la solution d'un problème de transmission, J.Math. pures et appl.,56 ; pp 1-38, 1977.

[10] Lions J. L. : Théorème de trace et d'interpolation, I et II Annali. S. N. S. di Pisa, vol. 13, 1959, page 389-403 et vol. 14, pp 317-331, 1960.

[11] Lions J. L., Peetre J. : Sur une classe d'espace d'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., vol. 19, pp 5-86, 1964.

[12] Mercier D. : Problèmes de transmission sur des réseaux polygonaux pour des systèmes d'EDP, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 6ème série, tome 10, n°1, p. 107-162, 2001.

[13] Nicaise S. : Polygonal interface problems, Séries "Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik", 39,. Peter Lang Verlag, 1993.

[14] Rakotoson J. E. et Rakotoson J. M. : Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles, Presses Universitaires De France, 1999.