



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES & DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Option : Analyse Harmonique et E.D.P.

Intitulé

*Caractérisation d'un Majorant Minimal de deux
Opérateurs Positifs.*

Présenté par
Tarek Kheir-eddine BACHA

Devant le jury :

Président :	Sidi Mohamed BAHRI	M.C.A U. Mostaganem
Examinatrice :	Kheira LIMAM	M.C.B U. Mostaganem
Encadreur :	Mohand OULD ALI	M.C.B U. Mostaganem

Année Universitaire : 2013-2014

Remerciements

Je ne remerciais jamais assez tous mes enseignants, qui grâce à eux j'ai pu achever mon cycle universitaire durant ces années d'études.

De ce fait je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon encadreur pour avoir proposé et dirigé ce thème avec une grande disponibilité.

Mes remerciements s'adressent également aux membres de jury qui ont accepté d'examiner cet humble travail.

Sans oublier ma famille et mes amis pour tout leurs soutien et encouragement.

Résumé

On s'intéresse dans ce mémoire à déterminer l'ensemble des majorants minimaux de deux opérateurs positifs en proposant une caractérisation de tout opérateur de cet ensemble, qui nous permet de le définir comme suit :

$$\mathcal{M}_{(A,B)} = \{T \in \mathcal{B}(H) : 0 \leq A, B \leq T \text{ et } \text{Im}(\sqrt{T-A}) \cap \text{Im}(\sqrt{T-B}) = \{0\}\}$$

Table des matières

Résumé	ii
Introduction	iv
1 Rappel	1
1.1 Produit scalaire, norme, espace de Hilbert	1
1.2 Opérateurs bornés	3
2 Opérateurs positifs	7
2.1 Définition	7
2.2 Somme finie d'opérateurs positifs	7
2.3 Propriétés	8
2.4 Racine carrée d'un opérateur positif.	12
2.4.1 Convergence des suites d'opérateurs positifs majorées par l'identité .	13
2.4.2 Construction de la racine carrée :	17
3 Tenseurs	22
3.1 Définition	22
3.2 Propriétés	23
4 Caractérisation d'un majorant minimal	28
Conclusion	37
Bibliographie	38

Introduction

En analyse fonctionnelle, la classe des opérateurs positifs est un outil essentiel à l'étude de différents problèmes de la théorie des opérateurs. Cette importance a été confirmée par plusieurs travaux de recherche, nous citerons par exemple les articles suivants :

- (**R. Bellman, R Kalaba** [8]) qui ont donnés le lien entre les opérateurs positifs ; la programmation dynamique et la théorie du contrôle.
- (**T. Ando** [5]) a donné des conditions sous lesquelles on peut généraliser la concavité et la convexité de certaines applications pour les matrices définies positives.

La notion d'opérateurs positifs est définie par une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des opérateurs bornés, ce qui nous ramène à l'étude du concept du majorant.

Dans cette optique beaucoup de travaux ont été menés, nous citerons :

- (**R.G. Douglas** [10]) qui a montré l'existence d'une étroite relation entre les notions de majoration, factorisation et l'inclusion des images.
- (**W. N. Anderson, Jr. et G. E. Trapp** [4]) qui ont démontré l'existence de l'opérateur $L(A)$ qui est le suprémum de tous les opérateurs positifs inférieurs à A dans l'image est dans le sous espace vectoriel fixé S .
- (**C. Akmann et N. Weaver**[2]) où on démontre que la borne supérieure d'une famille $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs qui commute dans l'algèbre de Van Neumann qu'ils génèrent , n'est pas toujours un majorant minimal dans l'ensemble des opérateurs bornés $\mathcal{B}(H)$.
- (**A. Aslanov** [6]) qui a montré l'existence du majorant minimal de deux opérateurs positifs.

On s'intéresse dans ce travail à la détermination du majorant minimal T de deux opérateurs positifs A et B . Pour cela on se propose de trouver une caractérisation de T en se servant des images des opérateurs $\sqrt{T - A}$ et $\sqrt{T - B}$.

Notre manuscrit se compose de quatre chapitres dont le contenu est comme suit :

- Le chapitre 1 est consacré au rappel des différentes notions mathématiques dont on a besoin : Produit scalaire ; norme ; espace de Hilbert ; opérateurs bornés.
- Dans le chapitre 2 on donne une méthode pour montrer l'existence de la racine carrée d'un opérateur positif.
- Le chapitre 3 est réservé à l'étude des tenseurs, où on a montré l'équivalence entre les tenseurs et les opérateurs de rang 1 puis on a donné quelques propriétés.
- Dans le chapitre 4 on donne le résultat principal de notre travail qui consiste à caractériser l'ensemble des majorants minimaux de deux opérateurs positifs et cela en établissant le théorème suivant :

Théorème 0.1 *Soient A, B deux opérateurs positifs et T un majorant de A et B . Alors :*

$$T \text{ est minimal si et seulement si } \operatorname{Im}(\sqrt{T - A}) \cap \operatorname{Im}(\sqrt{T - B}) = \{0\}.$$

Chapitre 1

Rappel

1.1 Produit scalaire, norme, espace de Hilbert

Définition 1.1

Soit X un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire sur X noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire, hermitienne, définie positive :

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

i) Sesquilinéaire :

Pour tout $x, y, z \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ &\text{et} \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \cdot \langle x, y \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \bar{\lambda} \cdot \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

ii) Hermitienne :

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$$

iii) Définie positive :

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \quad \forall x \in H \\ &\text{et} \\ \langle x, x \rangle &= 0 \iff x = 0_X \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Définition 1.2

On appelle norme sur X noté $\|\cdot\|_X$, toute application de X dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

- i) $\forall x \in X : \|x\|_X = 0 \iff x = 0_X$.
- ii) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X$.
- iii) $\forall x, y \in X : \|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$.

Remarque 1.1 Pour tout produit scalaire sur X , on peut associer la norme :

$$\|\cdot\|_X = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_X}$$

Définition 1.3

Soient X un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_X$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans X .

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \geq N_0 : \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$$

Si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge dans X , alors X est dit complet et il est appelé espace de Banach.

Définition 1.4

Un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace de Hilbert si et seulement si il est complet.

Lemme 1.1 Soient H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs telles que :

$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ et $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_0$. Alors :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_H = \|\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\|_H = \|x_0\|_H$.

Preuve.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$|\langle x_n - x_0, y_n - y_0 \rangle| \leq \|x_n - x_0\|_H \|y_n - y_0\|_H \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{car } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_0$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x_0, y_n - y_0 \rangle = 0$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x_0, y_n - y_0 \rangle = 0 &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} [\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle] = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right\rangle \end{aligned}$$

2. Pour montrer cela il suffit d'utiliser l'égalité $\|x_n\|_H^2 = \langle x_n, x_n \rangle_H$ et le premier résultat.

■

1.2 Opérateurs bornés

Définition 1.5

Soient X et Y deux espaces vectoriels, une relation $A(x) = y$ est dite opérateur si et seulement si :

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y : A(x) = y$$

On considère les notations suivantes :

- $D(A)$: L'ensemble des vecteurs $x \in X$ pour lesquels il existe une image $y \in Y$.
- $\text{Im}(A)$: L'ensemble des images c'est-à-dire :

$$\text{Im}(A) = \{y \in Y; y = A(x), x \in D(A)\}$$

- $\ker(A)$: Le noyau de A défini comme suit :

$$\ker(A) = \{x \in X : A(x) = 0_Y\}$$

Définition 1.6

Soient X et Y deux $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels, un opérateur A de X dans Y est dit linéaire si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X : & \quad A(x + y) = A(x) + A(y) \\ \text{et} & \\ \forall \alpha \in \mathbb{C} : & \quad A(\alpha x) = \alpha \cdot A(x) \end{aligned}$$

L'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y est noté $\mathcal{L}(X, Y)$

Définition 1.7

Soient X et Y deux espaces de Hilbert, un opérateur A de X dans Y est dit borné si et seulement si :

$$\sup_{x \in X} \|A(x)\|_Y < \infty$$

L'ensemble des opérateurs bornés de X dans Y est noté $\mathcal{B}(X, Y)$ ou $\mathcal{B}(X)$ si $X = Y$.

Remarque 1.2

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|A(x)\|_Y < \infty \iff \sup_{x \in X} \|A(x)\| < \infty$$

Proposition 1.1

Soient X et Y deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors A est borné si et seulement si :

$$\forall x \in X, \exists \alpha_{(x)} > 0 : \|A(x)\|_Y \leq \alpha_{(x)} \|x\|_X$$

Preuve.

- Supposons que A est borné alors :

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|A(x)\|_Y < \infty \implies \forall x \in X : \|x\|_X \leq 1, \exists \alpha_{(x)} > 0 : \|A(x)\|_Y \leq \alpha_{(x)} < \infty.$$

Soit $x \in X$ tel que $x \neq 0$ et $v = \frac{x}{\|x\|_X} \in X$. Comme $\|v\| = 1$, alors :

$$\exists \alpha_{(x)} > 0 : \|A(v)\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X} \|A(x)\|_Y \leq \alpha_{(x)} < \infty$$

D'où :

$$\forall x \in X \setminus \{0\}, \exists \alpha_{(x)} > 0 : \|A(x)\|_Y \leq \alpha_{(x)} \|x\|_X$$

Et ceci est toujours vérifié pour $x = 0$ car $\|A(0)\|_Y = 0 \leq \alpha \cdot \|0\|_X \forall \alpha > 0$

- Réciproquement si pour tout $x \in X$ il existe $\alpha_{(x)} > 0$ tel que :

$\|A(x)\|_Y \leq \alpha_{(x)} \|x\|_X$, alors pour $x \in \{X : \|x\| \leq 1\}$ on a :

$$\|A(x)\|_Y \leq \alpha_{(x)} < \infty \implies \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_Y \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \alpha_{(x)} < \infty$$

Donc A est borné. ■

Proposition 1.2

Soient X et Y deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) A est borné.
- ii) A est continu sur tout X .
- iii) A est continu en $x = 0_X$.

Preuve.

i) $\implies$ ii) Soient $x, x_0 \in X$ tels que $\|x - x_0\|_X < \delta$ avec $\delta > 0$. Comme A est borné alors il existe $\alpha_{(x-x_0)} > 0$ tel que :

$$\|A(x) - A(x_0)\|_Y = \|A(x - x_0)\|_Y \leq \alpha_{(x-x_0)} \|x - x_0\|_X < \alpha_{(x-x_0)} \cdot \delta = \varepsilon.$$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha_{(x-x_0)}} > 0$ tel que :

$$\|x - x_0\|_X < \delta \implies \|A(x) - A(x_0)\|_Y < \varepsilon$$

D'où la continuité de A sur tout X .

ii) $\implies$ iii) Comme A est continu sur tout X alors il est continu en $x = 0_X$.

iii) $\implies$ i) Comme A est continu en $x = 0_X$, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon, x)} > 0 \text{ tel que : } \|x\|_X < \delta_{(\varepsilon, x)} \implies \|A(x)\|_Y < \varepsilon.$$

Donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta_{(x)} > 0$ tel que : $\|x\|_X < \delta_{(x)} \implies \|A(x)\|_Y < 1$.

Soit $x \in X$ tel que $x \neq 0_X$ et posons $y = (\frac{\delta_{(x)}}{2\|x\|_X}) \cdot x$. Alors $\|y\|_X = \frac{\delta_{(x)}}{2} < \delta_{(x)}$

Donc on a :

$$\|A(y)\|_Y = \frac{\delta_{(x)}}{2\|x\|_X} \|A(x)\|_Y < 1$$

D'où

$$\forall x \in X; x \neq 0_X : \|A(x)\|_X < C_{(x)} \|x\|_X \quad \text{avec } C_{(x)} = \frac{2}{\delta_{(x)}} > 0$$

Pour $x = 0$ on a $\|A(0)\|_Y = 0 \leq C \|0\|_X \quad \forall C > 0$

Finalement si A est continu en $x = 0_X$. Alors A est borné et on obtient l'équivalence entre les trois assertions.

■

Remarque 1.3 L'ensemble $\mathcal{B}(X, Y)$ est un espace vectoriel sur lequel on définit la norme :

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{B}(X, Y)} &= \inf \{ \alpha_{(x)} > 0 : \|A(x)\|_Y \leq \alpha_{(x)} \cdot \|x\|_X \} \\ &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|A(x)\|_Y \end{aligned}$$

A partir de cette définition on déduit que pour tout $x \in X$: $\|A(x)\|_Y \leq \|A\|_{\mathcal{B}(X, Y)} \cdot \|x\|_X$

Définition 1.8

Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{B}(H)$. A^* est dit opérateur adjoint de A si et seulement si :

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$$

Si $A^* = A$ on dit que A est auto-adjoint.

Définition 1.9

Soient X, Y deux espace de Hilbert et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs dans $\mathcal{B}(X, Y)$, on définit les trois types de convergence suivants :

1) Convergence en norme :

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en norme vers l'opérateur A si et seulement si :

$$\|A_n - A\|_{\mathcal{B}(X, Y)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et on écrit } A_n \rightrightarrows A$$

2) Convergence forte :

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers l'opérateur A si et seulement si :

$$\|A_n(x) - A(x)\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall x \in X \quad \text{et on écrit } A_n \xrightarrow{s} A$$

3) Convergence faible :

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers l'opérateur A si et seulement si :

$$\langle A_n(x), y \rangle \longrightarrow \langle A(x), y \rangle, \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y. \quad \text{et on écrit } A_n \xrightarrow{w} A$$

Définition 1.10

Un opérateur A est dit de rang $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\dim \operatorname{Im}(A) = n$.

Chapitre 2

Opérateurs positifs

2.1 Définition

Définition 2.1

Un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est dit positif si et seulement si il est auto-adjoint et pour tout x dans H on a :

$$\langle A(x), x \rangle \geq 0$$

Remarque 2.1 Si A est un opérateur positif, alors pour tout x dans H on a :

$$\langle A(x), x \rangle \in \mathbb{R} \text{ car } \forall x \in H; \langle A(x), x \rangle = \langle x, A^*(x) \rangle = \langle x, A(x) \rangle = \overline{\langle A(x), x \rangle}$$

On notera dans la suite $\|\cdot\|_H$ par $\|\cdot\|$ et on précisera pour toute autre norme.

2.2 Somme finie d'opérateurs positifs

Lemme 2.1 Soit $\{A_n\}_{0 \leq n \leq N_0}$ une famille finie d'opérateurs positifs sur H . Alors :

$$A = \sum_{n=0}^{n=N_0} A_n \text{ est un opérateur positif}$$

Preuve.

Soit $n \in \{0, 1, \dots, N_0\}$. Comme les opérateurs A_n sont positifs on a :

$$\begin{aligned} A_n^* &= A_n \\ \langle A_n(x), x \rangle &\geq 0 \quad \forall x \in H. \end{aligned}$$

Donc

$$A^* = \left(\sum_{n=0}^{n=N_0} A_n \right)^* = \sum_{n=0}^{n=N_0} A_n^* = \sum_{n=0}^{n=N_0} A_n = A$$

et

$$\langle A(x), x \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{n=N_0} A_n(x), x \right\rangle = \sum_{n=0}^{n=N_0} \langle A_n(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$$

D'où A est un opérateur positif. ■

Définition 2.2

Soient A et B deux opérateurs positifs sur H , on dit que A est inférieur ou égal à B (noté $A \leq B$) et B un majorant de A si et seulement si :

$$\langle (B - A)(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$$

Remarque 2.2 La relation $(\leq)$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{B}(H)$.

Définition 2.3

Soient T et B deux opérateurs positifs tels que $T \leq B$.

B est dit majorant minimal de T si et seulement si :

$$\forall C \in \mathcal{B}(H) \text{ tel que : } C \geq 0 \text{ et } T \leq C \Rightarrow B \leq C$$

2.3 Propriétés

Soient A , B et C trois opérateurs positifs sur H . Alors on a les propriétés suivantes :

$$(1) \quad A \geq 0, B \geq 0 \Rightarrow A - B \leq A$$

$$(2) \quad A \leq B \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \|B\|_{\mathcal{B}(H)}$$

$$(3) \quad B \geq 0 \Rightarrow B^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$(4) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* :$$

$$C \leq Id \Rightarrow C^n \leq Id$$

$$(5) \quad C^2 \leq Id \Rightarrow C \leq Id.$$

$$(6) \quad \text{Si } A \text{ est inversible, alors } A^{-1} \text{ est positif.}$$

Preuve.

(1) Soit $x \in H$. Alors :

$$\begin{aligned}
 A \geq 0, B \geq 0 &\iff \langle A(x), x \rangle \geq 0 \text{ et } \langle B(x), x \rangle \geq 0 \\
 &\iff \langle A(x), x \rangle \geq 0 \text{ et } -\langle B(x), x \rangle \leq 0 \\
 &\implies \langle A(x), x \rangle - \langle B(x), x \rangle \leq \langle A(x), x \rangle \\
 &\implies \langle (A - B)(x), x \rangle \leq \langle A(x), x \rangle \\
 &\iff \langle [A - (A - B)](x), x \rangle \geq 0 \\
 &\iff A - B \leq A
 \end{aligned}$$

(2) Soit $x \in H$, on a donc :

$$0 \leq A \leq B \iff 0 \leq \langle A(x), x \rangle \leq \langle B(x), x \rangle \leq \|B\|_{\mathcal{B}(H)} \times \|x\|^2$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 [\langle A(x), x \rangle]^2 &\leq [\langle B(x), x \rangle]^2 \\
 &\leq \|B\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \times \|x\|^4
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \{[\langle A(x), x \rangle]^2\} \leq \|B\|_{\mathcal{B}(H)}^2$$

En utilisant l'inégalité ci-dessous qu'on démontrera dans la preuve du lemme (2.3) (équation (2.4)) :

$$\|A\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \leq \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \langle A(x), x \rangle \right\}^2$$

Et comme :

$$\left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \langle A(x), x \rangle \right\}^2 \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \{[\langle A(x), x \rangle]^2\}$$

On déduit que :

$$\|A\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \leq \|B\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \iff \|A\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \|B\|_{\mathcal{B}(H)}$$

(3) Montrons par récurrence que :

$$B \geq 0 \implies B^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Soit $x \in H$.

- Pour $n = 2$ on a :

$$\begin{aligned}
 \langle B^2(x), x \rangle &= \langle B[B(x)], x \rangle \\
 &= \langle B(x), B^*(x) \rangle \\
 &= \langle B(x), B(x) \rangle \\
 &= \|B(x)\|^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- Supposons que :

$$B \geq 0 \implies B^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; 2 \leq n \leq N_0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \langle B^{N_0+1}(x), x \rangle &= \langle B(B^{N_0}(x)), x \rangle \\
 &= \langle B^{N_0}(x), B^*(x) \rangle \\
 &= \langle B^{N_0}(x), B(x) \rangle && (B^* = B) \\
 &= \langle B^{N_0-1}[B(x)], B(x) \rangle \\
 &= \langle B^{N_0-1}(Y), Y \rangle && (Y = B(x)) \in H \\
 &\geq 0 && B^{N_0-1} \geq 0
 \end{aligned}$$

Finalement

$$B \geq 0 \implies B^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(4) Montrons par récurrence que :

$$C \leq Id \implies C^n \leq Id \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui revient donc à montrer que :

$$Id - C \geq 0 \implies Id - C^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Soit $x \in H$.

- Pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle (Id - C^2)(x), x \rangle &= \langle x - C^2(x), x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle C^2(x), x \rangle \\
 &= \|x\|^2 - \langle C^2(x), x \rangle \\
 &\geq \|x\|^2 - \|C\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \times \|x\|^2 && (|\langle C^2(x), x \rangle| \leq \|C\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \times \|x\|^2) \\
 &\geq \left(1 - \|C\|_{\mathcal{B}(H)}^2\right) \times \|x\|^2
 \end{aligned}$$

Et d'après la propriété (2) on a :

$$\begin{aligned} C \leq Id &\implies \|C\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \|Id\|_{\mathcal{B}(H)} = 1 \\ &\implies \|C\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\langle (Id - C^2)(x), x \rangle \geq \alpha \times \|x\|^2 \quad \text{avec } \alpha = (1 - \|C\|_{\mathcal{B}(H)}^2) \geq 0$$

D'où :

$$\langle (Id - C^2)(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$$

- Supposons que :

$$C \leq Id \implies C^n \leq Id \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; 2 \leq n \leq N_0$$

On a donc pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned} \langle (Id - C^{N_0+1})(x), x \rangle &= \langle x, x \rangle - \langle C^{N_0+1}(x), x \rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle C[C^{N_0}(x)], x \rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle C^{N_0}(x), C^*(x) \rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle C^{N_0-1}[C(x)], C(x) \rangle \quad (C^* = C) \\ &= \|x\|^2 - \langle C^{N_0-1}(Y), Y \rangle \quad (Y = C(x) \in H) \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} |\langle C^{N_0-1}(Y), Y \rangle| &\leq \|C^{N_0-1}\|_{\mathcal{B}(H)} \times \|Y\|^2 \\ &\leq \|C\|_{\mathcal{B}(H)}^{N_0-1} \times \|Y\|^2 \\ &\leq \|Y\|^2 \quad \forall Y \in H \end{aligned}$$

Et

$$\|Y\|^2 = \|C(x)\|^2 \leq \|C\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \|x\|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

On a finalement :

$$\begin{aligned} \langle (Id - C^{N_0+1})(x), x \rangle &\geq \|x\|^2 - \|Y\|^2 \\ &\geq 0 \quad \forall x \in H \end{aligned}$$

D'où :

$$C \leq Id \implies C^n \leq Id \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(5) Pour prouver cette propriété montrons que :

$$Id < C \implies Id < C^2$$

On a :

$$Id < C \iff (C - Id) > 0$$

Donc d'après la propriété (3) :

$$\begin{aligned} (C - Id) > 0 &\implies (C - Id)^2 \\ &\iff C^2 - 2C + Id > 0 \\ &\iff C^2 > 2C - Id \end{aligned}$$

Et comme $Id < C$, on obtient : $C^2 > Id$.

(6) Soit $y \in H$ alors :

$$\begin{aligned} \langle A^{-1}(y), y \rangle &= \langle x, A(x) \rangle \quad \text{avec } x \in H \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

■

2.4 Racine carrée d'un opérateur positif.

Proposition 2.1

Soit A un opérateur positif sur un espace de Hilbert H , alors il existe un unique opérateur positif X noté $\sqrt{A}$ tel que :

$$X^2 = A$$

Pour démontrer cette proposition on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.2 Soit A un opérateur positif. Alors :

$$\|A(x)\|^4 \leq \langle A^2(x), A(x) \rangle \times \langle A(x), x \rangle \quad \forall x \in H$$

Preuve. Soit A un opérateur positif et λ un nombre réel. On a alors :

Pour tout $x \in H$.

$$\begin{aligned}
\langle A(x + \lambda A(x)), (x + \lambda A(x)) \rangle &= \langle A(x) + \lambda A^2(x), (x + \lambda A(x)) \rangle \\
&= \langle A(x), (x + \lambda A(x)) \rangle + \langle \lambda A^2(x), (x + \lambda A(x)) \rangle \\
&= \langle A(x), x \rangle + \bar{\lambda} \langle A(x), A(x) \rangle + \lambda \langle A^2(x), (x + \lambda A(x)) \rangle \\
&= \langle A(x), x \rangle + \lambda \langle A(x), A(x) \rangle + \lambda \langle A^2(x), x \rangle \\
&\quad + \lambda^2 \langle A^2(x), A(x) \rangle \\
&= \langle A(x), x \rangle + \lambda \langle A(x), A(x) \rangle + \lambda \langle A(x), A^*(x) \rangle \\
&\quad + \lambda^2 \langle A^2(x), A(x) \rangle \\
&= \langle A(x), x \rangle + \lambda \langle A(x), A(x) \rangle + \lambda \langle A(x), A(x) \rangle \\
&\quad + \lambda^2 \langle A^2(x), A(x) \rangle \\
&= \lambda^2 \langle A[A(x)], A(x) \rangle + 2\lambda \langle A(x), A(x) \rangle + \langle A(x), x \rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Ce trinôme étant de signe constant doit avoir un discriminant négatif ou nul, ce qui nous donne :

$$\langle A(x), A(x) \rangle^2 - \langle A^2(x), A(x) \rangle \times \langle A(x), x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in H$$

Donc

$$\langle A(x), A(x) \rangle^2 \leq \langle A^2(x), A(x) \rangle \times \langle A(x), x \rangle \quad \forall x \in H$$

D'où :

$$\|A(x)\|^4 \leq \langle A^2(x), A(x) \rangle \times \langle A(x), x \rangle \quad \forall x \in H$$

■

2.4.1 Convergence des suites d'opérateurs positifs majorées par l'identité

Lemme 2.3 Soit la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'opérateurs positifs tels que :

$$0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq \dots \leq Id \quad (2.1)$$

Alors :

Pour tout $x \in H$, la suite $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy et on peut définir l'opérateur positif :

$$\begin{aligned}
A : H &\longrightarrow H \\
x &\longrightarrow A(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} A_n(x)
\end{aligned}$$

Tel que :

$$\|A\|_{\mathcal{B}(H)} \leq 1$$

Preuve.

Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'opérateur A_n est continu et $\|A_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leq 1$

*) D'une part ; on a d'après l'équation (2.1) :

Pour tout $x \in H$.

$$0 \leq \langle A_1(x), x \rangle \leq \langle A_2(x), x \rangle \leq \dots \leq \langle A_n(x), x \rangle \leq \dots \leq \langle Id(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

Donc pour $x \in H$ tel que $\|x\| \leq 1$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \langle A_n(x), x \rangle \leq 1$$

D'où :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \{ \langle A_n(x), x \rangle, n \in \mathbb{N}^* \} \leq 1. \quad (2.2)$$

**) D'autre part on a d'après le lemme (2.2) :

$$\|A_n(x)\|^4 \leq \langle A_n^2(x), A_n(x) \rangle \times \langle A_n(x), x \rangle \quad \forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2.3)$$

En utilisant cette inégalité et en posant $y = \frac{A_n(x)}{\|A_n(x)\|}$ (pour $A_n(x) \neq 0$), on obtient :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \|A_n(x)\|^4 &\leq \langle A_n^2(x), A_n(x) \rangle \times \langle A_n(x), x \rangle & \forall x \in H; x \neq 0 \\ &= \langle A_n(x), x \rangle \times \left\langle A_n \left(\frac{A_n(x)}{\|A_n(x)\|} \right), \frac{A_n(x)}{\|A_n(x)\|} \right\rangle \times \|A_n(x)\|^2 & \forall x \in H; x \neq 0 \end{aligned}$$

Donc on a :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \|A_n\|_{\mathcal{B}(H)}^4 &= \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n(x)\| \right\}^4 \leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|A_n(x)\|^4) \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \langle A_n(x), x \rangle \times \sup_{\|y\| \leq 1} \langle A_n(y), y \rangle \times \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n(x)\|^2 \\ &\leq \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \langle A_n(x), x \rangle \right\}^2 \|A_n\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\|A_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \langle A_n(x), x \rangle \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2.4)$$

Des deux inégalités (2.2) et (2.4) on déduit que :

$$\|A_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors l'opérateur A_n est continu pour tout entier naturel non nul.

Soit l'opérateur $A_{m,n}$ définit par :

$$A_{m,n} = A_n - A_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } ; n > m$$

On remarque que $A_{m,n}^* = (A_n - A_m)^* = A_n^* - A_m^* = A_n - A_m = A_{m,n}$, alors $A_{m,n}$ est auto-adjoint et on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq A_m \leq A_n &\iff 0 \leq \langle A_m(x), x \rangle \leq \langle A_n(x), x \rangle & \forall x \in H \\ &\iff 0 \leq \langle A_n(x), x \rangle - \langle A_m(x), x \rangle & \forall x \in H \\ &\iff 0 \leq \langle A_n(x) - A_m(x), x \rangle & \forall x \in H \\ &\iff 0 \leq \langle A_{m,n}(x), x \rangle & \forall x \in H \end{aligned}$$

Donc l'opérateur $A_{m,n}$ est positif et d'après le lemme (2.2), on a pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned} \|A_{m,n}(x)\|^4 &\leq \langle A_{m,n}(x), x \rangle \langle A_{m,n}^2(x), A_{m,n}(x) \rangle \\ &\leq \langle A_{m,n}(x), x \rangle \|A_{m,n}^2(x)\| \|A_{m,n}(x)\| & (\text{Cauchy-Schwartz}) \\ &\leq \langle A_{m,n}(x), x \rangle \|A_{m,n}\|_{\mathcal{B}(H)}^3 \|x\|^2 \\ &\leq \langle A_{m,n}(x), x \rangle \times \|x\|^2 & (\|A_{m,n}\|_{\mathcal{B}(H)} \leq 1) \end{aligned}$$

D'où :

$\forall x \in H, \forall n, m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } n > m :$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\|^4 \leq \langle A_n(x) - A_m(x), x \rangle \times \|x\|^2 \quad (2.5)$$

Considérons la suite de fonctions réels $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\varphi_n(x) = \langle A_n(x), x \rangle \quad \forall x \in H$.

On remarque que pour tout $x \in H$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) &= \langle A_{n+1}(x), x \rangle - \langle A_n(x), x \rangle \\ &= \langle A_{n+1}(x) - A_n(x), x \rangle \\ &= \langle A_{n,n+1}(x), x \rangle \\ &\geq 0 & (A_{m,n} \geq 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in H : \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) \geq 0 \quad (2.6)$$

D'autre part, pour $x \in H$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}
 |\varphi_n(x)| &= |\langle A_n(x), x \rangle| \\
 &\leq \|A_n(x)\| \times \|x\| \\
 &\leq \|A_n\|_{\mathcal{B}(H)} \times \|x\|^2 \\
 &\leq \|x\|^2 \quad (\|A_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*)
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}^* : |\varphi_n(x)| \leq \|x\|^2 \quad (2.7)$$

Des deux inégalités (2.6) et (2.7) on déduit que la suite $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante au sens large et bornée par $\|x\|^2$ pour tout $x \in H$, donc elle est convergente d'où de Cauchy dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$\forall x \in H, \forall \varepsilon > 0, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n > m, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall m \geq N_0$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |\langle A_n(x) - A_m(x), x \rangle| \leq \varepsilon$$

En utilisant cette inégalité et l'équation (2.5) on obtient :

$$\forall x \in H; \|A_n(x) - A_m(x)\|^4 \leq \langle A_n(x) - A_m(x), x \rangle \|x\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

D'où :

$\forall x \in H, \forall \varepsilon > 0, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n > m, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall m \geq N_0$:

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \varepsilon$$

Donc la suite $\{A_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans H qui est complet, alors elle est convergente et on peut définir l'opérateur A par la simple limite comme suit :

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$$

Nous avons alors pour tout $x, y \in H$:

$$\begin{aligned}
 \langle A(x), y \rangle &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x), y \right\rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n(x), y \rangle && \text{(lemme 1.1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, A_n(y) \rangle && (A_n^* = A_n) \\
 &= \left\langle x, \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(y) \right\rangle && \text{(lemme 1.1)} \\
 &= \langle x, A(y) \rangle
 \end{aligned}$$

Donc l'opérateur A est auto-adjoint et on remarque que pour $y = x$:

$$\langle A(x), x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n(x), x \rangle \geq 0$$

D'où A est positif et comme nous avons pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned}
 \|A(x)\|^2 &= \langle A(x), A(x) \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x), \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) \right\rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n(x), A_n(x) \rangle && \text{(lemme 1.1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(x)\|^2 \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\|A_n\|_{\mathcal{B}(H)}^2 \times \|x\|^2 \right] \\
 &\leq \|x\|^2 && (\|A_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*)
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\|A\|_{\mathcal{B}(H)} \leq 1$$

■

2.4.2 Construction de la racine carrée :

Le résultat étant évident pour l'opérateur nul, on considère $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que $A \neq 0_{\mathcal{B}(H)}$.

Preuve de la proposition.

Existence :

*) Montrons d'abord que si A est un opérateur positif non nul et $A' = \frac{A}{\|A\|_{\mathcal{B}(H)}}$. Alors :

$$A' \leq Id$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned}
 |\langle A(x), x \rangle| &\leq \|A(x)\| \|x\| && \forall x \in H \\
 &\leq \|A\|_{\mathcal{B}(H)} \|x\|^2 && \forall x \in H
 \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$-\|A\|_{\mathcal{B}(H)} \|x\|^2 \leq \langle A(x), x \rangle \leq \|A\|_{\mathcal{B}(H)} \|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

On distingue les trois cas suivants :

1) Pour $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle A(x), x \rangle \leq \|A\|_{\mathcal{B}(H)} &\implies -\langle A(x), x \rangle \geq -\|A\|_{\mathcal{B}(H)} \\
 &\implies -\frac{1}{\|A\|_{\mathcal{B}(H)}} \langle A(x), x \rangle \geq -1 && (A \neq 0_{\mathcal{B}(H)} \implies \|A\|_{\mathcal{B}(H)} \neq 0) \\
 &\implies \langle x, x \rangle - \frac{1}{\|A\|_{\mathcal{B}(H)}} \langle A(x), x \rangle \geq \langle x, x \rangle - 1 = 0 && (\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 1)
 \end{aligned}$$

Donc en posant $A' = \frac{A}{\|A\|_{\mathcal{B}(H)}}$, on peut établir la formule suivante :

$$\forall x \in H \text{ tel que } \|x\| = 1 : \left\langle (Id - A')x, x \right\rangle = \langle x, x \rangle - \frac{1}{\|A\|_{\mathcal{L}(H)}} \langle A(x), x \rangle \geq 0 \quad (2.8)$$

2) Pour $x = 0$ on a :

$$\left\langle (Id - A')(0), 0 \right\rangle = 0$$

3) Pour $x \in H$ tel que $x \neq 0$, $\|x\| \neq 1$, on prend $y = \frac{x}{\|x\|}$ et on a :

$$\begin{aligned} \left\langle (Id - A')y, y \right\rangle &= \frac{1}{\|x\|^2} \left\langle (Id - A')x, x \right\rangle \geq \langle y, y \rangle - 1 \\ &\geq \|y\|^2 - 1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\left\langle (Id - A')x, x \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H \text{ tel que } : x \neq 0 \text{ et } \|x\| \neq 1$$

Finalement l'équation (2.8) est vérifiée pour tout x dans H et on obtient $A' \leq Id$.

**) Nous pouvons donc supposer dans la suite que :

$$X^2 = A \leq Id$$

D'après la propriété (5) des opérateurs positifs on a :

$$X^2 \leq Id \Rightarrow X \leq Id$$

L'équation $X^2 = A$ s'écrit alors en posant $A = Id - B$ et $X = Id - Y$ et on a :

$$\begin{aligned} (Id - Y)^2 = Id - B &\iff (Id - Y) \circ (Id - Y) = Id - B \\ &\iff Id \circ (Id - Y) - Y \circ (Id - Y) = Id - B \\ &\iff Id \circ Id - (Id \circ Y) - (Y \circ Id) - Y \circ (-Y) = Id - B \\ &\iff Id - 2Y + Y^2 = Id - B \\ &\iff Y = \frac{1}{2} (B + Y^2) \end{aligned}$$

Ce qui nous ramène à résoudre l'équation :

$$Y = \frac{1}{2} (B + Y^2) \quad \text{avec : } 0 \leq Y \leq Id \text{ et } 0 \leq B \leq Id \quad (2.9)$$

Pour cela considérons $Y_0 = 0$ et $Y_{n+1} = \frac{1}{2} (B + Y_n^2)$ et montrons que la suite $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution de l'équation (2.9) (méthode des approximations successives).

- Montrons d'abord que Y_n est un polynôme de B à coefficients réels positifs ou nul et qu'il en est de même pour $Y_n - Y_{n-1}$.

Ces propositions sont évidemment vraies pour $n = 1$ et comme :

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - Y_n &= \frac{1}{2} (B + Y_n^2) - \frac{1}{2} (B + Y_{n-1}^2) \\ &= \frac{1}{2} (Y_n^2 - Y_{n-1}^2) \\ &= \frac{1}{2} (Y_n - Y_{n-1}) \circ (Y_n + Y_{n-1}) \end{aligned}$$

Elles se généralisent sans difficultés par récurrence.

Comme nous avons $B \geq 0$ on en déduit que $B^n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ (propriété (3) des opérateurs positifs)

Donc :

$$Y_n \geq 0 \text{ et } Y_n - Y_{n-1} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors on a :

$$0 \leq Y_0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n \leq \dots$$

Il nous reste à montrer que $Y_n \leq Id$, ce qui est vrai pour $n = 0$ et se généralise pour $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de la relation $Y_{n+1} = \frac{1}{2} (B + Y_n^2)$ et la propriété (4) des opérateurs positifs.

Finalement les opérateurs $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forment une suite d'opérateurs auto-adjoints tels que :

$$0 \leq Y_0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n \leq \dots \leq Id$$

Alors d'après le lemme (2.3), cette suite converge fortement vers l'opérateur Y qui est continu, positif et vérifie :

$$\|Y\|_{\mathcal{B}(H)} \leq 1 \text{ et } Y = \frac{1}{2} (B + Y^2)$$

D'où l'existence de la solution X qui vérifie $X = Id - Y \geq 0$

Remarque 2.3 Les deux opérateurs X et A commute car :

$$X \circ A = X \circ X^2 = X^3 = X^2 \circ X = A \circ X$$

Unicité :

Supposons qu'il existe un autre opérateur X_0 continu, positif tel que $X_0^2 = A$ et désignons par Z et Z_0 les racines carrées positives de X et de X_0 construite avec le même procédé précédent, nous avons donc :

Pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned}
\|Z(X - X_0)(x)\|^2 + \|Z_0(X - X_0)(x)\|^2 &= \langle [Z(X - X_0)](x), [Z(X - X_0)](x) \rangle \\
&\quad + \langle [Z_0(X - X_0)](x), [Z_0(X - X_0)](x) \rangle \\
&= \langle [Z^2(X - X_0)](x), (X - X_0)(x) \rangle \\
&\quad + \langle [Z_0^2(X - X_0)](x), (X - X_0)(x) \rangle \\
&= \langle [X(X - X_0)](x), (X - X_0)(x) \rangle \\
&\quad + \langle [X_0(X - X_0)](x), (X - X_0)(x) \rangle \\
&= \langle [(X + X_0)(X - X_0)](x), (X - X_0)(x) \rangle \\
&= \langle (X^2 - X_0^2)(x), (X - X_0)(x) \rangle \quad (XX_0 = X_0X) \\
&= \langle (A - A)(x), (X - X_0)(x) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$Z(X - X_0)(x) = 0 \text{ et } Z_0(X - X_0)(x) = 0 \quad \forall x \in H$$

Donc :

$$\begin{aligned}
X(X - X_0)(x) &= ZZ(X - X_0)(x) = 0 & \forall x \in H \\
X_0(X - X_0)(x) &= Z_0Z_0(X - X_0)(x) = 0 & \forall x \in H
\end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\|(X - X_0)(x)\|^2 &= \langle (X - X_0)(x), (X - X_0)(x) \rangle & \forall x \in H \\
&= \langle (X - X_0)^2(x), x \rangle & \forall x \in H \\
&= \langle (X^2 - X_0X - X_0X + X^2)(x), x \rangle & \forall x \in H \\
&= \langle X(X - X_0)(x), x \rangle - \langle X_0(X - X_0)(x), x \rangle & \forall x \in H \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où :

$$X = X_0$$

■

Remarque 2.4 Comme A est auto-adjoint et $X = \sqrt{A}$ c'est-à-dire ; $X^2 = A$. Alors :

$$(X^*)^2 = (X^* \circ X^*) = (X^2)^* = A^* = A$$

Donc $(\sqrt{A})^* = X^* = \sqrt{A^*} = \sqrt{A}$, d'où :

$$(\sqrt{A})^* = \sqrt{A}$$

Chapitre 3

Tenseurs

3.1 Définition

Définition 3.1

Soient H un espace de Hilbert et a, b deux vecteurs non nuls de H . Alors on définit le tenseur $(a \otimes b)$ par :

$$(a \otimes b)(f) = \langle f, b \rangle \cdot a \quad \forall f \in H$$

Lemme 3.1 Soient H un espace de Hilbert et T un opérateur borné non nul. Alors :

$$T \text{ est un tenseur} \iff T \text{ est de rang 1}$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Montrons d'abord que $(a \otimes b)$ est bien défini :

Soient $x_1, x_2 \in H$ tels que $x_1 = x_2$, alors :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 = 0 &\implies \langle x_1 - x_2, b \rangle \cdot a = 0 && \forall a, b \in H \\ &\implies (\langle x_1, b \rangle - \langle x_2, b \rangle) \cdot a = 0 && \forall a, b \in H \\ &\implies \langle x_1, b \rangle \cdot a - \langle x_2, b \rangle \cdot a = 0 && \forall a, b \in H \\ &\implies \langle x_1, b \rangle \cdot a = \langle x_2, b \rangle \cdot a && \forall a, b \in H \end{aligned}$$

Donc :

$$x_1 - x_2 = 0 \implies (a \otimes b)(x_1) = (a \otimes b)(x_2)$$

D'où :

$$(a \otimes b)(x_1) \neq (a \otimes b)(x_2) \implies x_1 - x_2 \neq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in H$$

Comme $(a \otimes b)f = \langle f, b \rangle \cdot a \quad \forall f \in H$, alors $\text{Im}(a \otimes b) \subseteq \{\mathbb{C} a\}$ d'où $\text{Im}(a \otimes b)$ est de dimension 1 donc $(a \otimes b)$ est de rang un.

$\Leftarrow$) Réciproquement, soit T un opérateur de rang un donc il existe un vecteur non nul $a \in H$ tel que $\text{Im}(T) \subseteq \{\mathbb{C} a\}$, d'où :

$$\forall x \in H, \exists C_x \in \mathbb{C} \text{ tel que } T(x) = C_x \cdot a \quad \text{avec : } 0 \neq a \in H$$

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \psi : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow \psi(x) = C_x \end{aligned}$$

On remarque que ψ est une forme linéaire continue, donc d'après le théorème de Riesz il existe $b \in H$ tel que :

$$\psi(x) = C_x = \langle x, b \rangle \quad \forall x \in H$$

Comme T est de rang un, on déduit que ψ n'est pas identiquement nulle donc $b \neq 0$.

Alors :

$$T(x) = C_x \cdot a = \langle x, b \rangle \cdot a = (a \otimes b)(x) \quad \forall x \in H.$$

D'où T est un tenseur. ■

3.2 Propriétés

Soient a, b, c, d des vecteurs non nuls dans H . Alors on a :

- (1) $(a \otimes b) \circ (c \otimes d) = \langle c, b \rangle (a \otimes d)$.
- (2) $T \circ (a \otimes b) = (T(a) \otimes b)$.
- (3) $(a \otimes b) \circ T = a \otimes [T^*(b)]$.
- (4) $(a \otimes b)^* = (b \otimes a)$.
- (5) $\ker(a \otimes b) = \{b\}^\perp$.
- (6) $0 \neq (a \otimes b) = (c \otimes d) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* : a = \alpha \cdot c, b = \beta \cdot d \text{ et } \alpha \cdot \bar{\beta} = 1$.
- (7) $(a \otimes a)$ est un opérateur positif.
- (8) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :.

$$\alpha(u \otimes u) = (\alpha u \otimes u) = ((\sqrt{\alpha}u) \otimes (\sqrt{\alpha}u))$$

- (9) Soit $R \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif et $a \in H; \|a\| \leq 1$. Alors :

$$(\sqrt{R}(a) \otimes \sqrt{R}(a)) \leq R$$

Preuve. Soient a, b, c, d des vecteurs non nuls dans H , on a alors :

(1) Pour tout f dans H :

$$\begin{aligned} [(a \otimes b) \circ (c \otimes d)](f) &= (a \otimes b) \circ [\langle f, d \rangle \cdot c] \\ &= \langle \langle f, d \rangle \cdot c, b \rangle \cdot a \\ &= \langle f, d \rangle \langle c, b \rangle \cdot a \\ &= \langle c, b \rangle \langle \langle f, d \rangle \cdot a \rangle \\ &= \langle c, b \rangle (a \otimes d) \end{aligned}$$

(2) Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ et $f \in H$:

$$\begin{aligned} T \circ (a \otimes b) &= T [(a \otimes b)(f)] = T[\langle f, b \rangle (a)] \\ &= \langle f, b \rangle T(a) \\ &= (T(a) \otimes b)(f) \end{aligned}$$

D'où :

$$T \circ (a \otimes b) = (T(a) \otimes b)$$

(3)

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \circ T &= (a \otimes b) [T(f)] = \langle T(f), b \rangle \cdot a \\ &= \langle f, T^*b \rangle \cdot a \\ &= (a \otimes T^*(b))(f) \end{aligned}$$

(4) Soit $g, f \in H$, on a donc :

$$\begin{aligned} \langle (a \otimes b)^*(f), g \rangle &= \langle f, [(a \otimes b)^*]^*(g) \rangle \\ &= \langle f, (a \otimes b)(g) \rangle \\ &= \langle f, \langle g, b \rangle \cdot a \rangle \\ &= \langle b, g \rangle \langle f, a \rangle \\ &= \langle \langle f, a \rangle \cdot b, g \rangle \\ &= \langle (b \otimes a)(f), g \rangle \end{aligned}$$

Donc :

$$(a \otimes b)^* = (b \otimes a)$$

(5) On a par définition :

$$\ker(a \otimes b) = \{f \in H \mid (a \otimes b)(f) = 0\}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\ker(a \otimes b) &= \{f \in H \mid \langle f, b \rangle (a) = 0\} \\ &= \{f \in H \mid \langle f, b \rangle = 0\} \\ &= \{b\}^\perp\end{aligned}$$

(6) Montrons que :

$$0 \neq (a \otimes b) = (c \otimes d) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* : a = \alpha \cdot c, b = \beta \cdot d \text{ et } \alpha \cdot \bar{\beta} = 1$$

.

$\implies$) Comme $(a \otimes b) = (c \otimes d)$, alors d'après la propriété (4) on a :

$$(a \otimes b)^* = (c \otimes d)^*$$

- D'une part on remarque que :

$$(a \otimes b) = (c \otimes d) \iff \langle x, b \rangle \cdot a = \langle x, d \rangle \cdot c \quad \forall x \in H$$

Donc pour $x = b$, on a : $a = \frac{\langle b, d \rangle}{\|b\|^2} \cdot c$.

- D'autre part :

$$(b \otimes a) = (d \otimes c) \iff \langle x, a \rangle \cdot b = \langle x, c \rangle \cdot d \quad \forall x \in H$$

Donc pour $x = a$ on a : $b = \frac{\langle a, c \rangle}{\|a\|^2} \cdot c$. Alors :

$$(a \otimes b) = (c \otimes d) \implies \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* \text{ tels que : } a = \alpha \cdot c, b = \beta \cdot d$$

D'où

$$(a \otimes b) = (\alpha c \otimes \beta d) = (c \otimes d)$$

Alors :

$$\begin{aligned}(\alpha c \otimes \beta d)(x) &= \langle x, \beta d \rangle \cdot \alpha c & \forall x \in H \\ &= \alpha \cdot \bar{\beta} \langle x, d \rangle \cdot c & \forall x \in H \\ &= \alpha \cdot \bar{\beta} (c \otimes d)(x) & \forall x \in H\end{aligned}$$

Finalement on déduit que $\alpha \cdot \bar{\beta} = 1$

$\iff$) Réciproquement si $a = \alpha \cdot c, b = \beta \cdot d$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^* : \alpha \cdot \bar{\beta} = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in H : (a \otimes b)(x) &= (\alpha c \otimes \beta d)(x) \\ &= \langle x, \beta d \rangle \cdot \alpha c \\ &= \alpha \cdot \bar{\beta} \langle x, d \rangle \cdot c \\ &= (c \otimes d)(x)\end{aligned}$$

(7) Soit $x \in H$, alors :

$$\begin{aligned}
 \langle (a \otimes a)(x), x \rangle &= \langle \langle x, a \rangle a, x \rangle \\
 &= \langle x, a \rangle \cdot \langle a, x \rangle \\
 &= \langle x, a \rangle \cdot \overline{\langle x, a \rangle} \\
 &= |\langle x, a \rangle|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

D'où :

$$(a \otimes a) \geq 0$$

(7) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in H$, on a :

- D'une part :

$$\begin{aligned}
 (\alpha u \otimes u) &= \langle x, u \rangle \cdot \alpha u \\
 &= \alpha \cdot \langle x, u \rangle u \\
 &= \alpha \cdot (u \otimes u)
 \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
 ((\sqrt{\alpha}u) \otimes (\sqrt{\alpha}u)) &= \langle x, (\sqrt{\alpha}u) \rangle \cdot (\sqrt{\alpha}u) \\
 &= \sqrt{\alpha} \cdot \overline{(\sqrt{\alpha})} \cdot \langle x, u \rangle u \\
 &= \alpha \cdot \langle x, u \rangle u \\
 &= \alpha \cdot (u \otimes u)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$(\alpha u \otimes u) = ((\sqrt{\alpha}u) \otimes (\sqrt{\alpha}u)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

(9) Soient R un opérateur positif et $x, a \in H$ avec $\|a\| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \left(\sqrt{R}(a) \otimes \sqrt{R}(a) \right) (x), x \right\rangle &= \left\langle \left\langle x, \sqrt{R}(a) \right\rangle \cdot \sqrt{R}(a), x \right\rangle \\
 &= \left\langle x, \sqrt{R}(a) \right\rangle \cdot \left\langle \sqrt{R}(a), x \right\rangle \\
 &= \left\langle \sqrt{R}(x), a \right\rangle \cdot \left\langle a, \sqrt{R}(x) \right\rangle \\
 &= \left| \left\langle a, \sqrt{R}(x) \right\rangle \right|^2 \\
 &\leq \|a\|^2 \cdot \left\| \sqrt{R}(x) \right\|^2 \\
 &\leq \left\langle \sqrt{R}(x), \sqrt{R}(x) \right\rangle \\
 &= \left\langle \left(\sqrt{R} \circ \sqrt{R} \right) (x), x \right\rangle \\
 &= \langle R(x), x \rangle
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in H : \left\langle \left(\sqrt{R}(a) \otimes \sqrt{R}(a) \right) (x), x \right\rangle \leq \langle R(x), x \rangle$$

D'où :

$$\left(\sqrt{R}(a) \otimes \sqrt{R}(a) \right) \leq R$$

■

Lemme 3.2 *Soit H un espace de Hilbert et R un opérateur borné non nul. Alors :*

$$R \text{ est positif de rang } 1 \iff R = (U \otimes U)$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Comme R est de rang un alors d'après le lemme (3.1) il existe deux vecteurs non nuls u, v dans H tels que :

$$R = (u \otimes v)$$

Donc $(u \otimes v) = R = R^* = (v \otimes u)$, et d'après la propriété (5) des tenseurs :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* \setminus u = \beta \cdot v, v = \alpha \cdot u \text{ et } \alpha \cdot \bar{\beta} = 1$$

D'où :

$$R = ((\alpha u) \otimes u)$$

Comme R est positif alors :

$$\begin{aligned} R \geq 0 &\iff \langle R(x), x \rangle \geq 0 && \forall x \in H \\ &\iff \langle ((\alpha u) \otimes u)(x), x \rangle \geq 0 && \forall x \in H \\ &\iff \langle \langle x, u \rangle (\alpha u), x \rangle \geq 0 && \forall x \in H \\ &\iff \alpha \cdot \langle x, u \rangle \cdot \langle u, x \rangle \geq 0 && \forall x \in H \\ &\iff \alpha \cdot |\langle x, u \rangle|^2 \geq 0 && \forall x \in H \end{aligned}$$

Donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la propriété (8) des tenseurs on obtient :

$$R = (\alpha u \otimes u) = ((\sqrt{\alpha}u) \otimes (\sqrt{\alpha}u)) = (U \otimes U) \text{ avec } U = \alpha u \neq 0$$

$\Leftarrow$) Réciproquement, si $R = (U \otimes U)$ alors d'après la propriété (7) et le lemme (3.1) il est positif de rang un.

■

Chapitre 4

Caractérisation d'un majorant minimal

Le résultat suivant donne une caractérisation complète d'un majorant minimal de deux opérateurs positifs [9].

Théorème 4.1 *Soient A, B deux opérateurs positifs et T un majorant de A et B . Alors :*

$$T \text{ est minimal si et seulement si } \text{Im}(\sqrt{T-A}) \cap \text{Im}(\sqrt{T-B}) = \{0\}.$$

Preuve.

$\Leftarrow$) Supposons que T n'est pas minimal, alors il existe un opérateur positif $C \neq T$ tel que $0 \leq A \leq C < T$, donc l'opérateur $R = T - C \neq 0$ est positif car :

$$\begin{aligned} C < T &\Longleftrightarrow 0 < \langle T(x) - C(x), x \rangle && \forall x \in H \\ &\Longleftrightarrow 0 < \langle R(x), x \rangle && \forall x \in H \\ &\Longleftrightarrow 0 < R \end{aligned}$$

Comme $A \leq C$, alors on a pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned} \langle (C - A)(x), x \rangle \geq 0 &\Longleftrightarrow \langle (-T + C + T - A)(x), x \rangle \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \langle [T - A - (T - C)](x), x \rangle \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \langle [T - A - R](x), x \rangle \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow T - A \geq R \end{aligned}$$

Alors :

$$R \leq T - A$$

D'une manière analogue on obtient $R \leq T - B$.

Comme $R \neq 0$, on considère alors (a) un vecteur unitaire tel que $R(a) \neq 0$.

Alors :

$$\sqrt{R}(a) \otimes \sqrt{R}(a) \leq R \quad (\text{propriété (9) des tenseurs})$$

Comme $R \leq T - A, T - B$ on peut supposer dans la suite que $R = (u \otimes u)$ et on a pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned} \langle [(T - A) - R(x)], x \rangle \geq 0 &\iff \langle R(x), x \rangle \leq \langle (T - A)(x), x \rangle \\ &\iff \langle (u \otimes u)(x), x \rangle \leq \langle (T - A)(x), x \rangle \\ &\iff \langle \langle x, u \rangle \cdot u, x \rangle \leq \langle (T - A)(x), x \rangle \\ &\iff \langle x, u \rangle \cdot \langle u, x \rangle \leq \langle (\sqrt{T - A} \circ \sqrt{T - A})(x), x \rangle \\ &\iff |\langle x, u \rangle|^2 \leq \left\langle (\sqrt{T - A})(x), (\sqrt{T - A})^*(x) \right\rangle \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$|\langle x, u \rangle|^2 \leq \left\| \sqrt{T - A}(x) \right\|^2 \quad \forall x \in H$$

$$\text{Car : } (\sqrt{T - A})^* = \sqrt{(T - A)^*} = \sqrt{T - A}$$

Définissons à présent sur $\text{Im}(\sqrt{T - A})$ l'opérateur Z_0 en posant :

$$Z_0(\sqrt{T - A}(x)) = \langle x, u \rangle \frac{u}{\|u\|} \quad \forall x \in H$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} Z_0(\sqrt{T - A}(x)) &= \frac{1}{\|u\|} (u \otimes u)(x) & \forall x \in H \\ &= (\beta u \otimes \beta u)(x) & \forall x \in H \text{ avec } \beta = \frac{1}{\sqrt{\|u\|}} \end{aligned}$$

Alors Z_0 est en effet un tenseur, donc il est bien défini et on a :

$$\forall x \in H; \quad \left\| Z_0(\sqrt{T - A}(x)) \right\| = \left\| \langle x, u \rangle \frac{u}{\|u\|} \right\| = |\langle x, u \rangle| \leq \left\| \sqrt{T - A}(x) \right\|$$

D'où Z_0 est une contraction sur $\text{Im}(\sqrt{T - A})$ qu'on peut étendre sur $\overline{\text{Im}(\sqrt{T - A})}$ par le biais du théorème de Hahn Banach en une contraction qu'on notera $\widetilde{Z}_0$.

A présent on définit la contraction Z sur $H = \ker(\sqrt{T - A}) \oplus \overline{\text{Im}(\sqrt{T - A})}$ en posant :

$$Z(a \oplus b) = \widetilde{Z}_0(b)$$

Notons que $\text{Im } Z = \text{Im } \widetilde{Z}_0 = \overline{\text{Im } Z_0} \subseteq \{\mathbb{C}u\}$ et on a :

$$Z(\sqrt{T-A}(x)) = \frac{1}{\|u\|} (u \otimes u)(x) \quad \forall x \in H$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} Z(\sqrt{T-A}(x)) = \frac{1}{\|u\|} (u \otimes u)(x) &\implies [Z(\sqrt{T-A}(x))]^* = \frac{1}{\|u\|} [(u \otimes u)(x)]^* & \forall x \in H \\ &\implies \sqrt{T-A}^*(Z^*(x)) = \frac{1}{\|u\|} (u \otimes u)(x) & \forall x \in H \\ &\implies \sqrt{T-A}(Z^*(x)) = \frac{1}{\|u\|} (u \otimes u)(x) & \forall x \in H \end{aligned}$$

Donc pour $x = u$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{T-A}(Z^*(u)) &= \frac{1}{\|u\|} (u \otimes u)(u) \\ &= \|u\| \cdot u \end{aligned}$$

En posant $v = Z^*(u)$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{T-A}(v) &= \|u\| \times u \implies \frac{1}{\|u\|} \sqrt{T-A}(v) = u \\ &\implies \sqrt{T-A}\left(\frac{1}{\|u\|}v\right) = u \end{aligned}$$

D'où $u \in \text{Im}(\sqrt{T-A})$

D'une manière analogue on montre que $u \in \text{Im}(\sqrt{T-B})$ et on obtient finalement :

$$\text{Im}(\sqrt{T-A}) \cap \text{Im}(\sqrt{T-B}) \neq \{0\}$$

$\implies$) Pour prouver l'implication directe, montrons que :

$$\text{Im}(\sqrt{T-A}) \cap \text{Im}(\sqrt{T-B}) \neq \{0\} \implies T \text{ n'est pas un majorant minimal}$$

Supposons que $\text{Im}(\sqrt{T-A}) \cap \text{Im}(\sqrt{T-B}) \neq \{0\}$. Alors il existe un vecteur non nul u_0 dans le sous espace vectoriel $\text{Im}(\sqrt{T-A}) \cap \text{Im}(\sqrt{T-B})$ et on peut écrire $u_0 = \sqrt{T-A}(a) = \sqrt{T-B}(b)$ tel que (a) et (b) sont deux vecteurs non nuls dans H . Considérons le nombre $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$t \times \|a\| \leq 1 \text{ et } t \times \|b\| \leq 1$$

En posant $u = t \times u_0$, on obtient :

$$u = t \times u_0 = t \times \sqrt{T-A}(a) = \sqrt{T-A}(t \times a)$$

Donc :

$$u \otimes u = [\sqrt{T - A}(t \times a)] \otimes [\sqrt{T - A}(t \times a)] \leq T - A \quad (\text{propriété (9) des tenseurs})$$

D'où :

$$A \leq T - (u \otimes u)$$

De manière similaire on vérifie que :

$$B \leq T - (u \otimes u) \quad (u = t \times u_0 = \sqrt{T - B}(t \times b))$$

Finalement on déduit que l'opérateur $R = T - u \otimes u$ est un majorant de A et B et d'après la propriété (1) des opérateurs positifs on obtient :

$$R = T - (u \otimes u) \leq T$$

Comme $u \otimes u \neq 0_{\mathcal{B}(H)}$, alors $R \neq T$. D'où T n'est pas un majorant minimal de A et B .

■

Dans le cas des espaces de Hilbert de dimension finie, on peut donner une caractérisation plus simple :

Corollaire 4.2 *Soient A et B deux opérateurs positifs sur un espace de Hilbert de dimension finie H . Alors un majorant T de A et B est minimal si et seulement si :*

$$\ker(T - A) \oplus \ker(T - B) = H$$

Preuve. Cette caractérisation s'obtient directement du théorème précédent en utilisant l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im}(\sqrt{T - A}) \cap \operatorname{Im}(\sqrt{T - B}))^\perp &= \overline{\ker \sqrt{T - A}} \oplus \overline{\ker \sqrt{T - B}} \\ &= \ker \sqrt{T - A} \oplus \ker \sqrt{T - B} \\ &= \ker(T - A) \oplus \ker(T - B) = H \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié dans les espaces de Hilbert de dimension finie. ■

Remarque 4.1 *Notons que l'extension de ce résultat en dimension infinie « $\ker(T - A) \oplus \ker(T - B) = H$ est dense dans H » ne caractérise pas un majorant minimal de A et B .*

Pour vérifier cela il suffit de considérer les deux opérateurs positifs A et B définis sur $L^2[0, 1]$ par :

$$A(f(x)) = (1 - x) \times f(x)$$

$$B(f(x)) = f(x) - \int_0^1 f(t) dt$$

Alors on a :

D'une part :

$$\begin{aligned} \langle A[f(x)], f(x) \rangle_{L^2([0,1])} &= \int_0^1 A[f(x)] \times \overline{f(x)} dx \\ &= \int_0^1 (1 - x) \times f(x) \times \overline{f(x)} dx \quad (f(x) \in \mathbb{R}) \\ &= \int_0^1 (1 - x) \times [f(x)]^2 dx \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle B[f(x)], f(x) \rangle_{L^2([0,1])} &= \int_0^1 B[f(x)] \times \overline{f(x)} dx \\ &= \int_0^1 \left[f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right] \times \overline{f(x)} dx \\ &= \int_0^1 \left[(f(x))^2 - \int_0^1 f(t) dt \times f(x) \right] dx \\ &= \int_0^1 (f(x))^2 dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour $f \in L^2([0, 1])$ et $g(x) = 1 \ \forall x \in [0, 1]$, on obtient :

$$\langle B[f(x)], f(x) \rangle_{L^2([0,1])} \geq 0$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \langle (Id - A)[f(x)], f(x) \rangle_{L^2([0,1])} &= \langle x \times f(x), x \rangle_{L^2([0,1])} \\ &= \int_0^1 x \times f(x) \times \overline{f(x)} dx \\ &= \int_0^1 x \times [f(x)]^2 dx \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (Id - B)[f(x)], f(x) \rangle_{L^2([0,1])} &= \left\langle \int_0^1 f(t) dt, f(x) \right\rangle \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(t) dt \right] \times \overline{f(x)} dx \\ &= \int_0^1 dt \times \int_0^1 f(x) dx \\ &= \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc on déduit que $A \geq 0, B \geq 0$ et l'identité est un majorant de A et B .

Montrons par le biais du théorème (4.1) que l'identité est le majorant minimal.

On remarque que pour les opérateurs $C(f(x)) = \sqrt{x} \times f(x)$ et $D(f(x)) = \int_0^1 f(t)dt$ définis sur $L^2([0, 1])$ on a :

$$\begin{aligned} C^2(f(x)) &= C[C(f(x))] = C(\sqrt{x} \times f(x)) \\ &= \sqrt{x} \times (\sqrt{x} \times f(x)) = x \times f(x) & \forall f \in L^2([0, 1]) \\ D^2(f(x)) &= D[D(f(x))] = D\left(\int_0^1 f(t)dt\right) \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(t)dt\right] dt \\ &= \int_0^1 f(t)dt & \forall f \in L^2([0, 1]) \end{aligned}$$

Donc $C^2 = Id - A$ et $D^2 = Id - B$, d'où :

$$C = \sqrt{Id - A}, D = \sqrt{Id - B}$$

Soit $y \in \text{Im}(\sqrt{Id - A}) \cap \text{Im}(\sqrt{Id - B}) = \text{Im}(C) \cap \text{Im}(D)$, alors il existe $f_1(x), f_2(x) \in L^2([0, 1])$ telles que :

$$y = C(f_1(x)) = D(f_2(x)) \iff \sqrt{x} \times f_1(x) = \int_0^1 f_2(t)dt \quad \forall x \in [0, 1]$$

A partir de cette équation on déduit que $f_1 = 0_{L^2([0,1])}$ donc $y = 0_{L^2([0,1])}$.

Considérons à présent la fonction constante $g \in L^2([0, 1])$ telle que $g(x) = \alpha; \alpha > 0 \forall x \in [0, 1]$ et montrons par absurde que $g \notin \overline{\ker(Id - A) \oplus \ker(Id - B)}$

Pour celà, supposons que :

$$\exists! g_1 \in \ker(Id - A), \exists! g_2 \in \ker(Id - B)$$

telles que :

$$g = g_1 + g_2$$

Donc :

$$(Id - A)(g_1(x)) = x \times g_1(x) = 0_{L^2([0,1])}, (Id - B)(g_2(x)) = \int_0^1 g_2(t)dt = 0_{L^2([0,1])}$$

Alors on déduit que $g_1(x) = 0_{L^2([0,1])}$ et $g(x) = g_2(x) = \alpha > 0$ d'où la contradiction $(Id - B)(g_2(x)) = (Id - B)(\alpha) = \int_0^1 \alpha dt = \alpha \neq 0_{L^2([0,1])}$.

Il en résulte finalement que :

* L'identité est le majorant minimal de A et B .

* $\overline{\ker(Id - A) \oplus \ker(Id - B)} \neq L^2([0, 1])$

Application du théorème

La somme $A+B$ est l'exemple le plus simple d'un majorant de deux opérateurs positifs (A et B) et le théorème (4.1) nous permet de connaître quand $A+B$ est un majorant minimal.

Corollaire 4.3 *Soient A et B deux opérateurs positifs sur un espace de Hilbert H . Alors :*

$$A+B \text{ est un majorant minimal de } A \text{ et } B \iff \text{Im}(\sqrt{A}) \cap \text{Im}(\sqrt{B}) = \{0\}$$

Preuve. Il suffit d'utiliser le théorème (4.1) pour $T = A+B$ ■

Exemple : Considérons les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que les mineurs principaux des matrices $A, B, \text{Id} - A$ et $\text{Id} - B$ sont positifs, alors on déduit que $A \geq 0, B \geq 0$ et l'identité est un majorant de A et B .

Montrons avec deux méthodes que $\text{Id} = A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est le majorant minimal de A et B .

Première méthode : en utilisant la caractérisation du corollaire (4.2)

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} (\text{Id} - A)(X) = 0 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\ker(\text{Id} - A) = \{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} (\text{Id} - B)(X) = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_1 = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\ker(\text{Id} - B) = \{(0, x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Finalement

$$\ker(\text{Id} - A) \oplus \ker(\text{Id} - B) = \{(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1, x_2); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

Alors l'identité est un majorant minimal de A et B .

Deuxième méthode : en utilisant la caractérisation du corollaire (4.3).

On remarque que $\text{Id} = A + B$ et pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} A^2(X) = A[A(x)] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= A(X) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} B^2(X) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= B(X) \end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{A} = A, \sqrt{B} = B$$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \{\text{Im } \sqrt{A} \cap \text{Im } \sqrt{B}\}$, alors :

-) D'une part on a :

$$\begin{aligned} Y \in \text{Im } \sqrt{A} &\iff \exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff y_2 = 0, y_1 = x_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Im } \sqrt{A} = \{(y_1, 0); y_1 \in \mathbb{R}\}$$

-) D'autre part :

$$\begin{aligned} Y \in \text{Im } \sqrt{B} &\iff \exists X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff y_1 = 0, y_2 = x'_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Im } \sqrt{B} = \{(0, y_2); y_2 \in \mathbb{R}\}$$

Finalement $\text{Im } \sqrt{A} \cap \text{Im } \sqrt{B} = 0_{\mathbb{R}^2}$ et on déduit que l'identité est un majorant minimal de A et B .

Conclusion

La caractérisation qu'on établit :

$$T \text{ est un majorant minimal} \iff \text{Im}(\sqrt{T-A}) \cap \text{Im}(\sqrt{T-B}) = \{0\}$$

Fournit une relation entre le majorant minimal T de deux opérateurs positifs A et B et les images des opérateurs $\sqrt{T-A}$ et $\sqrt{T-B}$. Au fait cette caractérisation permet de déterminer l'ensemble des majorant minimaux d'une paire d'opérateurs positifs comme suit :

$$\mathcal{M}_{(A,B)} = \{T \in \mathcal{B}(H) : 0 \leq A, B \leq T \text{ et } \text{Im}(\sqrt{T-A}) \cap \text{Im}(\sqrt{T-B}) = \{0\}\}$$

Dans le cas de dimension finie, une relation algébrique plus simple est obtenue :

$$T \text{ est un majorant minimal} \iff \ker \sqrt{(T-A)} \oplus \ker \sqrt{(T-B)} = H$$

.

Bibliographie

- [1] **N.I. Akhieser eand I.M. Glazman**, « Theory of linear operators in Hilbert spaces », Nauka, Moscow, (1966).
- [2] **C. Akmann and N. Weaver**, « Minimal upper bounds of commuting operators », Proc. Amer. Math. Soc., 124, (1996), 3469-3476.
- [3] **C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw**, « Positive operators », Springer,(2006), iv-58.
- [4] **W. N. Anderson, Jr. et G. E. Trapp**, « Shorted Operators. II », SIAM, Vol. 28(1), (1975), 60-71.
- [5] **T. Ando**, « Linear Algebra and its Applications », Elsevier, Vol. 26, (1979), 203-241.
- [6] **A. Aslanov**, « Existence of the Minimum and Maximum of Two Self-Adjoint Operators », Mathematica Balkanica, New series, Vol.19, 2005, Fasc 3-4, 255-265.
- [7] **F. Bayen**, « Espaces de Hilbert et opérateurs », Edition marketing, Tome 2, (1985), 136-153.
- [8] **R. Bellman, R. Kalaba**, « Dynamic programming and modern control theory », One-hour reports, (1965), 65-82.
- [9] **G. Cassier, M. Ould Ali**, « On the set of upper bounds for a finite family of self-adjoint operators ». prépublication hal-00980617, (2014), 1-12.
- [10] **R.G. Douglas**, « On majorization, factorization and rang inclusion of operators in Hilbert space », Proc. Amer. Math. Soc., 17, (1966), 413-416.
- [11] **F. Kubo, T. Ando**, « Means of positif linear operators », Mathh. Ann.,246, (1980), 205-224.