



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
La République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة عبد الحميد بن باديس – مستغانم
Université Abdel Hamid Ben Badis - Mostaganem
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الهندسة الميكانيكية
Département Génie Mécanique



N d'ordre : M...../GM/2020

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Evaluations des propriétés mécaniques effectives des composites à matrice organique par la théorie de la micromécanique

Présenté Par:

- ❖ HOUNA Ismail
- ❖ GHOUL Sara

Soutenu le 30/06/2020 devant le jury composé de :

Président	Dr. SAHNOUN Mohammed	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Dr. BENKABOUCHE Sallah Eddine	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Dr. KHIAT Med Amine	Université de Mostaganem UMAB

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciement

Je remercie mon Dieu de m'avoir donné la patience et le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur Dr. KHIAT pour avoir proposé et dirigé mes travaux de recherche et son encouragement pendant l'accomplissement de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également au membre du jury qui ont bien voulu accepter de juger ce travail.

Je remercie aussi tous les enseignants.

Résumé

La méthode généralisée de cellules (GMC) de la micromécanique est employée dans cette étude pour la prédiction des modules effectifs des composites fibreux et périodiques en divisant la cellule unitaire répétitive (RUC) en un certain nombre de sous-cellules dans lesquelles les propriétés des matériaux sont attribuées et les résultats sont donnés.

L'objectif principal de cette étude est d'évaluer l'applicabilité du GMC à la prédiction du comportement thermoélastique des composites et il consiste en des équations analytiques capables de traiter à la fois le processus d'homogénéisation et de localisation des matériaux composites de manière très efficace numériquement. Un milieu continu approprié a également été intégré à la micro-échelle.

Pour les simulations de stratifiés composites, GMC a été intégré dans la théorie des stratifiés, qui est utilisée pour modéliser le stratifié en tant que modèle à l'échelle globale ou structurelle. Dans ces simulations, GMC opère à la méso-échelle, entre l'échelle globale du stratifié et la micro-échelle des phases individuelles du composite. L'analyse GMC représente le comportement du matériau composite aux points d'intégration dans chaque couche du stratifié. L'approche est entièrement couplée en ce que l'analyse sur chaque échelle affecte les autres échelles car la localisation et l'homogénéisation se produisent à plusieurs reprises tout au long de l'application de la charge appliquée simulée.

Plusieurs équations de modélisation de la réponse des matériaux composites et des stratifiés composites ont été présentées, basées sur le modèle micromécanique analytique GMC, qui fournit des équations constitutives de forme fermée pour les matériaux composites ainsi que les champs de contrainte et de déformation à micro-échelle dans les phases du composite.

Pour fournir un cadre pour GMC, un code appelé MAC/GMC est utilisé, à travers lequel diverses charges thermiques, mécaniques et thermomécaniques sont imposées, de nombreuses architectures de fibres différentes sont utilisées et les résultats sont sortis et discutés via la génération de fichiers de sortie contenant des colonnes de paires X-Y, qui sont tracées à l'aide d'un programme graphique distinct.

Mots clés : Composites, Micromécanique, GMC, Propriétés mécaniques, Microstructure.

Abstract

The micromechanical generalized method of cells (GMC) is employed in this study for the prediction of the effective moduli of the fibrous and periodic composites by dividing the repeating unit cell (RUC) into a number of subcells, in which material properties are assigned, and results are given.

The primary objective of this study is to assess the applicability of GMC in predicting the thermoelastic behavior of composites and it consists of analytical equations that are able to deal with both the homogenization and localization process for composite materials in very numerically efficient way. An appropriate continuum was incorporated on the micro scale as well.

For simulations of composite laminates, GMC has been embedded within lamination theory, which is used to model the laminate as a global or structural scale model. In these simulations, GMC operates on the meso scale, between the global scale of the laminate and the micro scale of the individual phases in the composite. The GMC analysis represents the behavior of the composite material at the integration points within each layer of the laminate. The approach is fully coupled in that the analysis on each scale affects the other scales as localization and homogenization occur repeatedly throughout the application of the simulated applied loading.

A multiple equations to modeling the response of composite materials and composite laminates has been presented. It is based on the analytical GMC micromechanics model, which provides closed-form constitutive equations for composite materials as well as the micro scale stress and strain fields in the composite phases.

To provide a framework for GMC, a code referred to as MAC/GMC is utilized, through it various thermal, mechanical and thermomechanical load histories are imposed, many different fiber architectures are utilized and results are output and discussed through the generation of output files containing columns of X-Y pairs, which are plotted using a separate graphing program.

Keywords: Composites, Micromechanics, GMC, Mechanical properties, Microstructure.

الملخص

يتم في هذه الدراسة استخدام الطريقة الميكروميكانيكية المعممة للخلايا للتنبؤ بالوحدات الفعالة للمركبات اللبيفية والدورية عن طريق تقسيم خلية الوحدة المتكررة إلى عدد من الخلايا الفرعية التي يتم فيها تعيين خصائص المواد ويتم إعطاء النتائج.

الهدف الأساسي من هذه الدراسة هو تقييم قابلية تطبيق جي أم سي للتنبؤ بالسلوك المرن الحراري للمركبات وتتكون من معادلات تحليلية قادرة على التعامل مع كل من عملية التجانس والتمركز للمواد المركبة بطريقة فعالة من الناحية العددية ، تم تضمين سلسلة متصلة مناسبة على المقياس الصغير أيضاً.

لمحاكاة الصفائح المركبة تم تضمين جي أم سي في نظرية الصفائح الطبقيّة والتي تستخدم لنمذجة الصفائح كنموذج مقياس عام أو هيكلية ، في هذه المحاكاة تعمل جي أم سي على المقياس المتوسط ، بين المقياس العام للصفائح والمقياس الصغير للمراحل الفردية في المركب ، يمثل تحليل جي أم سي سلوك المادة المركبة عند نقاط التكامل داخل كل طبقة من الصفائح يقترن هذا النهج تماماً في أن التحليل على كل مقياس يؤثر على المقاييس الأخرى حيث يحدث التجانس والتمركز بشكل متكرر طوال تطبيق التحميل المطبق المحاكى.

تم عرض معادلات متعددة لنمذجة استجابة المواد المركبة والصفائح المركبة حيث تستند إلى نموذج الميكانيكا الدقيقة جي أم سي التحليلي ، الذي يوفر معادلات تكوينية مغلقة للمواد المركبة وكذلك مجالات الجهد والضغط على المقياس الصغير في المراحل للمركب.

لتوفير إطار عمل لجي أم سي يتم استخدام رمز يشار إليه بماك جي أم سي ، من خلاله يتم تطبيق تحميلات حرارية وميكانيكية وميكانيكية حرارية مختلفة ، يتم استخدام العديد من مخططات الألياف المختلفة ويتم إخراج النتائج ومناقشتها من خلال إنشاء ملفات الإخراج التي تحتوي على أعمدة أزواج والتي يتم رسمها باستخدام برنامج رسوم بيانية منفصل.

الكلمات الدالة : المركبات ، الميكانيكا الدقيقة ، الطريقة المعممة للخلايا ، الخواص الميكانيكية ، البنية المجهرية.

Sommaire

Introduction Générale.....	1
Chapitre I : Principes fondamentaux	
I.1. Les matériaux composites.....	2
I.2. Modélisation des composites.....	3
I.3. Échelles et homogénéisation/localisation.....	4
I.4. Macromécanique versus Micromécanique.....	5
I.5. Élément de volume représentatif (RVE) et cellule unitaires répétitive (RUC).....	6
Chapitre II : La méthode généralisée de cellules (GMC) et la théorie des stratifiés	
II.1. Géométrie et relations de base.....	8
II.2. Continuité interfaciale des déplacements.....	10
II.3. Continuité interfaciale des tractions.....	12
II.4. Loi de comportement thermomécanique globale.....	12
II.5. Conductivités thermiques.....	14
II.6. Modèle constitutif.....	15
II.6.1. La loi de Hooke pour les matériaux isotropes.....	15
II.6.2. Transversalement isotrope dans les coordonnées globales.....	15
II.7. Théorie des stratifiés.....	16
II.8. Conclusion.....	21
Chapitre III : Résultats et discussions	
Exemple 1.....	22
Exemple 2.....	25
Exemple 3.....	30
Exemple 4.....	34
Exemple 5.....	38
Conclusion générale.....	43
Références bibliographiques.....	44

Liste des figures

Figure I.1 : Systèmes de composites.....	3
Figure I.2 : Illustration des niveaux d'échelle pertinents pour l'analyse multi-échelle de composites.....	4
Figure I.3 : Diagramme en arbre multi-échelle mettant en relation les constituants et les structures.....	5
Figure I.4 : Relations entre les échelles d'un RVE, d'un RUC et d'une structure	6
Figure II.1 : Géométrie RUC de GMC-3D.....	9
Figure II.2 : Définition de la convention de numérotation des cellules unitaires voisines.....	10
Figure II.3 : Cellule unitaire répétitive (RUC) de GMC doublement périodique.....	14
Figure II.4 : Théorie des stratifiés multi-échelles disponible en MAC/GMC.....	17
Figure II.5 : Diagramme d'arbre au niveau du stratifié $[0^\circ/90^\circ]$ pour la théorie des stratifiés multi-échelles.....	17
Figure III.1 : Approximation de fibre circulaire 7×7 , paquet rectangulaire de cellules unitaires répétitives.....	23
Figure III.2 : Tracé de la réponse simulée de la contrainte en fonction de la force appliquée pour le composite graphite/époxy.....	25
Figure III.3 : RUC de fibre carrée, paquet diagonal carré.....	26
Figure III.4 : Tracé de la contrainte simulée en fonction du temps pour le composite.....	28
Figure III.5 : Tracé de la déformation simulée en fonction du temps.....	28
Figure III.6 : Tracé de la réponse longitudinale et transversale simulée de la déformation en fonction de la température du composite	29
Figure III.7 : Géométrie générale du stratifié et système de coordonnées utilisé dans MAC/GMC 4.0.....	31
Figure III.8 : Tracé de la réponse de la force résultante de traction globale en fonction de la déformation du plan moyen du stratifié à 150°C avec un angle variable d'orientation des fibres.....	32
Figure III.9 : RUC d'approximation de fibre circulaire 26×26 , paquet rectangulaire.....	34
Figure III.10 : Tracé de la réponse de la force résultante de traction globale en fonction de la déformation du plan moyen ($N_{xx} - \varepsilon_{xx}^0$) pour les stratifiés graphite/époxy à couches croisés et quasi-isotropes à 150°C	36
Figure III.11 : Réponse $N_{ij} - \varepsilon_{ij}^0$ d'un stratifié graphite/époxy quasi-isotrope à fraction volumique de fibres de 0.60 aux déformations du plan moyen appliquées à 150°C	37

Liste des figures

Figure III.12 : Réponse $M_{ij} - K_{ij}$ d'un stratifié graphite/époxy quasi-isotrope à fraction volumique de fibres de 0.60 aux courbures appliquées à 150 °C.....	37
Figure III.13 : RUC de fibres courtes en réseau diagonal (RUC triplement périodique).....	38
Figure III.14 : RUC de fibres courtes en réseau carré (RUC triplement périodique).....	38
Figure III.15 : RUC de matériau monolithique.....	39
Figure III.16 : Tracé de la réponse de la force résultante globale N_{ij} pour un stratifié SiC/époxy asymétrique à 23 °C à une déformation du plan moyen ε_{xx}^0 appliquée.....	40

Liste des tableaux

Tableau III.1 : Propriétés mécaniques de graphite [Dvorak et al. (1973)] et d'époxyde [Aboudi (1991)] à 23 °C.....22

Tableau III.2 : Propriétés effectives calculées par le MAC/GMC de l'exemple 1.....24

Tableau III.3 : Propriétés mécaniques de graphite [Dvorak et al. (1973)] et d'époxyde [Aboudi (1991)] à 23 °C et 150 °C.....26

Tableau III.4 : Propriétés effectives calculées par le MAC/GMC de l'exemple 2.....27

Tableau III.5 : Propriétés élastiques dépendantes de la température pour la fibre SCS-6 (Bednarczyk et Arnold, 2000a).....30

Tableau III.6 : Les propriétés effectives à 150 °C pour la couche 0° de l'exemple 3.....32

Tableau III.7 : Résultats de rigidité et de constantes d'ingénierie effectives pour les stratifiés analysés.....36

Tableau III.8 : Résultats de rigidité et de constantes d'ingénierie effectives pour le stratifié analysé.....40

Nomenclature

v_f : Fraction volumique de fibres

v_m : Fraction volumique de la matrice

s_u : Champ de déplacement appliqué

s_σ : Champ de contrainte appliqué

RVE : Élément de volume représentatif

RUC : Cellules unitaires répétitives

d : La taille microstructurale

D : La taille du RVE

L : Longueur caractéristique du composant ou de la structure composée du matériau hétérogène

$d_\alpha h_\beta l_\gamma$: Volume de chacune des sous-cellules

dhl : Le volume total du RUC

$w_i^{(\alpha\beta\gamma)}(x)$: Les composantes de déplacement au centre de chaque sous-cellule

$\chi_i^{(\alpha\beta\gamma)}, \phi_i^{(\alpha\beta\gamma)}, \psi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$: Micro-variables qui caractérisent la dépendance linéaire des déplacements

$u_i^{(\alpha\beta\gamma)}$: Déplacements de la sous-cellule

$\bar{\varepsilon}_{ij}$: Déformation moyenne du composite

$\bar{\sigma}_{ij}$: Contrainte moyenne dans le composite

$\bar{\varepsilon}^I$: Tenseur de déformation inélastique du composite

$\bar{\varepsilon}^T$: Tenseur de déformation thermique moyen du composite

$\varepsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$: La déformation totale dans la sous-cellule

$\sigma_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$: La contrainte totale dans la sous-cellule

$\varepsilon_{ij}^{I(\alpha\beta\gamma)}$: Déformation inélastique de la sous-cellule

$\varepsilon_{ij}^{T(\alpha\beta\gamma)}$: Déformation thermique de la sous-cellule

$\alpha_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$: Le tenseur de coefficient de dilatation thermique (CTE)

ΔT : L'écart de température = $T - T_R$

T_R : Température de référence

Nomenclature

$C_{ijkl}^{(\alpha\beta\gamma)}$: Tenseur de rigidité élastique du matériau

A_M : Matrice implique les propriétés élastiques du matériau dans la sous-cellule

A : Matrice de concentration mécanique

C^* : Tenseur de rigidité élastique effectif du composite

$C^{(\alpha\beta\gamma)}$: Tenseur de rigidité élastique de chaque sous-cellule

α^* : Vecteur de coefficient de dilatation thermique (CTE) effectif du composite

$k_i^{(\alpha\beta\gamma)}$: Conductivité thermique du matériau

k_i^* : Conductivité thermique du composite

C_{ijkl} : Les composantes de tenseur de rigidité élastique du matériau

E_A : Module d'élasticité axial

E_T : Module d'élasticité transversal

ν_A : Coefficient de Poisson axial

ν_T : Coefficient de Poisson transversal

G_A : Module de cisaillement axial

σ_1, σ_2 et τ_{12} : Les composantes de contrainte dans les coordonnées locales

σ_x, σ_y et τ_{xy} : Les composantes de contrainte dans les coordonnées globales

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$, et γ_{12} : Les composantes de déformation dans les coordonnées locales

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$, et γ_{xy} : Les composantes de déformation dans les coordonnées globales

Q_{ij}^k : Les composantes de la matrice de rigidité réduite pour la k ième couche

θ : L'angle de la couche

u_0, v_0 et w_0 : Les déplacements du plan moyen

$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ et γ_{xy}^0 : Les déformations du plan moyen

k_x, k_y, k_{xy} : Les courbures du plan moyen

N_x, N_y et N_{xy} : Les forces résultantes du stratifié par unité de longueur

M_x, M_y et M_{xy} : Les moments par unité de longueur

H : L'épaisseur du stratifié

N^T : Le vecteur thermique de force

M^T : Le vecteur thermique de moment

ε_z : Déformation normale à travers l'épaisseur

σ_z : Contrainte normale à travers l'épaisseur

\bar{C}_{ij}^k : Les composantes de la matrice de rigidité tournée dans la k ième couche

Nomenclature

*CONSTITUENTS : Paramètres des constituants du composite

NMATS : Nombre de matériaux constitutifs spécifiés

M : Numéro de matériau numéroté séquentiellement

CMOD : Numéro d'identification du modèle constitutif

EL : Propriétés du matériau

EA : Module d'élasticité axial

ET : Module d'élasticité transversal

NUA : Coefficient de Poisson axial

NUT : Coefficient de Poisson transversal

GA : Module de cisaillement axial

ALPA : CTE axial

ALPT : CTE transversal

TEM : Température

K : Conductivités thermiques locales

*RUC : Paramètres de l'architecture des fibres

MOD : Identifiant du modèle de matériau périodique

ARCHID : Numéro d'identification de l'architecture RUC

VF : Fraction volumique de fibre

R : Rapport de forme du RUC = L/H (voir figure II.1)

F : Numéro de matériau de la fibre (sa numérotation est déterminée dans *CONSTITUENTS)

M : Numéro de matériau de la matrice (sa numérotation est déterminée dans *CONSTITUENTS)

ASP1 : Rapport de forme de la fibre courte (longueur de la fibre / diamètre de la fibre)

ASP2 : Rapport de forme du RUC = l/h (voir figure II.3)

*MECH : Paramètres de chargement mécanique

LOP : Option de chargement

NPT : Nombre de points de temps

TI : Points de temps

MAG : Points de magnitude de la charge

MODE : Mode de chargement appliqué pendant l'étape de chargement

*THERM : Paramètres de température

NPT : Nombre de points de temps

TI : Points de temps

Nomenclature

TEMP : Points de température

*LAMINATE : Paramètres de stratifié

NLY : Nombre de couches (plis) constituant le stratifié

LY : Numéro de couche

THK : Épaisseur de couche

ANG : Angle hors axe de la couche (voir figure III.7)

*SOLVER : Algorithmes d'intégration

NPT : Nombre de points de temps

TI : Points de temps

STP : Taille des pas de temps

*PRINT : Niveau d'impression globale de sortie pour le fichier de sortie

NPL : Spécificateur de niveau d'impression pour le fichier de sortie MAC/GMC 4.0

*XYPLOT : Sortie de tracé X-Y

FREQ : Fréquence des pas de temps pour écrire la sortie

MACRO : Nombre de fichiers de tracé macro (niveau RUC)

NAME : Nom du fichier de tracé

LAMINATE : Nombre de fichiers de tracé au niveau du stratifié

*END : Fin de fichier d'entrée

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux composites étant de plus en plus utilisés, le besoin de modèles analytiques et de codes informatiques pour prédire les propriétés et la réponse thermomécanique des matériaux et structures composites s'est considérablement accru. En outre, les modèles analytiques qui prédisent le comportement effectif des composites sont utilisés non seulement par les ingénieurs qui effectuent l'analyse structurelle des composants composites à grande échelle, mais aussi par les scientifiques des matériaux pour développer de nouveaux systèmes de matériaux. Pour qu'un modèle analytique puisse remplir ces deux fonctions distinctes, il doit être basé sur une approche micromécanique qui utilise des modèles constitutifs de déformation basés sur la physique et génère la réponse moyenne (macro) d'un matériau composite compte tenu des propriétés des constituants individuels et de leur disposition géométrique [1,9].

L'objectif principal de cette étude est d'évaluer l'applicabilité de GMC dans la prédiction du comportement thermoélastique des composites renforcés de fibres qui sont influencés par divers paramètres caractéristiques tels que les arrangements de fibres, la fraction volumique de fibres, les rapports de forme des fibres, les rapports de rigidité entre les fibres et la matrice et le type de renfort [2]. Le GMC est entièrement capable de modéliser des architectures de composites multiphasés arbitraires et permet une analyse précise et efficace de l'impact des matériaux, des charges, de la forme et de la disposition des fibres sur la réponse macroscopique du composite [4,6,9], comme l'ont démontré Arnold et al. (1996) et consiste en des équations analytiques [10] capables de traiter à la fois le processus d'homogénéisation et de localisation des matériaux composites d'une manière très efficace sur le plan numérique [2], la capacité prédictive de la méthode dans diverses applications a été récemment résumée par Aboudi (1996).

La relation entre les variables locales et globales est fournie par l'utilisation des tenseurs de concentration de déformation et de contrainte de Hill (1963) qui définissent la réponse macroscopique instantanée le long du chemin de chargement [14].

Le MAC/GMC 4.0 utilisé dans cette étude est un logiciel développé par le centre de recherche Glenn de NASA, basé sur la méthode généralisée de cellules (GMC) et couplé avec la théorie classique des stratifiés [3,11].

- Le premier chapitre présente des informations de base sur le matériau composite et sa modélisation.
- En deuxième chapitre, description mathématique du GMC et de la théorie des stratifiés et des lois constitutives sont décrites.
- En troisième chapitre, différentes applications sont traitées et prédictions numériques des matériaux composites sont obtenues à partir du logiciel MAC/GMC 4.0.

Chapitre I

Principes fondamentaux

L'approche d'analyse multi-échelles généralisée est le fruit du développement, de la mise en œuvre et de l'application des théories de la micromécanique pour les composites [13]. L'objectif de ce chapitre est de placer ces théories dans leur contexte, de fournir leurs fondements théoriques de manière claire et concise, et d'illustrer leur utilité pour la conception et l'analyse des composites. Ce chapitre fournit des informations fondamentales sur les composites et se concentre ensuite sur la modélisation des composites, en particulier la micromécanique et la modélisation multi-échelles.

I.1 Les matériaux composites

Les scientifiques et les ingénieurs ont développé des moyens de représenter les matériaux à travers les propriétés qui décrivent comment le matériau se comporte à un point dans un corps, comme le module de Young, la conductivité thermique, la densité, le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique [21]. Le corps lui-même, d'autre part, est une structure. Le matériau est un milieu continu, ce qui signifie qu'il est continu et remplit complètement la région de l'espace qu'il occupe [24].

Dans son contexte le plus large, un composite est tout ce qui est composé de deux ou plusieurs matériaux ayant une interface reconnaissable entre eux. Comme il s'agit d'un matériau, il n'a pas de limites extérieures ; une fois qu'une limite extérieure est introduite, il devient une structure composée de matériaux composites. Il est clair, cependant, qu'un matériau composite a des limites internes distinctes. Si ces limites internes sont ignorées, la mécanique des milieux continus peut être utilisée pour modéliser les matériaux composites en tant que matériaux anisotropes pseudo-homogènes avec des propriétés de matériaux "effectives", "homogénéisées" ou "étalées" dépendantes de la direction. En micromécanique, les matériaux individuels (généralement appelés constituants ou phases) qui composent un composite sont chacun traités comme des liaisons continues par la mécanique des milieux continus, leurs propriétés représentatives individuelles et leur disposition dictent le comportement global du matériau composite [1,9].

Dans de nombreux cas, en particulier avec les matériaux composites utilisés dans l'ingénierie des structures, la disposition géométrique d'une phase est continue et sert à maintenir ensemble l'autre ou les autres constituants. Ce constituant est appelé matériau de matrice. Alors que l'autre ou les autres constituants, souvent appelés inclusion(s) et/ou renfort(s), sont des matériaux qui peuvent être continus ou discontinus et qui sont maintenus ensemble par la matrice. Un descripteur fondamental des composites qui doit toujours être indiqué lorsqu'on désigne un système donné (car il influence fortement le comportement effectif) est la fraction volumique des phases présentes. En général, seule la phase de renfort est indiquée, sauf si plusieurs phases sont présentes, car la somme de toutes les phases doit être égale à 100%, par exemple, dans un composite à deux phases renforcé de fibres, v_f est la fraction volumique de fibres et $v_m = 1 - v_f$ est celle de la matrice. [23]

Les composites sont classés au niveau de la forme du renfort en fibres discontinues, fibres continues ou tissées (textile) Figure I.1 [25].

Les composites, en particulier les composites à matrice polymère (PMC), sont souvent fabriqués sous la forme d'un assemblage de couches minces réunies pour former un stratifié (voir figure I.1(b)). Chaque couche est appelée "pli" [25]. En orientant la direction de renfort de chaque couche, les propriétés et le comportement du stratifié résultant peuvent être contrôlés [22].

Sans différences de propriétés entre les constituants, un composite cesserait d'être un composite. C'est-à-dire que c'est la différence de propriétés entre les constituants qui fait qu'un composite se comporte différemment d'un matériau monolithique et permet son adaptation à des fins spécifiques.

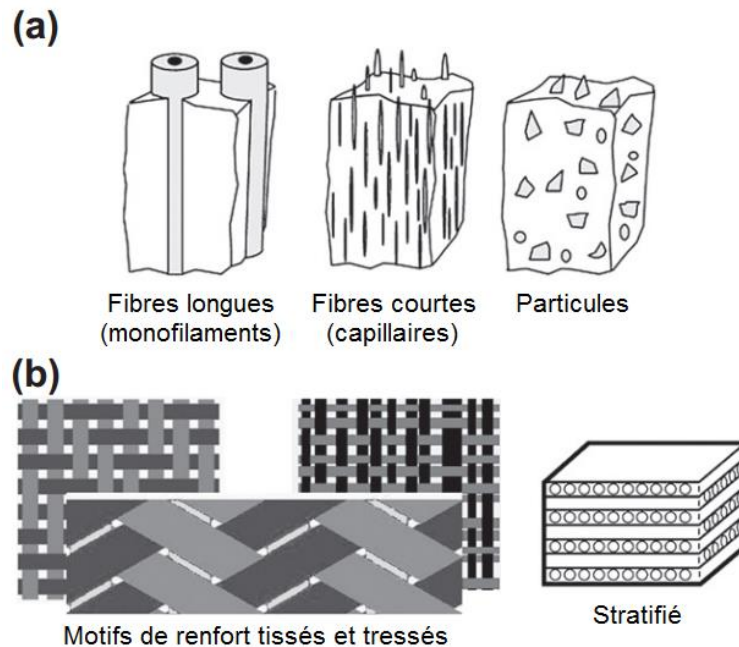


Figure I.1 : Systèmes de composites : (a) Types de renfort. (b) Constructions de stratifié et de tissu [25].

I.2 Modélisation des composites

L'expression «modélisation des composites» vise à faire référence à la simulation ou à l'analyse du comportement d'un matériau ou d'une structure composite entièrement consolidée. Dans ce contexte, il existe deux approches de base pour la modélisation des composites: l'approche macromécanique et l'approche micromécanique. L'approche macromécanique implique la construction de modèles strictement à l'échelle macro/globale (voir figure I.2), dans laquelle le composite est considéré comme un matériau anisotrope et les détails de l'arrangement sous-jacent des matériaux constitutifs sont ignorés [13].

L'approche micromécanique de la modélisation des composites considère explicitement les matériaux constitutifs et la façon dont ils sont disposés pour former le composite. L'objectif de la micromécanique est de prédire le comportement effectif d'un matériau hétérogène basé sur le comportement des matériaux constitutifs et de leur agencement géométrique. En déterminant le comportement effectif d'un composite via la micromécanique, il peut ensuite être traité comme un matériau dans des analyses à plus grande échelle (similaire à l'approche macromécanique). Par exemple, les propriétés effectives du composite déterminées par la micromécanique peuvent être utilisées dans une analyse de stratifié pour représenter les matériaux des couches. Un avantage de la micromécanique est que les propriétés du composite peuvent être déterminées, dans n'importe quelle direction, pour n'importe quelle fraction volumique de fibres ou architecture de renfort, même si le

composite n'a jamais été fabriqué. Il peut donc aider à concevoir les matériaux composites eux-mêmes ainsi que les structures qui les composent.

I.3 Échelles et homogénéisation/localisation

La modélisation multi-échelles des composites fait référence à la simulation de leur comportement à travers plusieurs échelles de temps ou de longueur [20]. Bien que la nomenclature dans la littérature varie, une analyse de modélisation multi-échelles suivra généralement les échelles de longueur illustrées à la figure I.2 pour la modélisation basée sur le milieu continu. Ces échelles, progressant de gauche à droite sur la figure I.2, sont la micro-échelle (au niveau des constituants: fibre, matrice), la méso-échelle (composite, stratifié), la macro-échelle et l'échelle globale/structurelle. Traditionnellement, on traverse (transcende (se déplace à droite) ou descend (se déplace à gauche)) ces échelles via des techniques d'homogénéisation et de localisation, respectivement (figures I.7 et I.8), une technique d'homogénéisation fournit les propriétés ou la réponse d'une «structure» (niveau supérieur) compte tenu des propriétés ou de la réponse des «constituants» de la structure (échelle inférieure). Inversement, les techniques de localisation fournissent la réponse des constituants étant donné la réponse de la structure. La figure I.3 illustre l'interaction des techniques d'homogénéisation et de localisation en ce que, lors d'une analyse multi-échelles, une étape particulière de la procédure d'analyse peut fonctionner simultanément sur les deux niveaux. Par exemple, pendant le processus d'homogénéisation des étapes représentées par X et Y, pour obtenir les propriétés de l'étape représentée par V, X et Y doivent être considérées comme le niveau des constituants, tandis que V est au niveau de la structure. Cependant, pendant le processus d'homogénéisation de V et W pour obtenir les propriétés de U, V est maintenant au niveau des constituants (tout comme W). De toute évidence, la capacité d'homogénéiser et de localiser avec précision nécessite une théorie sophistiquée qui relie les caractéristiques géométriques et matérielles de la structure et des constituants [13].

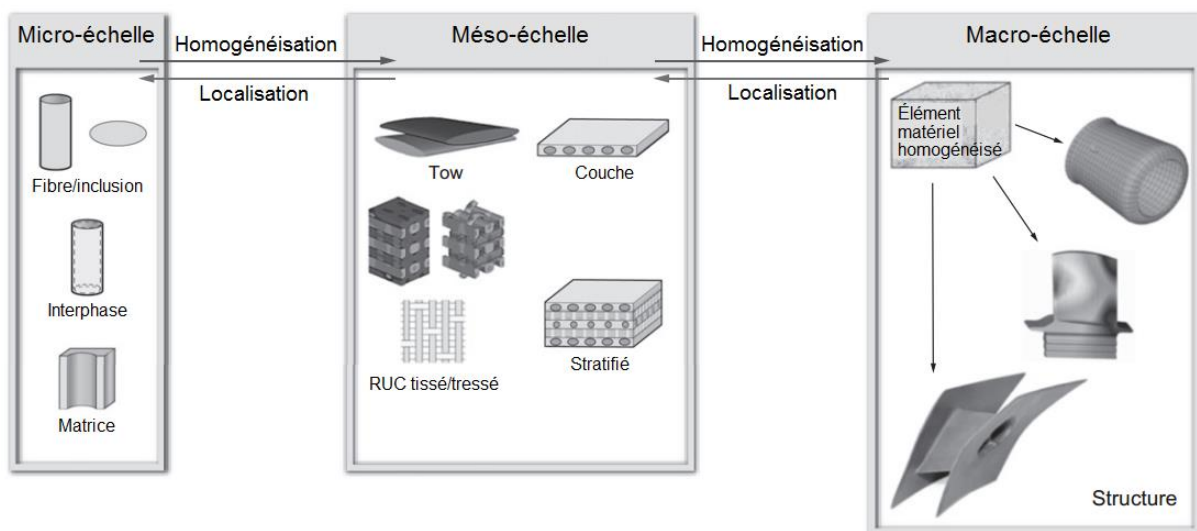


Figure I.2 : Illustration des niveaux d'échelle pertinents pour l'analyse multi-échelle de composites [13].

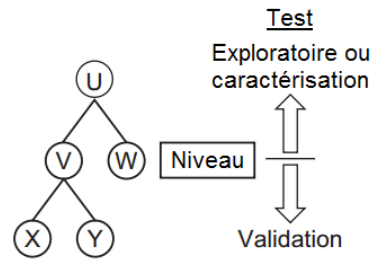


Figure I.3 : Diagramme en arbre multi-échelle mettant en relation les constituants et les structures [13].

Si un matériau monolithique est chargé uniaxialement, le champ de contrainte interne est constant et uniaxial. Dans un composite, même s'il est chargé uniaxialement, le mésappariement des propriétés des constituants dans les différentes directions crée des champs de contrainte multiaxiaux dans chaque constituant. Lorsque la non-linéarité du matériau est présente dans les constituants, comme le composite est chargé de façon monotone, la redistribution des contraintes se produit en interne entre les constituants - et même au sein des constituants - parce que les régions de contraintes plus élevées du composite se comportent différemment des régions de contraintes plus faibles. Il en résulte une non-proportionnalité locale car chaque point de chaque constituant affecte la réponse de chaque autre point de ce type. Le déchargement local peut souvent se produire même si la charge monotone globale sur le composite continue [13].

I.4 Macromécanique versus Micromécanique

La caractéristique distinctive entre les approches micromécaniques et macromécaniques est leur point de départ relatif, dans lequel le premier commence à la micro-échelle (c'est-à-dire au niveau des constituants) [1,9] et le second au niveau de l'élément matériel homogénéisé à l'échelle globale. Chaque approche a des besoins uniques en termes de caractérisation et de vérification expérimentales.

Dans l'approche à micro-échelle, les modèles des constituants sont utilisés en conjonction avec l'homogénéisation pour prédire le comportement du composite. L'approche à macro-échelle traite le composite comme un matériau anisotrope, avec ses propres propriétés. Par conséquent, le matériau lui-même effectue la procédure d'homogénéisation de la micro-échelle à l'échelle globale.

L'approche macromécanique n'est pas universellement applicable pour l'analyse structurale des matériaux multiphasés car sa validité dépend des dimensions structurales caractéristiques, de la gravité des gradients (contrainte, température, etc.) dans la structure et de la taille (taille de cellules) de la texture interne du matériau (voir la figure I.4 et Aboudi, 1993; Liu, 1988; et Onat et Wright, 1991).

La supériorité de l'approche à micro-échelle ou à macro-échelle reste discutable par rapport à l'objectif principal de développer des outils d'analyse précis, efficaces sur le plan des calculs et validés expérimentalement. Il est clair que chaque approche a son domaine d'applicabilité avec des forces et des faiblesses évidentes [4,6,9].

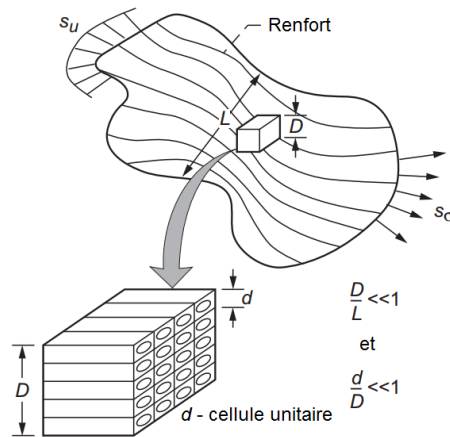


Figure I.4 : Relations entre les échelles d'un RVE, d'un RUC et d'une structure; s_u = champ de déplacement appliqué, s_σ = champ de contrainte appliqué [24].

Par exemple, l'approche à micro-échelle (micromécanique) est considérée comme la plus adaptée aux applications impliquant la fabrication et le développement de matériaux, où une évaluation précise des micro-contraintes et des déformations est critique, cependant, ces informations détaillées ont souvent un coût de calcul élevé, ce qui est souvent peu pratique et prohibitif pour la conception et l'analyse des composants structurels. En revanche, l'approche à macro-échelle (macromécanique) est clairement la plus efficace sur le plan des calculs, ce qui facilite son utilisation dans la conception et l'analyse de composants à grande échelle; cependant, cette efficacité peut se faire au détriment de la précision par rapport à son homologue à micro-échelle plus intense sur le plan des calculs, en particulier lorsque le comportement très localisé, non-uniforme par rapport à l'élément de volume représentatif (RVE) domine. Par conséquent, compte tenu de ces considérations, une variété d'approches théoriques à micro-échelle et à macro-échelle continuent d'être poursuivies et affinées dans la littérature dans le but ultime de développer une approche qui soit à la fois efficace sur le plan des calculs et précise pour l'analyse sous des charges multiaxiales [6].

I.5 Élément de volume représentatif (RVE) et cellule unitaire répétitive (RUC)

La mécanique des milieux continus est basée sur le concept d'un milieu continu homogène, qui peut être subdivisé à plusieurs reprises en sous-volumes infinitésimaux, chacun d'entre eux conserve les propriétés du matériau en vrac [16]. Cependant, à une certaine échelle, tous les matériaux réels sont hétérogènes. L'objectif de la micromécanique est de rendre compte explicitement de la microstructure hétérogène d'un matériau tout en permettant de le traiter comme un milieu continu effectif (pseudo-homogène) à une échelle de longueur plus élevée (par exemple, au sein d'une structure). Pour tenir compte de cette microstructure, la micromécanique s'appuie sur un élément de volume représentatif (RVE) ou sur une cellule unitaire répétitive (RUC) [24].

Un RVE est un volume d'un matériau dont le comportement effectif est représentatif (et indiscernable) de celui du matériau dans son ensemble. Pour un matériau fictif parfaitement homogène, le RVE serait infiniment petit. Pour tous les matériaux réels, qui contiennent une microstructure, le RVE doit contenir un volume suffisamment important pour qu'il capte l'essence de la microstructure d'un point de vue statistique.

Le concept de cellule unitaire répétitive (RUC) est tout aussi important. Ici, la microstructure hétérogène est approximée comme périodique, où le RUC est le volume du matériau qui se répète

pour générer la microstructure globale [1,9]. Des conditions de périodicité sont appliquées aux limites du RUC pour imposer la nature répétitive du RUC. Il est souvent difficile de garantir qu'un volume d'analyse choisi est bien un RVE; par conséquent, l'approche RUC/périodicité est généralement utilisée. Drago et Pindera (2007) fournissent une discussion approfondie des concepts RVE et RUC dans le contexte de la micromécanique de composites.

L'interaction entre les échelles d'un RVE, d'un RUC et d'une structure est illustrée à la figure I.4. Ici, d représente la taille microstructurale (un RUC fibre/matrice du composite dans cette illustration), D est la taille du RVE et L est une longueur caractéristique du composant ou de la structure composée du matériau hétérogène. Si les rapports de ces dimensions (d/D et D/L) sont bien inférieurs à 1, alors le RVE doit inclure un nombre suffisant d'unités microstructurales pour permettre (statistiquement) la nature hétérogène du matériau à homogénéiser [24]. En d'autres termes, le RVE du matériau est tel que (a) il est entièrement typique du composite en vrac en moyenne [16] et (b) il contient un nombre suffisant de phases de matériau et est donc grand par rapport aux échelles de microstructure, mais reste petite par rapport à l'ensemble du corps [24].

Chapitre II

La méthode généralisée de
cellules (GMC) et la théorie des
stratifiés

Récemment, une technique de micromécanique appelée la méthode généralisée de cellules (GMC) [6] a été développée par Paley et Aboudi (1991, 1995) [5,6,9], dans laquelle la microstructure d'un matériau périodique est représentée par une cellule unitaire répétitive rectangulaire constituée d'un nombre arbitraire de sous-cellules rectangulaires, dont chacune peut être un matériau distinct. Il s'agit d'un modèle micromécanique analytique basé sur le milieu continu qui fournit des équations constitutives multiaxiales de forme pseudo fermée pour les matériaux [10] et fournit le comportement global (réponse macroscopique) et la capacité de simuler une charge thermomécanique générale de composites multiphasiques continus [9] et discontinus (à fibres courtes) [4] avec microstructures et forme de renfort périodiques arbitraires à partir de la connaissance des propriétés, de la taille, de la forme, de la distribution et de la réponse des constituants ou des phases individuels qui composent le matériau [2]. La nature périodique des composites permet généralement d'identifier une cellule unitaire répétitive qui peut être utilisée comme bloc de construction pour construire le composite entier. Les propriétés de cette cellule unitaire sont donc représentatives des propriétés de l'ensemble complet. Les champs de contraintes et de déformations internes dans les constituants individuels sont exprimés en termes de contraintes et déformations appliquées macroscopiquement via des facteurs de concentration de déformation ou de contrainte [4,9]. GMC représente le composite comme un milieu continu sans aucune frontière et peut être intégré de manière transparente dans une analyse structurelle à plus grande échelle. La mécanique des milieux continus, qui permet de décrire (sur un élément de volume représentatif approprié) les microprocédés hétérogènes impliqués lors de la déformation des matériaux et des structures à l'échelle macroscopique. La cellule unitaire est divisée en un nombre arbitraire de sous-cellules et c'est la plus petite section du composite pour laquelle la réponse peut être considérée comme représentative du composite dans son ensemble.

Les contraintes et déformations macroscopiques sont ensuite définies en termes de contraintes et déformations microscopiques (sous-cellules), et les équations constitutives macroscopiques globales du composite peuvent être déterminées.

La méthode GMC suppose un champ de déplacement linéaire dans chaque sous-cellule et impose une continuité des composantes de traction et de déplacement entre les sous-cellules dans un sens moyen (Aboudi, 1995) [4]. Cette procédure aboutit à un système d'équations linéaires.

Pour l'analyse du stratifié, pour modéliser le comportement du stratifié composite, la théorie classique des stratifiés (Jones (1975) et Herakovich (1998)) est utilisée comme modèle à l'échelle globale ou structurelle, tandis que GMC est intégré pour fonctionner à la méso-échelle pour simuler le comportement du matériau composite au sein de chaque couche du stratifié. Les équations de la théorie des stratifiés homogénéisent ensuite les déformations du composite pour donner la force et le moment résultants de l'échelle requise du stratifié. La théorie micro/macro actuelle est maintenue aussi générale que possible afin de maximiser son applicabilité.

II.1 Géométrie et relations de base

Considérons un matériau composite à microstructure périodique dont le RUC est constitué de sous-cellules parallélépipédiques rectangulaires $N_\alpha \times N_\beta \times N_\gamma$. Le volume de chacune des sous-cellules est $d_\alpha h_\beta l_\gamma$, où α, β et γ sont des indices courants: $\alpha = 1, \dots, N_\alpha$; $\beta = 1, \dots, N_\beta$; et $\gamma = 1, \dots, N_\gamma$, dans les directions orthogonales x_1, x_2 , et x_3 , respectivement [15]. Le volume total du RUC est dhl où $d = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} d_\alpha$, $h = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta$, $l = \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma$. Dans la figure II.1, un exemple est montré pour un élément de volume représentatif (RVE) avec $N_\alpha = 3$, $N_\beta = 4$, et $N_\gamma = 2$ [4].

Chacune des sous-cellules peut être remplie par un matériau. En sélectionnant de manière appropriée les dimensions géométriques des sous-cellules et en remplissant les sous-cellules de manière appropriée, divers types de composites peuvent être envisagés tels que les composites unidirectionnels à fibres longues, les composites à fibres courtes et les matériaux en couches.

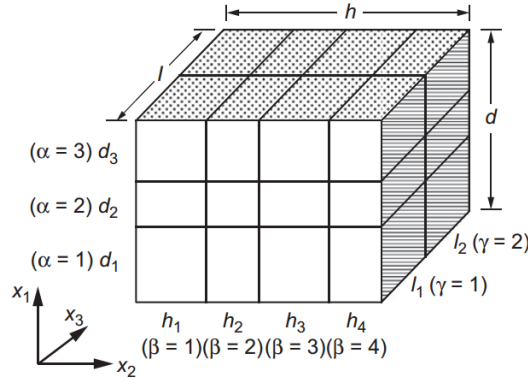


Figure II.1 : Géométrie RUC de GMC-3D [4].

Compte tenu des interactions détaillées des sous-cellules de la RUC, des relations constitutives globales, qui régissent le comportement effectif du composite multiphasé, peuvent être établies. Cette analyse semi-analytique repose sur les exigences selon lesquelles l'équilibre statique des matériaux dans les différentes sous-cellules est assuré et que la continuité des déplacements et des tractions entre les sous-cellules voisines au sein du RUC, ainsi qu'entre les RUC voisins, est satisfaite en moyenne. Pour ce faire, des coordonnées locales $\bar{x}_1^{(\alpha)}$, $\bar{x}_2^{(\beta)}$, et $\bar{x}_3^{(\gamma)}$ sont introduites, dont l'origine se situe au centre de chaque sous-cellule $(\alpha \beta \gamma)$. Ces coordonnées locales sont représentées sur la figure II.2 pour la sous-cellule $(\alpha \beta \gamma)$ et la voisine $(\hat{\alpha} \beta \gamma)$ dans la direction x_1 , où $\hat{\alpha}$ est défini pour avoir la forme :

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \alpha + 1 & \alpha < N_\alpha \\ 1 & \alpha = N_\alpha \end{cases}$$

Cette définition garantit que pour $\alpha < N_\alpha$ la sous-cellule voisine dans la direction x_1 est celle étiquetée par $(\alpha + 1, \beta, \gamma)$ dans le RUC, tandis que pour $\alpha = N_\alpha$ la sous-cellule voisine est dans le RUC suivant dont la première sous-cellule est $(1, \beta, \gamma)$. De même, $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont définis par :

$$\hat{\beta} = \begin{cases} \beta + 1 & \beta < N_\beta \\ 1 & \beta = N_\beta \end{cases}$$

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} \gamma + 1 & \gamma < N_\gamma \\ 1 & \gamma = N_\gamma \end{cases}$$

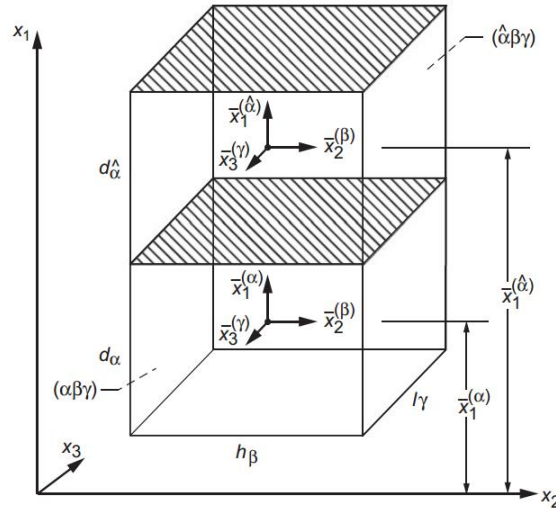


Figure II.2 : Définition de la convention de numérotation des cellules unitaires voisines.

Le GMC considère une théorie du premier ordre dans laquelle les déplacements $u_i^{(\alpha\beta\gamma)}$ dans chaque sous-cellule sont étendus linéairement en termes de distances par rapport au centre de la sous-cellule; c'est-à-dire, en termes de coordonnées locales $\bar{x}_1^{(\alpha)}$, $\bar{x}_2^{(\beta)}$, et $\bar{x}_3^{(\gamma)}$. Ainsi, l'expansion de premier ordre suivante dans la sous-cellule $(\alpha\beta\gamma)$ est représentée par :

$$u_i^{(\alpha\beta\gamma)} = w_i^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{x}) + \bar{x}_1^{(\alpha)} \chi_i^{(\alpha\beta\gamma)} + \bar{x}_2^{(\beta)} \phi_i^{(\alpha\beta\gamma)} + \bar{x}_3^{(\gamma)} \psi_i^{(\alpha\beta\gamma)} \quad i = 1,2,3 \quad (1)$$

où $w_i^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{x})$ sont les composantes de déplacement au centre de chaque sous-cellule, et $\chi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$, $\phi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$, et $\psi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$ sont des micro-variables qui caractérisent la dépendance linéaire des déplacements $u_i^{(\alpha\beta\gamma)}$ sur les coordonnées locales $\bar{x}_1^{(\alpha)}$, $\bar{x}_2^{(\beta)}$, et $\bar{x}_3^{(\gamma)}$. Le vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ indique la position du centre de la sous-cellule par rapport au système de coordonnées global fixe (voir figure II.1). Il convient de souligner que la coordonnée \mathbf{x} est constante au niveau de la sous-cellule, où les positions sont décrites en termes de coordonnées locales. Dans l'équation (1) et dans tout ce qui suit, les lettres grecques répétées n'impliquent pas de sommation. Notez qu'en raison de la linéarité de l'équation (1), l'équilibre statique du matériau à l'intérieur de la sous-cellule $(\alpha\beta\gamma)$ est assuré.

II.2 Continuité interfaciale des déplacements

A tout instant, les composantes de déplacement doivent être continues aux différentes interfaces du RUC et aux interfaces entre les cellules unitaires voisines.

Les composantes de déformation totale de la sous-cellule sont indépendantes de $\bar{x}_1^{(\alpha)}$, $\bar{x}_2^{(\beta)}$, et $\bar{x}_3^{(\gamma)}$ et sont donc constantes dans une sous-cellule donnée. Étant donné que les CTE sont constants dans une sous-cellule donnée, les composantes de déformation thermique ε_{ij}^T sont également constantes dans une sous-cellule donnée. Le fait que les composantes de déformation totale et de déformation thermique de sous-cellule soient constantes dans une sous-cellule donnée nécessitent que les composantes de contrainte de sous-cellule soient constantes dans une sous-cellule donnée, à condition que la sous-cellule se déforme élastiquement. Ces arguments montrent que les champs moyens et les champs ponctuels au sein des sous-cellules sont identiques. Soit,

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} = \sigma_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} = \varepsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{T(\alpha\beta\gamma)} = \varepsilon_{ij}^{T(\alpha\beta\gamma)}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{I(\alpha\beta\gamma)} = \varepsilon_{ij}^{I(\alpha\beta\gamma)}$$

Les déformations moyennes du composite, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ sont

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)$$

Les déformations dans la sous-cellule $\varepsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$ sont données par

$$\sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} d_\alpha \varepsilon_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} d_\alpha \chi_1^{(\alpha\beta\gamma)} = d\bar{\varepsilon}_{11} = d \frac{\partial}{\partial x_1} w_1 \quad \begin{array}{l} \beta = 1, \dots, N_\beta \\ \gamma = 1, \dots, N_\gamma \end{array}$$

$$\sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \varepsilon_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \phi_2^{(\alpha\beta\gamma)} = h\bar{\varepsilon}_{22} = h \frac{\partial}{\partial x_2} w_2 \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, \dots, N_\alpha \\ \gamma = 1, \dots, N_\gamma \end{array}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma \varepsilon_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} = \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma \psi_3^{(\alpha\beta\gamma)} = l\bar{\varepsilon}_{33} = l \frac{\partial}{\partial x_3} w_3 \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, \dots, N_\alpha \\ \beta = 1, \dots, N_\beta \end{array}$$

$$2 \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma \varepsilon_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma (\phi_3^{(\alpha\beta\gamma)} + \psi_2^{(\alpha\beta\gamma)}) = 2hl\bar{\varepsilon}_{23} = hl \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_2} \right) \quad \alpha = 1, \dots, N_\alpha$$

$$2 \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} d_\alpha l_\gamma \varepsilon_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} d_\alpha l_\gamma (\psi_1^{(\alpha\beta\gamma)} + \chi_3^{(\alpha\beta\gamma)}) = 2dl\bar{\varepsilon}_{13} = dl \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right) \quad \beta = 1, \dots, N_\beta$$

$$2 \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} d_\alpha h_\beta \varepsilon_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} d_\alpha h_\beta (\phi_1^{(\alpha\beta\gamma)} + \chi_2^{(\alpha\beta\gamma)}) = 2dh\bar{\varepsilon}_{12} = dh \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right) \quad \gamma = 1, \dots, N_\gamma$$

Ces dernières relations de la déformation de sous-cellule peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$A_G \varepsilon_s = \mathbf{J} \bar{\varepsilon}$$

où le vecteur de déformation moyenne du sixième ordre est défini par

$$\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{22}, \bar{\varepsilon}_{33}, 2\bar{\varepsilon}_{23}, 2\bar{\varepsilon}_{13}, 2\bar{\varepsilon}_{12}) \quad (2)$$

et le vecteur de déformation de sous-cellule ε_s d'ordre $6N_\alpha N_\beta N_\gamma$ est défini par

$$\varepsilon_s = (\varepsilon^{(111)}, \dots, \varepsilon^{(N_\alpha N_\beta N_\gamma)})$$

où les six composantes du vecteur $\varepsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$ sont disposées comme dans l'équation (2). Il est à noter que la matrice A_G n'implique que les dimensions géométriques de la cellule répétitive.

Les déformations moyennes dans le composite sont exprimées comme suit :

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{dhl} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} d_\alpha h_\beta l_\gamma \varepsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$$

La contrainte moyenne dans le composite est déterminée à partir de

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{dhl} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} d_\alpha h_\beta l_\gamma \sigma_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \quad (3)$$

Ces équations établissent des relations entre les déformations moyennes et les contraintes moyennes du composite et des microvariables dans les sous-cellules du RVE.

L'équation constitutive du matériau élastique-viscoplastique dépendant de la température qui occupe la sous-cellule $(\alpha\beta\gamma)$ est exprimée comme une relation entre la contrainte $\sigma_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$, la déformation totale $\varepsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$, la déformation inélastique $\varepsilon_{ij}^{I(\alpha\beta\gamma)}$, et la déformation thermique $\varepsilon_{ij}^{T(\alpha\beta\gamma)} = \alpha_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \Delta T$ (où $\alpha_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$ est le tenseur CTE, et ΔT est l'écart de température $T - T_R$ par rapport à une température de référence T_R) :

$$\sigma_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} = C_{ijkl}^{(\alpha\beta\gamma)} \left(\varepsilon_{kl}^{(\alpha\beta\gamma)} - \varepsilon_{kl}^{I(\alpha\beta\gamma)} - \varepsilon_{kl}^{T(\alpha\beta\gamma)} \right)$$

où $C_{ijkl}^{(\alpha\beta\gamma)}$ est le tenseur de rigidité élastique du matériau.

Il a été démontré ([Paley et Aboudi (1992)] et [Aboudi (1995)]) qu'en employant les conditions de continuité de déplacement et de traction aux interfaces entre les sous-cellules de l'élément de volume répétitif et aux interfaces entre les éléments de volume répétitifs voisins, il est possible d'éliminer les microvariables et d'obtenir, via une opération de lissage (homogénéisation), un ensemble d'équations de milieu continu qui modélisent le comportement global du composite à fibres courtes polyphasique [1,9]. Ceci a été réalisé en établissant des relations qui connectent les microdéformations au niveau des sous-cellules aux macrodéformations globales totales dans le composite via les tenseurs de concentration appropriés, A et D [4,9].

II.3 Continuité interfaciale des tractions

Les tractions doivent être continues aux interfaces entre les sous-cellules des cellules répétitives et aux interfaces entre les cellules répétitives voisines.

$$A_M(\varepsilon_s - \varepsilon_s^I - \varepsilon_s^T) = 0$$

où la matrice A_M implique les propriétés élastiques $C^{(\alpha\beta\gamma)}$ du matériau dans la sous-cellule [6] et

$$\varepsilon_s^I = (\varepsilon^{I(111)}, \dots, \varepsilon^{I(N_\alpha N_\beta N_\gamma)})$$

$$\varepsilon_s^T = (\varepsilon^{T(111)}, \dots, \varepsilon^{T(N_\alpha N_\beta N_\gamma)})$$

II.4 Loi de comportement thermomécanique globale

$$\varepsilon_s = A\bar{\varepsilon} + D(\varepsilon_s^I + \varepsilon_s^T) \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_M \\ A_G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ J \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} A_M \\ A_G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_M \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rend la matrice de concentration mécanique A divisée en sous-matrices carrées de sixième ordre $N_\alpha N_\beta N_\gamma$ sous la forme [4,9]

$$A = \begin{bmatrix} A^{(111)} \\ \vdots \\ A^{(N_\alpha N_\beta N_\gamma)} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} D^{(111)} \\ \vdots \\ D^{(N_\alpha N_\beta N_\gamma)} \end{bmatrix}$$

Il résulte de l'équation (4) que

$$\varepsilon^{(\alpha\beta\gamma)} = A^{(\alpha\beta\gamma)}\bar{\varepsilon} + D^{(\alpha\beta\gamma)}(\varepsilon_s^I + \varepsilon_s^T) \quad (5)$$

où $A^{(\alpha\beta\gamma)}$ et $D^{(\alpha\beta\gamma)}$ sont des matrices carrées d'ordre $6N_\alpha N_\beta N_\gamma$ et A_M implique les propriétés élastiques $C^{(\alpha\beta\gamma)}$ du matériau de la sous-cellule, A_G les dimensions géométriques de la cellule répétitive uniquement, et J est une matrice contenant les déformations moyennes imposées (composite) [6].

L'équation (5) exprime les composantes de la déformation dans chaque sous-cellule en termes de déformation globale uniforme $\bar{\varepsilon}$ (la macrodéformation appliquée) et les déformations inélastiques et thermiques de la sous-cellule, via les matrices de concentration A et D . Ces tenseurs de concentration mécanique et de déformation propre dépendent des modules élastiques locaux et de la forme et de la fraction volumique des phases et sont donc constants. [7,8]

$$\sigma^{(\alpha\beta\gamma)} = C^{(\alpha\beta\gamma)}[A^{(\alpha\beta\gamma)}\bar{\varepsilon} + D^{(\alpha\beta\gamma)}(\varepsilon_s^I + \varepsilon_s^T) - (\varepsilon^I(\alpha\beta\gamma) + \varepsilon^T(\alpha\beta\gamma))]$$

Par conséquent, en conjonction avec l'équation (3), la loi thermomécanique élastoplastique effective suivante du composite peut être établie [1,9]

$$\bar{\sigma} = C^*(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^I - \bar{\varepsilon}^T)$$

où le tenseur de rigidité élastique effectif C^* du composite est donné par

$$C^* = \frac{1}{dhl} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} d_\alpha h_\beta l_\gamma C^{(\alpha\beta\gamma)} A^{(\alpha\beta\gamma)} \quad (6)$$

où $C^{(\alpha\beta\gamma)}$ est le tenseur de rigidité élastique de chaque sous-cellule [6], et le tenseur de déformation inélastique du composite est défini comme suit

$$\bar{\varepsilon}^I = \frac{-C^{*-1}}{dhl} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} d_\alpha h_\beta l_\gamma C^{(\alpha\beta\gamma)} (D^{(\alpha\beta\gamma)} \varepsilon_s^I - \varepsilon^I(\alpha\beta\gamma))$$

et le tenseur de déformation thermique moyen est donné par

$$\bar{\varepsilon}^T = \frac{-C^{*-1}}{dhl} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} d_\alpha h_\beta l_\gamma C^{(\alpha\beta\gamma)} (D^{(\alpha\beta\gamma)} \varepsilon_s^T - \varepsilon^T(\alpha\beta\gamma)) \quad (7)$$

Le vecteur du coefficient de dilatation thermique (CTE) effectif, α^* du composite est donné par

$$\alpha^* = \bar{\varepsilon}^T / \Delta T$$

Dans le cas de renforts continus avec $N_\alpha \times N_\beta$ nombre de sous-cellules, les équations (6), (7) se réduisent comme suit :

$$C^* = \frac{1}{hl} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma C^{(\beta\gamma)} A^{(\beta\gamma)}$$

$$\bar{\varepsilon}^T = \frac{-C^{*-1}}{hl} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma C^{(\beta\gamma)} (D^{(\beta\gamma)} \varepsilon_s^T - \varepsilon^{T(\beta\gamma)})$$

où les six composantes des vecteurs ε_s^T et $\varepsilon^{T(\alpha\beta\gamma)}$ sont disposées comme dans l'équation (2).

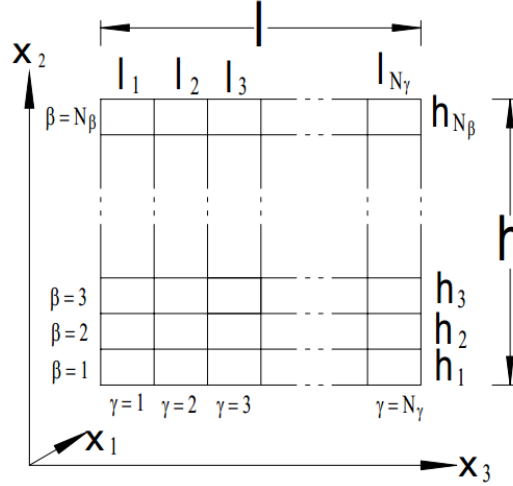


Figure II.3 : Cellule unitaire répétitive (RUC) de GMC doublement périodique [11].

La loi de comportement GMC établie est basée sur les principes de la mécanique des milieux continus où le micro-équilibre et la continuité des déplacements et des tractions aux différentes interfaces sont assurés dans un sens moyen.

Parmi les nombreux avantages qui peuvent être énoncés en ce qui concerne la loi de comportement macro/micro de GMC, se trouve le fait que tout type de chargement simple ou combiné (état de contrainte multiaxiale) peut être appliqué indépendamment de l'existence ou non d'une symétrie, ainsi que sans recourir à différentes stratégies d'application des conditions aux limites et on peut obtenir le même niveau de précision globale en évitant un nombre important d'éléments finis dans une cellule répétitive donnée. [1,9]

II.5 Conductivités thermiques

$$k_1^* = \frac{d}{hl} \sum_{\beta,\gamma=1}^2 h_\beta l_\gamma \left(\frac{d_1}{k_1^{(1\beta\gamma)}} + \frac{d_2}{k_1^{(2\beta\gamma)}} \right)^{-1}$$

$$k_2^* = \frac{h}{dl} \sum_{\alpha,\gamma=1}^2 d_\alpha l_\gamma \left(\frac{h_1}{k_2^{(\alpha 1\gamma)}} + \frac{h_2}{k_2^{(\alpha 2\gamma)}} \right)^{-1}$$

$$k_3^* = \frac{l}{dh} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 d_\alpha h_\beta \left(\frac{l_1}{k_3^{(\alpha\beta 1)}} + \frac{l_2}{k_3^{(\alpha\beta 2)}} \right)^{-1}$$

où $k_i^{(\alpha\beta\gamma)}$ est la conductivité thermique du matériau dans la sous-cellule dans la direction i [6].

II.6 Modèle constitutif

II.6.1 La loi de Hooke pour les matériaux isotropes

La loi de Hooke pour un matériau thermoélastique est donnée par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}\Delta T)$$

où σ_{ij} et ε_{ij} sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation, C_{ijkl} sont les composantes du tenseur de rigidité élastique, α_{ij} sont les CTEs, ΔT est le changement de température par rapport à une température de référence, et la déformation thermique est donnée par $\varepsilon_{ij}^{th} = \alpha_{ij}\Delta T$

Sous forme matricielle, la loi de Hooke de matériau isotrope peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

où σ_{ij} et ε_{ij} sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation

où les composantes de rigidité

$$C_{11} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$C_{12} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

sont écrites en fonction de deux constantes indépendantes d'ingénierie des matériaux, E et ν . Notez que γ_{ij} $i \neq j$, sont les composantes d'ingénierie de la déformation de cisaillement et sont liées aux composantes de la déformation de cisaillement tensorielle par $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, $i \neq j$. Le comportement normal et de cisaillement des matériaux isotropes n'est pas couplé, c'est-à-dire que l'imposition d'une contrainte ou d'une déformation normale n'entraîne aucune contrainte ou déformation de cisaillement, et vice versa.

Un seul CTE est nécessaire pour un matériau isotrope :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha & \text{for } i = j \\ \alpha_{ij} &= 0 & \text{for } i \neq j \end{aligned}$$

II.6.2 Transversalement isotrope dans les coordonnées globales

La loi de Hooke pour un matériau transversalement isotrope, avec un plan d'isotropie x_2 - x_3 , [6] est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{22} - C_{23})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

où les composantes de rigidité peuvent être exprimées en termes de cinq constantes indépendantes :

$$E_A, E_T, \nu_A, \nu_T, G_A$$

où les indices A et T se réfèrent respectivement aux propriétés axiales et transversales, et G est le module de cisaillement. Les composantes de rigidité sont :

$$C_{11} = E_A + 4\chi\nu_A^2$$

$$G_{12} = 2\chi\nu_A$$

$$C_{22} = \chi + \frac{0.5E_T}{(1 + \nu_T)}$$

$$C_{23} = \chi - \frac{0.5E_A}{(1 + \nu_T)}$$

$$C_{66} = G_A$$

avec

$$\chi = \frac{0.25E_A}{\left[0.5(1 - \nu_T) \left(\frac{E_A}{E_T}\right) - \nu_A^2\right]}$$

Les matériaux transversalement isotropes conservent un comportement normal et de cisaillement non couplé. [6]

II.7 Théorie des stratifiés

Le code MAC/GMC comprend un module de théorie des stratifiés classique multi-échelles qui est capable d'analyser des stratifiés composites généraux (symétriques et non symétriques) [12], dans lequel les théories de la micromécanique d'Aboudi sont utilisées à chaque point d'intégration dans chaque couche (voir figure II.4). Ainsi, une fois que la théorie des stratifiés localise la charge au niveau du stratifié appliquée de manière incrémentielle à la couche puis au point d'intégration à travers l'épaisseur, ces contraintes et déformations locales sont appliquées au RUC par GMC. Ces théories de la micromécanique se localisent au niveau de la sous-cellule et les modèles de déformation non linéaire de MAC/GMC pour les constituants sont appliqués. Les effets de ces mécanismes locaux sur le stratifié sont ensuite captés par homogénéisation aux niveaux de la couche et du stratifié. La figure II.5 illustre un diagramme d'arbre du stratifié [0/90] spécifique où le niveau 1 est associé aux constituants de la fibre (F) et de la matrice (M); le niveau 2 est le RUC qui opère aux points d'intégration dans la couche; et le niveau 3 est la réponse réelle du stratifié composite lui-même [20]. Un examen des équations de la théorie classique des stratifiés, y compris les déformations thermiques

et inélastiques, qui est utilisée pour effectuer l'homogénéisation/localisation entre les niveaux 2 et 3, est donné ci-dessous.

La figure II.4 illustre la géométrie de la théorie des stratifiés. Les coordonnées 1, 2 se réfèrent aux coordonnées principales du matériau d'un stratifié (couche), et les coordonnées x, y se réfèrent au stratifié.

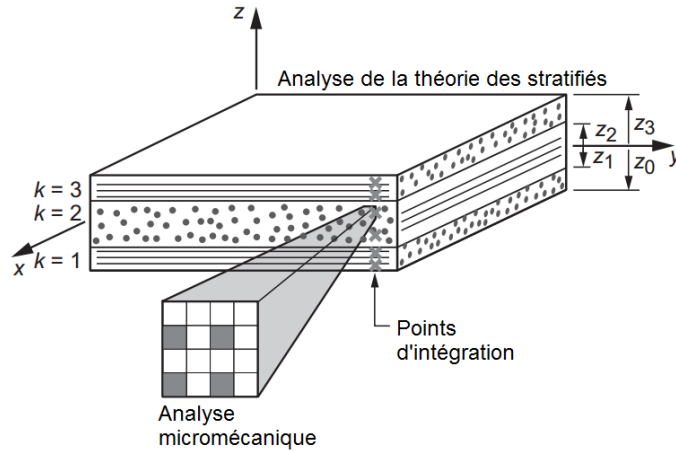


Figure II.4 : Théorie des stratifiés multi-échelles disponible en MAC/GMC, où k est le numéro de couche [12].

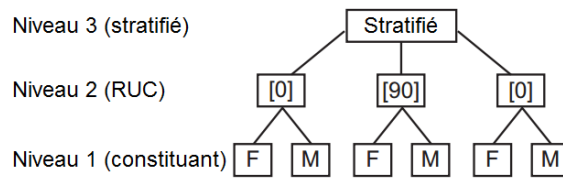


Figure II.5 : Diagramme d'arbre au niveau du stratifié $[0^\circ/90^\circ]$ pour la théorie des stratifiés multi-échelles [20].

En supposant une contrainte plane, les équations constitutives pour un stratifié en présence de déformations inélastiques sont [17] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^I - \alpha_1^k \Delta T \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^I - \alpha_2^k \Delta T \\ \gamma_{12} - \gamma_{12}^I \end{bmatrix}$$

où σ_1 , σ_2 et τ_{12} sont les composantes de contrainte dans le plan et ε_1 , ε_2 et γ_{12} sont les composantes de déformation dans le plan (la note γ fait toujours référence à la déformation de cisaillement technique). De plus, Q_{ij}^k sont les composantes de la matrice de rigidité réduite pour la k ième couche:

$$Q_{11}^k = \frac{E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \quad Q_{12}^k = \frac{\nu_{12}^k E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \quad Q_{22}^k = \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \quad Q_{66}^k = G_{12}^k$$

E_1^k et E_2^k sont les modules de Young de la couche, ν_{12}^k et ν_{21}^k sont les coefficients de Poisson de la couche, G_{12}^k est le module de cisaillement de la couche, α_1^k et α_2^k sont les CTE sécants de la couche, ΔT est le changement de température par rapport à une température de référence, et ε_1^I , ε_2^I et γ_{12}^I sont

les composantes de la déformation inélastique [17]. Notez que dans le contexte de la théorie des stratifiés multi-échelles, les contraintes, les déformations et les propriétés des matériaux dans les équations ci-dessus (applicables à une couche) sont les quantités moyennes effectives de cellule unitaire dans la théorie de la micromécanique (GMC). Les propriétés des constituants sont utilisées pour déterminer les propriétés effectives des couches (homogénéisation) à utiliser dans les équations de la théorie des stratifiés, tandis que les contraintes et les déformations des couches sont utilisées pour déterminer les contraintes et les déformations locales des sous-cellules (localisation).

Les équations de transformation des coordonnées sont utilisées pour transformer les composantes de contrainte, déformation, CTE et de rigidité réduite entre le système de coordonnées principal du matériau (1,2) de chaque couche et le système de coordonnées global (x,y) [18]. Ceux-ci sont données par

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (8)$$

où

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta & 2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

et θ est l'angle de la couche. L'équation de transformation des coordonnées pour les matrices de rigidité réduites est donnée par

$$\bar{Q}_k = T_1^{-1} Q_k T_2$$

où \bar{Q}_k est la matrice de rigidité réduite tournée. Notez que les déformations inélastiques et les CTE se transforment selon les équations de transformation des déformations EQ. (8). Après transformation, les équations constitutives du pli dans le système de coordonnées du stratifié sont données par [18]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x^k \Delta T - \varepsilon_x^p \\ \varepsilon_y - \alpha_y^k \Delta T - \varepsilon_y^p \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy}^k \Delta T - \gamma_{xy}^p \end{bmatrix} \quad (9)$$

Selon l'hypothèse de Kirchhoff-Love pour les plaques, une section transversale plane qui est à l'origine perpendiculaire au plan moyen du stratifié (un plan x, y) reste plane et perpendiculaire au plan moyen lorsque le stratifié est soumis à la flexion et à l'extension. Cette hypothèse conduit aux expressions suivantes pour les composantes de déplacement dans le plan, u et v :

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

où u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements du plan moyen.

En utilisant les relations déformation-déplacement standard, les composantes de déformation dans le plan du stratifié sont écrites comme suit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

ε_x^0 , ε_y^0 et γ_{xy}^0 sont les déformations du plan moyen, et k_x , k_y , k_{xy} , les courbures du plan moyen.

La combinaison des équations (9) et (10) donne

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_x^k \\ \alpha_y^k \\ \alpha_{xy}^k \end{bmatrix} \Delta T - \begin{bmatrix} \varepsilon_x^I \\ \varepsilon_y^I \\ \gamma_{xy}^I \end{bmatrix} \right) \quad (11)$$

Les forces résultantes du stratifié par unité de longueur (N_x , N_y et N_{xy}) et les moments par unité de longueur (M_x , M_y et M_{xy}) sont obtenus en intégrant les contraintes sur l'épaisseur du stratifié H . L'intégration est effectuée par morceaux sur chaque couche comme indiqué ci-dessous [18] :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (13)$$

La substitution de (11) en (12) et (13) donne

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z dz - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \alpha_x^k \\ \alpha_y^k \\ \alpha_{xy}^k \end{bmatrix} \Delta T dz - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^I \\ \varepsilon_y^I \\ \gamma_{xy}^I \end{bmatrix} dz \right) \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \alpha_x^k \\ \alpha_y^k \\ \alpha_{xy}^k \end{bmatrix} \Delta T z dz - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^I \\ \varepsilon_y^I \\ \gamma_{xy}^I \end{bmatrix} z dz \right) \quad (15)$$

Reconnaissant que les déformations du plan moyen, les courbures du plan moyen et les CTE du pli sont indépendants de z , les définitions suivantes sont introduites :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} (z_k - z_{k-1})$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

où la matrice A est appelée la raideur en extension, B est appelée la raideur de couplage et D est appelée la raideur en flexion [17]. De plus,

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x^k \\ \alpha_y^k \\ \alpha_{xy}^k \end{bmatrix} \Delta T (z_k - z_{k-1})$$

$$\begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x^k \\ \alpha_y^k \\ \alpha_{xy}^k \end{bmatrix} \Delta T (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$\begin{bmatrix} N_x^I \\ N_y^I \\ N_{xy}^I \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^I \\ \varepsilon_y^I \\ \gamma_{xy}^I \end{bmatrix} (z_k - z_{k-1})$$

$$\begin{bmatrix} M_x^I \\ M_y^I \\ M_{xy}^I \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^I \\ \varepsilon_y^I \\ \gamma_{xy}^I \end{bmatrix} (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

où $[N^T]$ et $[M^T]$ sont les vecteurs thermiques de force et de moment et $[N^I]$ et $[M^I]$ sont les vecteurs inélastiques de force et de moment.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^I \\ N_y^I \\ N_{xy}^I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_x^I \\ M_y^I \\ M_{xy}^I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix}$$

En utilisant les définitions ci-dessus, les EQ. (14) et (15) peuvent s'écrire comme suit [19] :

$$\begin{bmatrix} N_x + N_x^T + N_x^I \\ N_y + N_y^T + N_y^I \\ N_{xy} + N_{xy}^T + N_{xy}^I \\ M_x + M_x^T + M_x^I \\ M_y + M_y^T + M_y^I \\ M_{xy} + M_{xy}^T + M_{xy}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

Afin de déterminer la déformation normale à travers l'épaisseur ε_z , la contrainte normale à travers l'épaisseur σ_z est fixée à zéro, et l'équation constitutive standard est utilisée pour donner

$$\varepsilon_z = \frac{-\bar{C}_{13}^k}{\bar{C}_{33}^k}(\varepsilon_x - \alpha_x^k \Delta T - \varepsilon_x^p) - \frac{-\bar{C}_{23}^k}{\bar{C}_{33}^k}(\varepsilon_y - \alpha_y^k \Delta T - \varepsilon_y^p) - \frac{-\bar{C}_{36}^k}{\bar{C}_{33}^k}(\gamma_{xy} - \alpha_{xy}^k \Delta T - \gamma_{xy}^p) + \alpha_z^k \Delta T + \varepsilon_z^p$$

où \bar{C}_{ij}^k sont les composantes de la matrice de rigidité tournée dans la k ième couche et $\alpha_z^k = \alpha_2^k$ pour les couches transversalement isotropes.

II.8 Conclusion

Ce chapitre a présenté le modèle de micromécanique de la méthode généralisée de cellules (GMC) et la théorie des stratifiés. GMC permet à la cellule unitaire répétitive du composite d'être composée d'un nombre arbitraire de sous-cellules. Cette généralité est utile pour modéliser des microstructures générales de composites et des composites contenant plus de deux phases. De plus, même pour le problème standard de modélisation d'un composite renforcé en continu, GMC est capable de capter une bonne approximation des champs locaux dans le composite en raison de sa capacité à avoir de nombreuses sous-cellules. GMC peut fournir des équations constitutives anisotropes évolutives représentant la réponse d'un matériau composite au sein d'une structure. Ainsi, il peut être utilisé pour représenter la réponse matérielle non linéaire à un point dans une analyse structurale à plus grande échelle.

Tout type de chargement thermomécanique simple ou combiné (multiaxial) peut être appliqué indépendamment de la symétrie, sans recourir à différentes stratégies d'application des conditions aux limites et la réduction des exigences de calcul et une variété d'architectures de fibres peuvent être utilisées via leurs RVE correspondants.

La théorie GMC fait un excellent travail de modélisation du comportement des matériaux composites, elle est idéale pour une application dans la modélisation multi-échelles et sert de terrain d'entente, à la fois en termes de fidélité et d'efficacité.

Chapitre III

Résultats et discussion

Le code de calcul MAC/GMC est utilisé pour la détermination des propriétés mécaniques effectives des composites basé sur la méthode généralisée de cellules (GMC) et la théorie classique des stratifiés [4,9]. Plusieurs applications ont été traitées dans ce chapitre. La détermination des propriétés effectives des composites dépend des propriétés mécaniques des constituants et de la température.

Le fichier d'entrée MAC/GMC 4.0 est un fichier éditable avec n'importe quel éditeur de fichier, il contient des mots-clés précédés par le caractère astérisque (*). Chaque mot-clé suivi par des mots spécificateurs suivis d'un signe '='. Pour obtenir les résultats on tape 'cmd' dans la zone de recherche des programmes et on tape mac4 nom_in nom_out. Ils représentent le nom du fichier d'entrée et le nom du fichier de sortie MAC/GMC 4.0 respectivement. Le code écrit les données du résultat dans le fichier de sortie [11].

Exemple 1 :

Cet exemple détermine les propriétés thermiques et mécaniques effectives d'un matériau composite à fibres de graphite continu et à matrice époxy ayant une fraction volumique de fibres de 60% en utilisant une architecture de fibre doublement périodique (RUC-2D) et montre les options de chargement mécanique internes de MAC/GMC 4.0 qui sont applicables à l'analyse de la cellule unitaire répétitive en utilisant le GMC doublement périodique conjointement avec les options de chargement 1 à 6. Ces options de chargement internes permettent l'application de nombreuses conditions de chargement uniaxiales courantes. L'approximation de la cellule unitaire répétitive (RUC) doublement périodique (figure III.1) disponible dans MAC/GMC 4.0 se compose de sous-cellules dans le plan x_2 - x_3 , dont l'une représente la fibre circulaire 7×7 (couleur bleu) et l'autre représente la matrice (couleur verte) et l'ensemble représente un paquet rectangulaire qui peut représenter l'architecture de ce composite. Le terme «doublement périodique» indique que le RUC se répète à l'infini dans les deux directions du plan (x_2 - x_3) et est infini dans la direction hors du plan (continuellement renforcé suivant x_1). Le RUC représente donc un milieu continu (par opposition à une structure avec des frontières). Sur la base des propriétés et de l'arrangement des constituants des fibres et de la matrice, le MAC/GMC 4.0 utilise la théorie de la méthode généralisée de cellules (GMC) doublement périodique pour homogénéiser le matériau composite et déterminer les propriétés effectives (anisotropes) de ce matériau homogénéisé renforcé en continu. Les propriétés des matériaux constitutifs dans cet exemple sont indépendantes de la température. Le tableau (III.1), présente les propriétés mécaniques des constituants du composite étudié.

Tableau III.1 : Propriétés mécaniques de graphite [Dvorak et al. (1973)] et d'époxy [Aboudi (1991)] à 23 °C.

	E_A (GPa)	E_T (GPa)	ν_A	ν_T	G_A (GPa)	α_A ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	α_T ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	K_A (W/mK)	K_T (W/mK)
Graphite	388.2	7.6	0.41	0.45	14.9	-0.68	9.74	500	10
Époxy	3.45	3.45	0.35	0.35	1.278	45	45	0.19	0.19

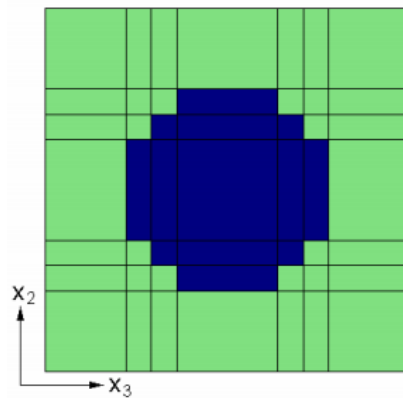


Figure III.1 : Approximation de fibre circulaire 7×7 , paquet rectangulaire de cellules unitaires répétitives [11].

Les données de calcul sont montrées sur le fichier d'entrée input1 comme suit :

```

MAC/GMC 4.0 Exemple 1
*CONDUCTIVITY
  NTEMP=1 TEMP=21
*CONSTITUENTS
  NMATS=2
# Fibre de graphite
  M=1 CMOD=6 MATID=U MATDB=1 &
  EL=388.2E9,7.6E9,0.41,0.45,14.9E9,-0.68E-6,9.74E-6
  K=500,10
# Matrix époxyde
  M=2 CMOD=6 MATID=U MATDB=1 &
  EL=3.45E9,3.45E9,0.35,0.35,1.278E9,45.E-6,45.E-6
  K=0.19,0.19
*RUC
  MOD=2 ARCHID=6 VF=0.60 R=1 F=1 M=2
*MECH
# Modifier la valeur de LOP (1-6)
  LOP=1
  NPT=3 TI=0,5,186 MAG=0,0.01,0.03 MODE=2,1
*SOLVER
  METHOD=1 NPT=3 TI=0,5,186 STP=1,2
*PRINT
  NPL=6
*XYPLOT
  FREQ=3
  MACRO=6
  NAME=11_11 X=1 Y=7
  NAME=22_22 X=2 Y=8
  NAME=33_33 X=3 Y=9
  NAME=23_23 X=4 Y=10
  NAME=13_13 X=5 Y=11
  NAME=12_12 X=6 Y=12

```

MICRO=0
*END

Résultats :

Le tableau (III.2), montre les résultats de calcul fournis par le code MAC/GMC. Les résultats incluent les conductivités thermiques effectives, la matrice de rigidité effective, l'inverse de la matrice de conformité effective, les modules d'ingénierie effectifs (c'est-à-dire les propriétés élastiques effectives) et les coefficients effectifs de dilatation thermique (CTE). Les propriétés effectives sont déterminées à une température de 21 °C :

Tableau III.2 : Propriétés mécaniques effectives calculées par le MAC/GMC 4.0 de l'exemple 1.

Conductivités thermiques effectives			Coefficients de dilatation thermique effectifs		
K11 =	300.0760		-0.4217E-06		
K22 =	0.7283		0.2918E-04		
K33 =	0.7283		0.2918E-04		
Matrice de rigidité effective (CG)					
0.2377E+12	0.4350E+10	0.4350E+10			
0.4350E+10	0.7585E+10	0.3651E+10			
0.4350E+10	0.3651E+10	0.7585E+10			
			0.1845E+10		
				0.3862E+10	
					0.3862E+10
Matrice de conformité effective (CI)					
0.4268E-11	-0.1652E-11	-0.1652E-11			
-0.1652E-11	0.1722E-09	-0.8194E-10			
-0.1652E-11	-0.8194E-10	0.1722E-09			
			0.5420E-09		
				0.2589E-09	
					0.2589E-09
Modules d'ingénierie effectifs					
E11S=	0.2343E+12				
N12S=	0.3871				
E22S=	0.5807E+10				
N23S=	0.4758				
E33S=	0.5807E+10				
G23S=	0.1845E+10				
G13S=	0.3862E+10				
G12S=	0.3862E+10				

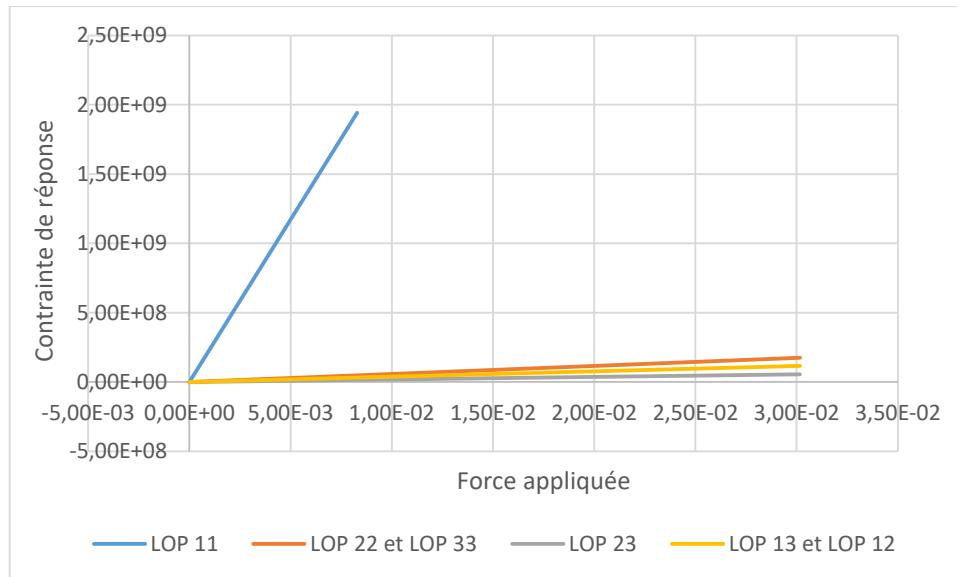


Figure III.2 : Tracé de la réponse simulée de la contrainte en fonction de la force appliquée pour le composite graphite/époxy.

Conclusion :

Rappelons à la figure III.1 que la direction axiale de la fibre est associée à l'axe x_1 , tandis que les directions x_2 et x_3 sont transversales à la fibre continue. La conductivité thermique élevée, la rigidité élevée et le faible CTE associés à la direction axiale du constituant de fibre sont évidents dans les propriétés effectives du composite associées à la direction x_1 . Par contre, dans le sens transversal de la fibre, la conductivité thermique et la rigidité sont faibles tandis que le CTE est élevé.

La figure III.2 montre que, parmi les tracés associés à une seule composante de charge appliquée, la réponse normale de la cellule unitaire répétitive dans la direction de la fibre est la plus rigide, suivie de la réponse normale dans les deux directions transversales, puis les trois courbes de réponse au cisaillement, présentant de manière significative plus de conformité.

Exemple 2 :

Cet exemple montre l'application d'un chargement mécanique général (multiaxial) et chargement thermique à une cellule unitaire répétitive et simule le chargement thermomécanique complexe sur un composite unidirectionnel de graphite/époxyde à fibres continues qui implique l'application de contraintes et de déformations dans le plan x_1 - x_2 . L'architecture des fibres est carrée et de paquet diagonal carré. Les résultats sont générés pour la réponse de déformation longitudinale et transversale du composite à une température de 23 °C à 700 °C. La figure (III.3), montre l'architecture 2D de fibres carrées (bleu) et de matrice carrée (verte).

Tableau III.3 : Propriétés mécaniques de graphite [Dvorak et al. (1973)] et d'époxy [Aboudi (1991)] à 23 °C et 150 °C.

	T (°C)	E_A (GPa)	E_T (GPa)	ν_A	ν_T	G_A (GPa)	α_A ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	α_T ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)
Graphite	23	388.2	7.6	0.41	0.45	14.9	-0.68	9.74
	150	390	7.6	0.41	0.45	15.1	-0.45	10.34
Époxy	23	3.45	3.45	0.35	0.35	1.278	45	45
	150	3.10	3.10	0.35	0.35	1.148	55	55

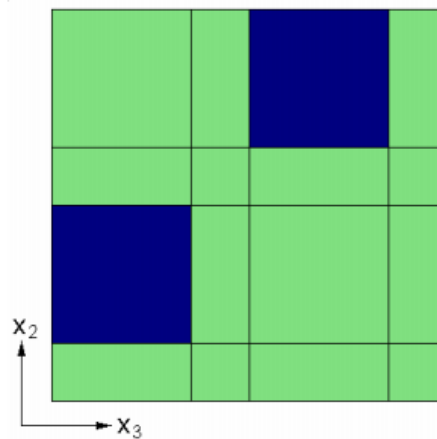


Figure III.3 : RUC de fibre carrée, paquet diagonal carré [11].

Les données de l'exemple 2 sont présentées sur le fichier input2 :

```
MAC/GMC 4.0 Exemple 2
*CONSTITUENTS
  NMATS=2
# Fibre de graphite
  M=1 CMOD=6 MATID=U MATDB=1
  NTP=2
  TEM=23,150
  EA=388.2E9,390.E9
  ET=7.6E9,7.6E9
  NUA=0.41,0.41
  NUT=0.45,0.45
  GA=14.9E9,15.1E9
  ALPA=-0.68E-6,-0.45E-6
  ALPT=9.74E-6,10.34E-6
# Matrice époxyde
  M=2 CMOD=6 MATID=U MATDB=1
  NTP=2
  TEM=23,150
  EA=3.45E9,3.10E9
  ET=3.45E9,3.10E9
  NUA=0.35,0.35
  NUT=0.35,0.35
  GA=1.278E9,1.148E9
  ALPA=45.E-6,55.E-6
```

```

ALPT=45.E-6,55.E-6
*RUC
MOD=2 ARCHID=3 VF=0.40 F=1 M=2
*MECH
LOP=99
NPT=6 TI=0,270,280,2500,2510,2780 MAG=0,0,0.016,0.016,0,0 &
MODE=1,1,1,2,2
NPT=6 TI=0,270,280,2500,2510,2780 MAG=0,0,0.05,0.05,0,0 &
MODE=1,1,1,2,2
NPT=2 TI=0,2780 MAG=0,0 MODE=2
NPT=2 TI=0,2780 MAG=0,0 MODE=2
NPT=2 TI=0,2780 MAG=0,0 MODE=2
NPT=6 TI=0,270,280,2500,2510,2780 MAG=0,0,0.08,0.08,0,0 &
MODE=1,1,1,2,2
*THERM
NPT=6 TI=0,270,280,2500,2510,2780 TEMP=23,700,700,700,700,23
*SOLVER
METHOD=1 NPT=6 TI=0,270,280,2500,2510,2780 STP=3,0.2,5,1,3
*PRINT
NPL=6
*XYPLOT
FREQ=1
MACRO=8
NAME=deformation11 X=101 Y=1
NAME=deformation22 X=101 Y=2
NAME=deformation12 X=101 Y=6
NAME=contrainte11 X=101 Y=7
NAME=contrainte22 X=101 Y=8
NAME=contrainte12 X=101 Y=12
NAME=temperature_11 X=100 Y=1
NAME=temperature_22 X=100 Y=2
MICRO=0
*END
    
```

Résultats :

Tableau III.4 : Propriétés mécaniques effectives calculées par le MAC/GMC de l'exemple 2.

Matrice de rigidité effective (CG)					
0.1602E+12	0.3768E+10	0.3768E+10			
0.3768E+10	0.6651E+10	0.3419E+10			
0.3768E+10	0.3419E+10	0.6651E+10			
			0.1600E+10		
				0.2057E+10	
					0.2057E+10
Matrice de conformité effective (CI)					
0.6354E-11	-0.2378E-11	-0.2378E-11			
-0.2378E-11	0.2052E-09	-0.1041E-09			
-0.2378E-11	-0.1041E-09	0.2052E-09			
			0.6250E-09		
				0.4862E-09	
					0.4862E-09

Modules d'ingénierie effectifs	Coefficients de dilatation thermique effectifs
E11S = 0.1574E+12	-0.8570E-07
N12S = 0.3742	0.4009E-04
E22S = 0.4873E+10	0.4009E-04
N23S = 0.5075	
E33S = 0.4873E+10	
G23S = 0.1600E+10	
G13S = 0.2057E+10	
G12S = 0.2057E+10	

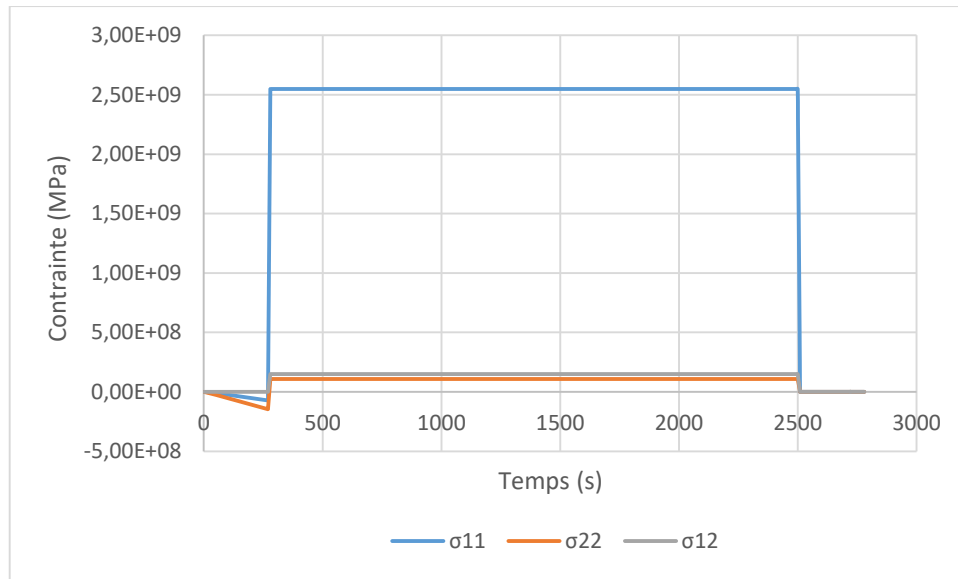


Figure III.4 : Tracé de la contrainte simulée en fonction du temps pour le composite.

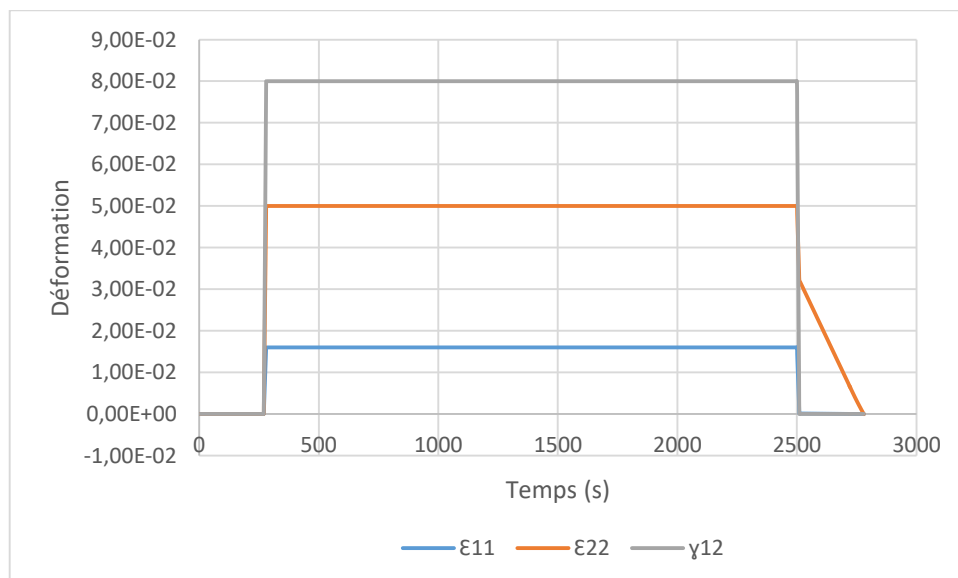


Figure III.5 : Tracé de la déformation simulée en fonction du temps.

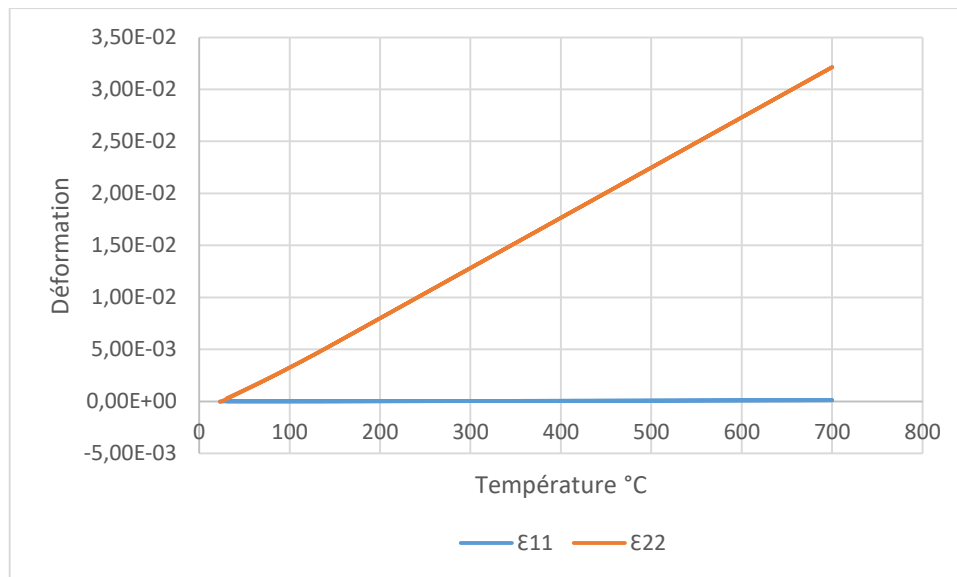


Figure III.6 : Tracé de la réponse longitudinale et transversale simulée de la déformation en fonction de la température du composite.

Conclusion :

La figure III.4 et la figure III.5 montrent que pendant le premier segment de chargement (0 - 270 secondes), alors que la température augmente de 23 à 700 °C, aucune déformation ne se produit et les composantes de contrainte normales (σ_{11} et σ_{22}) deviennent compressives. Cela est dû au fait que le composite a été contraint contre sa dilatation thermique pendant cet échauffement. La composante de contrainte de cisaillement reste à zéro car le composite ne subit pas de dilatation thermique de cisaillement (c'est-à-dire qu'il est orthotrope). De 270 à 280 secondes, les trois composantes de déformation sont rapidement appliquées et les composantes de contrainte augmentent rapidement en réponse. Ensuite, ces trois composantes de déformation sont maintenues constantes pendant 2220 secondes, pendant lesquelles les composantes de contrainte sont libres de se détendre. De 2500 à 2510 secondes, la charge mécanique, qui a été appliquée au contrôle de la déformation, est déchargée à zéro sous contrôle de la contrainte pour les trois composantes de contrainte. Enfin, la température est diminuée de 700 à 23 °C de 2510 à 2780 secondes, période pendant laquelle les composantes de contrainte sur le composite sont maintenues à zéro. Par conséquent, les composantes de déformation longitudinale et de cisaillement diminuent rapidement tandis que la composante transversale diminue lentement (progressivement) et reste très faible valeur (constante) de déformation normale et de cisaillement, de sorte que le composite subit des déformations normales et de cisaillement permanentes à la fin de ce chargement thermomécanique.

La figure III.6, qui est un graphique de la réponse thermique longitudinale et transversale du composite à un échauffement sans contrainte globale, montre que le composite présente une plus grande déformation pendant le chargement thermique dans la direction transversale par rapport à la direction longitudinale et montre qu'à température élevée, le composite est beaucoup plus mou et présente plus de déformation qu'à température ambiante.

Exemple 3 :

Cet exemple utilise les capacités de la théorie des stratifiés classique de MAC/GMC 4.0 pour simuler la réponse d'un stratifié SiC/époxy à une seule couche avec différentes orientations de fibres. La différence essentielle entre le fichier d'entrée dans cet exemple et les exemples précédents consiste à remplacer le mot clé *RUC par le mot clé *LAMINATE. Alors que le mot clé *RUC spécifiait l'analyse d'un milieu continu, le mot clé *LAMINATE spécifie l'analyse de la structure de la plaque stratifiée et chaque couche est modélisée à l'aide d'une analyse GMC RUC. Le système de coordonnées global x-y-z est applicable au stratifié dans son ensemble, tandis que les coordonnées locales (x_1 - x_2 - x_3) s'appliquent à l'intérieur de chaque couche.

Il est important de garder à l'esprit qu'il existe plusieurs différences majeures entre l'analyse d'un stratifié et d'un matériau composite, même si les deux sont composés des mêmes phases. Premièrement, alors qu'un matériau composite est un point de milieu continu tridimensionnel sans bords ni influences de limite, un stratifié a une épaisseur finie et donc des limites supérieure et inférieure. De plus, la théorie classique des stratifiés est basée sur l'hypothèse que le stratifié est dans un état de contrainte plane en tout point. Autrement dit, (dans le système de coordonnées du stratifié de MAC/GMC, figure III.7), la contrainte normale hors plan (σ_{zz} ou σ_{33}) ainsi que les contraintes de cisaillement hors plan (σ_{xz} et σ_{yz} ou σ_{13} et σ_{23}) doivent être nulles tout au long du stratifié. Ainsi, le chargement global qui implique des composantes de contrainte (ou déformation) hors du plan est inadmissible. Enfin, étant donné que les couches à l'intérieur du stratifié sont composées de matériaux composites, MAC/GMC 4.0 traite le problème du stratifié avec une approche multi-échelles intégrée. Le comportement local du matériau composite dans chaque couche est modélisé à l'aide de GMC, qui est intégré dans l'analyse de la théorie des stratifiés qui traite de l'échelle structurelle (stratifié).

Dans le présent exemple, une seule couche composite de SiC/époxy de fraction volumique de fibres de 0.65 est considérée dans laquelle l'orientation des fibres varie entre 0° (le long de la direction de chargement x) et 90° (transversalement à la direction de chargement x). L'architecture RUC d'approximation de fibre circulaire 7×7 , du pack rectangulaire est utilisée, et une déformation du plan moyen de 0.01 est appliquée à une température de 150°C .

Tableau III.5 : Propriétés élastiques dépendantes de la température pour la fibre de carbure de silicium (SiC) [Bednarczyk et Arnold, 2000a].

T ($^\circ\text{C}$)	E (GPa)	ν	α ($\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$)	G_A (GPa)
21	393	0.25	3.56	157.2
316	382	0.25	3.73	152.8
427	378	0.25	3.91	151.2
538	374	0.25	4.07	149.6
860	368	0.25	4.57	147.2

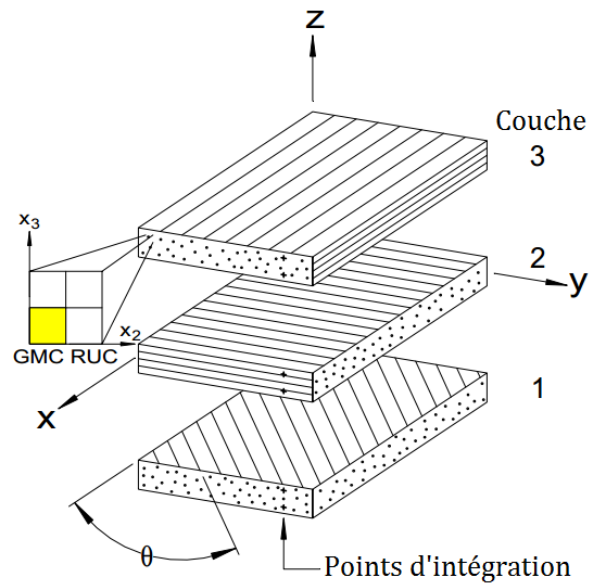


Figure III.7 : Géométrie générale du stratifié et système de coordonnées utilisé dans MAC/GMC 4.0. Le comportement local de chaque couche est modélisé à l'aide d'une analyse de la méthode généralisée de cellules (GMC) cellules unitaires répétitives (RUC) [11].

MAC/GMC 4.0 Exemple 3

*CONSTITUENTS

NMATS=2

M=1 CMOD=6 MATID=U MATDB=1

NTP=5

TEM=21.0, 316.0, 427.0, 538.0, 860.0

EA=393.E9, 382.E9, 378.E9, 374.E9, 368.E9

ET=393.E9, 382.E9, 378.E9, 374.E9, 368.E9

NUA=0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25

NUT=0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25

GA=157.2E9, 152.8E9, 151.2E9, 149.6E9, 147.2E9

ALPA=3.56E-6, 3.73E-6, 3.91E-6, 4.07E-6, 4.57E-6

ALPT=3.56E-6, 3.73E-6, 3.91E-6, 4.07E-6, 4.57E-6

M=2 CMOD=6 MATID=U MATDB=1

NTP=2

TEM=23., 150.

EA=3.45E9, 3.10E9

ET=3.45E9, 3.10E9

NUA=0.35, 0.35

NUT=0.35, 0.35

GA=1.278E9, 1.148E9

ALPA=45.E-6, 55.E-6

ALPT=45.E-6, 55.E-6

*LAMINATE

NLY=1

Modifier chaque fois la valeur de ANG (0, 10, 20, 56, 90)

LY=1 MOD=2 THK=1 ANG=90 ARCHID=6 VF=0.65 R=1 F=1 M=2

*MECH

LOP=1

```

NPT=2 TI=0,160 MAG=0,0.01 MODE=1
*THERM
NPT=2 TI=0,160 TEMP=150,150
*SOLVER
METHOD=1 NPT=2 TI=0,160 STP=1
*PRINT
NPL=6
*XYPLOTT
FREQ=4
LAMINATE=1
NAME=exx_nxx X=1 Y=10
MACRO=0
MICRO=0
*END
    
```

Résultats :

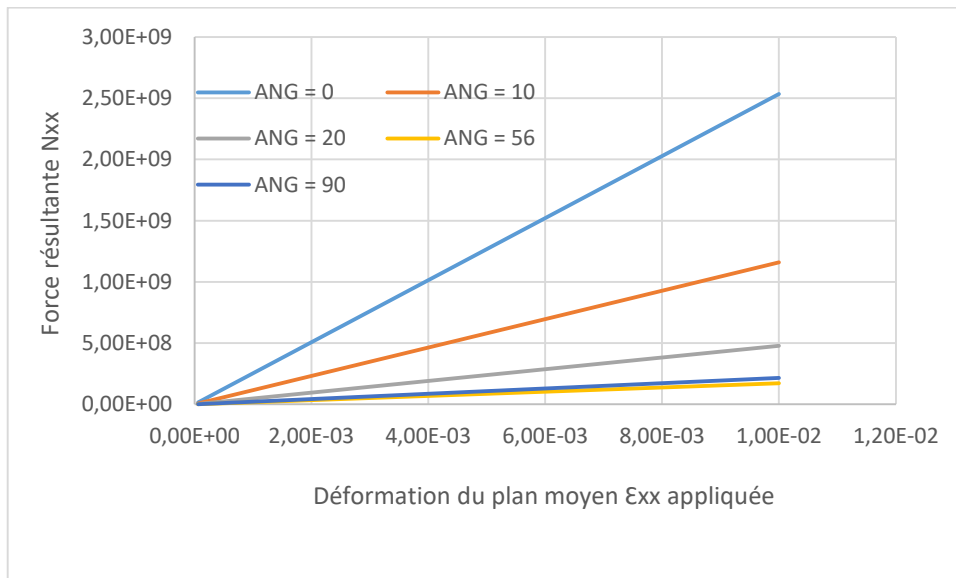


Figure III.8 : Tracé de la réponse de la force résultante de traction globale en fonction de la déformation du plan moyen du stratifié à 150 °C avec un angle variable d'orientation des fibres.

Tableau III.6 : Les propriétés effectives à la température 150 °C pour la couche 0° de l'exemple 3.

Matrice de rigidité effective (CG)		
0.2578E+12	0.7867E+10	0.7867E+10
0.7867E+10	0.2304E+11	0.5475E+10
0.7867E+10	0.5475E+10	0.2304E+11
		0.3236E+10
		0.5927E+10
		0.5927E+10
Matrice de conformité effective (CI)		
0.3946E-11	-0.1089E-11	-0.1089E-11
-0.1089E-11	0.4631E-10	-0.1063E-10
-0.1089E-11	-0.1063E-10	0.4631E-10
		0.3090E-09
		0.1687E-09
		0.1687E-09

Modules d'ingénierie effectifs			Coefficients de dilatation thermique effectifs		
E11S = 0.2534E+12			0.3893E-05		
N12S= 0.2759			0.2155E-04		
E22S= 0.2159E+11			0.2155E-04		
N23S= 0.2296					
E33S= 0.2159E+11					
G23S= 0.3236E+10					
G13S= 0.5927E+10					
G12S= 0.5927E+10					
Rigidité Q locale pour la couche 1			Rigidité Q globale pour la couche 1		
2.551E+11	5.998E+09	0.000E+00	2.551E+11	5.998E+09	0.000E+00
5.998E+09	2.174E+10	0.000E+00	5.998E+09	2.174E+10	0.000E+00
0.000E+00	0.000E+00	5.927E+09	0.000E+00	0.000E+00	5.927E+09
RÉSULTATS DU STRATIFIÉ À TEMPÉRATURE = 150°					
Matrice de rigidité axiale [A] du stratifié			Matrice de rigidité de couplage [B] du stratifié		
2.551E+11	5.998E+09	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
5.998E+09	2.174E+10	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
0.000E+00	0.000E+00	5.927E+09	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
Matrice de rigidité à la flexion [D] du stratifié			Constantes d'ingénierie du stratifié		
2.126E+10	4.998E+08	0.000E+00	E _{xx} = 2.534E+11		
4.998E+08	1.811E+09	0.000E+00	N _{xy} = 2.759E-01		
0.000E+00	0.000E+00	4.940E+08	E _{yy} = 2.159E+10		
			G _{xy} = 5.927E+09		

Conclusion :

Pour l'analyse du stratifié, la sortie vers le fichier de sortie MAC/GMC 4.0 est différente de celle de l'analyse de cellules unitaires répétitives. Pour chaque couche, les matrices de rigidité réduites (Q) locale (en coordonnées principales du matériau) et globale (en coordonnées du stratifié) sont sorties. En outre, les matrices de rigidité axiale, de couplage et de rigidité à la flexion (A, B et D) pour le stratifié sont produites, ainsi que les propriétés d'ingénierie effectives (ou apparentes) pour le stratifié. La sortie basée sur le temps a également changé. Au lieu d'imprimer les six composantes de la contrainte et de la déformation à chaque pas de temps (comme pour l'analyse de cellules unitaires répétitives), pour l'analyse du stratifié, les trois composantes de la force et du moment résultants et les trois composantes de la déformation du plan moyen et de la courbure sont imprimées. Au lieu de déformations thermiques, les forces thermiques et moments résultants sont produits. De plus, en raison de l'hypothèse de contrainte plane inhérente à la théorie des stratifiés classique, les composantes de contrainte hors plan sont nulles dans tout le stratifié. Cependant, les composantes de déformation hors plan peuvent ou non (en raison des effets de Poisson) être nulles. Ainsi, ces composantes de déformation hors plan sont imprimées à chaque pas de temps. Enfin, plutôt que la rigidité du composite, la matrice ABD du stratifié est sortie à chaque pas de temps. (NPL=) imprime plus ou moins de données dans le fichier de sortie.

La figure III.8 montre que la couche à [0°], avec ses fibres orientées le long de la direction de chargement, donne la réponse la plus rigide. Lorsque l'angle d'orientation de la couche s'élève à partir de 0°, la force résultante diminue et la réponse devient rapidement plus conforme comme on pourrait s'y attendre. Cependant, aux angles plus élevés, cette tendance s'inverse. La réponse la plus conforme

est présentée par la couche $[56^\circ]$. Ensuite, alors que l'angle d'orientation continue de monter de 56° à 90° , la réponse de la couche se renforce. Cette tendance est quelque peu contre-intuitive, car on pourrait s'attendre à la réponse d'une couche $[90^\circ]$, avec ses fibres orientées complètement normales à la direction de chargement, soit l'orientation la plus conforme.

Exemple 4 :

Cet exemple implique la détermination des propriétés effectives et la simulation de la réponse de deux stratifiés graphite/époxy à couches croisés $[0^\circ/90^\circ]_s$ et quasi-isotrope $[0^\circ/-45/90^\circ/45^\circ]_s$, à fraction volumique de fibres de 0.60 en appliquant différents chargements.

Dans le présent exemple, les options de chargement mécanique internes disponibles dans MAC/GMC 4.0 pour un stratifié de 1 à 6 (trois composantes de déformation du plan moyen et trois courbures du plan moyen) sont appliquées une par une dans des exécutions du code séparées.

En raison de l'hypothèse de contrainte plane inhérente à la théorie des stratifiés, seul le chargement dans le plan x-y du stratifié est autorisé (où la direction z est la direction de l'épaisseur traversante du stratifié). De plus, le chargement sous la forme de courbures du plan moyen et de moments résultants peut être appliqué au stratifié en utilisant les options de chargement internes 4-6. Ainsi, la signification des différentes options de chargement est différente dans le cas d'un stratifié par rapport à l'analyse de cellules unitaires répétitives.

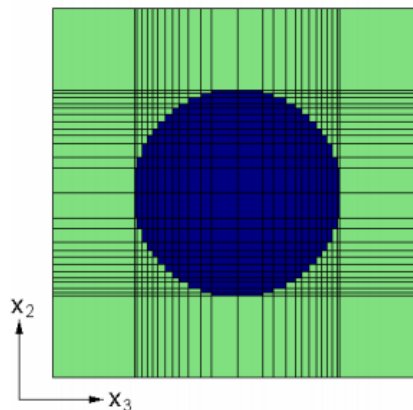


Figure III.9 : RUC d'approximation de fibre circulaire 26×26 , paquet rectangulaire [11].

```
MAC/GMC 4.0 Exemple 4
*CONSTITUENTS
  NMATS=2
# Fibre de graphite
  M=1 CMOD=6 MATID=U MATDB=1
  NTP=2
  TEM=23,150
  EA=388.2E9,390.E9
  ET=7.6E9,7.6E9
  NUA=0.41,0.41
  NUT=0.45,0.45
  GA=14.9E9,15.1E9
```

```

ALPA=-0.68E-6,-0.45E-6
ALPT=9.74E-6,10.34E-6
# Matrice époxy
M=2 CMOD=6 MATID=U MATDB=1
NTP=2
TEM=23,150
EA=3.45E9,3.10E9
ET=3.45E9,3.10E9
NUA=0.35,0.35
NUT=0.35,0.35
GA=1.278E9,1.148E9
ALPA=45.E-6,55.E-6
ALPT=45.E-6,55.E-6
*LAMINATE
# Couches croisées
# NLY=3
# LY=1 MOD=2 THK=0.30 ANG=0 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
# LY=2 MOD=2 THK=0.62 ANG=90 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
# LY=3 MOD=2 THK=0.30 ANG=0 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
# Quasi-isotropes
NLY=7
LY=1 MOD=2 THK=0.11 ANG=0 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
LY=2 MOD=2 THK=0.11 ANG=-45 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
LY=3 MOD=2 THK=0.11 ANG=90 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
LY=4 MOD=2 THK=0.20 ANG=45 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
LY=5 MOD=2 THK=0.11 ANG=90 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
LY=6 MOD=2 THK=0.11 ANG=-45 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
LY=7 MOD=2 THK=0.11 ANG=0 ARCHID=13 R=1 VF=0.60 F=1 M=2
*MECH
# Modifier la valeur de LOP (1-6)
LOP=1
NPT=2 TI=0,170 MAG=0,0.04 MODE=1
*THERM
NPT=2 TI=0,170 TEMP=150,150
*SOLVER
METHOD=1 NPT=2 TI=0,170 STP=1
*PRINT
NPL=6
*XYPLOT
FREQ=5
LAMINATE=6
NAME=exx_nxx X=1 Y=10
NAME=eyy_nyy X=2 Y=11
NAME=gxy_nxy X=6 Y=12
NAME=kxx_mxx X=7 Y=13
NAME=kyy_myy X=8 Y=14
NAME=kxy_mxy X=9 Y=15
MACRO=0
MICRO=0
*END

```

Résultats :

Tableau III.7 : Résultats de rigidité et de constantes d'ingénierie effectives pour les stratifiés analysés.

Quasi-isotrope			Couches croisées		
Matrice de rigidité axiale [A] du stratifié			Matrice de rigidité axiale [A] du stratifié		
8.044E+10	2.531E+10	-1.153E+09	1.451E+11	2.626E+09	-4.511E-01
2.531E+10	8.044E+10	-1.153E+09	2.626E+09	1.497E+11	-2.886E+01
-1.153E+09	-1.153E+09	2.645E+10	-4.511E-01	-2.886E+01	4.241E+09
Matrice de rigidité de couplage [B] du stratifié			Matrice de rigidité de couplage [B] du stratifié		
0.000E+00	-1.341E-07	7.153E-07	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
-1.341E-07	-7.153E-07	7.153E-07	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
7.153E-07	7.153E-07	2.086E-07	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
Matrice de rigidité à la flexion [D] du stratifié			Matrice de rigidité à la flexion [D] du stratifié		
8.448E+09	1.027E+09	-8.647E+08	3.114E+10	3.257E+08	-1.445E-02
1.027E+09	2.535E+09	-8.647E+08	3.257E+08	5.419E+09	-9.246E-01
-8.647E+08	-8.647E+08	1.097E+09	-1.445E-02	-9.246E-01	5.260E+08
Constantes d'ingénierie du stratifié			Constantes d'ingénierie du stratifié		
E _{xx} = 8.425E+10			E _{xx} = 1.189E+11		
N _{xy} = 3.142E-01			N _{xy} = 1.754E-02		
E _{yy} = 8.425E+10			E _{yy} = 1.227E+11		
G _{xy} = 3.073E+10			G _{xy} = 3.476E+09		



Figure III.10 : Tracé de la réponse de la force résultante de traction globale en fonction de la déformation du plan moyen ($N_{xx} - \epsilon_{xx}^0$) pour les stratifiés graphite/époxy à couches croisées et quasi-isotropes à 150 °C.

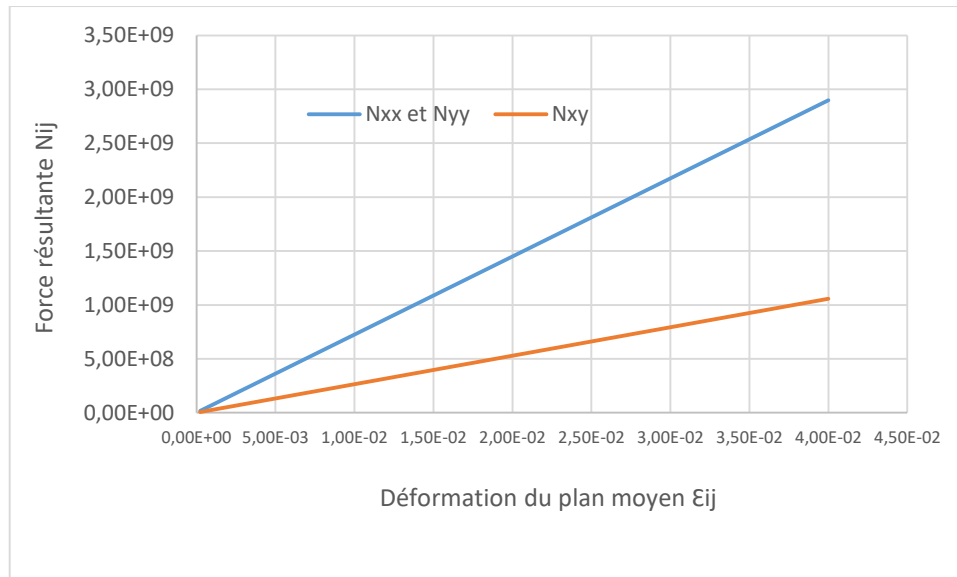


Figure III.11 : Réponse $N_{ij} - \epsilon_{ij}^0$ d'un stratifié graphite/époxy quasi-isotrope à fraction volumique de fibres de 0.60 aux déformations du plan moyen appliquées à 150 °C.

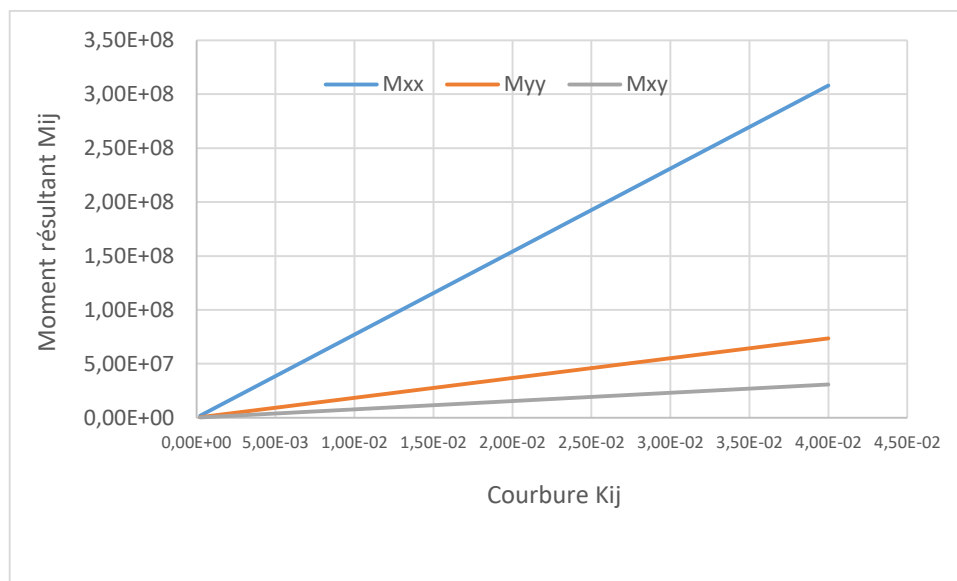


Figure III.12 : Réponse $M_{ij} - K_{ij}$ d'un stratifié graphite/époxy quasi-isotrope à fraction volumique de fibres de 0.60 aux courbures appliquées à 150 °C.

Conclusion:

La figure III.10 et le tableau III.7 montrent que le stratifié à couches croisés présente une réponse globale plus rigide que ne le fait le stratifié quasi isotrope et les deux stratifiés présentent des termes nuls ou presque nuls dans la matrice de rigidité de couplage [B] du stratifié. La différence est particulièrement claire dans la réponse après rendement illustrée à la figure III.10.

La figure III.11 montre la réponse du stratifié quasi-isotrope aux trois composantes de déformation du plan moyen appliquées, tandis que la figure III.12 montre la réponse du stratifié aux trois composantes de courbure appliquées. Il ressort clairement de la figure III.11 que le comportement

d'extension du stratifié est isotrope tandis que la figure III.12 montre que le comportement en flexion est anisotrope.

D'après la figure III.12, la réponse du stratifié au K_{xx} appliqué est plus rigide que celle au K_{yy} appliqué car les couches externes du stratifié sont orientées le long de l'axe des x et les couches externes du stratifié sont les plus éloignées du plan moyen et contribuent donc davantage à la rigidité en flexion. Il convient également de noter que ce stratifié présente un couplage de cisaillement normal dans sa réponse de flexion (voir le tableau III.7).

Exemple 5 :

Cet exemple utilise les capacités de la théorie des stratifiés classique de MAC/GMC 4.0 pour simuler la réponse d'un stratifié SiC/époxy élastique asymétrique qui est considéré avec des propriétés constitutives dépendantes de la température. Cet exemple exerce l'option de chargement générale pour un stratifié. Ce stratifié se compose de six couches, chacune étant différente. Une couche est monolithique, trois couches utilisent GMC doublement périodique et deux couches utilisent GMC triplement périodique. Le stratifié est soumis à une déformation du plan moyen de 0.03 à 23 °C.

Le chargement associé au stratifié implique les forces et les moments résultants ainsi que les déformations et les courbures du plan moyen. Les six composantes appliquées au stratifié sont spécifiées via l'option de chargement LOP=99. Le stratifié est soumis à un refroidissement sans contrainte à partir de 150 °C, qui est destiné à simuler la température de durcissement.

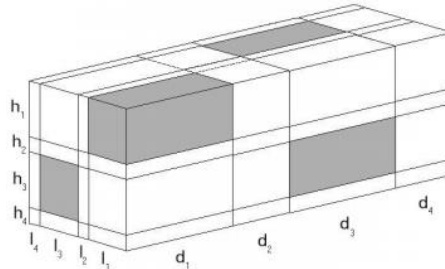


Figure III.13 : RUC de fibres courtes en réseau diagonal (RUC triplement périodique) [11].

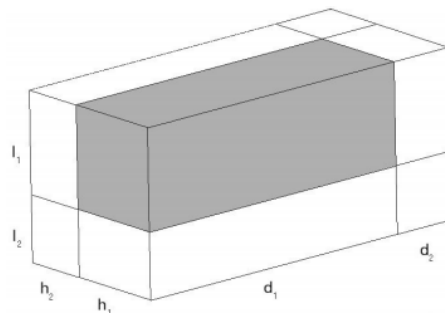


Figure III.14 : RUC de fibres courtes en réseau carré (RUC triplement périodique) [11].

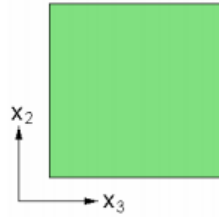


Figure III.15 : RUC de matériau monolithique [11].

MAC/GMC 4.0 Exemple 5

*CONSTITUENTS

NMATS=2

M=1 CMOD=6 MATID=U MATDB=1

NTP=5

TEM=21.0, 316.0, 427.0, 538.0, 860.0

EA=393.E9, 382.E9, 378.E9, 374.E9, 368.E9

ET=393.E9, 382.E9, 378.E9, 374.E9, 368.E9

NUA=0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25

NUT=0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25

GA=157.2E9, 152.8E9, 151.2E9, 149.6E9, 147.2E9

ALPA=3.56E-6, 3.73E-6, 3.91E-6, 4.07E-6, 4.57E-6

ALPT=3.56E-6, 3.73E-6, 3.91E-6, 4.07E-6, 4.57E-6

M=2 CMOD=6 MATID=U MATDB=1

NTP=2

TEM=23., 150.

EA=3.45E9, 3.10E9

ET=3.45E9, 3.10E9

NUA=0.35, 0.35

NUT=0.35, 0.35

GA=1.278E9, 1.148E9

ALPA=45.E-6, 55.E-6

ALPT=45.E-6, 55.E-6

*LAMINATE

NLY=6

LY=1 MOD=3 THK=1 ANG=0 ARCHID=2 VF=0.32 ASP1=2 ASP2=3 F=1 M=2

LY=2 MOD=2 THK=1 ANG=90 ARCHID=6 R=1 VF=0.32 F=1 M=2

LY=3 MOD=2 THK=1 ANG=70 ARCHID=6 R=1 VF=0.32 F=1 M=2

LY=4 MOD=3 THK=1 ANG=0 ARCHID=1 VF=0.32 ASP=1 F=1 M=2

LY=5 MOD=2 THK=1 ANG=45 ARCHID=6 R=1 VF=0.32 F=1 M=2

LY=6 MOD=1 THK=1 M=2

*MECH

LOP=99

NPT=4 TI=0, 1, 2, 164 MAG=0, 0, 0, 0.03 MODE=2, 2, 1

NPT=4 TI=0, 1, 2, 164 MAG=0, 0, 0, 0 MODE=2, 2, 1

NPT=4 TI=0, 1, 2, 164 MAG=0, 0, 0, 0 MODE=2, 2, 1

NPT=4 TI=0, 1, 2, 164 MAG=0, 0, 0, 0 MODE=2, 1, 1

NPT=4 TI=0, 1, 2, 164 MAG=0, 0, 0, 0 MODE=2, 1, 1

NPT=4 TI=0, 1, 2, 164 MAG=0, 0, 0, 0 MODE=2, 1, 1

*THERM

```

NPT=4 TI=0,1,2,164 TEMP=150,23,23,23
*SOLVER
METHOD=1 NPT=3 TI=0,2,164 STP=1,3
*PRINT
NPL=6
*XYPLOTT
FREQ=2
LAMINATE=3
NAME=exx_nxx X=1 Y=10
NAME=exx_nyy X=1 Y=11
NAME=exx_nxy X=1 Y=12
MACRO=0
MICRO=0
*END
    
```

Résultats :

Tableau III.8 : Résultats de rigidité et de constantes d'ingénierie effectives pour le stratifié analysé.

Matrice de rigidité axiale [A] du stratifié			Matrice de rigidité de couplage [B] du stratifié		
7.229E+10	5.621E+10	3.476E+10	3.992E+10	3.801E+10	4.334E+10
5.621E+10	2.871E+11	6.498E+10	3.801E+10	-1.897E+11	2.823E+10
3.476E+10	6.498E+10	5.517E+10	4.334E+10	2.823E+10	3.811E+10
Matrice de rigidité à la flexion [D] du stratifié			Constantes d'ingénierie du stratifié		
1.729E+11	1.101E+11	7.231E+10	E _{xx} = 6.841E+09		
1.101E+11	4.897E+11	8.238E+10	N _{xy} = 2.165E-01		
7.231E+10	8.238E+10	1.075E+11	E _{yy} = 1.482E+10		
			G _{xy} = 4.005E+09		

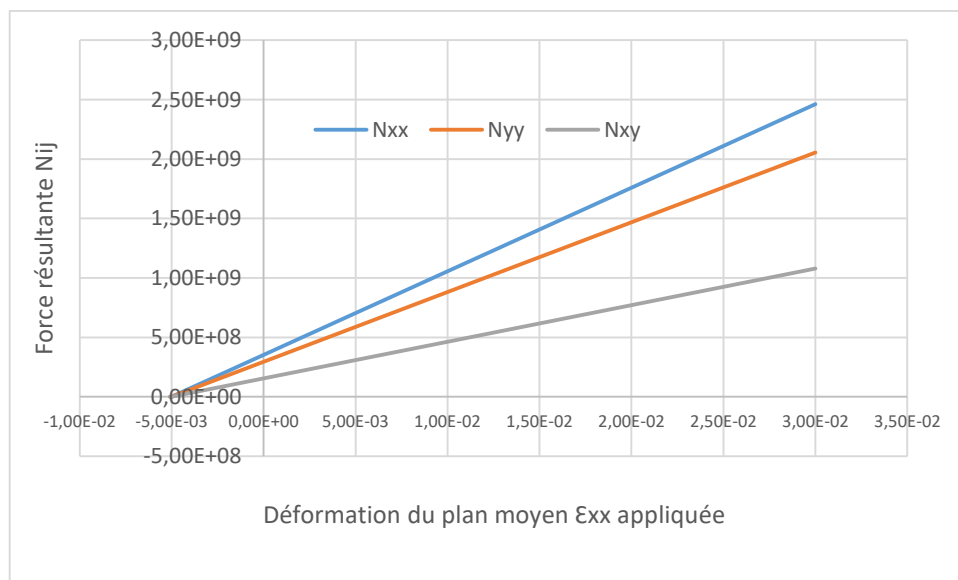


Figure III.16 : Tracé de la réponse de la force résultante globale N_{ij} pour un stratifié SiC/époxy asymétrique à 23 °C à une déformation du plan moyen ϵ_{xx}^0 appliquée.

1 TIME: 1.0000D+00 TEMP: 2.3000D+01 TSTEP: 1.0000D+00

 FORCE (N) , MOMENT (M) : 0.0000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00
 0.0000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00
 STRAIN, CURVATURE: **-5.0819D-03** **-1.8190D-03** **3.9267D-03**
4.3108D-04 **-7.1404D-04** **1.1526D-03**
 INELASTIC N, M: 0.0000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00
 0.0000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00
 THERMAL N, M: -2.9309D+08 -3.6843D+08 -3.5785D+07
 -2.2549D+07 5.5485D+07 -2.5674D+07
 OUT-OF-PLANE STRAIN: -6.6484D-03 0.0000D+00 0.0000D+00

2 TIME: 2.0000D+00 TEMP: 2.3000D+01 TSTEP: 1.0000D+00

 FORCE (N) , MOMENT (M) : 0.0000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00
-5.3285D+07 **8.9334D+07** **-7.6095D+07**
 STRAIN, CURVATURE: -5.0103D-03 -1.1861D-03 3.9055D-03
0.0000D+00 **0.0000D+00** **0.0000D+00**
 INELASTIC N, M: 0.0000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00
 0.0000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00
 THERMAL N, M: -2.9309D+08 -3.6843D+08 -3.5785D+07
 -2.2549D+07 5.5485D+07 -2.5674D+07
 OUT-OF-PLANE STRAIN: -6.9709D-03 0.0000D+00 0.0000D+00

Conclusion :

Le tableau III.8 montre que la matrice ABD du stratifié asymétrique est entièrement peuplée. Ainsi, en raison de la déformation normale du plan moyen appliquée, la flexion est résulté en raison de l'asymétrie du stratifié. Donc la disposition asymétrique des couches du stratifié donne lieu à des termes non nuls dans la matrice de rigidité de couplage [B] du stratifié, ce qui induit une flexion lorsque le stratifié est soumis à déformation du plan moyen appliquée.

La figure III.16 montre des graphiques de la force résultante du stratifié (N_{xx} et N_{yy} et N_{xy}) qui survient en raison de la déformation normale du plan moyen. La force résultante de cisaillement est faible par rapport aux forces résultantes normales.

À la fin du refroidissement sans contrainte du stratifié (au temps = 1 seconde), le stratifié est plié (comme indiqué par les courbures non nulles). Ensuite, à la fin du chargement mécanique simulé (au temps = 2 secondes), le stratifié n'est plus plié (comme indiqué par les courbures nulles). Les moments résultants nécessaires pour éliminer la flexion du stratifié sont : $M_{xx} = -53.285 \text{ MPa} \times \text{épaisseur}^2$, $M_{yy} = 89.334 \text{ MPa} \times \text{épaisseur}^2$, $M_{xy} = 76.095 \text{ MPa} \times \text{épaisseur}^2$, où « épaisseur » est

l'épaisseur totale du stratifié (par exemple, si le stratifié avait une épaisseur de 1 mm, le M_{xx} requis $M_{xx} = -53.285 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times (0.001 \text{ m})^2 = -53.285 \text{ N}$).

Pendant le refroidissement, le stratifié asymétrique subit une flexion (courbures non nulles) et le chargement mécanique subséquent élimine cette flexion en remettant les courbures à zéro. Ainsi, à la fin de la charge thermique appliquée, le code a déterminé les moments résultants nécessaires pour aplatir le stratifié après la courbure induite thermiquement.

Conclusion générale

Les matériaux composites ont très haute résistance et rigidité spécifique et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés qui dépendent fortement des propriétés mécaniques de chaque phase et de leur concentration.

La formulation de GMC effectue des calculs lors de l'application de certaines équations principales, de sorte qu'un certain degré de précision du champ à micro-échelle est abandonné au profit d'une efficacité de calcul extrême, ce qui rend la méthode très attrayante en tant que pièce maîtresse dans une analyse structurelle multi-échelles et une option viable pour caractériser le comportement des matériaux composites et prédire le comportement des composites à partir des propriétés fondamentales de leurs constituants.

Les caractéristiques de la théorie facilitent l'étude de l'impact de différentes architectures de matériaux sur les réponses macroscopique et locale, en tenant compte du comportement de la phase élastique, de manière efficace et précise et facilitent également l'intégration de la théorie dans un code informatique d'analyse structurelle tel que MAC/GMC ce qui a permis d'améliorer de manière unique les capacités de base de GMC de nombreuses manières.

Il est important de noter que la distribution et la forme des fibres ont une influence sur la réponse macroscopique de composites et varie selon l'axe de fibre et selon la température de sorte que l'échauffement conduit à une dilatation thermique, si le composite est orthotrope elle cause des contraintes de réponse normales compressives et le stratifié subit à la flexion et fait plier et parfois le composite subit des déformations permanentes à la fin de chargement thermomécanique.

L'orientation des fibres et le nombre de couches et leur arrangement affecte le comportement mécanique du stratifié de sorte que les couches externes contribuent davantage à la rigidité en flexion.

Références bibliographiques

- [1] Arnold, S.M., Wilt, T.E., Saleeb, A.F., and Castelli, M.G., “An Investigation of Macro and Micromechanical Approaches for a Model MMC System”, NASA CP 19117, Vol. II, pp. (52.1) - (52.12), 1993.
- [2] Pindera M-J, Bednarczyk BA. “An efficient implementation of the generalized method of cells for unidirectional, multi-phased composites with complex microstructures”. *Composites B* 1999;30(1):87–105.
- [3] Arnold SM, Bednarczyk BA, Wilt TE, Trowbridge D. *MAC/ GMC Users Guide: Version 3.0*. NASA/TM- 1999-209070, 1999.
- [4] Aboudi J. *Micromechanical Analysis of Thermo-Inelastic Multiphase Short-Fiber Composites*. *Composites Engineering*, 1995;5(7):839–50.
- [5] Miracle DB, Maruyama B. Metal matrix composites for space systems: current uses and future opportunities. In: Stropki M, editor. *Proceedings of the Nation Space and missile Materials Symposium*. Dayton, OH: Anteon Corp., 2000. p. 25.
- [6] Aboudi J. *Mechanics of Composite Materials, A Unified Micromechanical Approach*, *Studies in Applied Mechanics*, vol. 29. Amsterdam: Elsevier, 1991.
- [7] Dvorak GJ, Benveniste Y. On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proc R Soc Lond (A)* 1992;437:291-310.
- [8] Dvorak GJ. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proc R Soc Lond (A)* 1992;437:311-27.
- [9] Paley M, Aboudi J. “Micromechanical Analysis of Composites by the Generalized Method of Cells Model”. *Mechanics of Materials*, 1992;14:127–39.
- [10] Aboudi J. *Micromechanical analysis of composites by the method of cells—update*. *Appl Mech Rev* 1996;49:S83–91.
- [11] Brett A. Bednarczyk and Steven M. Arnold “MAC/GMC 4.0 User's Manual-Keywords Manual” NASA/TM—2002-212077/VOL2.
- [12] Agarwal, B.D., and Broutman L. J., *Analysis and Performance of Fiber Composites*, Wiley Inter Science, 1980.
- [13] Z. Hashin. Analysis of composite materials - A survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50:481–505, 1983.
- [14] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11:357–372, 1963.

Références bibliographiques

- [15] Orozco, C. E., “Computational aspects of modeling complex microstructure composites using GMC”, *Composites Part B*, 28B, 167-175.
- [16] Milton, G. W., (2001), *Theory of Composites*, Cambridge University Press.
- [17] Lee, D. and Suh, N. (2006). *Axiomatic design and fabrication of composite structures*. New York: Oxford University Press.
- [18] Uttam. S.; Koruche, S.F. Application of Classical Lamination Theory and Analytical Modeling of Laminates. *Int. Res. J. Eng. Technol.* 2015, 2, 958–965.
- [19] Sundararaman, S.; Hu, J.; Chanrashekhara, K. Thermomechanical analysis of composite cylinders for hydrogen storage. In *Proceedings of the SAMPE Conferene*, Baltimore, MD, USA, 3–7 June 2007; pp. 1–12.
- [20] Liu, X., Furrer, D., Kusters, J., and Holmes, J., “Vision 2040: A Roadmap for Integrated, Multiscale Modeling and Simulation of Materials and Systems” NASA Glenn Research Center, 2018.
- [21] Liyong Tong, Adrian P. Mouritz and Michael K. 2002. Bannister “3D Fibre Reinforced Polymer Composites” Book, Elsevier Science Ltd.
- [22] F. Gibson. 2007. *Principles of composite materials mechanics*. Taylor & Francis Group, CRC Press Boca Raton. pp. 83-126.
- [23] Satish KG, Siddeswarappa B, Mohamed KK. 2010. Characterization of in-plane mechanical properties of laminated hybrid composites. *J Miner Mater Character Eng.* 9(2): 105-114.
- [24] Duvaut, G. *Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus, application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique*. North Holland Publishing Company, 1976.
- [25] Agarwal B.D. and Broutman L.J., “Analysis and performance of fiber composites” John Wiley & Sons, New York, (1980): p. 3-12.