



République algérienne démocratique et populaire
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



N°D'ORDRE : D..... /2019

Thèse

Présentée pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES

SPECIALITÉ : GENIE MECANIQUE

OPTION : Energétique

Par

Mr. Sahraoui Nassim Mahfoudh

**Modélisation et Simulation Mésoscopique de la Convection
Mixte dans un Canal Horizontal Chauffé par le Bas**

Soutenue le : 11/11/2019

Devant le Jury composé de :

Président	Mr RETIEL Nouredine	Professeur	Université de Mostaganem
Directeur de thèse	Mr HOUAT Samir	Professeur	Université de Mostaganem
Examineur	Mr EL GANAOUI Mohammed	Professeur	Université de Lorraine
Examineur	Mme SABEUR Amina	Professeur	USTO
Examineur	Mr OUADHA Ahmed	Professeur	USTO

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019 /2020

Remerciements

Je tiens à exprimer tout d'abord ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Mr. Samir Houat, Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, pour ses conseils, sa patience et ses innombrables qualités humaines, et en qui j'ai trouvé le personnage de frère, de collègue et de maître, qui m'a accompagné durant tout mon cursus de post-graduation, dans le travail et ailleurs. Ça été un honneur de travailler avec lui sur cette thèse. Je le remercie de m'avoir inculqué l'état d'esprit d'un chercheur et j'espère que ce n'est que le début d'une fructueuse coopération future.

Mes remerciements vont aussi à Mr. Mohammed El Ganaoui, Professeur et directeur du laboratoire LERMAB de l'université de Lorraine (France), de m'avoir accueilli à plusieurs reprises dans son laboratoire et de m'avoir aidé avec ses précieux conseils.

Je tiens à remercier le Professeur Retiel Noureddine, pour avoir accepté d'intervenir comme président de jury de cette thèse.

Je remercie également le Professeur El Ganaoui Mohammed de l'université de Lorraine (France), le Professeur Ouadha Ahmed et le Professeur Sabeur Amina de Université des sciences et technologie d'Oran (USTO), d'avoir accepté d'examiner ce travail de thèse et de participer à mon jury de soutenance.

J'ai une pensée pour mes parents, qui m'ont donné la vie, et un soutien psychologique sans faille, qui était, à mon avis, indispensable à la réalisation de ce travail. Je pense enfin à mes grands-parents maternels et paternels, mon frère Amine, mes sœurs Sabrina et Yasmine ainsi qu'à John Ronayne et toute sa famille.

Résumé :

Dans ce travail on présente une étude de la convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas par la méthode de Boltzmann sur réseau, couramment noté LBM (*Lattice Boltzmann method*).

D'abord, les différents phénomènes de convection tels que la convection de Rayleigh-Bénard, la convection de Poiseuille-Rayleigh-Bénard dans une conduite, considérés comme des écoulements avec une instabilité thermique sont examinés.

Une étude bibliographique portant sur les modèles et les méthodes utilisés pour simuler la convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas, ainsi que les travaux qui ont utilisé la méthode LBM pour simuler le phénomène de convection mixte en général a été faite.

La méthodologie et les notions générale de la méthode LBM sont présentés. Les deux différentes méthodes thermiques à double population notamment, à simple et à temps de relaxation multiples (SRT, MRT) respectivement utilisés dans cette étude sont présentés en détails, avec les réseaux D2Q9 pour le champ dynamique et D2Q5 pour le champ thermique.

Les différentes techniques de prise en compte des conditions aux limites, la prise en compte des termes force et les approches dynamiques et thermiques les plus couramment utilisées sont présentées et discutées.

La géométrie choisie dans cette étude est un canal horizontal à deux dimensions chauffé par le bas et refroidis par la paroi supérieure, dans lequel un fluide non-Newtonien entre avec une vitesse de profil parabolique et une température linéaire.

Une étude de validation des résultats de simulation obtenus par ces méthodes est effectuée. Différents cas test ont été sélectionné et utilisé. Les résultats de l'application de ces deux méthodes aux écoulements de convection mixte dans ce type de configuration géométrique, révèlent la bonne performance de ces méthodes par comparaison aux résultats utilisant les méthodes conventionnelles trouvés dans la littérature.

L'étude de l'effet des paramètres régissant l'écoulement, tels que le nombre de Prandtl, le rapport d'allongement ainsi que le nombre de Reynolds a été effectué, en discutant les contours de température, les lignes de courant, les différents profils de température et de vitesse pour chaque cas ainsi que l'effet du transfert de chaleur sur l'écoulement. Une comparaison entre les deux méthodes utilisé dans ce travail a été faite pour étudier l'effet du nombre de Reynolds sur l'écoulement.

En résumé, cette étude a permis d'évaluer et montrer la bonne performance et la capacité des différentes méthodes de Boltzmann sur réseau pour reproduire le phénomène physique étudié dans ce travail, comme elles offrent une facilité pour les études paramétriques sur ce type d'écoulement avec des instabilités thermiques.

Mots clés : Convection mixte, canal horizontal, méthode de Boltzmann sur réseau thermique, double population SRT et MRT

Abstract:

In this work we present a study of the mixed convection in a horizontal channel heated from below by the lattice Boltzmann method, commonly noted LBM.

First, the various convection phenomena such as Rayleigh-Bénard convection, Poiseuille-Rayleigh-Bénard convection in a channel, both considered as thermal instability flows are examined.

A bibliographical review on the models and methods used to simulate mixed convection in a horizontal channel heated from below, as well as the works that used the LBM method to simulate the mixed convection phenomenon in general, was done.

The methodology and general notions of the LBM method are presented. The two different thermal methods with double population, in particular, with single and multiple relaxation times (SRT, MRT) respectively used in this study are presented in detail, with the D2Q9 lattice for the dynamic field and D2Q5 for the thermal field.

The different techniques that take into account boundary conditions, force terms and the most commonly used dynamic and thermal approaches are presented and discussed.

The chosen geometry in this study is a two-dimensional horizontal channel heated from below and cooled from the top, in which a non-Newtonian fluid enters the channel with a parabolic velocity profile and a linear temperature.

A validation study of simulation results obtained by these methods is carried out. Different test cases were selected and used. The results of the application of these two methods to mixed convection flows in this type of configuration reveal the good performance of these methods compared to the results using conventional methods found in the literature.

The study of the effect of the parameters governing the flow, such as Prandtl number, the aspect ratio as well as the Reynolds number was carried out, by discussing the isotherms, the streamlines, different temperature profiles and velocity profiles for each case as well as the effect of heat transfer on the flow. A comparison between the two methods used in this work was made to study the effect of Reynolds number on flow.

In summary, this study allowed us to evaluate and show the good performance and the capacity of the various lattice Boltzmann methods to reproduce the physical phenomenon studied in this work, as they offer an ease for parametric studies on this type of flow with thermal instabilities.

Keywords: mixed convection, horizontal channel, Thermal lattice Boltzmann method, double population SRT and MRT

ملخص

نعرض في هذا العمل دراسة الحمل الحراري المختلط في قناة أفقية يتم تسخينها من الأسفل بواسطة طريقة بولتزمان للشبكات المرموز لها ب(LBM) أولاً، يتم فحص ظواهر الحمل الحراري المختلفة مثل الحمل الحراري لرايلي-بينارد، والحمل الحراري لبوازوي-رايلي-بينارد في القناة، التي تعتبر كتدفقات غير مستقرة حرارياً. تم إجراء مراجعة أدبية للنماذج والأساليب المستخدمة لمحاكاة الحمل الحراري المختلط في قناة أفقية مسخنة من الأسفل، وكذلك الاعمال التي استخدمت فيها طريقة LBM لمحاكاة ظاهرة الحمل الحراري المختلط عمومًا. يتم تقديم المنهجية والمفاهيم العامة لطريقة LBM كما يتم عرض طريقتين حراريتين مختلفتين ذو كثافة سكانية مزدوجة، على وجه الخصوص، مع أوقات استرخاء فردية ومتعددة (MRT، SRT) المستخدمة في هذه الدراسة، مع شبكات D2Q9 للحقل الديناميكي و D2Q5 للحقل الحراري. يتم عرض ومناقشة التقنيات المختلفة لاختيار شروط الحدود، مراعاة شروط القوة والتأثير الديناميكية والحرارية الأكثر استخدامًا. التكوين الهندسي المختار في هذه الدراسة عبارة عن قناة أفقية ثنائية الأبعاد يتم تسخينها في الأسفل وتبريدها من الجدار العلوي، حيث يدخل السائل غير النيوتوني بمنحى سرعة مكافئة ودرجة حرارة خطية. تم إجراء دراسة للتحقق من نتائج المحاكاة المتحصل عليها باستعمال هذه الطرق. تم اختيار حالات اختبار مختلفة واستخدامها. نتائج تطبيق هاتين الطريقتين على تدفقات الحمل الحراري المختلط في هذا النوع من التكوين الهندسي، كشفت عن الأداء الجيد لهذه الطرق مقارنة بالنتائج المتحصل عليها باستخدام الطرق التقليدية الموجودة في الأدبيات. تم إجراء دراسة لتأثير المعلمات المتحكممة في التدفق، مثل عدد برانتدل، نسبة الاتساع وكذلك رقم رينولدز، من خلال مناقشة كل من خطوط الجريان والحرارة، منحنيات السرعة والحرارة لكل حالة وكذلك تأثير نقل الحرارة على التدفق. تم إجراء مقارنة بين الطريقتين المستخدمتين في هذا العمل لدراسة تأثير رقم رينولدز على التدفق. باختصار، سمحت هذه الدراسة بتقييم وإظهار الأداء الجيد وقدرة أساليب بولتزمان للشبكات المختلفة على إعادة إنتاج الظاهرة الفيزيائية التي تمت دراستها في هذا العمل، لأنها توفر سهولة لإجراء دراسات حدية على هذا النوع من التدفق الغير المستقرة حرارياً.

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري المختلط ، طريقة بولتزمان للشبكات الحرارية، كثافة سكانية مزدوجة SRT و MRT

Table des matières

Résumé :	3
Table de matières	6
Liste des figures	9
Liste des tableaux	11
Chapitre 1 : Introduction	13
1.1 Introduction	13
1.2 But du travail	14
1.3 Contenu de la thèse	14
Chapitre 2 : Etat de l'art	17
2.1 Convection thermique	17
2.1.1 La convection naturelle	17
2.1.2 La convection forcée	17
2.1.3 La convection mixte	18
2.2 La convection de Rayleigh Bénard	19
2.3 La convection de Poiseuille Rayleigh Bénard	21
2.3.1 Cas d'écoulement entre deux plaques finies	24
2.3.2 Cas d'écoulement entre deux plaques infinies	24
2.4 Revue Bibliographique sur les écoulements de Poiseuille Rayleigh Bénard	25
2.5 Applications industrielles	36
2.5.1 L'étude des dépôts de vapeur chimiques (CVD)	36
2.5.2 Le refroidissement des composants électroniques	39
2.6 Revue bibliographique des écoulements de convection mixte par la méthode de Boltzmann sur réseau	41
2.7 Description mathématique de l'écoulement	45
2.7.1 Les hypothèses	45
2.7.2 Equations régissant l'écoulement	45
2.8 Valeur ajoutée apportée par ce travail	46
2.9 Conclusion	46
Chapitre 3 : La méthode de Boltzmann sur réseau	48
3.1 Introduction	48
3.2 Equation de transport de Boltzmann	51
3.3 Modèles dynamiques de la méthode de Boltzmann sur réseau	53
3.3.1 Modèle SRT à simple temps de relaxation avec l'approximation BGK	53

3.3.2	Modèle bidimensionnel à 9 vitesses (D2Q9)	54
3.3.3	Modèle MRT à plusieurs temps de relaxations	56
3.4	Modèle thermique de Boltzmann sur réseau	59
3.4.1	Modèle à double population avec simple temps de relaxation.....	59
3.4.2	Le réseau bidimensionnel à 5 vitesses :	60
3.4.3	Modèle MRT thermique à plusieurs temps de relaxation	61
3.5	Fonction de distribution d'équilibre et de non-équilibre	63
3.6	Le processus de collision et de propagation	63
3.7	Conservation de masse de quantité de mouvement et de température	64
3.8	Viscosité et diffusivité thermique	64
3.9	Conditions aux limites	64
3.9.1	Les conditions aux limites dynamiques :	65
3.9.1.1	La condition sur les murs (condition de rebond) :	65
3.9.1.2	Conditions aux limites avec une vitesse et une pression imposée (connues) ..	66
a)	La condition de vitesse imposée (frontière Ouest).....	67
b)	La condition de pression imposée (frontière Est)	66
3.9.2	Conditions aux limites thermiques :	68
3.9.2.1	Conditions aux limites de type Dirichlet	66
3.9.2.2	Conditions aux limites de sortie	68
3.10	Mise en œuvre informatique de la méthode de Boltzmann sur réseau :	68
3.10.1	Initialisation des variables et entrée des données géométriques et physiques : ...	68
3.10.2	Time-step algorithm :	69
3.11	Conclusion	71
Chapitre 4 : Résultats et discussions		73
4.1	Description du phénomène étudié :	73
4.1.1	Configuration géométrique :	73
4.1.2	Conditions aux limites :	73
4.2	Validation du code de calcul :	74
4.2.1	Méthode à simple temps de relaxation (SRT) :	74
4.2.2	Méthode à temps de relaxation multiple (MRT) :	77
4.3	Simulation du phénomène en utilisant la méthode de Boltzmann à simple temps de relaxation (SRT):	78
4.3.1	L'écoulement de convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas	78

Table des matières

4.3.2	L'effet des paramètres secondaires :	85
4.3.2.1	L'effet du rapport du nombre de Prandtl	85
4.3.2.2	L'effet du rapport d'allongement.....	92
4.4	Simulation du phénomène en utilisant la méthode de Boltzmann à plusieurs temps de relaxation (MRT):.....	97
4.5	Conclusion	102
Conclusion générale :		103
Références :		104

Liste des figures :

Figure 2.1 visualisation expérimentale des cellules de Bénard réalisée par Koschmieder et al.....	19
Figure 2.2. Représentation simplifiée de structures convectives bidimensionnelles.....	21
Figure 2.3. Représentation expérimentale de rouleaux transversaux de Rayleigh Bénard, dans une cellule remplie avec de l'eau pure.....	22
Figure 2.4. Représentation de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard.....	23
Figure 2.5. Ecoulement de Poiseuille purement conducteur.....	23
Figure 2.6. Représentation schématique des rouleaux transversaux.....	24
Figure 2.7. Représentation schématique des rouleaux longitudinaux.....	24
Figure 2.8. Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale finie.....	25
Figure 2.9. Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB.....	26
Figure 2.10. Variation de la température au milieu du canal en fonction.....	30
Figure 2.11. Différentes solutions : a) distribution de la vitesse le long du canal, b) lignes de courants, c) vorticité, d) Pression, e) isothermes pour $Re = 10$, $Pe = 20/3$, $Ra = 104$ et $B = 20$	32
Figure 2.12. Distributions à $X = 5$ (a,c,e) et $X = 10$ (b,d,f). (a-d) fonction de courant..	33
Figure 2.13. Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh.....	34
Figure 2.14. Nombre de Nusselt moyen en temps et en espace en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Rayleigh, comparés à la théorie des équations d'amplitude de Muller.....	36
Figure 2.15. Exemple de CVD dans un réacteur.....	38
Figure 2.16. Simulation numérique 2D de la cellule transversale stationnaire située juste au-dessus de l'entrée de la paroi chaude à $Re = 2.1$, $Ra = 770$ et $Pr = 0.7$	39
Figure 2.17. Vue de côté et arrière des caractéristiques de l'écoulement dans un canal incliné de 8°	40
Figure 3.1 Les différentes approches numériques en mécanique des fluides avec leurs domaines d'applicabilité	52
Figure 3.2 Modèle bidimensionnel à 9 vitesses, à droite : modèle D2Q9, à gauche : réseau D2Q9.....	56
Figure 3.3 Modèle bidimensionnel à 5 vitesses, à droite : modèle D2Q5, à gauche : réseau D2Q5.....	61
Figure 3.4. Le rebond des particules à la frontière Sud.....	66
Figure 3.5. Conditions aux limites aux parois de la géométrie.....	67
Figure 4.1. Modèle de l'écoulement de convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas.....	73
Figure 4.2. Etude du maillage pour la méthode SRT.....	74
Figure 4.3. Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Rayleigh pour un $Pr = 6.4$; comparaison de nos résultats avec ceux de Nicolas et al (1997).....	75
Figure 4.4. Etude du maillage pour la méthode MRT.....	78
Figure 4.5. Champs adimensionnels à $t = t_T$. (a-c) contours de Lignes de courant, vorticité et température.....	80
Figure 4.6. Oscillation de la perturbation de la fonction de courant.....	80
Figure 4.7. Le profil de vitesse adimensionnel U_x à $X = 0, 2, 4, 6, 8$ et 10 accompagné des contours correspondant.....	81
Figure 4.8. Evolution du profil de vitesse (U_y) le long du canal à $Y/2$, accompagné des contours correspondants.....	82
Figure 4.9. Profil de vitesse le long du canal avec le contour correspondant.....	83

Figure 4.10. Nombres de Nusselt locaux Nu_h et Nu_c respectivement le long de la paroi du haut et du bas.....	83
Figure 4.11. Distributions à $X = 5$ (a, c, e) et à $X = 10$ (b, d, f) des profils de ligne de courant, des températures et des profils de vitesse (U_x et U_y) respectivement.....	84
Figure 4.12 Profil de température adimensionnelle à $Y/2$ pour $B = 5, 8, 10, 12, 15, 20$	85
Figure 4.13 Contours de température pour $Pr = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.667, 6.4$ ($Ra = 4700$ et $Re = 1$).....	86
Figure 4.14 Oscillation de la perturbation de la fonction de courant ainsi que les lignes de courant correspondants pour $Pr=0.05, 0.1, 0.667$ et 6.4	87
Figure 4.15 Lignes de courant pour $Pr = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.667, 6.4$ ($Ra = 4700$ et $Re = 1$).....	88
Figure 4.16 Variation du nombre de Nusselt moyen en temps et en espace pour $Pr = 0.05, Re = 1.5$ and $Ra = 4700$	89
Figure 4.17 Nombre de Nusselt moyen dans l'espace et le temps en fonction de Re et de Ra pour $Pr = 0.1, Pr = 0.05$ et $Pr = 0.667$	90
Figure 4.18 Profil de vitesse adimensionnelle (U_x) transversal à $X = 5$ pour $Pr = 0.05, 0.07, 0.1, 0.667$ et 6.4	91
Figure 4.19 Profil de température adimensionnelle transversal à $X = 5$ pour $Pr = 0.05, 0.07, 0.1, 0.667$ et 6.4	91
Figure 4.20 L'effet du nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur pour $Ra = 4700, Ra = 2420$ et $Re = 1$	92
Figure 4.21 Contours de température pour $B = 5, 8, 10, 12, 15$ et 20 ($Ra = 10^4, Re = 10$ et $Pr = 0.776$).....	93
Figure 4.22 Lignes de courants pour $B = 5, 8, 10, 12, 15$ et 20 ($Ra = 10^4, Re = 10$ et $Pr = 0.776$).....	93
Figure 4.23 Profil de température adimensionnelle à $Y/2$ pour $B = 5, 8, 10, 12, 15, 20$	94
Figure 4.24 Oscillation de la perturbation de la fonction de courant le long du canal à $Y/2$ pour $B = 5, 8, 10, 12, 15, 20$	94
Figure 4.25 Profil de vitesse adimensionnelle (U_y) à $X=5$ pour $B = 5, 8, 10, 12, 15, 20$	95
Figure 4.26 Profil de température adimensionnelle à $X=5$ pour $B = 5, 8, 10, 12, 15, 20$	95
Figure 4.27 L'effet du rapport d'allongement sur le nombre Nusselt moyen.....	96
Figure 4.28 Lignes de courant pour : a) $Re = 10$, b) $Re = 20, Re = 40$ pour $Pr = 0.667$ ($Ra = 8000$), Gauche : SRT, Droite : MRT.....	97
Figure 4.29 Oscillation amplitude of a particle on the horizontal mid-plan and the corresponding streamlines for $Re = 10, 20$ and 40 ($Ra = 15000$).....	98
Figure 4.30 Contours de température pour : a) $Re = 10$, b) $Re = 20, Re = 40$ pour $Pr = 0.667$ ($Ra = 8000$), Gauche : SRT, Droite : MRT.....	98
Figure 4.31 Le profil de température le long du canal avec les isothermes correspondants pour $Re = 10, 20$ and 40 ($Ra = 15000$).....	99
Figure 4.32 Le nombre de Nusselt moyen en temps et en espace en fonction de Re pour $Ra = 8000, 10000, 12000$ and 15000	100

Liste des tableaux :

Tableau 2.1. Formules théoriques ou corrélations donnant le nombre de Nusselt moyen en temps et en espace, en fonction du nombre de Rayleigh, dans les écoulements de R _L ou de R pleinement établis.....	28
Tableau 2.2. Nombre de Nusselt moyens au niveau des parois chaudes et froides pour différents nombres de Reynolds, Grashov, rapports d'allongement et rapports de températures [43].....	30
Tableau 3.1. Vitesses discrètes et facteurs de poids caractérisant le réseau D2Q9.....	56
Tableau 3.2. Vitesses discrètes et facteurs de poids caractérisant le réseau D2Q5.....	60
Tableau 4.1. Nombre de Nusselt moyen Nu for: Re = 10, Pe = 20/3 and Ra = 104.....	75
Tableau 4.2. Comparaison des présents résultats avec les résultats de références [54].	76
Tableau 4.3. Comparaison des présents résultats avec les résultats de références [43] (Re = 0.1, B= 20 et Pr = 0.667).....	76
Tableau 4.4. Etude de maillage pour la méthode MRT.....	77
Tableau 4.5. Comparaison des présents résultats obtenu avec la méthode MRT avec les résultats de références.....	77
Tableau 4.6. Comparaison des résultats de simulation obtenus par les méthodes SRT et MRT avec des résultats trouvé dans la littérature Re=0.1 et B=20.....	78
Tableau.4.7. Comparaison des $\langle \bar{Nu} \rangle$ obtenus par les méthodes SRT et MRT et cela pour des nombres de Rayleigh de Ra = 8000, 10000, 12000 et 15000 et Re = 10, 20, 30, 40 et 50.....	101

Chapitre 1 : Introduction

Chapitre 1 : Introduction

1.1 Introduction :

Le phénomène de la convection est un processus physique de transmission de la chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel avec un mouvement de matière. On distingue trois sortes de convection : naturelle, forcée et mixte. Certains problèmes d'instabilité thermique liés à la convection sont fréquemment étudiés, notamment la convection de Rayleigh-Bénard et la convection de Poiseuille-Rayleigh Bénard.

Ces dernières années, ce phénomène d'instabilité a connu un accroissement notable des activités de recherche tant expérimentale que numérique dans le domaine des écoulements de fluide et des transferts de chaleur entre deux parois parallèles. Dans cette configuration géométrique, on s'intéresse essentiellement à la richesse en types de structures thermo convectives susceptibles d'apparaître (sous forme de rouleaux longitudinaux, transversaux, etc.). Ce phénomène possède des applications industrielles variées telles que : le refroidissement des composants électroniques, le dépôt par vapeurs chimiques (CVD), la ventilation dans les bâtiments, les échangeurs de chaleur. Différents travaux ont été effectués sur le problème de convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas et cela avec les méthodes conventionnelles, notamment la méthode des volumes finis, la méthode des différences finies ainsi que l'analyse de stabilité linéaire. Dans ce travail on étudiera ce phénomène avec la nouvelle méthode de Boltzmann sur réseau.

La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM : *Lattice Boltzmann Method*) est une méthode numérique récente qui a vu le jour au début des années 90. Elle est initialement issue de la théorie des automates cellulaires (Cellular automata), de la méthode des gaz sur réseau (LGA : lattice Gas automata) et en se basant sur le formalisme de la physique statistique.

C'est une méthode qui s'appuie sur la résolution de l'équation de Boltzmann avec l'approche hydrodynamique, contrairement aux méthodes classiques qui sont basées sur la

discrétisation des équations de Navier et Stokes. Elle décrit le phénomène non pas par des quantités macroscopiques (vitesse, pression, densité), mais directement à la répartition des différentes particules constituant un fluide. On parle alors de représentation mésoscopique. Ce qui en fait une nouvelle approche très intéressante relativement aux méthodes classiques telles que les volumes finies, différences finies et éléments finies.

L'avantage de la méthode de Boltzmann sur réseau réside principalement dans la simplicité de la modélisation et de la simulation des phénomènes d'écoulements complexes ainsi que la facilité de mise en œuvre informatique. L'algorithmique de cette méthode permet aussi une mise en œuvre d'un calcul parallèle aisée et efficace.

1.2 But du travail :

L'objectif de ce présent travail est de reproduire et d'analyser numériquement le phénomène physique de convection mixte, en régime laminaire pour la configuration géométrique considérée. La nouvelle méthode de LBM thermique à double population avec les deux configurations : à simple et à temps de relaxation multiples, SRT et MRT est utilisé.

Des codes de calcul seront développés et testés dans cette étude pour les méthodes LBM thermique SRT et MRT. Les résultats obtenus seront confrontés et validés avec ceux trouvés dans la littérature pour différents cas pour la configuration géométrique considéré.

L'étude de l'influence des paramètres physiques tels que : le nombre de Prandtl et le rapport d'allongement par la méthode de Boltzmann sur réseau à double population et à simple temps de relaxation (SRT) sera entreprise, ainsi que la confrontation des résultats obtenus de l'étude de l'influence du nombre de Reynolds et celui de Rayleigh sur l'écoulement par les deux modèles LBM-MRT et LBM-SRT.

Ce travail nous permettra de tester la capacité de la méthode de Boltzmann sur réseau avec les modèles SRT et MRT à reproduire l'écoulement en convection mixte dans ce type de géométrie. Ça permettra aussi de traiter et d'analyser les problèmes des instabilités thermoconvectives susceptible d'apparaître dans ce genre d'écoulement.

1.3 Contenu de la thèse :

La thèse est présentée en quatre chapitres : L'introduction générale et les objectifs du travail tracés pour cette thèse sont exposés dans le premier chapitre, suivi par une présentation du contenu du manuscrit.

Dans le deuxième chapitre on présente une revue bibliographique sur les différents phénomènes de la convection thermique dans un canal horizontal chauffée par le bas, en particulier la convection de Rayleigh-Bénard et celle de Poiseuille-Rayleigh-Bénard, qui sont considérées comme des écoulements avec une instabilité thermique. La formulation mathématique des équations de Navier et Stokes régissant le phénomène de la convection mixte dans la géométrie considérée ainsi que les hypothèses simplificatrices et la description des conditions aux limites liées à la résolution du problème sont exposées.

Le troisième chapitre est consacré à la description de la nouvelle méthode de modélisation et simulation utilisée dans ce travail. L'historique de développement de la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) et les principes de base ainsi que les différentes approches et processus nécessaires utilisées dans cette méthode avec le temps de relaxation simple 'SRT' et multiple 'MRT' sont exposés. On présente par la suite l'algorithme des codes de calcul qui ont été développés et testés durant ce travail, en appliquant le LBM avec l'approche thermique à double population à temps de relaxation simple et multiple, sur le réseau D2Q9 pour le champ dynamique et D2Q5 pour le champ thermique.

Les résultats et l'analyse physique sont présentés dans le chapitre quatre. Tout d'abord, une validation des codes de calcul utilisés pour le phénomène de convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas avec des valeurs tirées de la littérature est discutée.

La suite des résultats de l'analyse CFD est présentée en deux étapes : la première est dédiée à l'analyse du phénomène physique par la méthode de Boltzmann sur réseau à temps de relaxation simple, ainsi qu'une étude paramétrique avec l'effet du nombre de Prandtl et du rapport d'allongement sur l'écoulement. La deuxième étape consiste à simuler le phénomène par la méthode de Boltzmann sur réseau à temps de relaxation multiple 'MRT', notamment l'analyse de l'effet du nombre de Reynolds sur les différentes structures de l'écoulement avec une comparaison des résultats obtenus avec celles de la méthode à temps de relaxation simple.

Nous terminerons ce travail par une conclusion et une discussion des perspectives tracées.

Chapitre 2 : Etat de l'art

Chapitre 2 : Etat de l'art

2.1 Convection thermique :

Le phénomène de convection est un phénomène courant qu'on peut observer tous les jours, par exemple lorsqu'on fait bouillir de l'eau ou dans une poêle à frire sur une plaque chauffante. C'est un processus par lequel l'énergie est échangée sous forme de chaleur grâce au gradient de températures qui peut exister entre ces les deux milieux dans lequel se passe le phénomène. Comme le gradient de pression, le gradient de température va donner naissance à une nouvelle force communément appelé la poussée d'Archimède dont il faudra tenir compte dans l'établissement du bilan total des forces appliquées à une particule fluide en mouvement. En fait, la différence de température aura pour conséquence une modification de la densité déclenchant ainsi un mouvement au sein du fluide du fait de la poussée d'Archimède. Ce mouvement de brassage, dans lequel les parties les plus chaudes du fluide ont tendance à s'élever et les parties froides et denses à descendre, s'appelle "la convection". Le mouvement du fluide peut être naturel ou forcé :

2.1.1 La convection naturelle :

Ce phénomène se produit, lorsqu'un fluide est chauffé par une source, il devient alors, moins dense et se déplace grâce à la gravité, qui est remplacé par le fluide froid environnant. Ce dernier est à son tour chauffé et le processus devient continue, formant un courant de convection. La force motrice de la convection naturelle est la poussée hydrostatique, qui est la résultante des différences entre les densités du fluide lorsque la gravité ou une autre force est présente.

2.1.2 La convection forcée :

Ce phénomène se produit, lorsque des pompes, ventilateur ou tout autre moyens sont utilisées pour mouvoir le fluide et crée un courant de convection induit artificiellement. La première étude sur la convection, a été faite expérimentalement par Henri Bénard, qui a publié deux papiers, le premier en 1900 [1] et le second en 1901 [2], où son dispositif

expérimental était composé d'une fine couche d'huile (1mm d'épaisseur), chauffée par le bas par de la vapeur, tandis que la surface supérieure était libre et refroidis par son contact avec l'atmosphère. Malgré le manque de précision, Bénard a observé un modèle régulier de cellules hexagonales en utilisant de l'aluminium et de la poudre de graphite (Fig 2.1).

Il a observée aussi une dépression locale au centre de chaque cellule. Cette instabilité thermo convective est en fait due principalement à la convection de Marangoni. Ce phénomène a été modélisé 50 ans plus tard par Person [3] et reproduit expérimentalement par Block [4].

La première étude théorique de la convection a été faite par Lord Rayleigh en 1916 où il a essayé d'expliquer les expériences expérimentales de Bénard par une théorie linéaire en utilisant l'approximation de Boussinesq [5] (toutes les propriétés du fluide excepté la densité sont indépendantes de la température). En négligeant tous les termes non-linéaires de l'équation de mouvement et de l'équation thermique, il a fondé les bases de ce que nous appelons aujourd'hui la convection de Rayleigh-Bénard (RB). Les valeurs critiques caractérisant le problème ont été calculées par Jeffreys [6], [7].

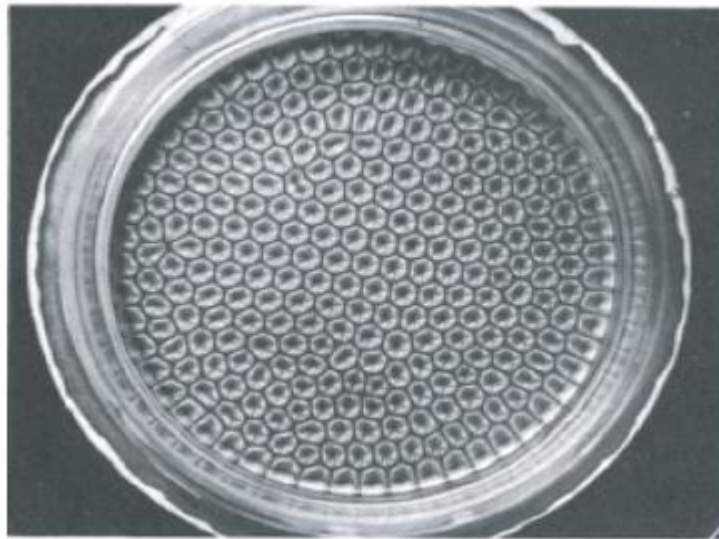


Figure 2.1 visualisation expérimentale des cellules de Bénard réalisée par Koschmieder et al [8]

2.1.3 La convection mixte :

La Convection mixte correspond au couplage de deux phénomènes, à savoir la convection naturelle et forcée qu'on peut qualifier de cas général de la convection, quand le fluide est soumis simultanément à une augmentation de pression et à une différence de température. Parmi les exemples de cette mixité, on peut citer : les écoulements lents en canalisation (les radiateurs à eau) ou le long d'une paroi, les écoulements atmosphériques et les courants marins (qui sont

importants pour les questions de climatologie et de pollution), le dépôt de vapeurs chimiques (CVD), ainsi que le refroidissement des composants électroniques.

Les deux mécanismes de convection (naturelle et forcée) vont s'aider ou se contrarier selon le sens relatif du mouvement forcé par rapport au mouvement gravitaire, qui jouera donc un rôle essentiel. Si les effets de la pesanteur s'opposent au mouvement forcé, l'écoulement est freiné, le transfert thermique a tendance à diminuer et on parle de convection mixte "*contrariée*". Si l'écoulement forcé est de même sens que l'écoulement libre (cas de la plaque verticale chauffée, dans un fluide lui-même en mouvement ascendant) il se produit une amplification des transferts par rapport à la convection forcée seule et on parle alors de convection mixte "*aidée*".

Le problème de l'écoulement d'un fluide entre deux parois parallèles différentiellement chauffées, a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs dans le domaine. Dans cette configuration géométrique, on s'intéresse essentiellement à la richesse en types de structures thermo convectives susceptibles d'apparaître (sous forme de rouleaux longitudinaux, transversaux, etc.). On peut citer les travaux sur les écoulements de Rayleigh-Bénard (RB) et Les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB), qui sont des écoulements laminaires de convection (Naturelle/mixte) en conduite rectangulaire horizontale chauffée uniformément par le bas et refroidie uniformément par le haut.

2.2 La convection de Rayleigh Bénard :

La convection naturelle peut avoir lieu entre deux plaques horizontales sous l'effet d'un gradient de température, lorsque la paroi du dessous est chauffée et la paroi de dessus est refroidie (Fig 2.2). Cette dernière configuration est désignée par la convection de Rayleigh-Bénard.

Si la plaque inférieure est plus froide que la plaque supérieure le système reste stable, mais si la plaque inférieure est plus chaude que la plaque supérieure, avec une certaine valeur du gradient de température le système devient perturbé et instable [9]. Si la perturbation initiale de la température est positive, la poussée d'Archimède induira à un mouvement ascendant. Alors y'aura un déplacement des couches inférieures chaudes vers les couches froides. Si la perturbation est négative, la poussée d'Archimède induira dans ce cas à un mouvement descendant. Les particules fluides des couches supérieures plus froides se déplacent vers les couches inférieures ce qui provoque l'apparition d'un mouvement de rouleaux périodiques

contrarotatifs appelées cellules de Rayleigh Bénard, qui résultent du couplage entre le champ thermique et le champ dynamique.

Les premières études sur la convection de Rayleigh Bénard ont vu le jour vers les années 1900, avec les expériences de Bénard [1] qui a mis en place un dispositif pour étudier la stabilité d'une couche de fluide chauffé par le bas et ayant une surface libre par le haut. Ce dernier a observé l'établissement d'une série de rouleaux stables de spermaceti fondu. Ces cellules, qui plus tard seront connues sous le nom de « rouleaux de Bénard », étaient principalement de forme hexagonale (Fig.2.3).

Peu après Lord Rayleigh s'intéressa à son tour à la convection : il a essayé d'expliquer le phénomène qu'on nomme aujourd'hui la « Convection de Rayleigh Bénard », et a introduit un nombre adimensionnel très important et qui joue un rôle essentiel dans ce phénomène comme dans d'autres, qui est le nombre Rayleigh noté Ra (1916). Schématiquement on a :

$$Ra = \frac{\text{poussée d'archimède}}{\text{force de traînée} \times \text{taux de diffusion de la chaleur}}$$

Donc si la poussée d'Archimède arrive à vaincre les effets dissipatifs de la traînée visqueuse et de la diffusion de la chaleur, la convection apparaît. Comme l'intensité de la poussée d'Archimède est déterminée par la différence de température $\Delta T = T_c - T_f$ entre les deux plaques horizontales, Ra est proportionnel à ΔT . La convection démarre donc, lorsque la différence de température est suffisamment grande, i.e. lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique Ra^* . Au-dessus de cette valeur, le fluide est brassé par des cellules thermoconvectives de forme plus ou moins complexes qui s'agencent différemment en fonction de la géométrie de la cavité contenant le fluide.

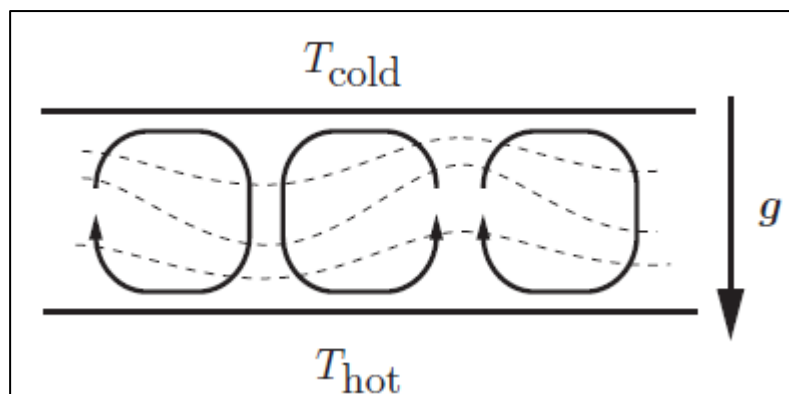


Figure 2.2 Représentation simplifiée de structures convectives bidimensionnelles entre deux plaques horizontales [10]

A partir de ces expériences Lord Rayleigh trouve un intéressant champ d'application aux calculs de stabilité linéaire, en se basant sur les équations de Navier et Stokes et en tenant

compte de l'approximation de Boussineq [5] ; Rayleigh propose en 1916 un modèle analytique pour calculer la différence de température et de la longueur d'onde critique pour un phénomène de convection au sein d'une couche infinie de fluide, entre deux plaques horizontales avec des températures imposées et une condition de glissement.

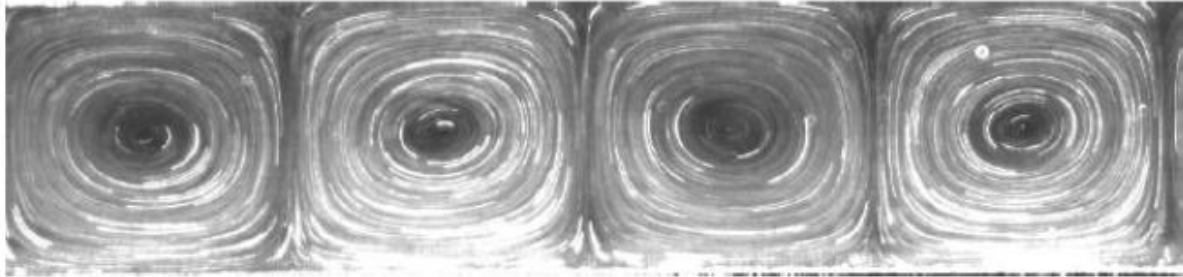


Figure 2.3 Représentation expérimentale de rouleaux transversaux de Rayleigh Bénard, dans une cellule remplie avec de l'eau pure [11]

Les résultats théoriques obtenues par Rayleigh s'accordent avec les résultats expérimentaux et le phénomène est appelé écoulement de Rayleigh Bénard. En 1940 Pellew et Southwell déterminent la longueur d'onde ainsi que la différence de température critique des rouleaux au seuil de l'instabilité, pour un fluide confiné entre deux paroi horizontales avec une condition de non-glissement aux parois, traduisant ainsi la situation la plus proche des expériences faites jusque-là.

2.3 La convection de Poiseuille Rayleigh Bénard :

Un écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard est un écoulement de Rayleigh Bénard sur lequel on ajoute un écoulement de convection forcée, en modifiant les conditions aux limites de ce dernier soit en imposant un profil de poiseuille à l'entrée de la conduite et une condition à la sortie, qui permet la conservation de la contrainte et de la matière dans le cas d'un fluide incompressible, soit en imposant un gradient de pression horizontal le long du canal (Fig2.4).

De la même manière que l'écoulement de Rayleigh Bénard est caractérisé par le nombre de Rayleigh et Prandtl, l'écoulement de Poiseuille est caractérisé en plus par le nombre de Reynolds (Re). Ce dernier représente le rapport d'intensité entre les forces d'inertie et la dissipation visqueuse au sein du fluide :

$$Re = \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de dissipation visqueuse}}$$

Le profil de Poiseuille est écrit sous la forme suivante :

$$V(0, z, t) = 6(z - z^2) \quad 2.1$$

Qui dépend du nombre de Reynolds. Si le nombre de Reynolds $Re = 0$, l'écoulement devient un écoulement de Rayleigh Bénard (PRB). Il dépend de plusieurs paramètres : les conditions aux limites d'entrée et de sortie du fluide, le rapport d'allongement (rapport géométrique), l'écart de la température et la nature du fluide.

Différentes structures peuvent apparaître en combinant les nombres adimensionnels qui régissent cet écoulement et qui sont : le nombre de Reynolds, le nombre de Rayleigh, le nombre de Prandtl ainsi que le rapport de forme.

Ses structures résultent de la superposition de deux sources convectives :

- Un gradient de pression horizontal entraîne le fluide dans une conduite.
- Un gradient de température vertical est à l'origine de la formation des structures thermo convectives.

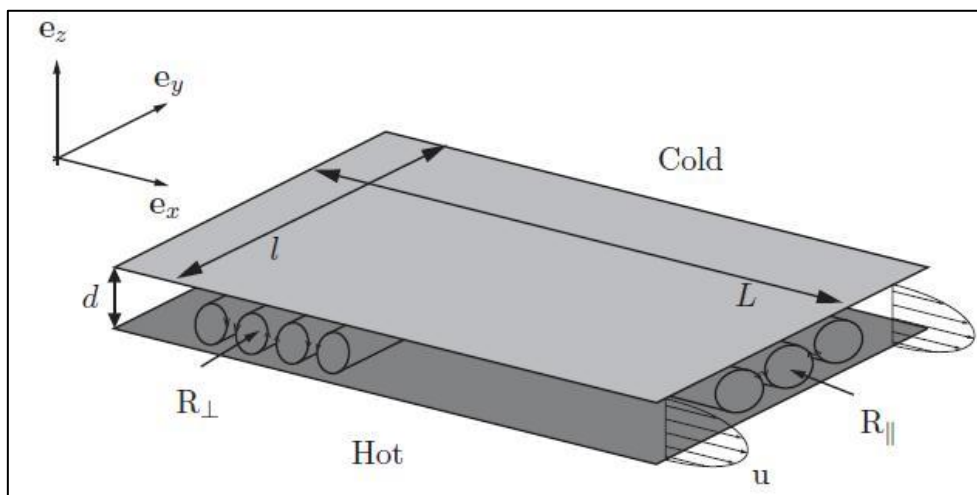


Figure 2.4 Représentation de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard [12]

Lorsque la paroi du bas n'est pas chauffée suffisamment et le nombre de Rayleigh n'atteint pas le nombre critique ($Ra_c = 1707.6$), on a affaire à un écoulement de Poiseuille caractérisé par un transfert de chaleur purement conductif (Fig.2.5)

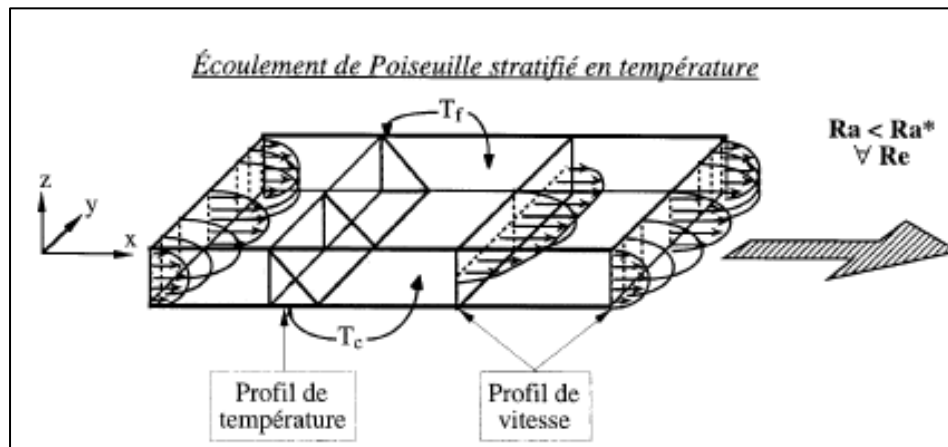


Figure 2.5 Écoulement de Poiseuille purement conductif [13]

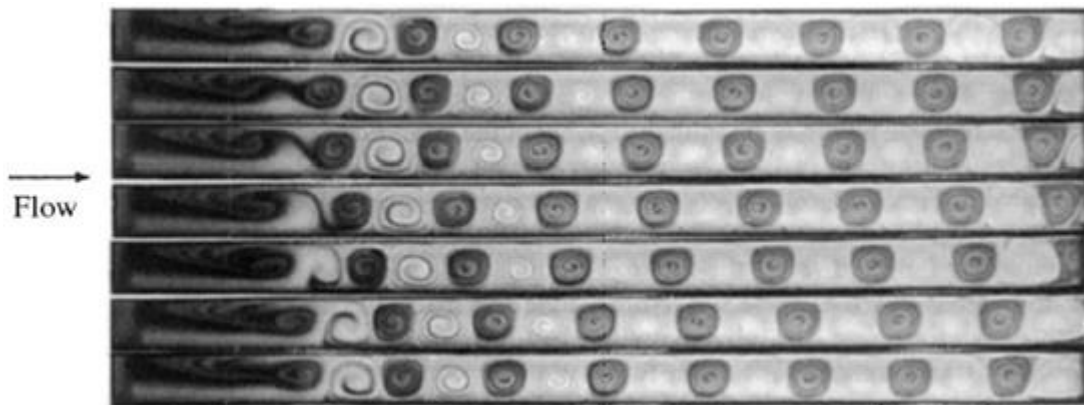
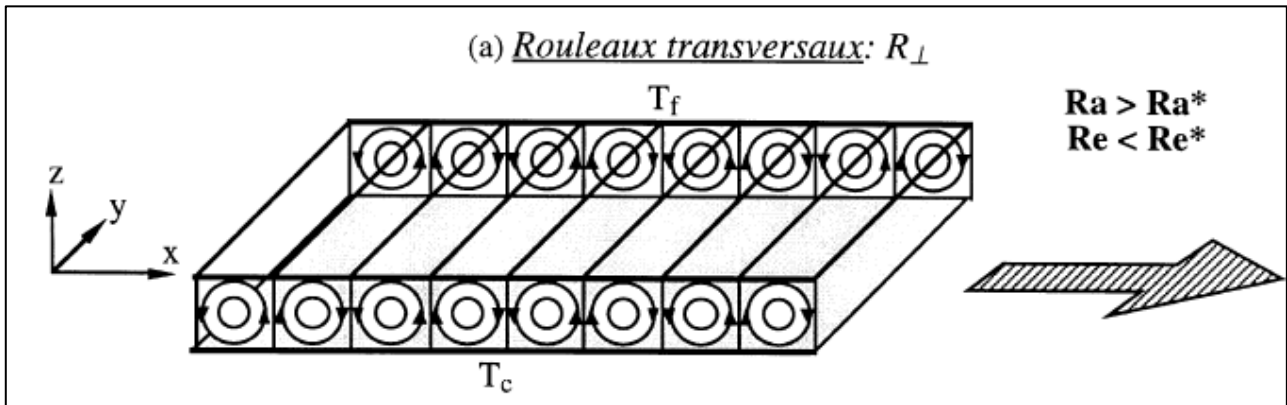


Figure 2.6 Représentation schématique des rouleaux transversaux [13].

Si par ailleurs, on chauffe la paroi du bas jusqu'à atteindre le nombre de Rayleigh critique Ra_c , deux solutions sont possibles : l'apparition des rouleaux transversaux, qu'on notera R_{\perp} (Fig.2.6), ou des rouleaux longitudinaux qu'on notera R_{\parallel} (Fig.2.7). Les premières sont des rouleaux de structures quasi bidimensionnels, où la composante transversale de la vitesse est nulle excepté près des bords latéraux. Mais l'apparition des rouleaux transversaux reste possible uniquement pour de faibles nombres de Reynolds (en général $Re < 10$).

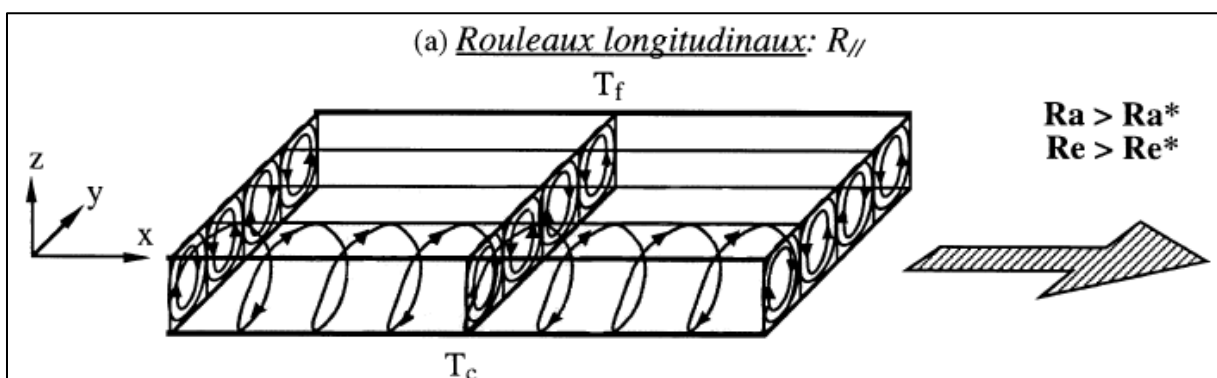


Figure 2.7 Représentation schématique des rouleaux longitudinaux [13]

Si le processus de chauffage continue, une nouvelle bifurcation aura lieu, et les rouleaux transversaux cèderont leur place aux rouleaux longitudinaux.

Il existe dans les écoulements de Poiseuille Rayleigh Bénard deux cas :

- Cas d'un écoulement entre deux plaques finies
- Cas d'un écoulement entre deux plaques infinies.

2.3.1 Cas d'écoulement entre deux plaques finies :

C'est la configuration où le rapport de forme $B = l/h$ est un nombre fini.

Dans ce cas, lorsque $Re < Re^*$ les parois verticales favorisent l'apparition des R_{\perp} , par contre lorsque $Re > Re^*$ l'écoulement moyen favorise les R_{\parallel} . Nous limiterons notre travail pour un $Re < Re^*$ (Fig.2.8).

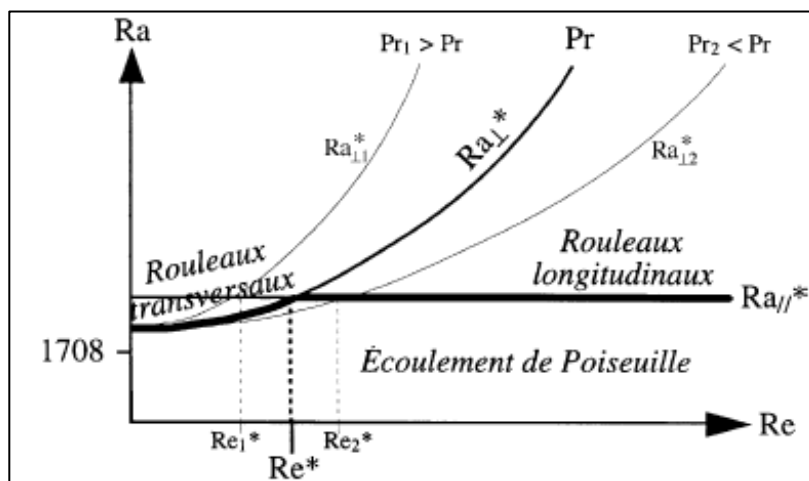


Figure 2.8 Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale finie [13]

2.3.2 Cas d'écoulement entre deux plaques infinies :

Cette configuration traduit le cas où le rapport de forme est infini : $B = l/h \rightarrow \infty$. Les études montrent que les rouleaux transversaux R_{\parallel} sont plus instables que ceux longitudinaux R_{\perp} et $Ra_{\parallel}^* < Ra_{\perp}^*$.

Où : Ra_{\parallel}^* : Nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des R_{\parallel} .

Ra_{\perp}^* : Nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des R_{\perp} .

Pour $Re = 0$ (cas de convection naturelle), l'écoulement n'a pas de direction privilégié comme on ne peut pas différencier les R_{\parallel} des R_{\perp} , donc $Ra_{\parallel}^* = Ra_{\perp}^* = 1708$ (Fig.2.9).

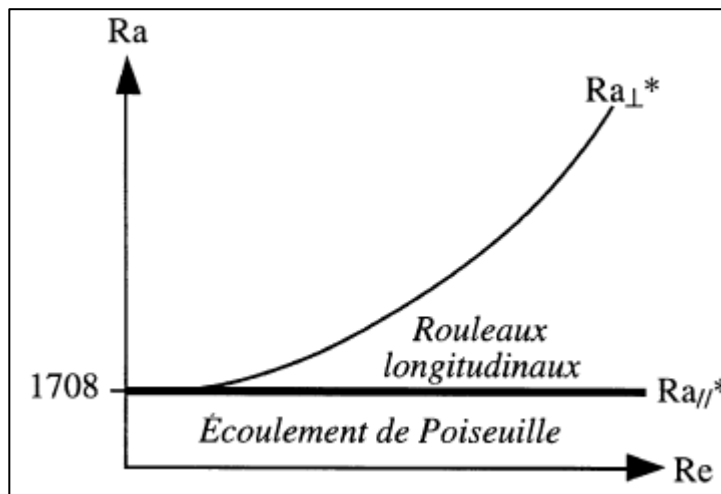


Figure 2.9 Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale infinie [13]

2.4 Revue Bibliographique sur les écoulements de Poiseuille Rayleigh Bénard :

La première étude sur le problème de Rayleigh Bénard en présence d'un écoulement a été faite par Idrac (1920) [14]. Ce dernier a été le premier à visualiser expérimentalement, des rouleaux longitudinaux au cours de ces études sur les planeurs à voile (1921) [15]. A cette époque, la motivation principale des chercheurs était la compréhension des phénomènes météorologiques, tels que l'alignement des bandes nuageuses sous l'action du vent. Par conséquent, dans les expériences, les écoulements n'étaient pas de type Poiseuille mais de type Couette. En effet, pour la reproduction l'entraînement cisailé dû au vent, les écoulements d'air sont réalisés en déplaçant horizontalement la plaque supérieure du canal d'essai ([16],[17],[18]), où bien en mettant en place un tapis roulant chauffé en guise de plaque inférieure [19].

Toutes ces études permettent la compréhension qualitative de l'influence de l'écoulement sur la forme des structures convectives, mais sont rarement confrontés à la théorie, c'est dû au fait que ces expériences se rapportent à des situations physiques mal définies quantitativement. De plus, aucune donnée ne permet le calcul exact du nombre de Rayleigh, car il est probable que ces observations sont faites pour des nombres de Rayleigh supercritiques, en d'autres termes, les types d'écoulement observées sortent du cadre de la théorie linéaire et de l'approximation de Boussineq. Contrairement à Idrac [14,15], les rouleaux longitudinaux ont été étudiés d'une

manière plus approfondie par Terada et al (1928) [20] et par Terada et Tamano (1929) [21], où ces derniers ont réalisé des photos de ces structures dans l'écoulement de l'alcool, dont la surface se refroidit par évaporation ou d'eau. La première observation des rouleaux transversaux, en écoulement cisailé de type couette, pour de faibles nombres de Reynolds, est attribuée aux anglais Philips et Walker (1932), qui ont réalisé leurs expériences dans les couches d'air de 6 mm d'épaisseur. C'est Graham (1933) qui a confirmé l'existence des R_{\perp} . Bénard et Avsec effectuent alors des études sur tous les problèmes d'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard. Dès lors, Avsec va faire, jusqu'à 1938, des expériences sur plusieurs configurations avec des couches d'air inférieure à 8 cm. Lorsque la vitesse de l'air est inférieure à 2cm/s environ, Avsec reproduit les rouleaux transversaux, lorsque la vitesse est supérieure, il reproduit R_{\parallel} . En conformité avec les théories de Rayleigh pour la convection libre, Avsec constate l'existence d'un régime préconvectif stable avant la naissance des R_{\perp} ou des R_{\parallel} . La naissance de la convection se situe entre $Ra_0 = 657,5$ (valeur critique obtenue par Rayleigh dans le cas où le fluide est compris entre deux plaques horizontales rigides, parfaitement conductrices mais sans frottement) et $Ra_0 = 1709,5$ (valeur critique obtenue par Jeffreys (1928) [7] dans le cas qui s'approche le plus de la réalité où les plaques sont, cette fois ci, avec frottement), la valeur exacte dans ce cas est $Ra_0 = 1707,762$. Avsec justifie ces résultats, par le fait qu'il a utilisé dans ses expériences, une plaque de verre supérieur, et que cette dernière est mauvaise conductrice de la chaleur. Bénard a reporté tous ces résultats dans son article de synthèse (1938).

La recherche s'est arrêtée durant la seconde guerre mondiale, mais dès 1949, les recherches sur le problème de Poiseuille Rayleigh Bénard ont repris. Durant les 30 années suivantes, la théorie de stabilité linéaire était la méthode la plus utilisée, où différents auteurs se sont intéressés à l'analyse de stabilité du problème, aux niveaux dynamiques et thermiques, d'autres se sont intéressés aux applications industrielles du problème PRB, d'autres se sont intéressés uniquement soit à la zone d'entrée de l'écoulement, là où naissent les structures convectives, soit à la sortie pour établir les conditions aux limites adéquates. Un résumé des travaux de recherches couvrant cette période, est dû à Nicolas (2002) [22]. Cette revue couvre la période 1920-2001 et comporte 154 références. La gamme des paramètres est : $0 < Pr < 1000$, $0 < Re < 100$ et $0 < Ra < 10^6$.

Depuis lors, les recherches sur ce domaine se sont poursuivies, et notamment concernant les transferts thermiques des structures thermoconvectives. Les études dans lesquelles les auteurs utilisent la simulation numérique directe, les nombres de Nusselt sont moyennés dans la direction transversale du canal et ils sont calculés au niveau de la paroi chaude, tandis que dans

les travaux expérimentaux, la mesure du nombre de Nusselt nécessite beaucoup de précautions pour mesurer correctement les flux de chaleur échangés par conduction.

Les premiers à avoir mesuré expérimentalement les transferts thermiques des écoulements de PRB sont Kamotani et Ostrach (1976) [23] et Kamotani et al (1979) [24], et ceci dans la zone d'entrée pour des écoulements d'air, toutefois, les mesures du nombre de Nusselt sont imprécises, puisque les auteurs signalent des erreurs de l'ordre de 12%.

Luijkx et al (1981) [25] ont étudié expérimentalement cette configuration, où ils ont prouvé l'existence de rouleaux transversaux stables, pour de petits nombres de Reynolds en utilisant la technique de « shadowgraphie ».

Maughan et Incropera (1987, 1990) [26,27], ont étudié expérimentalement et par simulations numériques 2D, l'écoulement de l'air. Une approche numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plaques horizontales, en utilisant la méthode des différences finies pour la partie numérique, a été faite par Ouazzani et al (1989) [28], pour différents paramètres : $2000 < Ra < 12000$, $1 < Re < 9$ et $Pr = 0.71$, et différentes valeurs du rapport d'allongement variant de $B = 1$ jusqu'à $B = 18.5$. Des formules théoriques ont été mise au point et déduite pour le rapport des vitesses des rouleaux transversaux, à la vitesse moyenne de l'écoulement, pour différentes valeurs du rapport d'allongement. Presque tous les travaux expérimentaux (Mori et Uchida (1966) [29] Ostrach et Kamotani (1975) [30], Fukui et al (1983) [31]), théoriques (Mori et Uchida (1966) [29]) et numériques (Hwang et Cheng (1971) [32], Fukui et al (1983) [31], Ouazzani et al (1989) [N33], Hasnaoui et al (1991) [34], Narusawa (1993, 1998) [35,36]) dans lesquels les auteurs calculent le nombre de Nusselt moyen en espace et en temps pour des écoulements de PRB pleinement établis s'accordent à dire que le nombre de Nusselt ne dépend pas du nombre de Reynolds et qu'il croît avec le nombre Rayleigh. Ce qui est valable aussi bien pour les écoulements de R_{\parallel} que les écoulements de R_{\perp} . Autrement dit, dans une conduite rectangulaire chauffée par le bas, le nombre de Nusselt ne varie pas, qu'il y ait un écoulement ou qu'il n'y ait pas (Convection naturelle). A vrai dire ces résultats sont vrais pour n'importe quel nombre de Reynolds pour les écoulements de R_{\parallel} mais qu'ils ne sont valables que pour des petits nombres de Reynolds pour les écoulements de R_{\perp} .

Dans le Tableau 2.1, les différentes formules de corrélation donnant Nu en fonction de Ra sont extraites des travaux précédemment cités sont présentés. La gamme de nombres de Rayleigh et le type de fluide (nombre de Prandtl) pour lequel la formule a été calculé sont présentés, le rapport d'allongement est supérieur à $B = 10$ dans tous les cas.

Tableau 2.1. Formules théoriques ou corrélations donnant le nombre de Nusselt moyen en temps et en espace, en fonction du nombre de Rayleigh, dans les écoulements de R_{\perp} ou de R_{\parallel} pleinement établis

Références	Convection naturelle (CN) ou mixte (CM)	Structures observées	Formules de corrélations $Nu=f(Ra,Re,Pr)$	B	Domaine de validité pour Ra	Pr
Mori et Uchida [57]	CM	R_{\parallel}	$Nu = 1 + 1.413 \frac{Ra - 1708}{Ra}$	∞	1708-3500	0.71
Ostrach et Kamotani [58]	CN-CM	R_{\parallel}	$Nu = 1 + \frac{8.3 \times 10^{-4} (Ra - 1708)}{\sqrt{1 + 1.45 \times 10^{-4} (Ra - 1708)^4}}$	18-36	1708-15000	0.71
Fukui et al [107]	CM	R_{\parallel}	$\frac{Ra}{1708} Nu - 1 = 2.47 \left(\frac{Ra - 1708}{1708} \right)^{1.07}$	20	1708-10000	0.71
Muller et al [68]	CM	R_{\perp}	$Nu = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{Ra - Ra_{\perp}^*(Re)}{Ra}$ Où : $\frac{1}{\gamma} = 1.423 + O(Re^2)$ à $Pr = 1$ Et : $\frac{1}{\gamma} = 1.4306 + O(Re^2)$ à $Pr = 6.4$	∞	1708-2500	$\forall Pr$
Schluter et al [132]	CN	R_{\perp}	$Nu = 1 + K(Pr) \frac{Ra - 1708}{Ra}$	∞	1708-3500	$\forall Pr$
Platten et Legros [51]	CN	R_{\perp}	$(Nu - 1) \frac{Ra}{1708} = K(Pr) \left(\frac{Ra - 1708}{1708} \right)^{1.23}$	≥ 10	4000-28000	$\forall Pr$
<p>Dans les deux dernières références $K(Pr) = \left(0.69942 - \frac{0.00472}{Pr} + \frac{0.00832}{Pr^2} \right)^{-1}$ $(K(Pr = 0.7) = 1.4091, K(Pr = 1) = 1.4224, K(Pr = 6.4) = 1.4308)$</p>						

On donne l'expression de Nu calculé par Muller (1990) [37] et Muller et al (1992) [38] à partir de leurs équation de Ginzburg-Landau, dans le cas des R_{\perp} . Deux résultats de la convection naturelle ont été rajoutés : le premier a été calculé théoriquement par Schluter et al (1965) [39] dans le domaine linéaire, le second a été obtenus par Platten et Legros (1984) [40] en corrélant de nombreux résultats numériques, théoriques et expérimentaux du domaine non-linéaire dans le cas de la convection mixte.

On remarque que l'expression du nombre de Nusselt donné par Muller et al (1992) [41] est la même que celle donné par Schluter et al (1965) [42] dans laquelle $Ra_0^* = 1708$ est remplacé par $Ra_{\perp}^*(Re)$ et qui devient valable pour les écoulements de convection mixte.

Evans et Grief (1989) [43] ont numériquement étudié l'écoulement et le transfert de chaleur de l'Hélium ($Pr = 0.667$) dans un canal horizontal chauffé par le bas et refroidi par le haut, appliqué aux dépôt de vapeurs chimiques (CVD). La méthode des différences finies a été utilisée pour la simulation numérique pour montrer l'effet des rouleaux transversaux et le rapport d'allongement sur l'amélioration du transfert de chaleur. Les simulations ont été effectuées pour des nombres de Reynolds de : $10^{-1} < Re < 10^2$, des nombres de Grashov de $2.5 \times 10^3 < Gr < 6 \times 10^5$, des rapport d'allongement de $4 < B < 50$ et pour deux rapport de températures $\varepsilon = (T_s - T_0)/T_0$ de 0.0333 et de 2.333.

Les isothermes ont été affichés pour différentes combinaisons des paramètres contrôlant l'écoulement et pour différent rapports de températures, la variation du nombre de Nusselt moyen en espace ainsi que la variation de la température au milieu du canal (pour un point choisis) (Fig.2.10) en fonction du temps de simulation.

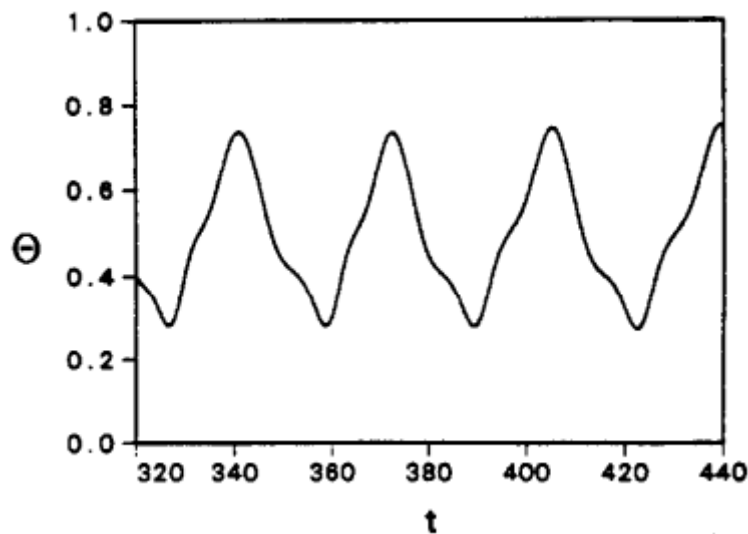


Figure 2.10 Variation de la température au milieu du canal en fonction du temps de simulation [3]

Enfin, un benchmark a été effectué en donnant les différents nombres de Nusselt moyens au niveau de la paroi chaude et de la paroi froide, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, du nombre de Grashov, du rapport d'allongement et de température (Tableau 2.2).

Evans et Paolucci (1990) [44] ont effectué une simulation numérique bidimensionnelle de l'écoulement de l'Hélium ($Pr = 0.667$) dans un canal horizontal chauffé par le bas en utilisant la méthode de différence finies pour un rapport d'allongement de $B = 20$, et cela pour étudier l'effet des conditions aux limites à la sortie sur l'écoulement. Un benchmark a été réalisé pour Reynolds $Re = 10$, Peclet $Pe = 20/3$ et un nombre de Rayleigh $Ra = 10^4$.

Tableau 2.2. Nombre de Nusselt moyens au niveau des parois chaudes et froides pour différents nombres de Reynolds, Grashov, rapports d'allongement et rapports de températures [43]

ε	B	Re	Gr	(\overline{Nu}_b)	(\overline{Nu}_t)
0.0333	20	0.1	3000	1.1	1.1
			5000	1.65	1.7
			10000	2.2	2.3
	40	40	15000	1.72	1.72
			10000	1.16	1.16
2.333	8	30	75000	1.61	1.67
			125000	2.3	2.4
			185000	3.03	3.09
			350000	3.98	4.05
			500000	4.28	3.91
			600000	4.3	3.8
			50	1.78	1.93
	100	1.55	1.75		
	4	50	185000	1.55	1.75

Les isothermes, les lignes de courants, le champ de vorticité, le champ de pression ainsi que les vitesses ont été affichés pour ces mêmes valeurs, pour un $B = 20$ (Fig2.11) ainsi que pour un $B = 5$.

Les fonctions de courant, le profil de température ainsi que les profils de vitesses, entre-autres, ont été affichés à différentes positions ($X = 5$ et $X = 10$) pour voir l'effet des conditions aux limites dans l'écoulement étudié, pour un grand domaine de rapport d'allongement de $B = 20$ (Fig.2.12). Les auteurs ont conclu que le choix des conditions aux limites sont primordiales pour la simulation d'un écoulement de convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas.

Ouazzani et Rosenberger (1990) [45] ont fait une étude numérique de la convection mixte dans une conduite horizontale chauffée par le bas, appliqué aux dépôts de vapeurs chimiques (CVD) pour une pression atmosphérique pour différents gaz, en utilisant plusieurs rapport d'allongement $B \leq 6.3$.

Nonino et Del Giudice (1991) [46] calculent numériquement la variation axiale des nombres de Nusselt pour un canal de rapport d'allongement de $B = 2$ et pour $Pr = 6.5$, pour plusieurs types de conditions aux limites thermiques (conditions de Dirichlet, conditions de conduction ou de convection imposées sur les quatre parois du canal).

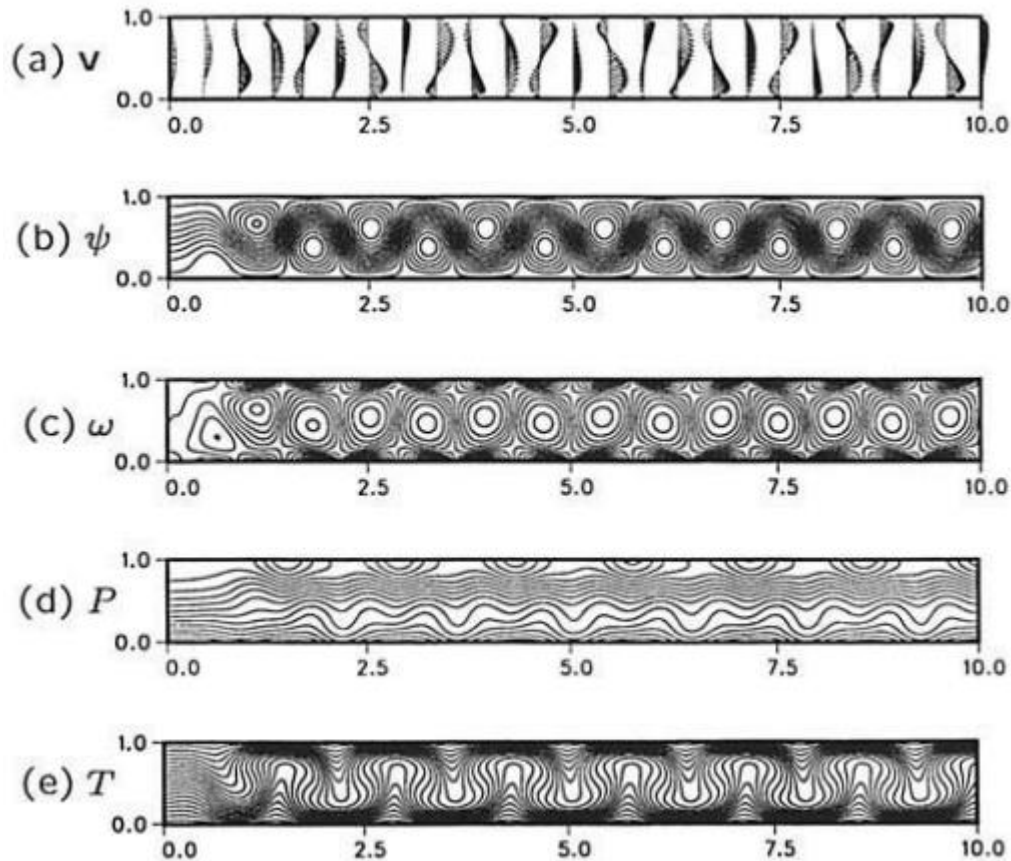


Figure 2.11 Différentes solutions : a) distribution de la vitesse le long du canal, b) lignes de courants, c) vorticité, d) Pression, e) isothermes pour $Re = 10$, $Pe = 20/3$, $Ra = 10^4$ et $B = 20$. [44]

Kleijn et Hoogendoorn (1991) [47] ont développé des modèles mathématiques bidimensionnels et tridimensionnel et ont comparé les résultats de modélisation avec des données expérimentales. Une large palette de nombre de Reynolds et de nombres de Rayleigh a été utilisé dans cette étude : $30 < Ra < 12000$ et $1 < Re < 20$ pour différents rapport d'allongement : de $B = 1.3$ à $B = 6.3$.

Hasnaoui et al (1991) [48] ont effectué une simulation numérique de la convection mixte dans un canal de rapport d'allongement $B \leq 1$, chauffé périodiquement par le bas, pour une large plage de nombres de Rayleigh, nombre de Prandtl et de nombre de Reynolds. La vitesse adimensionnelle des rouleaux transversaux pour de faibles nombres de Prandtl été étudié, en comparant les résultats obtenus avec la formule théorique de Walton [49] :

$$V = \frac{0.814 Pr + 0.279}{0.618 Pr + 0.316} \quad 2.2$$

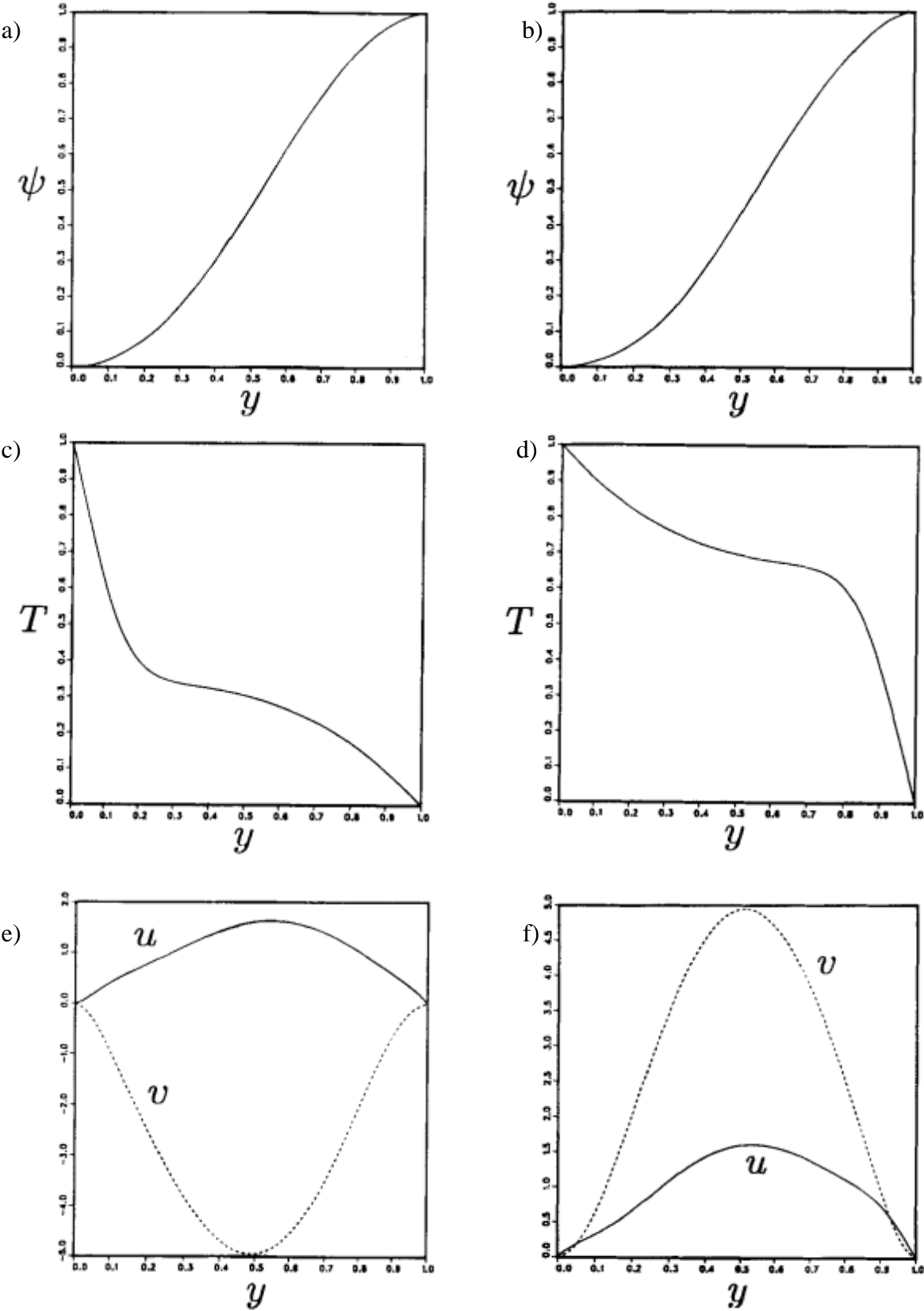


Figure 2.12 Distributions à $X = 5$ (a,c,e) et $X = 10$ (b,d,f). (a-d) fonction de courant, températures et vitesses [44].

Cette formule, exprimée dans la courbe par une ligne continue (Fig.2.13) est en très bon accord avec les résultats trouvés. La variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour un rapport d'allongement $B = 1$ pour $Pr = 0.71$ (Fig.2.14) démontre que le nombre de Nusselt moyen augmente par l'augmentation du nombre de Rayleigh.

Le comportement de l'écoulement de l'huile de silicone ($Pr = 530$) dans un canal rectangulaire a été étudié numériquement, en utilisant la méthode des différences finies et expérimentalement par E.Schröder and K. Bühler (1995) [50], où ils ont montré l'influence de la combinaison du nombre de Rayleigh et le nombre de Reynolds sur la structure de l'écoulement.

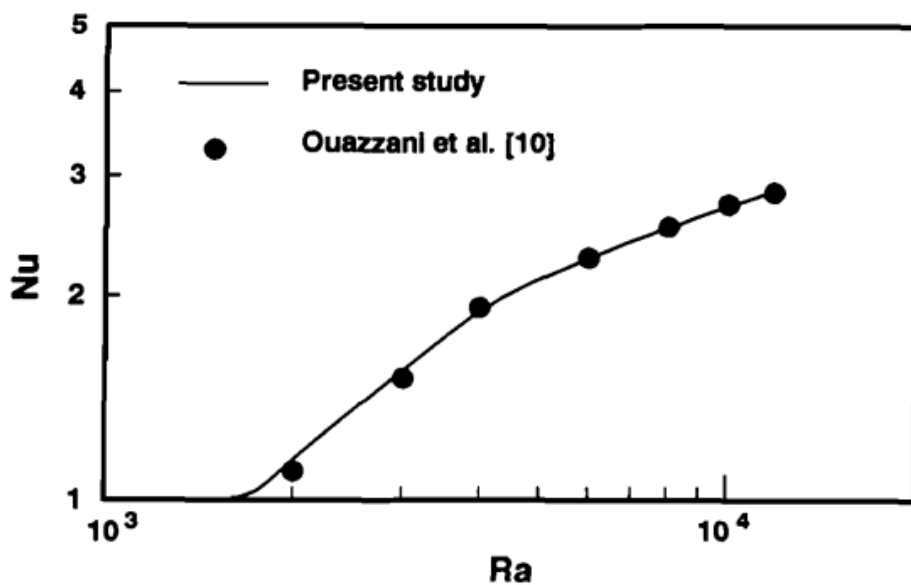


Figure 2.13 Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh ($10^3 < Ra < 5 \cdot 10^4$) [48]

Ouazzani et al [51] ont étudié la convection mixte entre deux plaques horizontales expérimentalement et numériquement en utilisant la méthode des différences finies, ils ont affiché les rouleaux transversaux pour de faibles nombres de Reynolds. Les essais expérimentaux ont été effectués en utilisant l'air pour montrer l'apparition de rouleaux transversaux pour de faibles nombres de Reynolds, et montrer les rouleaux longitudinaux qui apparaissent dans le cas de nombres de Reynolds élevés.

Yu et al [52] ont fait une étude à la fois expérimentale et numérique pour analyser la structure des rouleaux transversaux à faibles nombres de Reynolds pour l'air, dans un canal horizontal chauffé par le bas pour $Re \leq 50$ et pour un rapport d'allongement de $B = 12$.

Comini et al [53] ont proposé une nouvelle formulation de la méthode des éléments finis pour l'étude des écoulements de convection bidimensionnels en utilisant la formulation 'fonction de courant-vorticité' et en utilisant un nouveau type de conditions aux limites à la sortie. Deux cas ont été étudiés par les auteurs : l'écoulement de l'air dans une conduite rectangulaire autour d'un obstacle, et l'écoulement d'Helium dans un canal horizontal chauffé par le bas. Les paramètres utilisés pour simuler cette dernière sont : $Re = 10$, $Pe = 20/3$, $Ra = 10^4$ et $B = 20$, le nombre de Nusselt obtenu pour ce cas est de $Nu = 2.574$ et la longueur d'onde $\lambda = 1.45$.

Nicolas et al [54] ont fait une étude numérique bidimensionnelle de l'écoulement d'eau ($Pr = 6.4$) dans la configuration Poiseuille Rayleigh Bénard, pour des nombres de Rayleigh $Ra \leq 6000$ ainsi que pour de faibles nombres de Reynolds $Re \leq 3$ en utilisant la méthode des volumes finies. Deux configurations ont été utilisées dans cette étude, la première consiste en une conduite horizontale avec un profil de poiseuille imposé à l'entrée et une condition aux limites **OBC** à la sortie, dans la deuxième configuration des conditions périodiques sont imposées à l'entrée et à la sortie de la conduite. Une validation du code de calcul a été faite en comparant l'évolution temporelle des composantes des vitesses, pour différents nombres de Rayleigh avec les expériences menées par Ouazzani et al [55,56]. Le transfert thermique a été étudié pour le cas de l'eau ($Pr = 6.4$) en calculant le nombre de Nusselt moyen en temps et en espace pour différents nombres de Rayleigh ($Ra = 4700, 3460, 2420, 2024$ et 1804) en fonction du nombre de Reynolds ($0 \leq Re \leq 2$) (Fig.2.15).

Les résultats numériques ont été comparés à la formule de Muller [41]

$$\langle Nu \rangle = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{Ra - Ra_1^*}{Ra} \quad 2.3$$

Où : pour $Pr = 6.4$, $\gamma = 0.699$ i.e. $1/\gamma = 1.4306$ (Tableau 1). Comme le montre la figure, les résultats pour les deux configurations concordent pour les différents nombres de Rayleigh, toutefois ceux obtenus par l'équation de Muller ne sont pas en accord avec les résultats obtenus par les deux configurations pour $Ra > 2420$, ce qui fait que l'équation de Muller n'est pas valable pour cette dernière plage de valeurs.

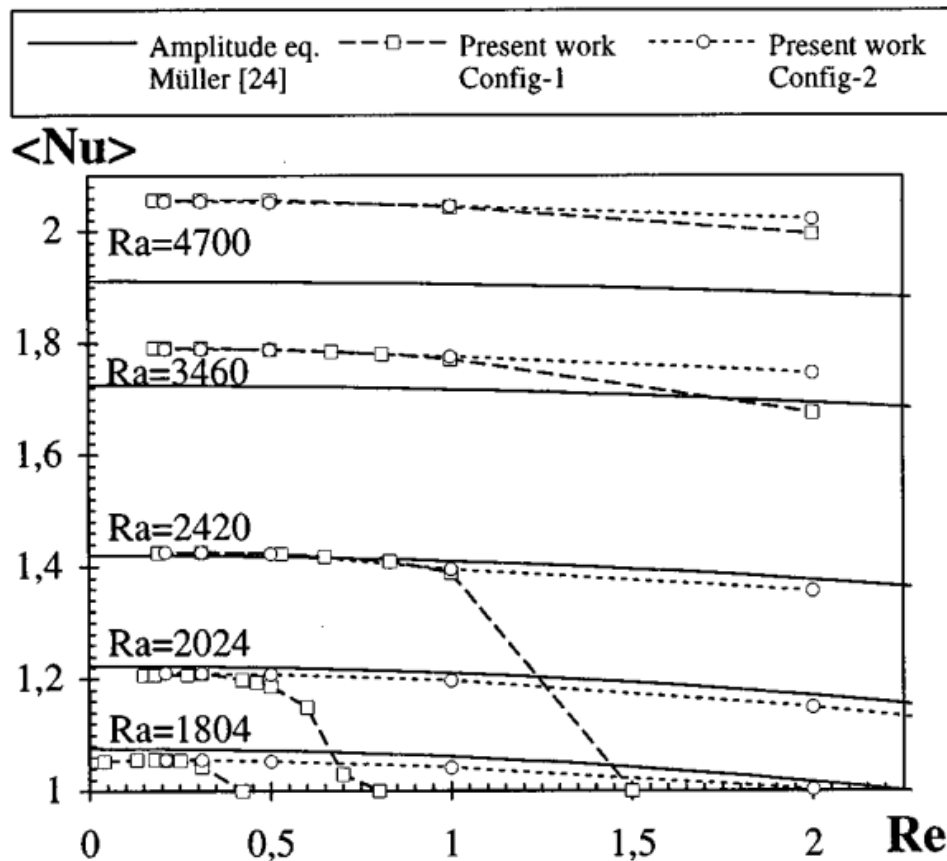


Figure 2.14 Nombre de Nusselt moyen en temps et en espace en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Rayleigh, comparés à la théorie des équations d'amplitude de Müller [41]

Chang et Lin [57] ont mené une étude expérimentale pour étudier l'effet du rapport d'allongement sur l'écoulement de rouleaux longitudinaux pour le phénomène de la convection mixte de l'air dans un canal horizontal chauffé par le bas. Dans leurs expériences, ils ont varié le nombre de Reynolds de 2.5 à 50, le nombre de Rayleigh de 3000 à 20000 et le rapport d'allongement de 2 jusqu'à 12.

Abassi et al [58] ont effectué une étude numérique par simulation de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite horizontale chauffée par le bas avec un prisme triangulaire comme obstacle. Une validation de leur code de calcul a été faite pour un écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard en fixant le nombre de Reynolds à $Re = 10$, le nombre de Rayleigh $Ra = 10^4$, le nombre de Peclet $Pe = 20/3$ et le rapport d'allongement $B = 20$ en le comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature.

Bonnefoi et al [59] ont étudié l'instabilité de Poiseuille Rayleigh Bénard dans une conduite rectangulaire horizontale chauffée par le bas, expérimentalement et numériquement en utilisant

l'eau ($Pr = 6.4$). Les expériences ont été menées pour des nombres de Reynolds $100 < Re < 2000$, tandis que les simulations numériques ont été faites pour $Re = 200$, ils ont étudié les instabilités thermo-convectives.

Benhamed et Bennacer [60] ont étudié l'instabilité de Poiseuille Rayleigh Bénard en utilisant la méthode de stabilité linéaire. Une étude de la transition vers les rouleaux transversaux bidimensionnels qui apparaissent pour de faibles nombres de Reynolds. L'effet du rapport d'allongement a été étudié. Les auteurs ont démontré que le nombre de Rayleigh critique d'apparition des rouleaux transversaux dépend fortement du nombre de Peclet et de la longueur du domaine et tend vers le nombre de Rayleigh critique du phénomène de convection naturelle classique.

Nourollahi et al [61] ont fait une simulation numérique de la convection mixte et de la génération d'entropie dans un canal horizontal pour des angles différents. Ils ont fait une validation de leur code pour un écoulement PRB pour un nombre de Reynolds $Re = 10$, un nombre de Rayleigh $Ra = 10^4$, un nombre de Peclet $Pe = 20/3$ en comparant les résultats obtenus avec ceux de Abbassi et al [58], Comini et al [53] et Evans et al [44] (Tableau 4)

Durant les cinq dernières décennies, les études numériques ont été basées sur l'analyse de stabilité linéaire bidimensionnelle et peu de travaux ont été faites en trois dimensions [62,63].

2.5 Applications industrielles :

Ces vingt dernières années, de nombreux travaux motivés par une application industrielle se sont intéressés à la configuration des écoulements de PRB.

Ces applications concernent :

- L'étude des dépôts de vapeur chimiques CVD (*chemical vapor deposition*).
- Le refroidissement des composants électroniques dans les circuits imprimés.

L'augmentation des transferts thermiques ou des taux de dépôt de vapeur chimiques, ainsi que la détermination des longueurs nécessaires à l'apparition des structures convectives sont l'intérêt principal de ces recherches.

2.5.1 L'étude des dépôts de vapeur chimiques (CVD) :

Le dépôt de vapeurs chimiques est un procédé utilisé pour la fabrication de films minces de matière inorganique. Dans un réacteur on fait circuler un mélange de gaz inertes et réactifs qui, par pyrolyse au contact d'un substrat chauffé, va créer une fine couche de dépôts solides. (Fig.2.16).

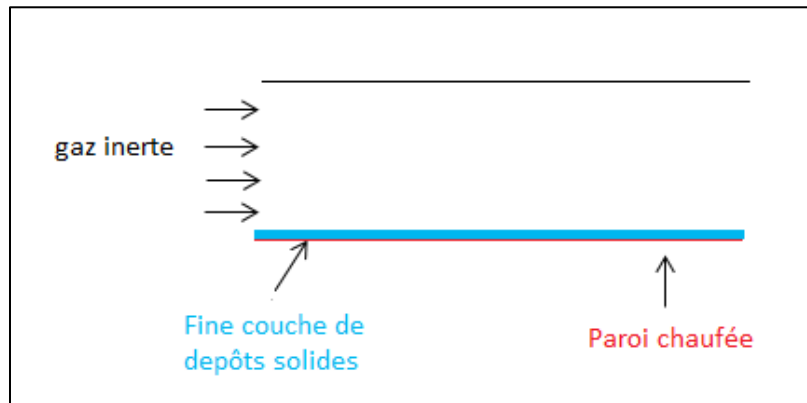


Figure 2.15 Exemple de CVD dans un réacteur

Les applications industrielles de cette technologie interviennent par exemple lors de la fabrication des circuits microélectroniques pour l'obtention des couches minces de semi-conducteurs, ou lors de la conception de supports d'enregistrements magnétiques ou optiques.

L'enjeu de cette technologie est de pouvoir contrôler le taux de dépôts des vapeurs chimiques (variation de l'épaisseur du dépôt par rapport au temps, $\text{\AA}/\text{min}$), pour l'obtention des couches les plus uniformes possible à l'épaisseur souhaitée. Plusieurs géométries de réacteurs peuvent être utilisés, la plus répandue est la conduite horizontale de section rectangulaire, où le substrat chauffé se situe dans la paroi du bas (Jensen et al (1991) [64]), ce qui nous ramène à la configuration de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard. Evans et Grief (1991) [65] dans leurs travaux de simulation de la convection mixte tridimensionnelle appliqués aux CVD, ont donné l'ordre de grandeur des dimensions des réacteurs et des paramètres des écoulements rencontrés en CVD ($L \approx 100$ cm, $l \approx 10$ cm, h de l'ordre de quelques centimètres, la température de la paroi chaude $T_c = 1000$ à 1300 K, $Ra \approx 700$ à 50000 , $Re \approx 1$ à 100 et $Pr \approx 0.71$). Pour éviter que des dépôts se forment sur les parois supérieures et latérales, celles-ci sont refroidies avec de l'eau à $T_f \approx 300$ K. Vu les différences de températures entre les parois, les écoulements dans les réacteurs CVD sont donc des écoulements thermoconvectifs, leurs structures vont conditionner la forme donc la qualité des dépôts.

Plusieurs approches ont été proposées par les chercheurs pour l'étude des écoulements de CVD, notamment celles de Moffat et Jensen (1986, 1988) [66,67], Ouazzani et Rosenberger (1990) [68] et Kleijn et Hoogendoorn (1991) [69] montrent que les dépôts de vapeurs chimiques ne sont pas uniforme (par exemple dans le cas de Gallium Arsenide ou de Silicium) ni axialement, ni transversalement, lorsque on a affaire à des R_{\parallel} dans les réacteurs à section rectangulaire

constante. Ils ont remarqué que les dépôts sont toujours plus importants à l'entrée que vers l'aval de la conduite ce qui conduit les dépôts à prendre une forme de stries parallèles à l'axe du canal. Ouazzani et Rosenberger (1991) [68], Park et Pak (1993) [23], Karki et al (1993) [70] et Chiu et al (2000) [71] notamment, ont proposé des solutions pour remédier au problème de la non-uniformité axiale, en inclinant légèrement le substrat chauffé de 2 à 10 degrés en général, de façon à créer un canal convergent, ce qui provoque une accélération de l'écoulement et une augmentation du transfert de chaleur et de masse dans la direction axiale. Evans et Grief (1991) [65] proposent d'opérer à de faibles nombres de Reynolds, de façon à faire apparaître que des rouleaux transversaux R_{\perp} dans les réacteurs, qui permettent d'obtenir des couches plus uniformes transversalement qu'avec les rouleaux longitudinaux R_{\parallel} .

Visser et al (1989) [72] ont mené des travaux expérimentaux et numériques pour montrer que lorsqu'un écoulement circulant sur une paroi froide arrive brusquement sur une zone chauffée, une cellule transversale stationnaire se forme au-dessus de la zone de changement de température (Fig.2.17). Cette dernière n'est pas un R_{\perp} , mais une cellule unique résultant du fort gradient négatif de pression causé par la variation brutale de la température. La présence de cet écoulement de retour est à bannir de l'entrée des réacteurs, car c'est la cause du dépôt très élevé à l'entrée du canal et plus faible à l'aval selon Kleijn et Hoogendoorn (1991) [69].

Ingle et Mountziaris (1994) [73], en accord avec les expériences menées par Visser et al (1989) [72], montrent que les cellules transversales fixe à l'entrée n'apparaissent pas si $Gr/Re < 100$ pour $10^3 < Re \leq 4$ et si $Gr/Re^2 < 25$ pour $4 \leq Re < 100$.

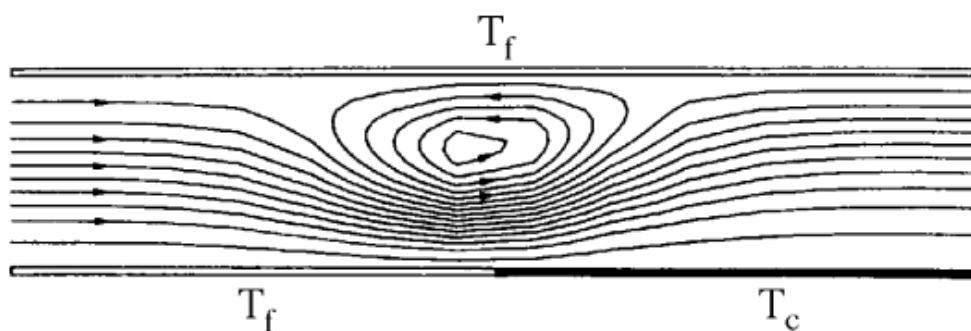


Figure 2.16 Simulation numérique 2D de la cellule transversale stationnaire située juste au-dessus de l'entrée de la paroi chaude à $Re = 2.1$, $Ra = 770$ et $Pr = 0.7$ [72]

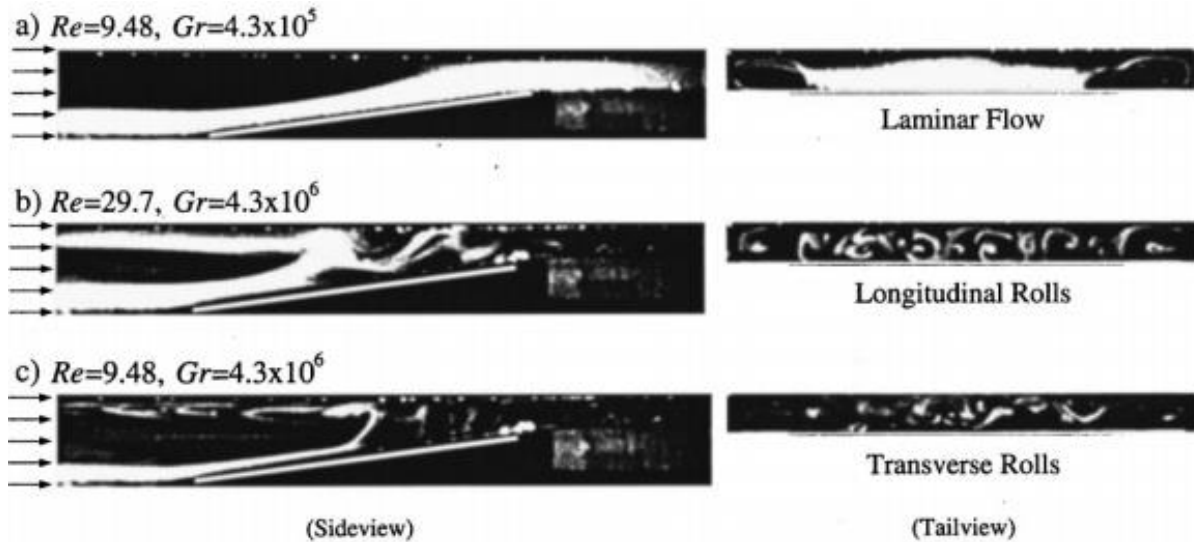


Figure 2.17 Vue de côté et arrière des caractéristiques de l'écoulement dans un canal incliné de 8° [71].

Chiu et al (2000) [71] ont mené des expériences pour mesurer les transferts thermiques dans des écoulements d'air à $9.5 < Re < 40$ et $3 \cdot 10^5 < Ra < 4.5 \cdot 10^6$, dans des réacteurs de rapport d'allongement $B = 5$, avec un substrat horizontal ou comme montré dans la Figure 2.17, incliné à 8° . De plus, les auteurs ont proposé une carte des différents régimes d'écoulement et des corrélations sur les nombres de Nusselt ainsi que sur les longueurs d'établissement.

La structure des écoulements dans les conditions de la CVD se manifeste souvent par des rouleaux longitudinaux $R_{||}$. Leur simulation numérique doit être donc tridimensionnelle d'une part. D'autre part vu l'importance des gradients de température mis en jeu, l'approximation de Boussinesq ne peut être appliquée dans ces cas-là. Dans de nombreux cas, il faut rajouter aux équations classiques (conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie) l'équation de conservation des espèces, du fait de la présence d'au moins deux gaz dans le réacteur : le gaz dit « porteur » ($N_2, H_2, Ar \dots$ ect) et le gaz réactif (TMGa...ect), ce qui fait que les modèles utilisés en CVD sont relativement complexes, et leurs simulation numérique est très couteuse en temps de calcul si des hypothèses simplificatrices ne sont pas envisagées.

2.5.2 Le refroidissement des composants électroniques :

Les avancées technologiques de la deuxième moitié du 20^{ème} siècle a permis entre-autre la miniaturisation des composants et équipements électroniques ce qui a réduit considérablement la taille des ordinateurs. Cependant, le problème de dissipation de la chaleur par les circuits électroniques a considérablement augmenté, ce qui peut affecter le rendement des ordinateurs.

L'étude des transferts thermiques entre les plaques de circuits intégrés et le fluide circulant entre les circuits intégrés et qui permet de refroidir ces dernières est devenu une nécessité. La circulation de ce fluide entre les deux plaques de circuits intégrés peut être modélisé par un écoulement dans un canal plan, en ce qui concerne les composants électroniques placés sur chacune des plaques, dissipant, chacune une certaine quantité de chaleur, peuvent quant à elle être représentés par des zones de chauffage ponctuelles. Ainsi la géométrie utilisée dans le traitement du problème de refroidissement des composants électroniques est celle de l'écoulement de PRB.

Les premiers travaux concernant le refroidissement des composants électroniques sont ceux de Kennedy et Zebib (1983) [74]. Ils ont étudié expérimentalement et par simulation numérique les transferts thermiques de l'écoulement d'air dans un canal horizontal dans lequel sont placés une ou deux petites sources de chaleur sur la paroi du bas, la paroi du haut ou les deux plaques simultanément. Les auteurs ont démontré que le transfert de chaleur est maximal lorsque les sources de chaleurs sont placées dans la paroi du bas plutôt que dans la paroi supérieure. Ce résultat est confirmé par Braaten et Patankar (1985) [75] qui montrent que plus le nombre de Prandtl du fluide réfrigérant est élevée (le fréon $Pr = 3.5$) plus le transfert de chaleur est grand, ou lorsque les parois du canal sont parfaitement conductrices de la chaleur plutôt qu'adiabatique.

Hasnaoui et al (1991) [76] ont simulé un problème où les conditions aux limites sont périodiques dans un domaine avec un rapport d'allongement de $B = 2$, pour $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, $Re \leq 6$ et $Pr = 0.71, 0.1$ et 7 . Deux cas sont considérés dans cette étude : le premier étant l'absence d'écoulement ($Re = 0$) où les auteurs ont pu observer deux R_{\perp} symétriques et stationnaires de part et d'autre de l'élément chauffant. Le deuxième étant la présence d'écoulement ($Re \neq 0$) où le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur critique. Au-dessus de cette valeur critique, les structures thermoconvective sont emportés par l'écoulement qui devient périodique en temps, la variation de ce nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Rayleigh ainsi que de la taille de l'élément chauffant est déterminé.

Bilgen et al (1995) [77] ont effectué des calculs numériques 2D d'écoulements dans un canal horizontal où la taille des sources de chaleur peut varier pour des nombres de Rayleigh compris entre : $5 \cdot 10^3 \leq Ra \leq 2 \cdot 10^4$ et des nombres de Peclet de $0,1 \leq Pe \leq 2,5$, ils comparent les résultats de simulations effectués dans un domaine de rapport d'allongement $B = 2$ comportant un seul élément chauffé en utilisant des conditions aux limites périodiques, avec des résultats

de simulation effectués pour un domaine de rapport d'allongement de $B = 8$ comportant 4 éléments chauffant, avec des conditions aux limites ouvertes à l'entrée et à la sortie, le résultat est que le nombre de Nusselt est le même pour les deux configurations et par conséquent le phénomène est le même.

Zhang et Tangborn (1995) [78] et Tangborn et al (1995) [79] étendent leurs études à des simulations de configurations 3D périodiques, en effectuant des simulations numériques à l'aide d'un code spectral. Un régime stationnaire supplémentaire en 3D cette fois, est observé par les auteurs, avant l'apparition du régime instationnaire périodique en 3D.

Zhang et Tangborn (1995) [78] démontrent qu'à $Ra = 20000$, $Re = 20$ et $Pr = 1$ que dans les calculs 2D qui prédisent un régime instationnaire, l'erreur du nombre de Nusselt moyen sur les parois horizontales est de 12 à 13% par rapport aux simulations 3D.

2.6 Revue bibliographique des écoulements de convection mixte par la méthode de Boltzmann sur réseau :

Rosdzimin et al [79] ont simulé, en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau, la convection mixte dans une cavité carrée contenant un cylindre chauffé à géométrie carrée. La méthode de Boltzmann thermique à double population a été utilisée. Les simulations ont été effectuées pour des nombres de Reynolds de $100 \leq Re \leq 1000$ et des nombres de Richardson : $0.01 \leq Ri \leq 10$. Les résultats ont démontré que la nature de l'écoulement, la formation de vortex ainsi que le nombre de Nusselt sont influencés par les nombres de Reynolds et de Richardson.

Guo et al [80] ont utilisé la méthode de Boltzmann sur réseau pour simuler la convection mixte dans une cavité rectangulaire verticale pour des rapports d'allongement de $1 \leq B \leq 7$, des nombres de Reynolds de $0 \leq Re \leq 2 \cdot 10^3$ et des nombres de Rayleigh de $10^3 \leq Ra \leq 5 \cdot 10^6$. Les résultats ont démontré que pour des nombres de Richardson inférieurs à l'unité, il y'a une prédominance de la convection forcée, et que le nombre de Nusselt moyen change uniquement en fonction du nombre de Reynolds. Pour des nombres de Richardson plus grand que l'unité, l'écoulement et le transfert de chaleur sont dominés par la convection naturelle et le nombre de Nusselt moyen varie, cette fois-ci en fonction du nombre de Rayleigh. Pour un Richardson égal à 1, les auteurs ont observé l'établissement d'un régime mixte, et le nombre de Nusselt moyen varie en fonctions des nombres de Reynolds ainsi que les nombre de Rayleigh.

Moussaoui et al [81] ont effectué l'étude numérique de la convection forcée dans un canal horizontal chauffé par le bas contenant un cylindre carré par la méthode de Boltzmann sur

réseau. La méthode utilisée est la méthode dite 'hybride', basée sur la combinaison de la méthode de Boltzmann à plusieurs temps de relaxation (MRT), pour obtenir les vitesses, et la méthode des différences finies pour résoudre l'équation de l'énergie. Les simulations ont été effectuées pour des nombres de Reynolds variant de 0 à 300 pour un nombre de Prandtl fixé à $Pr = 0.71$ avec des propriétés physiques de fluide constantes. Les résultats obtenus démontrent que la présence de ce genre d'obstacle affecte l'écoulement de fluides et améliore le transfert de chaleur de la paroi chauffée vers l'écoulement d'une façon significative.

La convection mixte dans une cavité à différents angles d'inclinaisons en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau a été faite par Rabienataj Darazi et al [82]. Dans cette étude, les parois verticales sont considérées adiabatiques, tandis que les parois du bas et du haut sont maintenues à des températures uniformes, chaudes et froides respectivement. Les paramètres utilisés dans leurs simulations sont : nombres de Richardson variant de 0.01 à 10 et des angles d'inclinaisons de la cavité variant de -90° à 90° . Les résultats démontrent que le taux de transfert de chaleur est indépendant de l'angle d'inclinaison pour un nombre de Richardson égal à 0.01, tandis que ce dernier varie avec l'augmentation du nombre de Richardson. Par ailleurs, la variation du nombre de Nusselt et du nombre de Richardson sont opposées à cause de la transition de la convection naturelle vers la convection mixte ou forcées lorsque le nombre de Richardson diminue, ce qui mène à la diminution du nombre de Reynolds.

La méthode de Boltzmann sur réseau a été utilisée pour l'étude d'un écoulement laminaire de convection mixte dans une cavité inclinée avec paroi mobile de rapport d'allongement de $B = 3$ par Karimipour et al [83]. La méthode de Boltzmann thermique à double population à simple temps de relaxation avec une procédure de collision modifiée a été utilisée dans ce travail. Les simulations ont été effectuées pour des angles d'inclinaisons variant de 60° à 90° et des nombres de Richardson $0.1 \leq Ri \leq 10$. Les auteurs ont démontré que le transfert de chaleur varie avec la variation de l'angle d'inclinaison ainsi que le nombre de Richardson.

Rahman et al [84] ont étudié les effets du nombre de Prandtl sur la convection mixte dans une cavité en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau. La méthode de Boltzmann sur réseau thermique basé sur le modèle BGK (Bhatnagar–Gross–Krook) a été utilisée, avec des nombres de Richardson de : $0.5 \leq Ri \leq 10$ et un flux de chaleur q variant de 0 à 0.1. Les simulations ont été effectuées pour des nombres de Prandtl de $Pr = 5400$ et $Pr = 450$, où les auteurs ont observé que les couches limites dynamiques et thermiques diminuaient pour de très larges nombres de Prandtl $Pr = 5400$ en comparaison avec $Pr = 450$, d'autant plus que le transfert de chaleur, qui

est quantifié en terme de nombre de Nusselt moyen diminue linéairement avec l'augmentation des paramètres de convection mixte en l'absence de génération de chaleur.

Jafari et al [85] ont étudié l'effet de l'inclinaison sur la convection mixte dans une cavité carrée à paroi supérieure mobile et à paroi inférieure ondulée par la méthode de Boltzmann sur réseau. La méthode de Boltzmann thermique à double population, avec une approche de second ordre pour traiter le champ dynamique et le champ thermique au niveau de la paroi ondulée a été utilisée dans ce travail. Le problème a été étudié pour différents nombres de Richardson $0.1 \leq Ri \leq 10$, de d'amplitude de courbe $0.05 \leq A \leq 0.25$ et des angles d'inclinaisons de $0 \leq \theta \leq 180$, tandis que le nombre de Reynolds a été fixé à 100. Les résultats démontrent que l'inclinaison n'a aucun effet sur les champs dynamiques et thermiques pour des nombres de Richardson élevés, et que l'inclinaison perd progressivement son rôle dans la convection mixte en augmentant l'amplitude de la courbe de la paroi, et cela pour toutes les valeurs des nombres de Richardson utilisés.

Karimipour et al [86] (2013) ont effectué une étude numérique des effets de l'angle d'inclinaison et du nombre de Prandtl sur la convection mixte dans une cavité inclinée avec paroi supérieure mobile en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double populations à simple temps de relaxation. Différent nombres de Richardson, d'angles d'inclinaisons et des nombres de Prandtl ont été utilisés dans cette étude. Les résultats ont démontré que l'augmentation du nombre de Prandtl augmente considérablement le taux de transfert de chaleur, spécialement pour des angles d'inclinaisons et des nombres de Richardson élevés. De plus, le nombre de Nusselt moyen évalué au limites supérieurs des nombres de Richardson et de Prandtl utilisés dans cette étude, augmente par 9 unités.

Bettaibi et al [87] (2014) ont simulé la convection mixte dans une cavité bidimensionnelle contenant de l'air ($Pr = 0.71$) en utilisant la méthode hybride de Boltzmann sur réseau-différences finies. La méthode de Boltzmann sur réseau à plusieurs temps de relaxation (MRT) a été utilisé pour traiter le champ dynamique tandis que la méthode des différences finies a été utilisée pour résoudre l'équation d'énergie. Le but principal de ce travail est d'évaluer la capacité de la méthode à simuler les phénomènes de convection mixte.

Bettaibi et al [88] (2015) ont procédé à étude numérique de la convection mixte dans une cavité à paroi supérieure mobile uniformément chauffée avec un chauffage non uniforme de la paroi du bas par la méthode de Boltzmann sur réseau. La méthode de Boltzmann dite hybride a été utilisée, où la méthode Boltzmann sur réseau à plusieurs temps de relaxations (MRT-LBM) a

été utilisée pour simuler le champ dynamique tandis que le champ thermique a été obtenu en résolvant l'équation de l'énergie en utilisant la méthode des différences finies. Les paramètres régissant l'écoulement utilisé sont : un nombre de Grashof fixé à $Gr = 10^6$, des nombres de Reynolds variant de 316 à 3162, des nombres de Richardson variant de 0.1 à 10. Les auteurs ont démontré que premièrement, le transfert de chaleur diminue avec la diminution du nombre de Richardson et deuxièmement, pour un nombre de $Gr = 10^6$, des tourbillons secondaires apparaissent à différentes positions au niveau des coins de la cavité pour différents nombres de Reynolds.

Kefayati et al [89] ont mené une simulation bidimensionnelle de la convection mixte dans une cavité carrée avec des parois latérales différentiellement chauffée par la méthode de Boltzmann sur réseau. La cavité est remplie avec un fluide de type Bingham. Le problème a été résolu par le modèle Bingham sans aucune régularisation et en appliquant le modèle Papanatasiou. Une nouvelle approche modifiée, basée sur la méthode de Boltzmann sur réseau a été utilisée. La plage de paramètres utilisés pour ce problème est : des nombres de Reynolds $Re = 100, 500$ et 1000 , des nombres de Prandtl de $Pr = 0.1, 1$ et 10 et des nombres de Bingham de $Bn = 0, 1, 5$ et 10 , tandis que le nombre de Grashof est fixé à $Gr = 10000$. Les résultats de cette étude démontrent que l'augmentation du nombre de Reynolds augmente le transfert de chaleur. De plus, pour des nombres de Reynolds et de Prandtl fixés, la diminution du nombre de Bingham entraîne la diminution du transfert de chaleur. Par contre l'augmentation du nombre de Prandtl améliore le transfert de chaleur.

La simulation de la convection mixte entre deux cylindres horizontaux par la méthode de Boltzmann sur réseau a été faite par Jafari et al [90]. La géométrie a été créée en utilisant la méthode de profil lissé pour traiter les interactions fluide-solide ainsi que l'échange de chaleur. La méthode de Boltzmann thermique à double population a été utilisée pour simuler le phénomène. Le rayon utilisé dans cette étude a été fixé à 2.5, les nombres de Richardson choisis sont $Ri = 0.01, 1$ et 100 , les nombres de Prandtl : $Pr = 0.71$ et 6.2 . Les résultats ont démontré que la variation du nombre de Nusselt moyen dépend du nombre de Richardson, le nombre de Nusselt maximal est obtenu pour une excentricité de -0.75 , $Ri = 100$ et $Pr = 6.2$. Pour des valeurs élevées de Richardson, les auteurs constatent la prédominance de la convection naturelle sur le phénomène.

2.7 Description mathématique de l'écoulement :

2.7.1 Les hypothèses :

Les hypothèses simplificatrices appliquées dans notre étude sont les suivantes :

- Le fluide considéré est un fluide newtonien, incompressible et satisfait l'hypothèse de Boussinesq.
- La masse volumique varie linéairement avec la température et exprimée par la relation :

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta \cdot (T - T_\infty)]$$
- L'écoulement est de type mixte « convection naturelle et forcée » et reste laminaire.
- L'écoulement est considéré 2D et stationnaire.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- La dissipation de la chaleur par effet de viscosité est négligeable.
- Les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température de référence.

2.7.2 Equations régissant l'écoulement :

Les équations décrivant l'écoulement sont les équations de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. En appliquant les hypothèses citées, et afin de donner une forme sans dimension aux variables dépendantes et indépendantes, nous employons des quantités caractéristiques qui sont constantes dans tout le champ de l'écoulement thermique. Ces quantités sont : H la hauteur de la cavité, U_{max} la vitesse maximale du profile de poiseuille, $T_0 = T_f$ température de référence et P_0 la pression. La forme moyenne des équations de Navier-Stokes s'écrit pour le cas étudié comme suit [61] :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad 2.4$$

Equations de quantité de mouvement suivant l'axe des x :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad 2.5$$

Equations de quantité de mouvement suivant l'axe des y :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Ra}{Re Pe} T^* \quad 2.6$$

Equation de l'énergie :

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau} + U \frac{\partial T^*}{\partial X} + V \frac{\partial T^*}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial Y^2} \right) \quad 2.7$$

$$X = \frac{x}{H} ; Y = \frac{y}{H} \quad 2.8$$

$$U = \frac{u}{u_{\max}} ; V = \frac{v}{u_{\max}} \quad 2.9$$

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_c - T_0} ; \tau = tU_{\max}/H \quad 2.10$$

$$P = \frac{p}{\rho \cdot u_{\max}^2} \quad 2.11$$

$$Pe = Re \cdot Pr \text{ (Nombre de Peclet)} \quad 2.12$$

2.8 Valeur ajoutée apportée par ce travail :

Par insuffisance d'études numériques dans la littérature qui traitent le problème de convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas avec la méthode de Boltzmann sur réseau à simple et à plusieurs temps de relaxation (SRT et MRT), nous avons choisis d'apporter notre contribution à la simulation de ce phénomène ainsi que l'étude de l'influence de certains paramètres physiques tels que le nombre de Prandtl, de Rayleigh et le rapport d'allongement et autres en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau thermique (TLBM) à double population, pour les deux modèles SRT et MRT. Les détails de ces contributions seront présentés dans la suite de cette thèse.

2.9 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude détaillée sur le transfert de chaleur par convection, notamment la convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas, suivi d'une description des différents types de structures thermo-convectives caractérisant le phénomène. Une revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille Rayleigh Bénard et de la convection mixte dans un canal horizontal a été effectuée, ainsi que leurs intérêts dans différents domaines d'applications industrielles.

Une revue bibliographique a été aussi présentée sur la convection mixte par les différents modèles de la méthode de Boltzmann sur réseau. La formulation mathématique des équations de Navier et Stokes régissant le phénomène et les hypothèses simplificatrices liées à la résolution du problème ont été décrites ainsi que les conditions aux limites propres à notre cas étude.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter l'approche théorique et fondamentale de la méthode relativement récente utilisée dans cette étude, notamment la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à temps de relaxations simple et multiples à double population.

Chapitre 3 :

La méthode de Boltzmann sur réseau

Chapitre 3 : La méthode de Boltzmann sur réseau

3.1 Introduction :

La méthode de Boltzmann sur réseau s'est imposée au fil des années, comme étant une méthode numérique indépendante, et relativement nouvelle par rapport aux méthodes classiques utilisées en simulation numérique. La méthode est basée sur le fondement de la physique statistique, et s'est développée théoriquement au cours des dernières années, avec l'apparition des automates cellulaires.

Nous essaierons, en guise d'introduction, de présenter les étapes les plus importantes de l'histoire de la méthode, nécessaires pour comprendre les aspects théoriques de la méthode.

Les deux étapes majeures qui ont contribué à la construction de la méthode de Boltzmann sur réseau sont : Le développement de la physique statistique et l'apparition des automates cellulaires.

La première étape se déroule au milieu du 19ème siècle, avec le fondement de la physique statistique, basée entre-autres sur les travaux de Lord Kelvin, James Clerk Maxwell, Josiah Willard Gibbs et de Ludwig Eduard Boltzmann. Dérivé de la théorie cinétique des gaz, la physique statistique tente de décrire l'évolution qui constitue la matière d'une manière microscopique, à l'instar d'autres méthodes dont le but est de s'intéresser à l'évolution globale des quantités macroscopiques (Vitesse, densité, pression...).

Ce qui a conduit Boltzmann à présenter sa fameuse équation en 1872, qui décrit l'évolution spatio-temporelle de la fonction de distribution f , qui représente la distribution des particules avec une vitesse donnée à un emplacement et un temps donné.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial c_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$$

Le terme que contient le côté droit de l'équation, appelé opérateur de collision, représente la collision entre particules, tandis que le côté gauche représente le processus de propagation des particules, et l'action de la force F sur ces dernières. Lorsque l'opérateur de collision prend une

valeur nulle, les particules se déplacent sous l'action de la force F sans se collisionner. Cependant si l'opérateur ne prend pas une valeur nulle, les particules se rencontrent ce qui rend l'évolution du système dépendant de la forme de l'opérateur de collision. Vers la fin du 19eme siècle Boltzmann considérait que les collisions à deux particules, compte tenu de l'idée approximative qu'il avait sur ce dernier. Ce n'est que plus tard (1920) que les travaux d'un mathématicien suisse, David Enskog, et d'un astronome anglais Sydney Chapman s'intéressent à des collisions mettant en jeu plusieurs particules. Enskog de son côté a utilisé la méthode de Hilbert (1912) [91] pour développer la fonction de distribution de l'équation de Boltzmann. Chapman, de son coté, décide d'approfondir l'idée d'Enskog, en considérant les particules comme étant des sphère dures, pour l'étude de collisions complexes.

Ainsi, la validation expérimentale des travaux de Chapman et Enskog par Dootson [92], permet d'établir des liens directs entre les équations de Navier et Stokes et l'équation de Boltzmann, donnant ainsi un nouveau souffle à la méthode, en élargissant les travaux de Boltzmann. Cependant l'opérateur de collision proposé par la méthode de Chapman et Enskog reste très Complexe.

Trente ans plus tard (1954) [93], les mathématiciens : Bhatnagar, Gross et Krook donnent naissance à un modèle de collision simple, établi à partir de développements théoriques, qui est basé sur l'idée que la collision entre particules, peut être décrite comme la relaxation en un temps donné des particules, vers un état d'équilibre donné. Ce modèle permet donc, d'écrire l'opérateur de collision sous une forme très simple, nommé l'opérateur BGK, en référence à ses créateurs.

Ainsi dès 1954, les écoulements de la mécanique des fluides régis par les équations de Navier-Stokes pouvait être décrites par l'équation de Boltzmann munie d'un opérateur BGK. La méthode Boltzmann qui se base sur ces derniers résultats, ne naîtra que plus tard, avec le développement de la notion de discrétisation et de la simulation numérique.

La notion de discrétisation verra le jour, donc, à la moitié du 20eme siècle, avec l'apparition des premières machines de calculs, ce qui nous mène à la deuxième étape majeure qui a contribué à la construction de la méthode de Boltzmann sur réseau : les automates cellulaires. Celles-ci apparaissent dans les années 50 avec Stanislas Ulam, John Von Neumann et Konrad Zuse, ces derniers utilisent des opérations booléennes qui sont proches du langage machine[94]. Broadwell [95] et Gatgnol [96] introduisent les premiers modèles à vitesse discrètes sans discrétisation spatiale et temporelle, ces dernières ne permettent pas une résolution numérique. Il faut attendre jusqu'à 1973, année qui a vu apparaître les premiers automates cellulaires

appliqué à la simulation en mécanique des fluides, qui feront le lien entre la discrétisation de l'espace et de temps et l'apparition de la théorie des gaz sur réseau (Lattice Gas Cellular Automata LGCA).

Hardy, Pomeau et Pazzis [97] ont développé le premier modèle de gaz sur réseau (modèle HPP) en utilisant les distributions de Fermi-Dirac pour l'état d'équilibre, mais ne permettaient pas de remonter jusqu'aux équations de Navier et Stokes. Le deuxième modèle de Gaz sur réseau fut développé par Frish, Hasslacher et Pomeau [98] en 1986, nommé 2D FHP, caractérisé par une meilleure symétrie du réseau, et qui permet de retrouver les équations de Navier et Stokes, suivis du modèle tridimensionnel FCHC (Face Centred HyperCube) proposé par d'Humièrre la même année [99]. Cependant, les modèles de gaz sur réseau présentent des inconvénients importants tel que le bruit numérique dû à l'emploi de variables booléennes et la brisure du terme de l'invariance galiléenne causé par l'utilisation des distributions de Fermi-Dirac.

Ainsi, afin de remédier à ces problèmes rencontrés dans la méthode des gaz sur réseau, les travaux se tournent vers l'équation de Boltzmann à la fin des années 80. Une étude qui résume l'ensemble des modèles de gaz sur réseau, faite par Wolfram [100] en 1986 puis par Frish [98] en 1987, permet de faire le lien entre l'équation de Boltzmann et la méthode de gaz sur réseaux. Les variables booléennes qui furent responsables du bruit numérique dans la méthode de Gaz sur réseau, ont été remplacées par des variables réelles, et les distributions de Maxwell-Boltzmann ont remplacé les distributions de Fermi-Dirac, pour l'état d'équilibre. Une fois les inconvénients majeurs de la méthode des gaz sur réseau sont supprimés, les premiers modèles de Boltzmann sur réseau commencent à voir le jour, introduit par McNamara et Zanetti [101] en 1988.

Les modèles de Boltzmann sur réseau tels qu'on les connaît aujourd'hui, ont fait leurs apparitions, en passant par plusieurs étapes, avec la linéarisation de l'opérateur de collision, resté rebelle jusqu'ici, par Higuera et Jiménez en 1989 [102], l'utilisation de l'opérateur BGK par Koelman (1991), puis par Chen [103] et enfin Qian [104] en 1992.

L'équation de Boltzmann sur réseau voit alors le jour, et est présentée au début des années 90 comme étant une amélioration de la méthode des gaz sur réseaux, parce qu'on peut remonter à l'équation de Boltzmann continue et aux équations de Navier et Stokes par développement. He et Luo [105] démontrent que l'équation de Boltzmann sur réseau peut être dérivée directement de l'équation de Boltzmann continue, qu'on nomme communément : dérivation a priori. L'avantage de cette dernière est qu'on peut fixer un cadre théorique de la méthode Boltzmann

sur réseau indépendamment de la méthode des gaz sur réseaux (Fig 3.1). Dans la suite de ce chapitre, une présentation détaillée de la méthode de Boltzmann sur réseau avec ses différentes approches et modèles sera faite, ainsi que les détails de la mise en œuvre informatique de ces dernières.

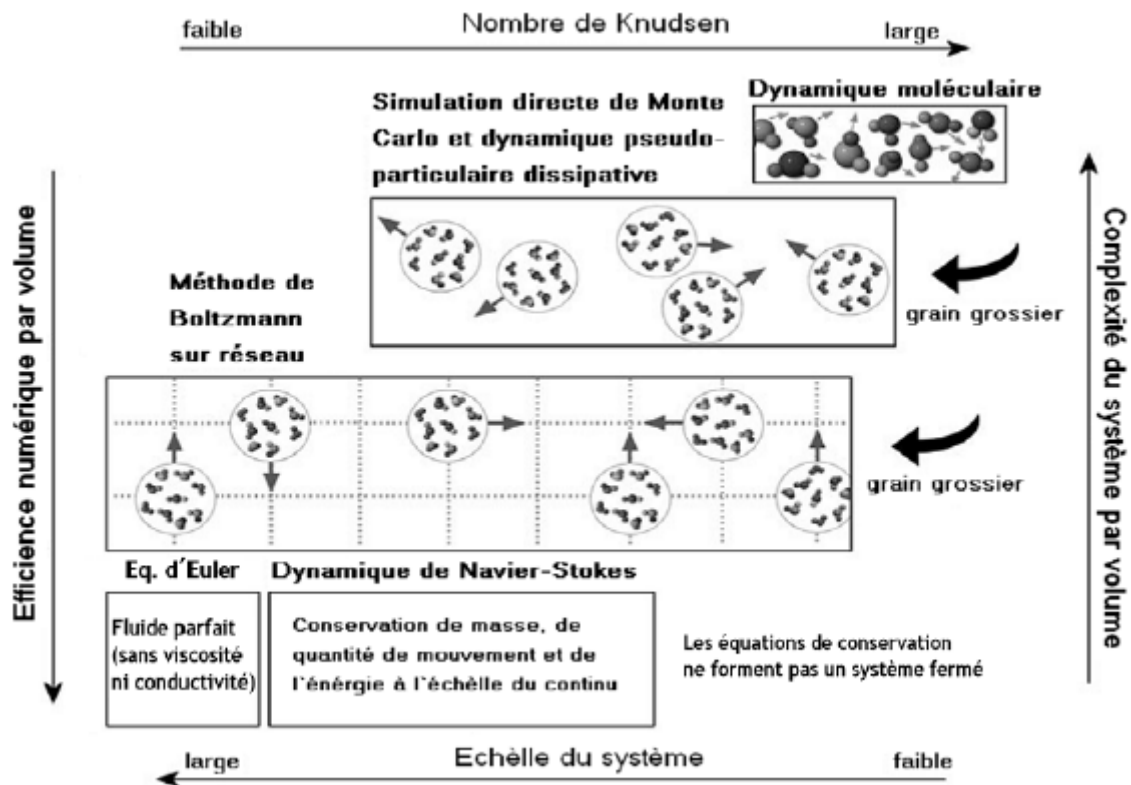


Figure 3.1 Les différentes approches numériques en mécanique des fluides avec leurs domaines d'applicabilité [106]

3.2 Equation de transport de Boltzmann :

La description statistique d'un système peut se faire par la fonction de distribution $f(r,c,t)$, où : $f(r,c,t)$ représente le nombre de molécules au temps t se trouvant entre r et $r+dr$ ayant une vitesse comprise entre c et $c+dc$.

La force extérieure F qui agit sur une molécule de gaz, change la vitesse de cette dernière de c à $c+Fdt$, ainsi que sa position de r à $r+c dt$.

Le nombre de molécules $f(r,c,t)$, avant l'application de la force extérieure est égale au nombre de molécule après perturbation $f(r+c dt, c+Fdt, t+dt)$, si aucun phénomène de collision ne se produit, on obtient :

$$f(r + cdt, c + Fdt, t + dt)drdc - f(r, c, t)drdc = 0 \quad 3.1$$

Toutefois, si le phénomène de collision entre particules se produit, il y'aura une nette différence entre le nombre de molécules dans l'intervalle $drdc$.

Le taux de changement entre l'état final et l'état initial de la fonction de distribution, est appelé : opérateur de collision, Ω . Par conséquent, l'équation de l'évolution du nombre de molécules peut être écrite sous la forme suivante :

$$f(r + cdt, c + Fdt, t + dt)drdc - f(r, c, t)drdc = \Omega(f)drdc dt \quad 3.2$$

En divisant cette équation par $dt drdc$ et comme $dt \rightarrow 0$, on obtient :

$$\frac{df}{dt} = \Omega(f) \quad 3.3$$

Cette équation nous dit que le taux total du changement de la fonction de distribution est égal au taux de collision. Comme f est une fonction de r, c et t , le taux total de changement, peut être décrit comme suit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad 3.4$$

En divisant par dt , on obtient :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad 3.5$$

Le vecteur r peut être exprimé en coordonnées cartésiennes 3D par $r = xi + yj + zk$, où : i, j et k sont les vecteurs unitaires suivant x, y et z respectivement.

L'équation (3.5) deviens donc :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} c + \frac{\partial f}{\partial c} a + \frac{\partial f}{\partial t} \quad 3.6$$

Où : a est égal a dc/dt , qui représente l'accélération et est relié à la force extérieure F , par la deuxième loi de Newton : $a = F/m$.

Donc l'équation de transport de Boltzmann, peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot c + \frac{F}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial c} = \Omega \quad 3.7$$

Pour un système sans force extérieure, l'équation de Boltzmann s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \Omega \quad 3.8$$

L'opérateur de collision Ω est en fonction de f et doit être déterminé, pour résoudre l'équation de Boltzmann, ce que nous allons voir dans la partie suivante.

Il est clair que l'obstacle principal de la résolution de l'équation de Boltzmann est la forme compliquée de l'opérateur de collision, Pour cette raison, plusieurs méthodes ont été développées pour simplifier ce dernier, on peut en distinguer deux méthodes qui sont les plus courantes, basés sur un seul temps de relaxation ou sur une méthode à temps de relaxations multiples. Les méthodes à simple temps de relaxation sont plus rapides et plus faciles à implémenter tandis que les méthodes à temps de relaxation multiples sont plus stables.

3.3 Modèles dynamiques de la méthode de Boltzmann sur réseau :

Dans cette partie, nous allons introduire les différents modèles dynamiques de la méthode de Boltzmann sur réseau utilisés dans cette étude. En premier lieu, l'approximation BGK de l'opérateur de collision est présenté pour la méthode SRT. Ensuite une description du modèle de réseau utilisé pour la partie dynamique de cette étude est faite en détails. Enfin, la méthode à temps de relaxations multiples (MRT) dynamique est présenté en détails.

3.3.1 Modèle SRT à simple temps de relaxation avec l'approximation BGK :

Il est très difficile de résoudre l'équation de Boltzmann à cause de la complexité de l'opérateur de collision. Cependant il est possible d'approximer l'opérateur de collision en un simple operateur qui ne tient pas compte des erreurs qui proviennent de la collision entre particules.

Bhatnagar, Gross and Krook (BGK) ont mis au point en 1954 un modèle simplifié de l'opérateur de collision [93].

L'opérateur de collision peut être écrit de la façon suivante :

$$\Omega = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad 3.9$$

Où : $\omega = \frac{1}{\tau}$

Le coefficient ω est appelé fréquence de collision et τ le facteur de relaxation.

f^{eq} est la fonction de distribution locale, qui est la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann.

Après application de l'approximation de BGK l'équation de Boltzmann (sans forces extérieures) peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f = \frac{1}{\tau} (f^{eq} - f) \quad 3.10$$

L'équation de Boltzmann à vitesses discrètes peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \quad 3.11$$

Cette équation remplace les équations de Navier et Stokes dans les simulations CFD.

L'équation (3.11) est caractérisée par :

1. L'équation est une PDE.
2. La partie droite de l'équation représente la propagation.
3. La partie gauche de l'équation représente le processus de collision.

La discrétisation de l'équation (3.11) nous donne :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)] \quad 3.12$$

La fonction de distribution locale et le temps de relaxation déterminent le type de problème à résoudre.

Dans la méthode LBM, le domaine doit être considéré comme un réseau. Dans chaque nœud du réseau réside une particule (fonction distribution). Certaines de ces particules se propagent en suivant les directions spécifiées vers le nœud voisin. Le nombre de directions dépend de l'arrangement du réseau, ex : 9 directions pour le modèle D2Q9.

3.3.2 Modèle bidimensionnel à 9 vitesses (D2Q9) :

Chaque modèle est décrit par une terminologie, afin de spécifier la dimension et le nombre de directions d'un modèle : DdQq [107], où : d représente la dimension spécifique au modèle, et q représente le nombre de vitesses discrètes utilisées dans le modèle.

Par exemple : D2Q9 (modèle bidimensionnel à 9 vitesses) que l'on discutera par la suite, D3Q19 (modèle tridimensionnel à 19 vitesses).

Un modèle, dans un algorithme de LBM est défini par : les vitesses $\{c_i\}$ et les facteur de poids correspondant $\{w_i\}$. La plupart des modèles contiennent une « vitesse de repos » de valeur nulle, qui représente les particules stationnaires. Cette dernière est souvent attribué l'index : $i =$

1 (où : $i = 0$ cela dépend de la nomenclature utilisée), $c_0 = 0$. Dans ce travail, on comptera de $i = 1$ jusqu'à q en prenant compte de la vitesse de repos. Par exemple : pour le modèle D2Q5 (5 vitesses discrètes $i = 1...5$). C'est le modèle le plus utilisé dans l'étude de problèmes hydrodynamiques, c'est un modèle basé sur un réseau carré ($\delta x = \delta y = 1$), bidimensionnel à 9 vitesses discrètes ($c_i = 1 \dots 9$) (Fig.3.2).

Les particules se déplacent dans le réseau avec des vitesses discrètes sont données par :

$$c_i = \begin{cases} (0,0) & i = 1 \\ c \left[\cos\left(\frac{i-1}{2}\pi\right) \sin\left(\frac{i-1}{2}\pi\right) \right] & i = 2,3,4,5 \\ \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{i-5}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{i-5}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right] & i = 6,7,8,9 \end{cases}$$

Les valeurs des vitesses ainsi que les facteurs de poids caractérisant le réseau D2Q9 sont reporté dans le Tableau 3.1.

La formule générale des fonctions de distribution à l'équilibre du réseau est la suivante :

$$f_i^{eq} = f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i \rho \left[1 + \frac{(\mathbf{e}_i \mathbf{u})}{\chi \cdot c^2} + \frac{(\mathbf{e}_i \mathbf{u})^2}{2 \chi \cdot c^4} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2 \chi \cdot c^2} \right] \quad 3.13$$

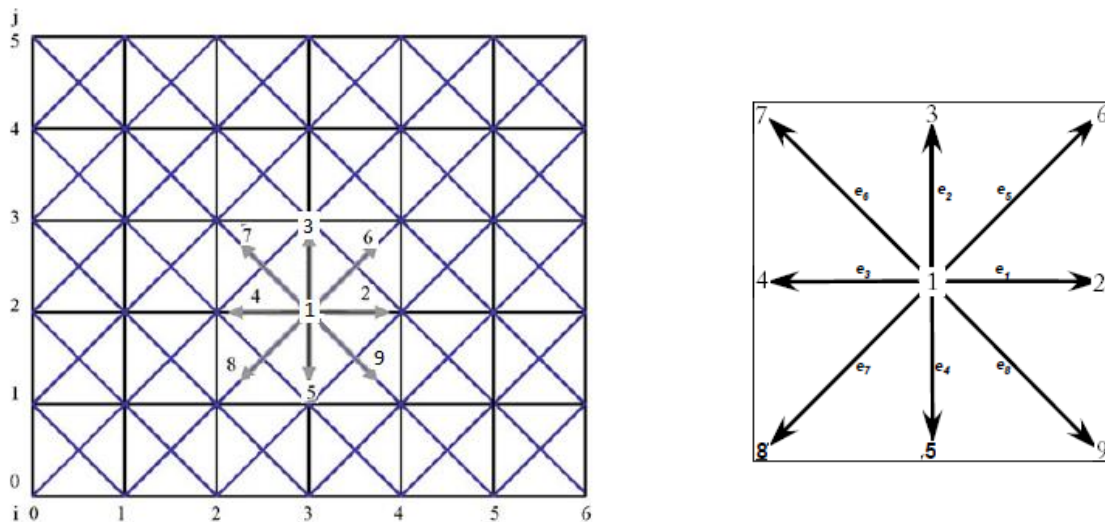


Figure 3.2 Modèle bidimensionnel à 9 vitesses, à droite : modèle D2Q9, à gauche : réseau D2Q9.

Tableau 3.1. Vitesses discrètes et facteurs de poids caractérisant le réseau D2Q9

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
w_i	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
c_{ix}	0	+1	0	-1	0	+1	-1	-1	+1
c_{iy}	0	0	+1	0	-1	+1	+1	-1	-1

Où : $i = 1 \dots 9$, donc, en remplaçant par les fonctions de poids correspondants, les vitesses discrètes, la vitesse du son $c_s^2 = 1/3$ et $u^2 = u_x^2 + u_y^2$, les fonctions de distributions à l'équilibre pour chaque nœud s'écrivent de la manière suivante :

$$f_1^{eq} = \frac{2\rho}{9}(2 - 3u^2) \quad 3.14$$

$$f_2^{eq} = \frac{\rho}{18}(2 + 6u_x + 9u_x^2 - 3u^2) \quad 3.15$$

$$f_3^{eq} = \frac{\rho}{18}(2 + 6u_y + 9u_y^2 - 3u^2) \quad 3.16$$

$$f_4^{eq} = \frac{\rho}{18}(2 - 6u_x + 9u_x^2 - 3u^2) \quad 3.17$$

$$f_5^{eq} = \frac{\rho}{18}(2 - 6u_y + 9u_y^2 - 3u^2) \quad 3.18$$

$$f_6^{eq} = \frac{\rho}{36}(1 + 3(u_x + u_y) + 9u_x u_y + 3u^2) \quad 3.19$$

$$f_7^{eq} = \frac{\rho}{36}(1 - 3(u_x - u_y) - 9u_x u_y + 3u^2) \quad 3.20$$

$$f_8^{eq} = \frac{\rho}{36}(1 - 3(u_x + u_y) + 9u_x u_y + 3u^2) \quad 3.21$$

$$f_9^{eq} = \frac{\rho}{36}(1 + 3(u_x - u_y) - 9u_x u_y + 3u^2) \quad 3.22$$

3.3.3 Modèle MRT à plusieurs temps de relaxations :

Le modèle BGK est une manière élégante de simplifier l'opérateur de collision de l'équation de Boltzmann. Toutefois, malgré la simplicité et l'efficacité de cet opérateur de collision du modèle SRT, il présente quelques inconvénients tels que la précision réduite pour de grandes valeurs de viscosités et l'apparence de certaines instabilités pour des valeurs de viscosité petites. En outre, la précision des simulations basés sur le modèle BGK dépend du temps de relaxation τ . Toutefois, comme nous le verrons par la suite, la méthode MRT est caractérisé par plusieurs opérateurs de collisions à plusieurs degrés de liberté et qui peuvent être personnalisés pour améliorer la précision et la stabilité et par conséquent éviter les problèmes du modèle BGK.

L'équation d'évolution du modèle MRT, s'écrit de la manière suivante :

$$f_i(x, c\Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -M^{-1} \cdot S \cdot [\mathbf{m}(x_j, t_n) - \mathbf{m}^{(eq)}(x_j, t_n)] + \mathbf{F}(x, t) \quad 3.23$$

Où : S représente la matrice de relaxation, qui est une matrice diagonale. Pour un réseau D2Q9 les composantes de l'équation sont sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}(x, t) := (f_1(x, t), f_2(x, t), \dots \dots \dots f_9(x, t))^\dagger \quad 3.24$$

$$\mathbf{f}(x, c\Delta t, t + \Delta t) := (f_1(x, c\Delta t, t + \Delta t), \dots \dots \dots f_9(x, c\Delta t, t + \Delta t))^\dagger \quad 3.25$$

$$\mathbf{m}(x, t) := (m_1(x, t), m_2(x, t), \dots \dots \dots m_9(x, t))^\dagger \quad 3.26$$

$$\mathbf{m}^{(eq)}(x, t) := (m_1^{eq}(x, t), m_2^{eq}(x, t), \dots \dots \dots m_9^{eq}(x, t))^\dagger \quad 3.27$$

$$\mathbf{F} := (0, F_2, F_3, \dots F_9)^\dagger \quad 3.28$$

Où : f et m sont les vecteurs de la fonction de distribution et des moments correspondants respectivement, m^(eq) représente le vecteur des moments à l'équilibre et F le vecteur force extérieure.

La matrice de transformation M relie les fonctions de distribution {f_i|i=1, 2... 9} au moments correspondants : {m_i|i=1, 2... 9}, par la relation suivante :

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{m} \quad 3.29$$

La matrice M pour le réseau D2Q9, s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs moments correspondants sont donnés par [107]:

$$\mathbf{m} = (\rho, j_x, j_y, e, p_{xx}, p_{xy}, q_x, q_y, \varepsilon)^T \quad 3.30$$

Où: ρ représente la densité, j = ρu représente la quantité de mouvement et u la vitesse de l'écoulement, e : le moment de deuxième ordre correspondant à l'énergie, P_{xx} et P_{xy} sont deux composantes indépendantes du tenseur de contraintes, Q_x et Q_y sont des moments de troisième

ordre correspondant aux composantes x et y du flux d'énergie respectivement et ε est le moment de quatrième ordre [108,109]. La matrice diagonale de relaxation S est :

$$S = \text{diag} (0,1,1, s_e, s_v, s_q, s_q, s_\varepsilon) \quad 3.31$$

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les méthodes à deux temps de relaxation (TRT) de Ginzburg [110-112], ainsi que la méthode MRT introduite par d'Humières [108,109]. Plus précisément, on utilisera comme relations entre les taux de relaxation les formules suivantes :

$$s_e = s_\varepsilon = s_v = \frac{2}{6\nu + 1} \quad 3.32$$

$$s_q = 8 \left(\frac{2 - s_v}{8 - s_v} \right) \quad 3.33$$

Où: ν représente la viscosité

Les moments à l'équilibre $\mathbf{m}^{(eq)}$ sont données par :

$$m_1^{(eq)} = \delta\rho \quad 3.34$$

$$m_2^{(eq)} = \rho u \quad 3.35$$

$$m_3^{(eq)} = \rho v \quad 3.36$$

$$m_4^{(eq)} = -2\delta\rho + 3\rho_0(u^2 + v^2) \quad 3.37$$

$$m_5^{(eq)} = \rho_0(u^2 - v^2) \quad 3.38$$

$$m_6^{(eq)} = \rho_0 uv \quad 3.39$$

$$m_7^{(eq)} = -\rho_0 u \quad 3.40$$

$$m_8^{(eq)} = -\rho_0 v \quad 3.41$$

$$m_9^{(eq)} = \delta\rho - 3\rho_0(u^2 + v^2) \quad 3.42$$

On peut noter que l'hypothèse d'incompressibilité, a été utilisé dans les équation au-dessus, c.à.d. on suppose que : $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ avec $\rho_0 = 1$ et que le terme non-linéaire $\delta\rho \cdot u$ ainsi que les autres termes non-linéaire d'ordre plus grand ont été négligé [113].

En tenant compte de ces critères, la vitesse du son du système est donnée par :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}c \quad 3.43$$

La viscosité cinématique du système est donné par :

$$\nu = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s_\nu} - \frac{1}{2} \right) \quad 3.44$$

Les variables dynamiques d'ordre macroscopique que sont la densité et la quantité de mouvement sont obtenues des fonctions de distribution par :

$$\rho = \sum_{i=1}^9 f_i \quad 3.45$$

$$\rho_0 \mathbf{u} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{e}_i f_i \quad 3.46$$

La forme de la fonction de distribution à l'équilibre correspondante est donné par la formule [114] :

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left(1 + 3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right) \quad 3.47$$

Où : $\omega_1 = 0$, $\omega_{2-4} = 0$ and $\omega_{5-9} = 1/36$ representent les facteurs de poids du modèle D2Q9.

3.4 Modèle thermique de Boltzmann sur réseau :

Durant les 15 dernières années, la méthode LBM à connue une évolution rapide dans la résolution d'une grande variété de types d'écoulements. Cependant l'effort fourni pour l'établissement d'un modèle stable pour le modèle thermique (TLBM), n'a porté ses fruits que récemment.

McNamara et Alder ont réussi à simuler le phénomène de transfert de chaleur en utilisant l'approche à double population [52]. Ce modèle sera décrit dans cette partie et ce pour les méthodes SRT et MRT avec le modèle de réseau utilisé pour la partie thermique.

3.4.1 Modèle à double population avec simple temps de relaxation :

Deux fonctions de distributions indépendantes sont utilisées dans ce modèle, à savoir la fonction de distribution de la densité de masse et celle de l'énergie interne afin de simuler l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur respectivement. Ces deux dernières peuvent ne pas partager le même réseau et la même fonction d'équilibre. Dans notre travail, nous avons

utilisé le réseau D2Q9 pour simuler l'écoulement du fluide et le réseau simplifié D2Q5 pour le transfert de chaleur.

Pour un problème thermique incompressible, He et al [50] ont proposé les deux fonctions de distributions suivantes :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_v} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \delta \mathbf{F} \quad 3.48$$

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_T} [g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad 3.49$$

Où : F : représente la force externe, τ_v et τ_T sont les temps de relaxation de l'écoulement et du transfert thermique respectivement.

3.4.2 Le réseau bidimensionnel à 5 vitesses :

C'est le modèle de réseau bidimensionnel le plus utilisé pour les problèmes thermiques, basé sur un réseau carré ($\delta x = \delta y = 1$) et à cinq vitesses discrètes ($c_i = 1 \dots 5$). (Fig.3.3).

Les vitesses discrètes du modèle D2Q5 sont données par les relations :

$$c_i = \begin{cases} (0,0) & i = 1 \\ c \left[\cos\left(\frac{i-1}{2}\pi\right) \sin\left(\frac{i-1}{2}\pi\right) \right] & i = 2,3,4,5 \end{cases}$$

Les valeurs des vitesses ainsi que les facteurs de poids caractérisant le réseau D2Q5 sont reporté dans le Tableau 3.2.

Tableau 3.2. Vitesses discrètes et facteurs de poids caractérisant le réseau D2Q5

i	1	2	3	4	5
w_i	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
c_{ix}	0	1	0	-1	0
c_{iy}	0	0	1	0	-1

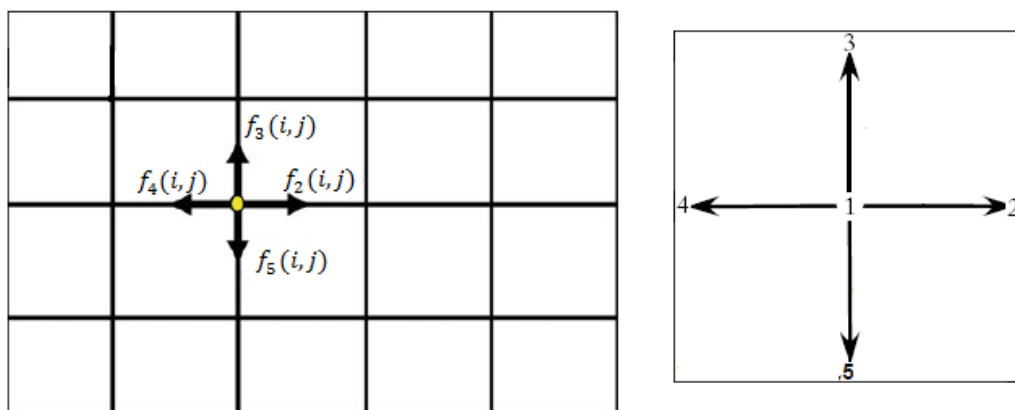


Figure 3.3 Modèle bidimensionnel à 5 vitesses, à droite : modèle D2Q5, à gauche : réseau D2Q5

3.4.3 Modèle MRT thermique à plusieurs temps de relaxations :

Dans cette partie, la méthode thermique à double population pour la méthode MRT est présentée, dans laquelle une fonction de distribution indépendante d'énergie interne est introduite pour l'obtention du champ de températures.

Dans le modèle thermique, le réseau D2Q5 est utilisé pour simuler l'équation :

$$\mathbf{g}(x + c\Delta t, t + \Delta t) = \mathbf{g}(x, t) - N^{-1} \cdot Q \cdot [\mathbf{n}(x, t) - \mathbf{n}^{eq}(x, t)] \quad 3.50$$

Où : N représente la matrice de transformation thermique, les composantes de l'équation sont de dimension 5 correspondant au modèle D2Q5 choisis :

$$\mathbf{g}(x, t) := (g_1(x, t), g_2(x, t), \dots \dots \dots g_9(x, t))^{\dagger} \quad 3.51$$

$$\mathbf{g}(x + c\Delta t, t + \Delta t) = (g_1(x + c\Delta t, t + \Delta t), \dots \dots \dots g_9(x + c\Delta t, t + \Delta t))^{\dagger} \quad 3.52$$

$$\mathbf{n}(r, t) := (n_1(x, t), n_2(x, t), \dots \dots \dots n_9(x, t))^{\dagger} \quad 3.53$$

$$\mathbf{n}^{(eq)}(x, t) := (n_1^{eq}(x, t), n_2^{eq}(x, t), \dots \dots \dots n_9^{eq}(x, t))^{\dagger} \quad 3.54$$

Où : g et n sont les vecteurs de la fonction de distribution du modèle thermique et des moments correspondants respectivement, $\mathbf{n}^{(eq)}$ représente le vecteur des moments à l'équilibre.

La matrice de transformation N relie les fonctions de distribution $\{g_i | i = 1, 2 \dots 5\}$ au moments correspondants : $\{n_i | i = 1, 2 \dots 5\}$, par la relation suivante :

$$\mathbf{n} = M \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = N^{-1} \cdot \mathbf{n} \quad 3.55$$

La matrice de transformation N pour le réseau D2Q5 est donnée par :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les moments d'équilibre $\mathbf{n}^{(eq)}$ correspondant aux fonctions de distribution $\{g_i | i = 1, 2 \dots 5\}$ sont donnés par :

$$n_1^{(eq)} = T, \quad n_2^{(eq)} = uT, \quad n_3^{(eq)} = vT, \quad n_4^{(eq)} = aT, \quad n_5^{(eq)} = 0 \quad 3.56$$

Où : le champ de vitesses $(u, v) = \mathbf{u}$ est obtenue de l'équation (3.46) de la fonction de distribution f_i , a est une constante qu'on décrira plus tard.

La matrice diagonale de relaxation Q s'écrit de la manière suivante :

$$Q = \text{diag} (1, \sigma_k, \sigma_k, \sigma_e, \sigma_v) \quad 3.57$$

La diffusivité thermique α est relié au taux de relaxation σ_k :

$$\kappa = \frac{(4 + a)}{10} \left(\frac{1}{\sigma_k} - \frac{1}{2} \right) \quad 3.58$$

Il convient de noter que Ginzburg et al.[115] ont analysé ce paramètre pour le modèle D2Q5. Pour satisfaire l'isotropie avec une précision de quatrième ordre pour l'équation (g), les paramètres σ_k et σ_v doivent satisfaire l'une des relation suivante :

$$\left(\frac{1}{\sigma_v} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\sigma_k} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \quad 3.59$$

Où :

$$\sigma_v = 6 \left(\frac{2 - \sigma_k}{8 - \sigma_k} \right) \quad 3.60$$

En prenant compte de cette relation entre σ_k et σ_v , on peut alors éliminer le terme de quatrième ordre dans l'équation (g) avec la relation suivante entre σ_e et σ_k [116] :

$$\sigma_e = \frac{6(1 - a)(2 - \sigma_k)\sigma_k}{(7 + 3a)(\sigma_k - 6)\sigma_k + 12(4 + a)} \quad 3.61$$

En outre, il existe une relation entre σ_e et σ_k . Si on fixe σ_k par la relation suivante :

$$\frac{1}{\sigma_k} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad 3.62$$

Alors, la relation entre σ_e et σ_k , prend une forme simplifiée et σ_e devient constant :

$$\sigma_e = 2(2\sqrt{3} - 3) \quad 3.63$$

Par conséquent, σ_e et σ_v devient égales à la valeur suivante :

$$\left(\frac{1}{\sigma_e} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{\sigma_v} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad 3.64$$

Avec σ_k fixé, α dépend que du paramètre a :

$$\kappa = \frac{\sqrt{3}(4 + a)}{60} \quad 3.65$$

3.5 Fonction de distribution d'équilibre et de non-équilibre :

En général, la fonction de distribution peut être divisé en deux parties, la fonction de distribution à l'équilibre, et la fonction de distribution de non-équilibre :

$$f = f^{eq} + f^{neq} \quad 3.66$$

Pour un nœud à la frontière (Fig.3.5) ouest par exemple, l'équation ci-dessus devient :

$$f_2 = f_f + (f_w^{eq} - f_f^{eq}) \quad 3.67$$

Dans ce cas, f_2 , f_6 et f_8 sont inconnues et peuvent être déterminés par :

$$f_2 = f_4 + (f_2^{eq} - f_4^{eq}) \quad 3.68$$

Ce qui nous donne la condition d'équilibre normale à la frontière :


$$f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq} \quad 3.69$$

3.6 Le processus de collision et de propagation :


Les deux processus principaux que subissent les particules fluides dans la méthode de Boltzmann sur réseau sont : la collision et la propagation.

L'équation LBGK (3.12) vu précédemment, se divise en deux termes, un terme de collision et un terme de propagation :

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) \quad 3.70$$



Propagation



Collision

La phase de collision est décrite par l'équation suivante :

$$f_i^*(x, t) = f_i(x, t) - \frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) \quad 3.71$$

Où : f_i^* représente la fonction de distribution après l'étape de collision et f_i^{eq} la fonction de distribution à l'équilibre (3.13).

La phase de propagation, quant à elle est représenté par l'équation suivante :

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(x, t) \quad 3.72$$

Concernant l'implémentation des deux phases, premièrement la collision est implémenté en calculant la densité ρ ainsi que la vitesse macroscopique u pour le calcul de la fonction de distribution à l'équilibre et la fonction de distribution post-collision f_i^* . Après l'étape collision, la fonction de distribution résultante f_i^* est déplacé vers le nœud voisin. Lorsque ces deux étapes sont faites, une itération est accomplie.

3.7 Conservation de masse de quantité de mouvement et de température :

La somme des fonctions d'équilibre à chaque nœud du réseau D2Q9, nous donne la densité macroscopique du fluide et assure la conservation de la masse :

$$\rho = \sum_{k=1}^9 f_k \quad 3.73$$

La conservation de la quantité de mouvement est assurée par le fait que cette dernière est égale à la sommation du produit de la fonction de distribution par les vitesses (d'ordre microscopique) du réseau :

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{k=1}^9 f_k \mathbf{c}_k \quad 3.74$$

La température, en revanche, est calculé par la sommation des fonctions de distributions dans chaque nœud du réseau D2Q5 :

$$T = \sum_{k=1}^5 g_k \quad 3.75$$

3.8 Viscosité et diffusivité thermique :

Dans la méthode LBM, la viscosité est reliée au temps de relaxation dynamique par la relation suivante :

$$\nu = (\tau_v - 0.5)c_s^2 \Delta t \quad 3.76$$

La condition de stabilité de la méthode est qu'il faut que le temps de relaxation doit être supérieur à 0.5 ($\tau_v > 0.5$), pour que la viscosité (qui est une quantité positive) le reste. Par conséquent, un mauvais choix de la viscosité peut entraîner une divergence du modèle, ce qui amène une instabilité dans le processus de calcul.

La diffusivité thermique, est reliée, quant à elle, au temps de relaxation thermique par :

$$\alpha = (\tau_T - 0.5)c_s^2 \Delta t \quad 3.77$$

3.9 Conditions aux limites :

L'importance des conditions aux limites ne doit pas être sous-estimé. Même s'ils s'appliquent sur une petite partie du domaine étudié, leur influence s'étend sur tout le phénomène étudié. Par conséquent, les conditions aux limites devraient être traité avec le plus grand soin. Depuis les années 90, plusieurs papiers ont proposé et étudié plusieurs conditions aux limites [117-119], et les travaux continuent jusqu'à ce jour.

Contrairement aux méthodes classiques utilisées (CFD) où l'établissement des conditions aux limites se fait par l'obtention des variables macroscopiques de l'écoulement, l'établissement des conditions aux limites dans la méthode de Boltzmann sur réseau se fait par la détermination des fonctions de distributions imposées aux limites du domaine.

Bien que plusieurs conditions aux limites existent pour différents types d'écoulement [120-129], dans cette partie nous allons étudier en détails les conditions aux limites utilisées dans le phénomène étudié dans ce travail. Cette discussion est faite sur la base du modèle bidimensionnel à 9 vitesses (D2Q9) pour le champ dynamique (Fig.3.2), et du modèle bidimensionnel à 5 vitesses (D2Q5) pour le champ thermique (Fig.3.3).

3.9.1 Les conditions aux limites dynamiques :

3.9.1.1 La condition sur les murs (condition de rebond) :

Dans les écoulements hydrodynamiques, la modélisation de la condition de non-glissement sur la paroi rigide dans la méthode de Boltzmann sur réseau, est réalisée par la condition de rebond (bounce-back) [130–132] (Fig.3.4). Ce concept a été adopté au début des modèles de gaz sur réseau [133,134].

Le principe de la condition de rebond est que lorsque qu'une particule rencontre une frontière rigide (mur), elle rebondit sur ce dernier pour revenir dans l'écoulement suivant sa direction d'origine. La formule générale du schéma est donnée par l'équation suivante :

$$f_k = f_{\bar{k}} \quad 3.78$$

Où : \bar{k} et k sont deux directions opposées sur la frontière.

Dans notre cas d'étude, cette condition est appliquée pour la frontière nord et sud.

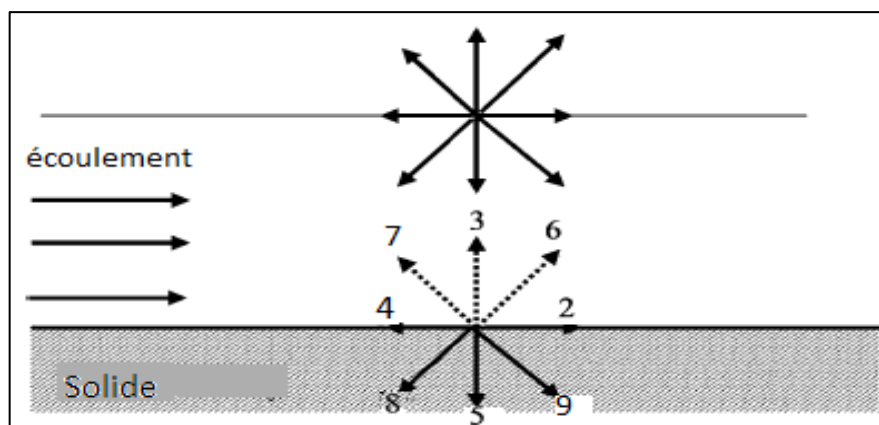


Figure 3.4 Le rebond des particules à la frontière Sud

3.9.1.2 Conditions aux limites avec une vitesse et une pression imposée (connues) :

Dans la plupart des cas, la valeur d'une ou de plusieurs variables macroscopiques sont imposées aux différentes frontières du domaine étudié. Dans la méthode LBM, on utilise les fonctions de distributions pour calculer ces variables, mais si ces variables sont déjà connues, on peut évaluer les valeurs des fonctions de distributions inconnues.

Prenons comme exemple, l'écoulement dans un canal, où la vitesse à l'entrée et la pression à la sortie sont connues, on peut alors déterminer les fonctions de distributions inconnue de la frontière (entrée du canal), ainsi que ceux à la sortie.

Zou and He [114] se sont basé sur les équations de conservation de masse (3.45) et de quantité de mouvement (3.46) pour déterminer les fonctions de distributions inconnues.

L'équation de conservation de masse, comme on l'a déjà vu (3.45) s'écrit de la manière suivante, pour le modèle D2Q9 :

$$\rho = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 \tag{3.79}$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement, pour le modèle D2Q9 En décomposant l'équation (3.46) s'écrit :

La composante suivant x :

$$\rho u = f_2 + f_6 + f_9 - f_7 - f_4 - f_8 \tag{3.80}$$

La composante suivant y :

$$\rho v = f_6 + f_3 + f_7 - f_6 - f_5 - f_9 \tag{3.81}$$

Comme le montre la figure (Fig.3.5), on distingue un domaine avec des limites (Nord, Sud, Est, Ouest), où les composantes de vitesse sont connues sur toutes les frontières.

Notons que les fonctions de distribution inconnues sont représentées par des lignes discontinues, tandis que les fonctions de distributions connues, sont représentées par des lignes continues.

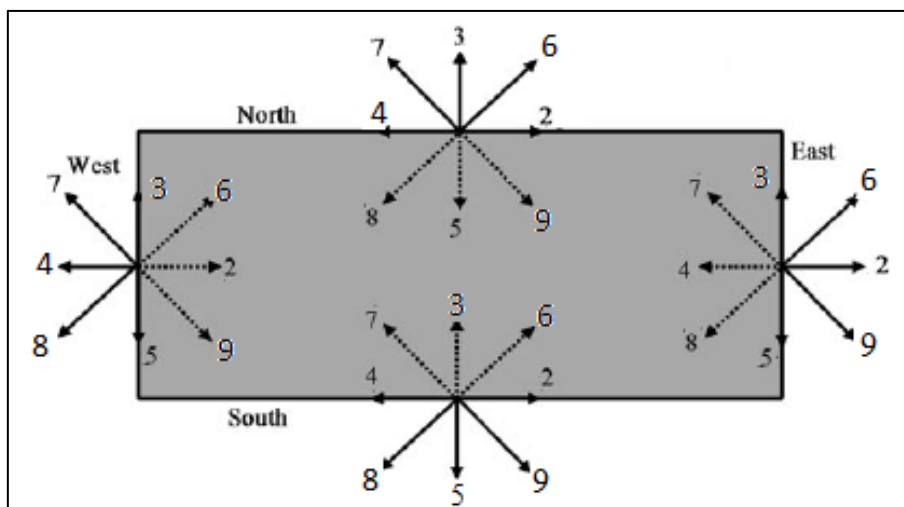


Figure 3.5. Conditions aux limites aux parois de la géométrie

a) La condition de vitesse imposée (frontière Ouest) :

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide dans un canal, les composantes de la vitesse à l'entrée sont connues, dans ce cas précis : u et v pour les composantes de la vitesse suivant x et y respectivement.

Les fonctions de distributions inconnues sont : f_2, f_6 et f_9 , ainsi que la densité ρ_w . En prenant compte de la condition d'équilibre normale à la frontière de la manière suivante :

$$f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq} \quad 3.82$$

Où f^{eq} peut être calculé par l'équation :

$$f_2^{eq} = \frac{\rho_w}{18} (2 + 6u_w + 9u_w^2 - 3(u_w + v_w)^2) \quad 3.83$$

$$f_4^{eq} = \frac{\rho}{18} (2 - 6u_w + 9u_w^2 - 3(u_w + v_w)^2) \quad 3.84$$

En remplaçant ces deux équations ci-dessus dans l'équation (3.84) on obtient :

$$f_2 = f_4 + \frac{2}{3} \rho_w u_w \quad 3.85$$

Pour les fonctions de distributions inconnues restantes, f_6 et f_9 , on procède de la même manière et on obtiens les équations suivantes :

$$\rho_w = \frac{1}{1 - u_w} [f_1 + f_3 + f_5 + 2(f_4 + f_7 + f_8)] \quad 3.86$$

$$f_6 = f_8 - \frac{1}{2}(f_3 - f_5) + \frac{1}{6} \rho_w u_w + \frac{1}{2} \rho_w v_w \quad 3.87$$

$$f_9 = f_7 + \frac{1}{2}(f_3 - f_5) + \frac{1}{6} \rho_w u_w - \frac{1}{2} \rho_w v_w \quad 3.88$$

Les quatre inconnues peuvent être obtenue en résolvant ces quatre équations.

b) La condition de pression imposée (frontière Est) :

Dans le cas où la pression de sortie est imposée comme constante, cette dernière est fixée dans notre étude à $\rho_E = 1$. Les fonctions de distributions inconnues dans ce cas sont f_4, f_8 et f_7 qui sont exprimés par les équations suivantes :

$$f_4 = f_2 - \frac{2}{3} u_E \quad 3.89$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_3 - f_5) - \frac{1}{6} u_E - \frac{1}{2} v_E \quad 3.90$$

$$f_7 = f_9 - \frac{1}{2}(f_3 - f_5) + \frac{1}{6} u_E - \frac{1}{2} v_E \quad 3.91$$

3.9.2 Conditions aux limites thermiques :

3.9.2.1 Conditions aux limites de type Dirichlet :

Dans ce type de condition aux limites une température constante ($T = \text{cste}$) est imposée sur une paroi. Contrairement aux condition aux limites dynamique (Zou and He [114], Bounce-back [117]), les conditions pour l'approche TLBM, diffère dans la mesure où cette fois-ci, les fonctions de distribution inconnues sont les fonctions entrantes, et c'est ce qu'il faut déterminer dans ce cas. Dans notre cas par exemple, le réseau D2Q5 a été choisis pour le champs thermique, il faut donc résoudre les équation adéquates pour la détermination des fonctions de distributions inconnues.

D'après l'équation de conservation d'énergie, la fonction de distribution inconnue sur une frontière est déterminée selon la température imposée. Par exemple lorsque la paroi du haut est sujette à une température constante égale à $T = T_f$, la fonction de distribution inconnue est g_5 donc :

$$g_5 = T_f - (g_1 + g_2 + g_3 + g_4) \quad 3.94$$

3.9.2.2 Conditions aux limites de sortie :

Physiquement parlant, la difficulté provient du rôle des conditions aux limites de sortie : Ils sont supposés garantir que ce qui sort du domaine de calcul est compatible avec la physique du problème (conservation de masse, conservation de quantité de mouvement et conservation de température).

Concernant notre problème, les conditions aux limites à la sortie sont communément appelées OBC (Open boundary conditions), qui a fait l'objet de plusieurs travaux [44,53].

3.10 Mise en œuvre informatique de la méthode de Boltzmann sur réseau :

On abordera dans cette partie les détails et les différentes parties de l'implémentation de la méthode de Boltzmann sur réseau pour établir un algorithme efficace.

3.10.1 Initialisation des variables et entrée des données géométriques et physiques :

Dans cette partie, on entre les données géométriques du phénomène étudié : maillage, obstacle...etc., les paramètres physiques, qui resteront constant tout au long de la simulation (Nombre de Reynolds, nombre de Prandtl, nombre de Rayleigh, viscosité, diffusivité thermique...etc.), ainsi que les populations propres à la méthode de Boltzmann sur réseau

(fonctions de distribution à l'équilibre, densité, facteurs de poids, vitesses discrètes, taux de relaxation...etc.)

3.10.2 Time-step algorithm :

Globalement, le noyau de l'algorithme LBM (figure 3.6), est constitué d'un enchaînement d'étapes avec des boucles de calcul. Chaque cycle de calcul correspond à une itération qui se déroule selon l'ordre suivant :

1. L'initialisation des paramètres (données géométriques et physiques, paramètres du phénomène)
2. Le calcul des quantités macroscopiques $\rho(x, t)$ et $u(x, t)$ à partir de la fonction de distribution de la partie dynamique $f_i(x, t)$, et $T(x, t)$ à partir de la fonction de distribution de la partie thermique $g_i(x, t)$
3. Le calcul des fonctions de distributions à l'équilibre f_i^{eq} et g_i^{eq}
4. Conditions aux limites hydrodynamiques et thermiques
5. Exécution de l'étape de collision.
6. Exécution de l'étape de propagation.
7. Calcul des conditions aux limites thermiques et dynamiques aux parois
8. Faire un test de convergence ; si le test échoue, on revient à l'étape 1, si le test réussit, on procède à l'étape 7 de l'algorithme.
9. Exportation des différents résultats obtenue lors de la simulation, qui sont en général des quantité macroscopique (vitesses, températures, fonction de courant, pression, nombre de Nusselt...etc.)

Ces étapes sont représentées dans l'organigramme de calcul (Fig3.6). Concernant le codage, nous avons choisis l'éditeur Octave, pour élaborer nos codes de calcul, en appliquant l'algorithme ci-dessus au phénomène étudié, qui est la simulation d'un écoulement laminaire dans une conduite chauffée par le bas, et refroidie par le haut par la méthode de Boltzmann à double population, avec la méthode à simple temps de relaxation (SRT) et la méthode à plusieurs temps de relaxation (MRT).

Ce code de calcul a été testé et validé en le comparant aux résultats trouvées dans la littérature pour le cas du nombre de Reynolds $Re=10$, $Ra=10^4$, $Pe=20/3$ et $B=20$. Les résultats de la validation sont présentés dans le chapitre suivant.

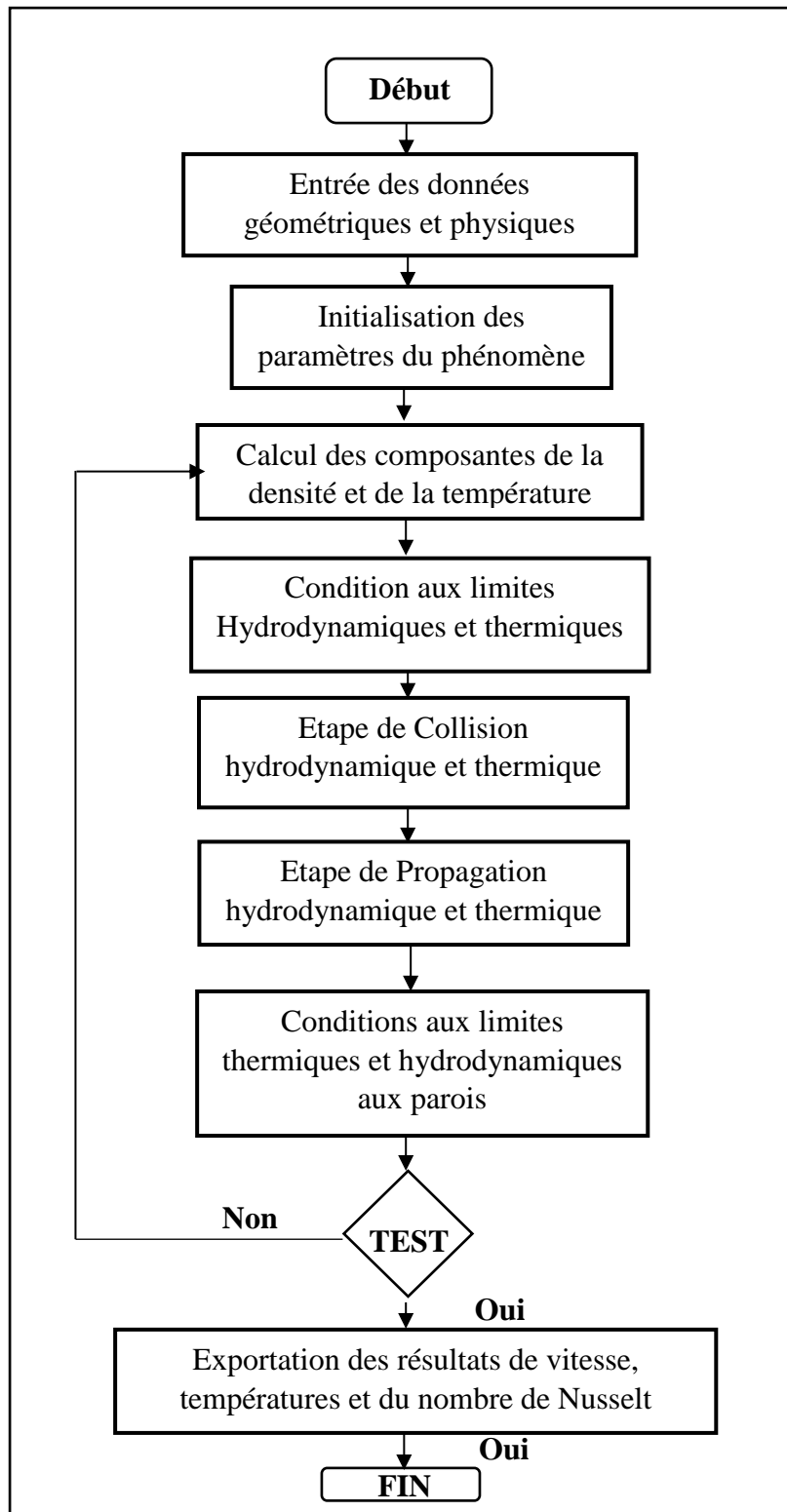


Figure 3.6. Organigramme de calcul de TLBM

3.11. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'historique de développement de la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM). Les modèles dynamiques et thermiques à simple temps de relaxation (SRT) ainsi qu'à temps de relaxations multiples (MRT) sont décrits et détaillés. Enfin, nous avons exposé les étapes à suivre pour la mise en œuvre informatique notamment l'organigramme et l'algorithme suivit pour l'élaboration de codes de calcul utilisés. La validation de ces derniers ainsi que les résultats des simulations effectués seront l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4 :
Résultats et discussions

Chapitre 4 : Résultats et discussions

4.1 Description du phénomène étudié :

4.1.1 Configuration géométrique :

Il s'agit d'un problème de la convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas et refroidi par le haut (Fig 4.1). On considère qu'un fluide newtonien incompressible entre dans la conduite de hauteur H et de longueur L avec un profil de vitesse parabolique et un profil de température linéaire $T = 1 - y$. A la sortie, la condition ouverte (OBC) est imposée. Le rapport de forme B est défini par le quotient : L/H .

Les parois du haut et du bas sont maintenues à des températures froides ($T = 0$) et chaudes ($T=1$) respectivement.

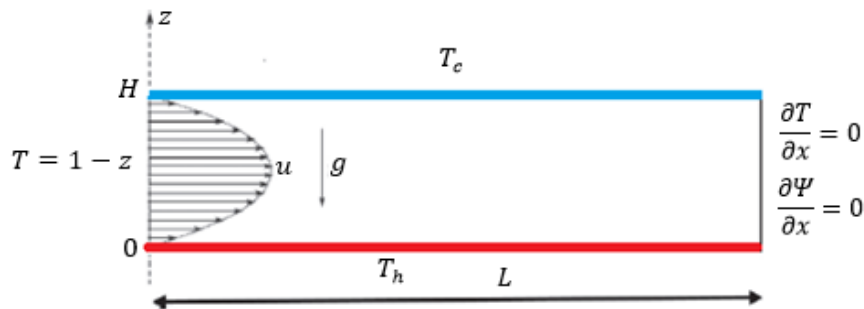


Figure 4.1. Modèle de l'écoulement de convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas

4.1.2 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites concernant notre problème peuvent s'écrivent de la manière suivante :

$$\text{\AA } 0 \leq X \leq L; \quad Y = 0 \quad u = v = 0, T = 1 \quad 4.1$$

$$\text{\AA } 0 \leq X \leq L; \quad Y = H \quad u = v = 0, T = 0 \quad 4.2$$

$$\text{\AA } X = 0; \quad 0 \leq Y \leq H \quad u = y(H - y)/H, v = 0, T = 1 - y \quad 4.3$$

$$\text{\AA } X=L; \quad 0 \leq Y \leq H \quad \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad 4.4$$

4.2 Validation du code de calcul :

4.2.1 Méthode à simple temps de relaxation (SRT) :

Un code de calcul se basant sur la méthode de Boltzmann sur réseau thermique (TLBM) à double population et à simple temps de relaxation a été développé et implémenté sur le logiciel Octave.

Une étude du maillage a été entreprise pour déterminer la résolution suffisante pour l'étude de notre cas, plusieurs maillages ont été utilisés variant de 41x801 jusqu'à 91x1801, notre étude est schématisée dans la figure 4.2, vu la convergence du nombre de Nusselt et afin d'économiser le temps de calcul le maillage de 71x1401 est adopté pour la simulation de notre phénomène.

Les résultats obtenus ont été comparés avec la méthode de volumes finies et la méthode des différences finies trouvés dans la littérature. La comparaison de nos résultats avec d'autres travaux notamment ceux de Abassi et al [58], Evans et al [44] et Comini et al [53] est reportée dans le tableau.4.1. Les données utilisées pour cette première validation sont : un rapport de forme $B = 20$, un nombre de Rayleigh $Ra = 10^4$, un nombre de Reynolds $Re = 10$ ainsi qu'un nombre de Prandtl $Pr = 0.667$.

Il est clair que nos résultats sont en bon accord avec les résultats des références. L'erreur calculée pour le nombre de Nusselt moyen $\langle \overline{Nu} \rangle$ est de 0.31% pour Evans et al [44], 0.93 % pour Comini et al [53], 0.55% pour Abbassi et al [61] et de 2.53 % pour Nourollahi et al [61].

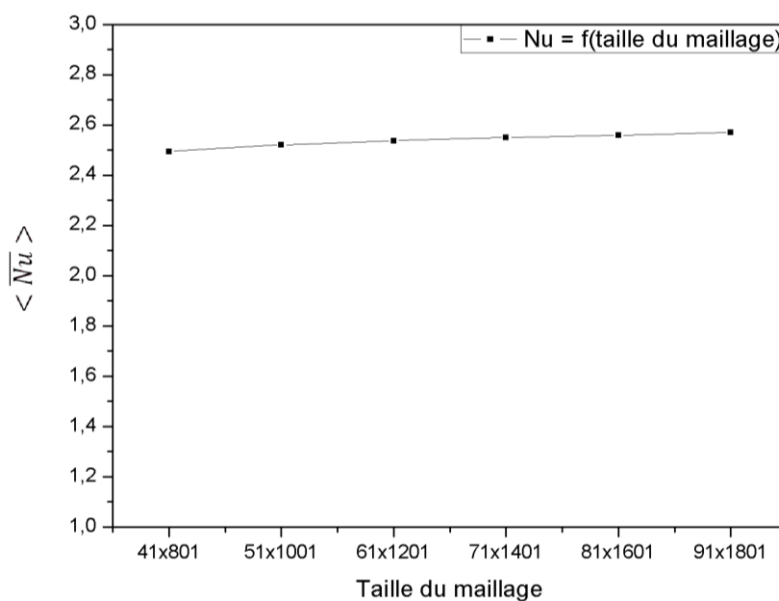


Figure 4.2. Etude du maillage pour la méthode SRT

Tableau 4.1. Nombre de Nusselt moyen $\langle \overline{Nu} \rangle$ for: $Re = 10$, $Pe = 20/3$ and $Ra = 10^4$

Reference	Présent	Evans et al (1990) [44]	Comini et al (1997) [53]	Abassi et al (2001) [58]	NourollahiM. (2010) [61]
$\langle \overline{Nu} \rangle$	2.550	2.558	2.574	2.536	2.487

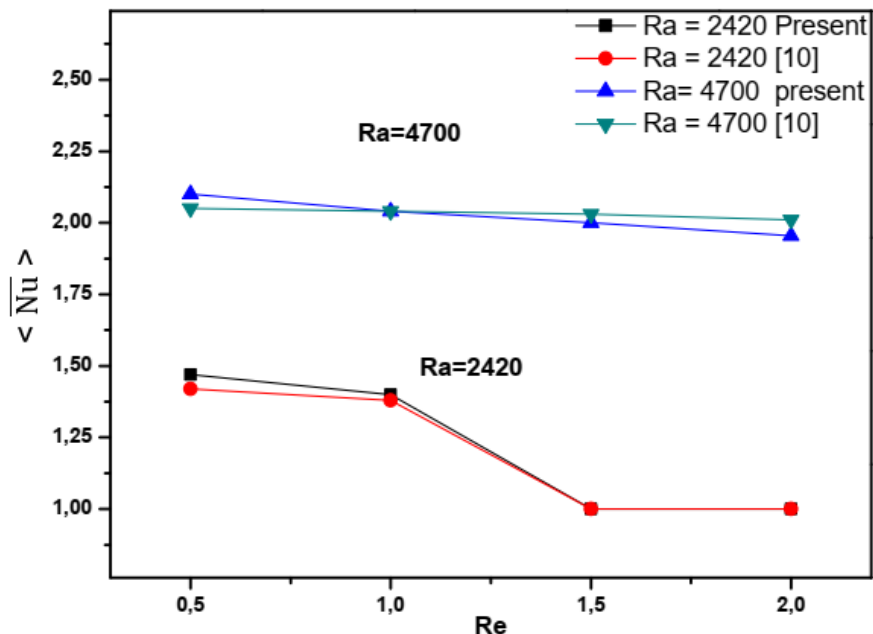


Figure 4.3 Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Rayleigh pour un $Pr = 6.4$; comparaison de nos résultats avec ceux de Nicolas et al (1997) [54].

Une deuxième validation a été effectuée en comparant les résultats avec ceux de Nicolas et al (1997) [54], pour des nombres de Reynolds allant de 0 à 2, des nombres de Rayleigh de 4700 et de 2420, un rapport de forme $B = 10$ et un nombre de Prandtl fixé à 6.4.

La figure 4.3 et le tableau 4.2 illustrent les résultats obtenus de la variation du nombre de Nusselt moyen qui sont en bon accord avec ceux de l’auteur cité. On note aussi que l’erreur maximale pour ce cas est de 3.52% relevée pour le cas où : $Ra = 2420$ et $Re = 0.5$.

Une troisième validation a été aussi réalisée avec les résultats de Evans et al [43] utilisant la méthode des différences finies. (Les données utilisés pour ce cas sont des nombres de Grashof de 5000 et de 10000 pour un rapport d’allongement de $B = 20$ et un nombre de Reynolds $Re=0.1$. Le (Tableau 4.3) illustre les résultats obtenus avec la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double population (TLBM) qui sont en bonne concordance avec les résultats de la référence, que ce soit avec la méthode des volumes finies (MVF) ou la méthode des différences finies (MDF). L’erreur calculée pour le nombre de Nusselt moyen dans l’espace et dans le temps $\langle \overline{Nu} \rangle$ est au plus égal à 3.52 % , ceci est relevé pour le cas où : $Pr = 6.4$, $Re = 0.5$ et $Ra=2420$.

Tableau 4.2. Comparaison des présents résultats avec les résultats de références [54]

Nombre de Reynolds	Nombre de Rayleigh	Méthode numérique	$\langle \overline{Nu} \rangle$	Erreur
Re = 0.5	Ra = 2420	MVF [54]	1.42	
		LBM	1.47	3.52 %
	Ra = 4700	MVF [54]	2.05	
		LBM	2.1	2.43%
Re = 1	Ra = 2420	MVF [54]	1.38	
		LBM	1.4	1.42%
	Ra = 4700	MVF [54]	2.04	
		LBM	2.04	0.0%
Re = 1.5	Ra = 2420	MVF [54]	1	
		LBM	1	0.0%
	Ra = 4700	MVF [54]	2.03	
		LBM	2.00	1.47%
Re = 2	Ra = 2420	MVF [54]	1	
		LBM	1	0.0%
	Ra = 4700	MVF [54]	2.01	
		LBM	1.955	2.73%

Tableau 4.3. Comparaison des présents résultats avec les résultats de références [43]
(Re = 0.1, B= 20 et Pr = 0.667)

Nombre de Rayleigh Ra=Gr*Pr	Méthode numérique	\overline{Nu}_b	erreur	\overline{Nu}_t	erreur
Ra = 5000*0.667	MDDF [9]	1.65		1.7	
	LBM	1.68	1.81%	1.706	0.35%
Ra = 10000*0.667	MDDF [9]	2.2		2.3	
	LBM	2.23	1.36%	2.27	1.30%

4.2.2 Méthode à temps de relaxation multiple (MRT) :

Cette section est focalisée sur l'aptitude de la méthode Boltzmann sur réseau à plusieurs temps de relaxation (MRT) à simuler le problème de convection mixte dans un canal horizontal chauffée par le bas, en validant dans un premier temps les résultats obtenus avec le code de calcul avec ceux de la littérature.

Tableau 4.4. Etude de maillage pour la méthode MRT

Maillage	100x2000	110x2200	130x2600	150x3000	170x3400	200x4000	220x4400
$\langle \overline{Nu} \rangle$	2.453	2.4607	2.47405	2.4903	2.4921	2,493	2,495

Tableau 4.5. Comparaison des présents résultats obtenu avec la méthode MRT avec les résultats de références

Reference	Present	Nourollahi et al (2010) [61]	Abassi et al (2001) [58]	Evans et al (1990) [44]	Comini et al (1997) [53]
$\langle \overline{Nu} \rangle$	2.4845	2.487	2.536	2.558	2.574

La validation est pour un écoulement de type Poiseuille-Rayleigh-Bénard avec un rapport de forme $B=20$, $Re = 10$, $Pe = 20/3$ et un $Ra = 10^4$. L'étude des maillages utilisés varient de 100x2000 jusqu'à 220x4400 voir (Tableau 4.4). En tenant compte de la convergence du nombre de Nusselt moyen en temps et en espace. Le maillage 170x3400 a été choisis (Fig4.4).

La comparaison des résultats obtenues avec la méthode MRT et les travaux trouvés dans la littérature notamment ceux de Abassi et al [58], Evans et al [44], Comini et al [53] et Nouroullahi et al [61] sont reportés dans le tableau 4.5. Cette dernière montre que les résultats sont en bon accord avec une erreur maximale ne dépassant pas 3.47 %.

Une autre comparaison des résultats obtenus par la méthode SRT est effectué avec ceux de la littérature par la méthode de volumes finies (MVF). Dans ce cas les paramètres considérés sont : le nombre de Reynolds $Re = 0.1$, le nombre de Prandtl $Pr = 0.667$, le rapport d'allongement de $B = 20$ et pour trois valeurs du nombre de Grashof Gr : 3000, 5000 et 10000. Les résultats semblent en bonne concordance avec ceux obtenus de la littérature notamment des travaux de Evans and Grief [43] (voir Tableau 4.6).

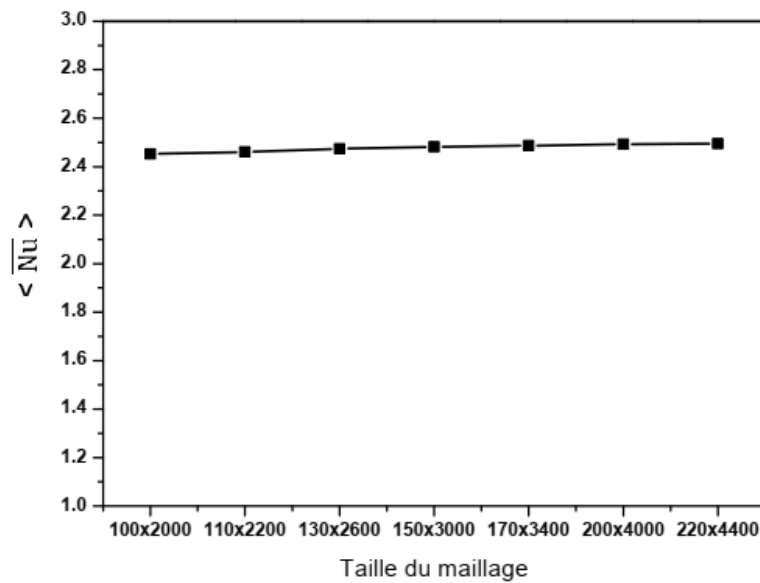


Figure 4.4. Etude du maillage pour la méthode MRT

Tableau 4.6. Comparaison des résultats de simulation obtenus par les méthodes SRT et MRT avec des résultats trouvés dans la littérature $Re=0.1$ et $B=20$

Gr	\overline{Nu}_b (chaud)			\overline{Nu}_t (froid)		
	MRT Present	SRT Present	Evans and Grief [43]	MRT Present	SRT Present	Evans and Grief [43]
3000	1.105	1.11	1.1	1.16	1.14	1.1
5000	1.68	1.68	1.65	1.73	1.706	1.7
10.000	2.23	2.23	2.2	2.28	2.27	2.3

4.3 Simulation du phénomène en utilisant la méthode de Boltzmann à simple temps de relaxation (SRT):

Dans cette partie nous allons présenter les résultats de la simulation reproduisant le phénomène physique étudié dans le présent travail avec une étude paramétrique notamment, l'effet du nombre de Prandtl et le rapport d'allongement sur les différentes structures dynamiques caractérisant l'écoulement ainsi que sur le transfert de chaleur.

4.3.1 L'écoulement de convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas :

Les résultats de nos simulation présentés en termes de fonctions de courant, contours de température et de contours de vorticités (Fig 4.5) sont obtenus pour nombre de Rayleigh $Ra=10^4$, un nombre de Reynolds $Re = 10$, un nombre de Prandtl $Pr = 0.667$ et un rapport de

forme $B = 20$. Les résultats présentés sont pour un temps $t = t_T$ qui représente l'instant où la température est minimale à la position $X = 5$ et $Y = 0.5$. Cette valeur a été choisie arbitrairement. On note aussi que les résultats de la simulation ont été obtenus pour le cas d'un canal qui est deux fois plus long que celui présenté dans les figures.

Les résultats des lignes de courant montrent que la structure physique de l'écoulement est caractérisée par l'apparence de rouleaux convectifs alternatifs et instationnaires se déplaçant le long du canal et se dirigeant vers la sortie. Ces derniers donnent naissance à une variation périodique des différentes variables macroscopiques caractérisant l'écoulement.

On remarque aussi que les cellules qui se trouvent près de la paroi du bas tournent dans le sens des aiguilles d'une montre, tandis que celles près de la paroi du haut tournent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Elles forment ainsi le phénomène qui est connu par l'allé de Von Karman, centrée à l'axe du canal.

On remarque aussi qu'à tout instant, onze cellules approximativement occupent le canal, sans compter celles qui se développent à l'entrée. Elles sont déclenchées par le contact du fluide froid avec la paroi chaude, ce qui crée un gradient de température donnant naissance à un mouvement de convection naturelle, entraîné par la vitesse du fluide entrant vers la sortie du canal. La longueur de la région de naissance et de la croissance des rouleaux à l'entrée est entre 0.25 et 1.

Concernant les isothermes, elles dévoilent l'apparition de panaches prenant la forme de champignon qui servent à transporter de la chaleur de l'entrée du canal jusqu'à sa sortie. La taille des panaches est la même à cause du gradient de température constant entre les parois.

La Figure 4.6 illustre le déplacement d'une particule de fluide le long du canal, la nature oscillatoire de ce dernier est liée à l'installation des rouleaux convectifs et nous montre que l'écoulement est périodique. La longueur d'onde pour ce cas est de $\lambda = 1.440$, cette valeur est en bon accord avec les résultats de la littérature ; $\lambda = 1.4465$ pour [44] et $\lambda = 1.45$ pour [53].

Le profil de vitesse horizontal U_x représenté dans la Figure 4.7 montre entre autres que le profil parabolique à l'entrée ($X=0$) est confirmé et reste constant durant toute la simulation. Le profil subit des déformations le long du canal selon le sens de rotation et le déplacement des rouleaux transversaux, on peut aussi noter que la vitesse de l'écoulement est plus grande près de la paroi chaude.

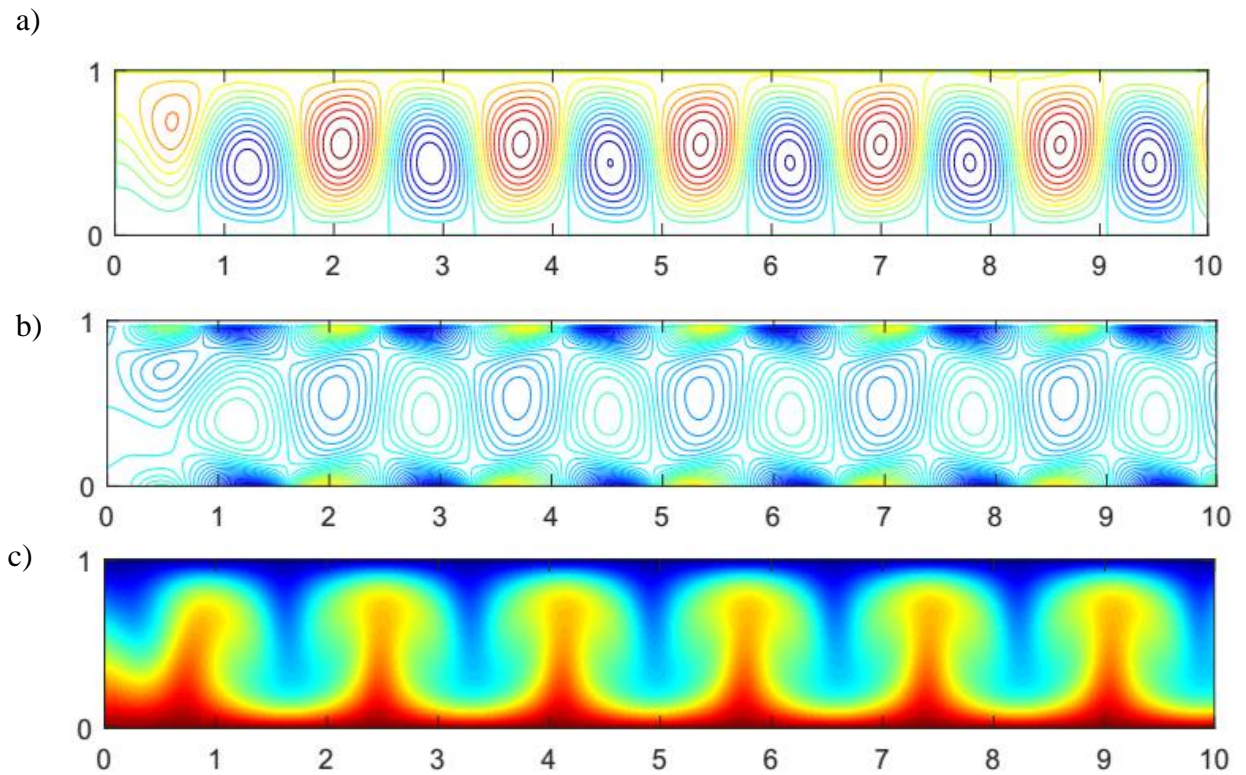


Figure 4.5 Champs adimensionnels à $t = t_T$. (a-c) contours de Lignes de courant, vorticité et température

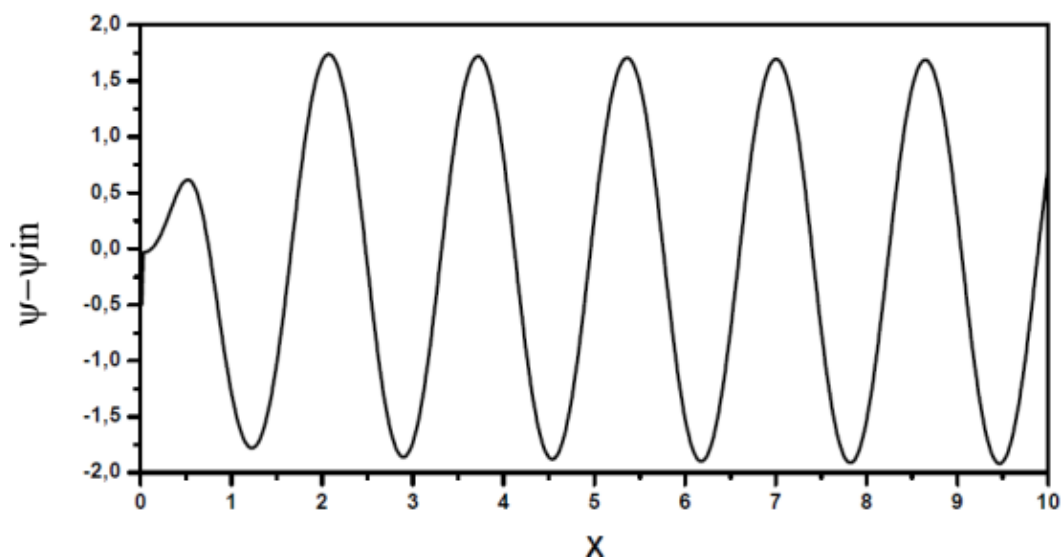


Figure 4.6 Oscillation de la perturbation de la fonction de courant

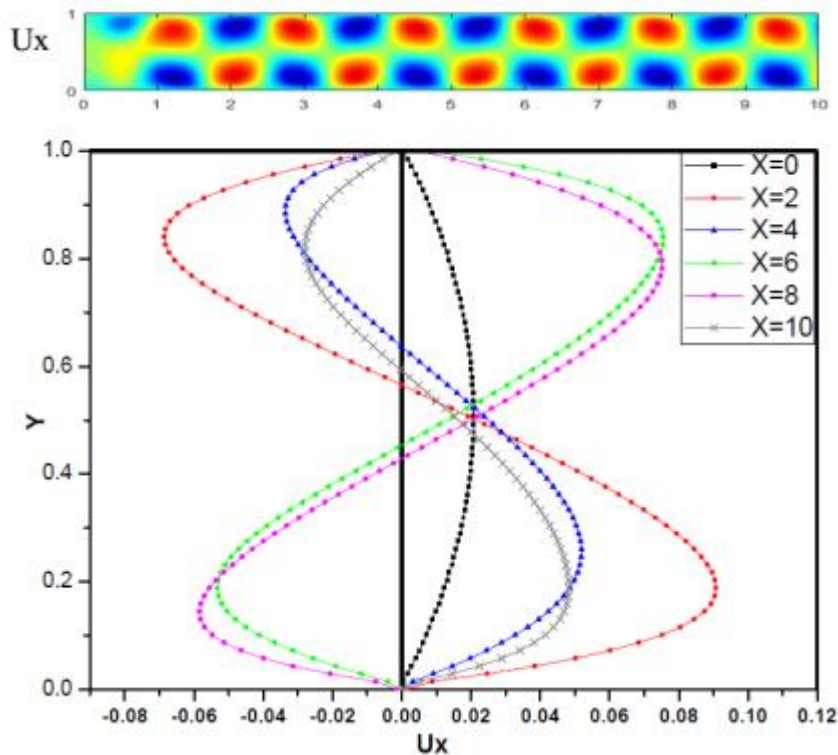


Figure 4.7 Le profil de vitesse adimensionnel U_x à $X = 0, 2, 4, 6, 8$ et 10 accompagné des contours correspondant

Le profil de vitesses verticale (U_y) au milieu du canal est représenté dans la Figure 4.8, les résultats indiquent que le profil de Poiseuille à l'entrée stabilise l'écoulement et que les particules ont besoins d'une certaine distance pour que l'écoulement devienne thermoconvectivement établi. La longueur de cette distance est la conséquence du développement de la couche limite thermique près des parois.

La Figure 4.9 montre l'évolution de la température à $Y = \frac{1}{2}$, c'est clair que l'effet de la température deviens plus significatif près des parois où le gradient de température est le plus faible.

L'évolution du nombre de Nusselt local pour les parois chaudes et froides est représenté dans la Figure 4.10. On Remarque que l'écoulement à l'entrée est par conduction, où le nombre de Nusselt est égale à 1 au niveau de la paroi chaude et pour la paroi froide ($Nu = 0$). Le transport de la chaleur se fait par advection dans la totalité de la conduite, c'est l'effet dominant après la formation de rouleaux.

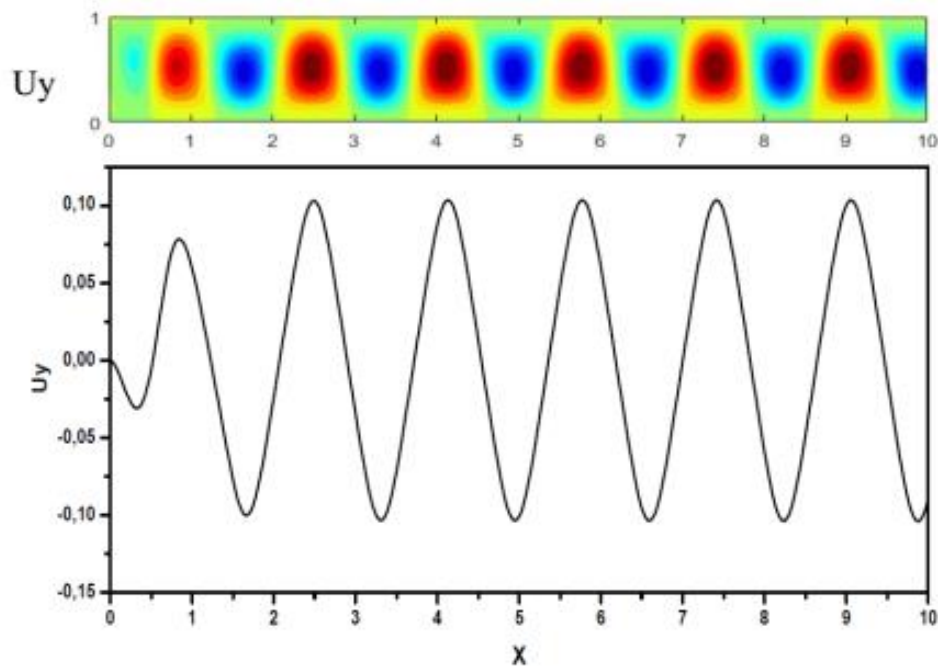


Figure 4.8. Evolution du profil de vitesse (U_y) le long du canal à $Y/2$, accompagné des contours correspondants

Lorsque l'écoulement devient instable, le nombre de Nusselt local augmente soudainement, et commence à osciller. A noter aussi que le nombre de Nusselt local moyen est de $Nu_h = 1,4645$ pour la paroi chaude et de $Nu_c = 1,4645$ pour la paroi froide. D'après l'évolution du nombre de Nusselt local, on peut déduire que le transfert de chaleur local est dû à la recirculation des écoulements ascendants et descendants entre les deux parois.

Au niveau de la paroi chaude le nombre de Nusselt local est maximal lorsque le mouvement convectif est descendant ; d'autre part, lorsque le mouvement convectif est ascendant le nombre de Nusselt local est minimal, et inversement pour la paroi froide.

La Figure 4.11 montre les fonctions de courant, la température et les profils de vitesse à travers le canal à $X=5$ et $X=10$ au temps $t = t_T$, ces résultats confirment l'évolution de l'écoulement entre $X=5$ et $X=10$ en montrant la déformation des champs dynamiques et thermique au temps $t = t_T$. En espérant que de tels résultats fournissent des informations utiles pour le choix optimal des conditions aux limites à la sortie.

On remarque aussi que à $X = 5$, le profil de vitesse U_x est positif, tandis que le profil U_y est négatif à travers la conduite. Pour $X=10$ le profil de vitesse U_x est positif près de la paroi chaude et négatif près de la paroi droite avec le profil de vitesse U_y négatif. Par contre l'allure des profils de vorticité est un peu complexe.

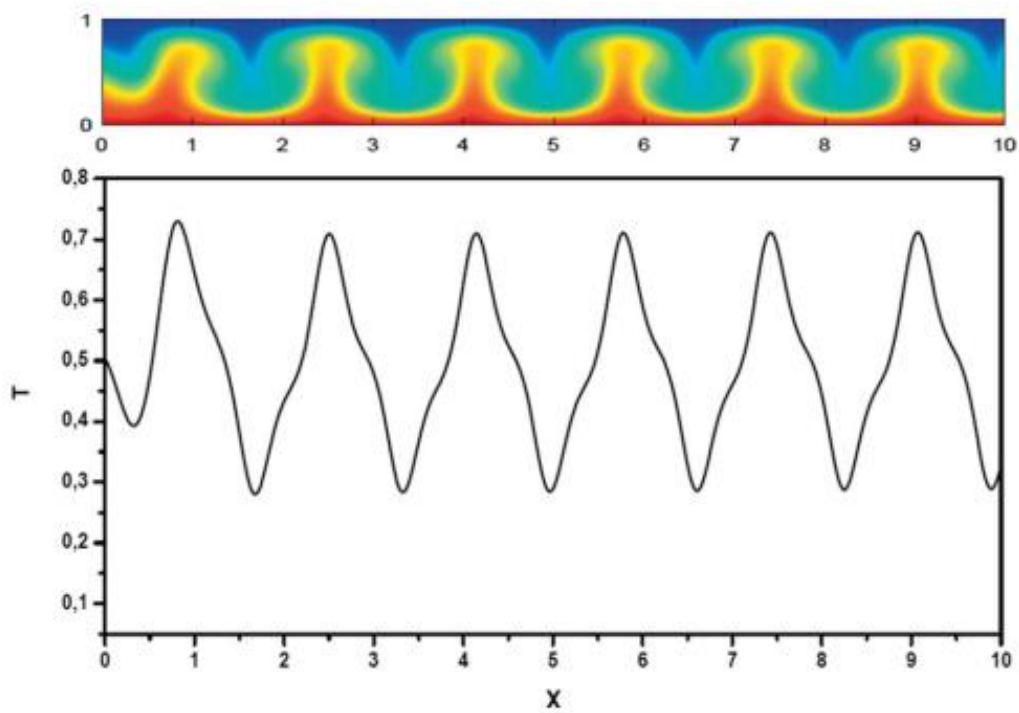


Figure 4.9 Profil de vitesse le long du canal avec le contour correspondant

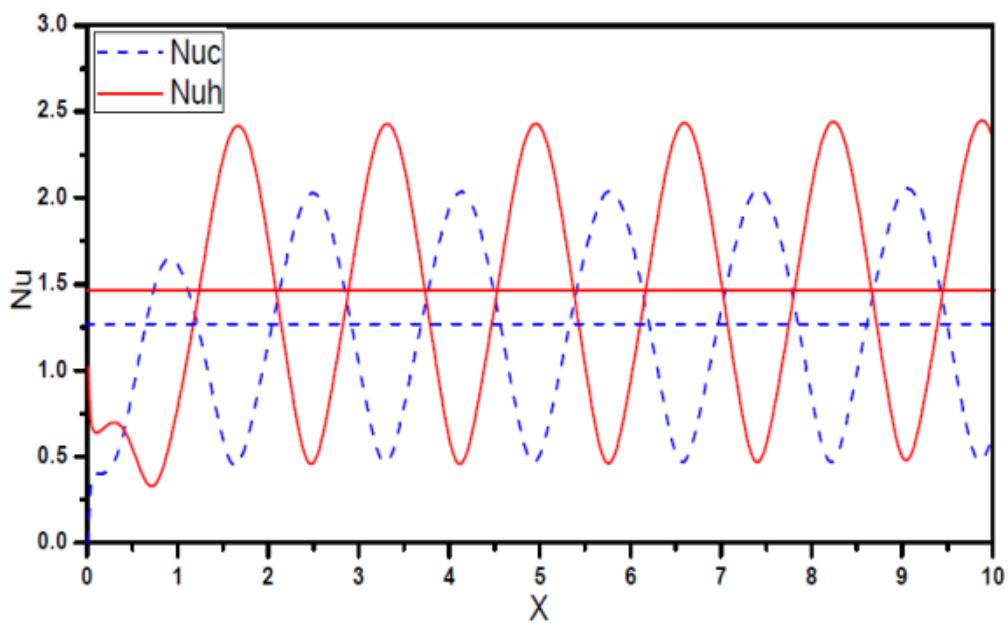


Figure 4.10 Nombres de Nusselt locaux Nu_h et Nu_c respectivement le long de la paroi du haut et du bas

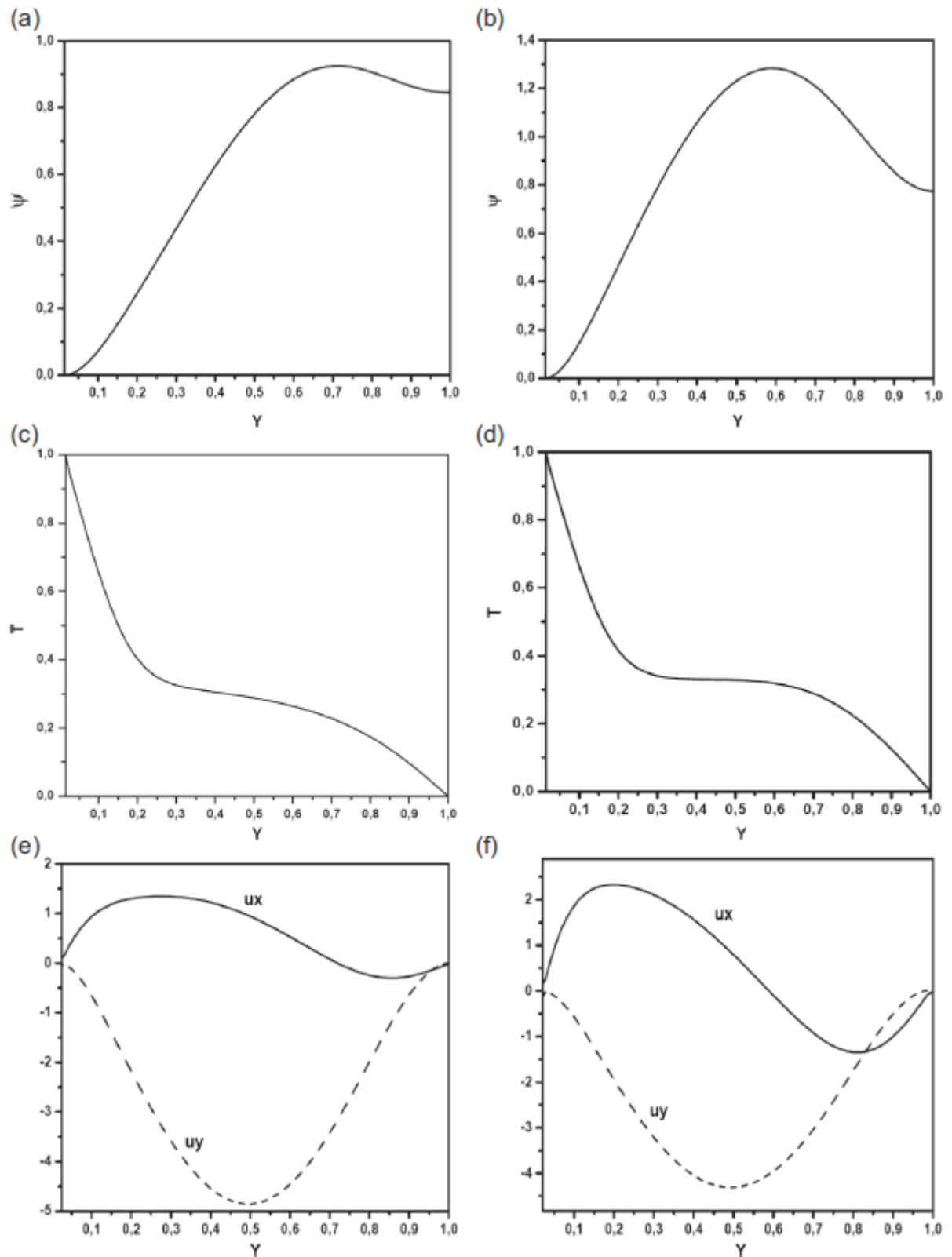


Figure 4.11 Distributions à $X = 5$ (a, c, e) et à $X = 10$ (b, d, f) des profils de ligne de courant, des températures et des profils de vitesse (U_x et U_y) respectivement

4.3.2 L'effet des paramètres secondaires :

Dans cette partie, on étudie l'effet de certains paramètres régissant l'écoulement étudié, tel que le nombre de Prandtl et le rapport de forme. On maintient les mêmes conditions aux limites d'entrée et de sortie considérées précédemment pour cette étude et de même pour le maillage utilisé.

4.3.2.1 L'effet du nombre de Prandtl :

Le but de cette partie est d'analyser l'effet du nombre de Prandtl à des valeurs faibles sur l'écoulement et le transfert de chaleur. Les résultats sont illustrés sur la figure 4.12 dans laquelle on représente le profil de température adimensionnel le long du canal à mi-hauteur, pour différents nombres de Prandtl ($Pr = 0.05, 0.1, 0.667$ et 6.4), ainsi que les contours de température correspondants et cela pour des nombres de Rayleigh égale à 4700 et Reynolds fixés à 1 .

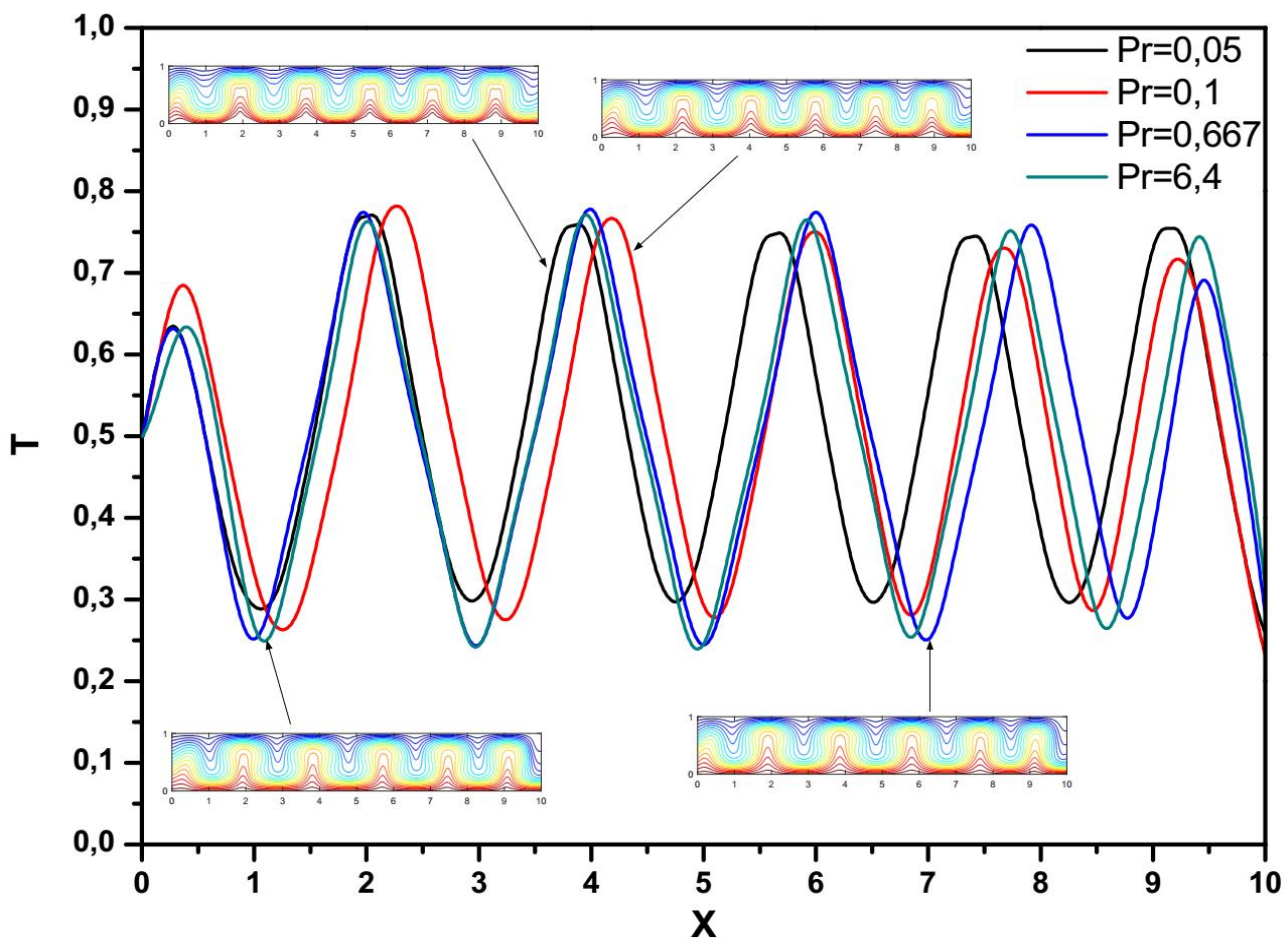


Figure 4.12. Profil de température adimensionnel le long du canal à mi-hauteur et les contours de températures correspondants pour $Pr = 0.05, 0.1, 0.667$ et $Pr = 6.4$ ($Ra = 4700$ et $Re = 1$)

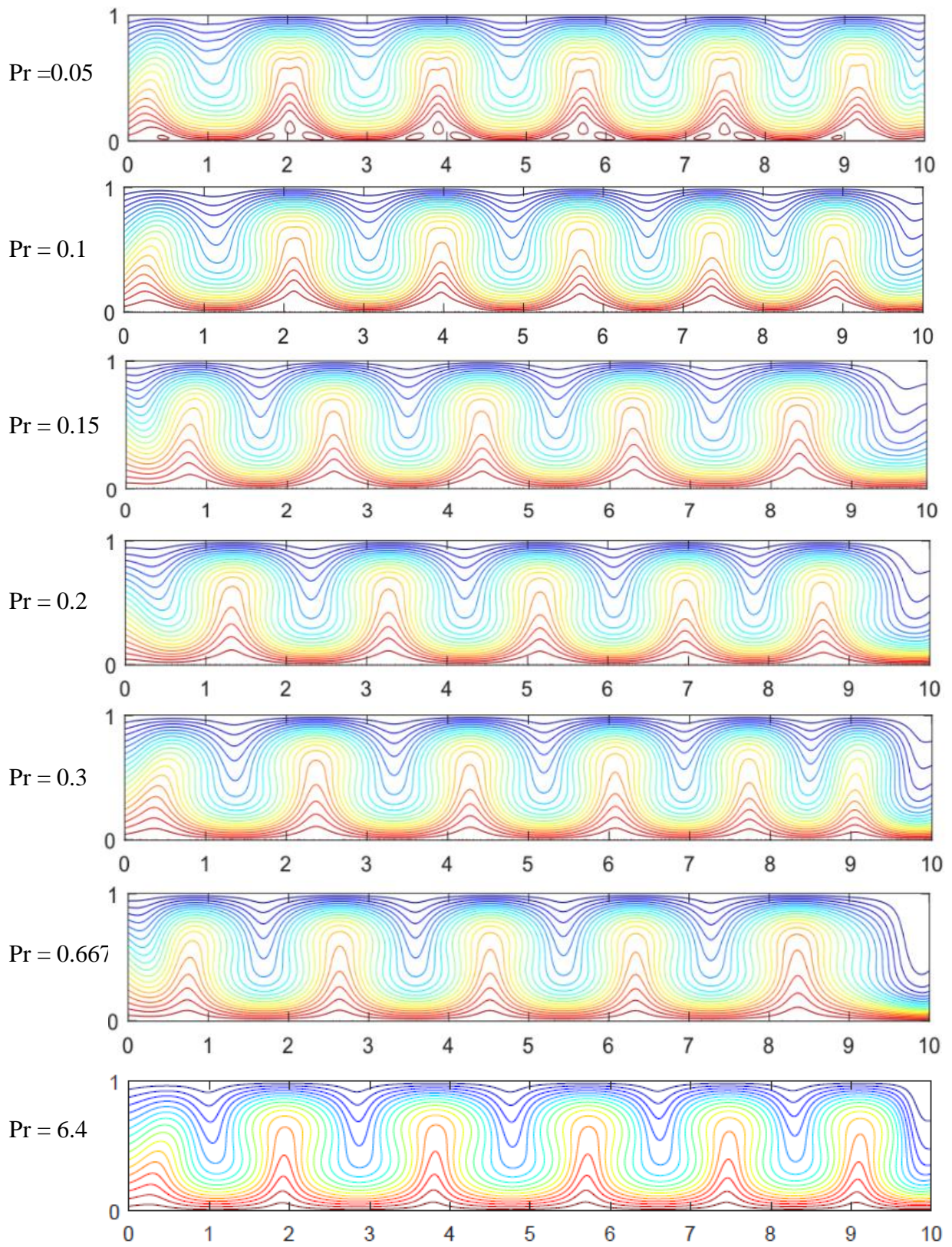


Figure 4.13 Contours de température pour $Pr = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.667, 6.4$
($Ra = 4700$ et $Re = 1$)

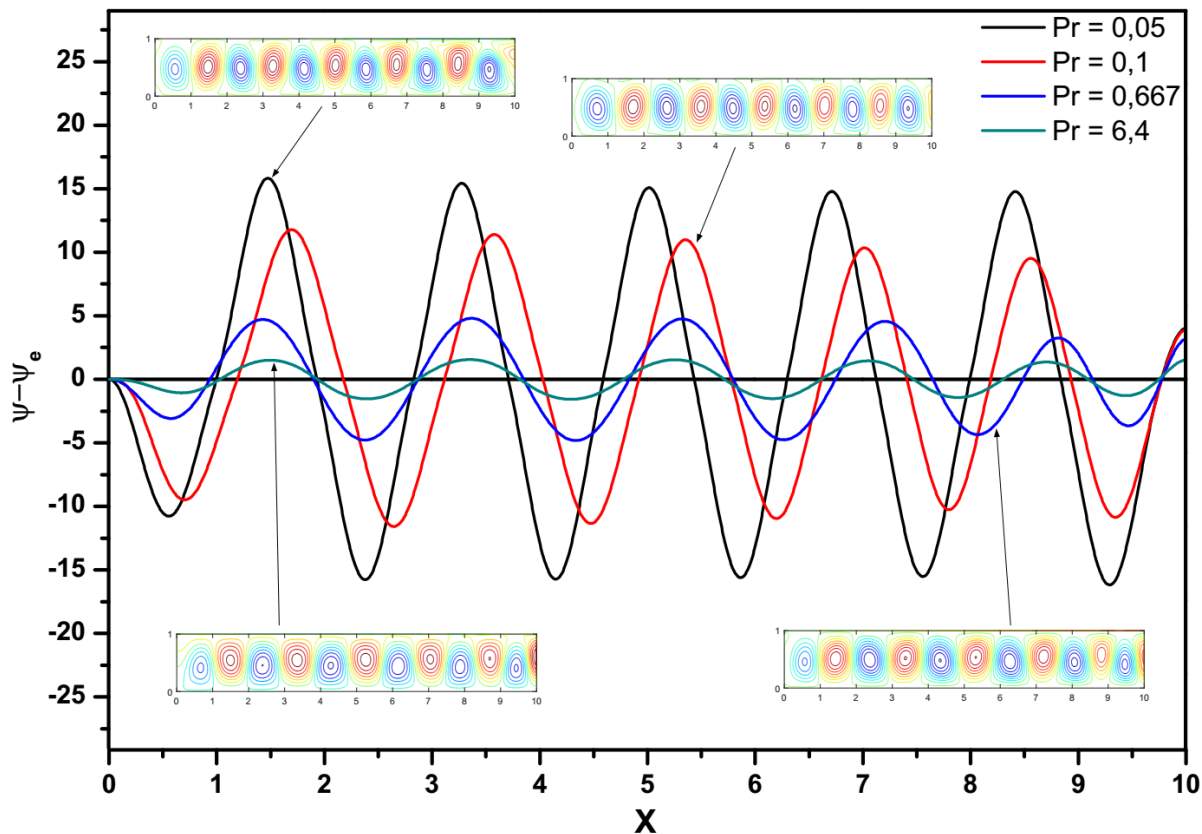


Figure 4.14 Oscillation de la perturbation de la fonction de courant ainsi que les lignes de courant correspondants pour $Pr = 0,05, 0,1, 0,667$ et $6,4$ ($Ra = 4700$ et $Re = 1$)

Les contours de températures sont représentés sur la figure 4.13 pour des valeurs du nombre de Prandtl allant de 0.05 à 6.4. On remarque que lorsque le nombre de Prandtl augmente les lignes des contours de température deviennent plus dense près de la paroi chaude ; ce qui peut être expliqué par le fait que les fluides à nombre de Prandtl faible sont caractérisés par une large couche limite thermique et des conductivités thermiques élevés, ce qui fait que la diffusion de chaleur est plus rapide au voisinage de la paroi chaude pour les fluides à faible nombre de Prandtl.

L'Oscillation de la perturbation de la fonction de courant ainsi que les contours de ligne de courant correspondants pour différents nombres de Prandtl sont représentées dans la figure 4.14. Les contours de la fonction de courant sont représentés pour des valeurs de nombre de Prandtl allant de 0.05 à 6.4 (Fig 4.15). Les lignes de courant sont sous forme de rouleaux convectifs rotationnels, qui translatent vers la sortie du canal.

On observe que lors de l'augmentation du nombre de Prandtl, la vitesse de rotations des rouleaux augmente, d'autre part, l'amplitude de l'oscillation diminue. Ceci est due au fait que les fluides à nombre de Prandtl élevés ont une couche limite dynamique élevée, ce qui

correspond à des fluides de nature visqueuse, ce qui fait que la diffusion de quantité de mouvement est le mécanisme prédominant qui affecte le plus l'oscillation.

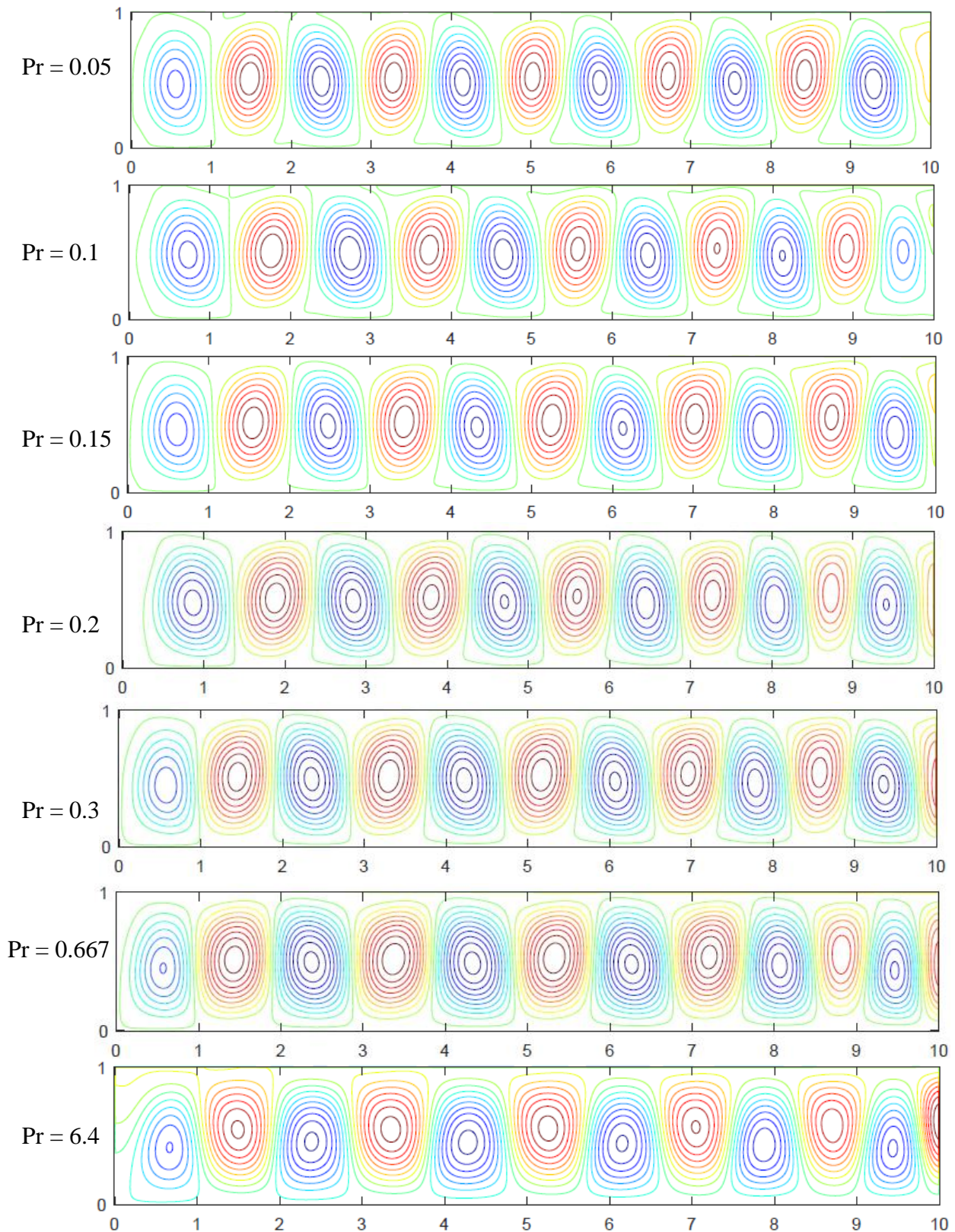


Figure 4.15 Lignes de courant pour $Pr = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.667, 6.4$ ($Ra = 4700$ et $Re = 1$)

Les contours de températures ainsi que les lignes de courant en fonction du temps pour le nombre de Prandtl faible ($Pr = 0.05$) et pour $Ra = 4700$ et $Re = 1$ sont représentés dans la figure 4.16. On remarque que la variation du nombre de Nusselt moyen en espace et en temps ($\langle \overline{Nu} \rangle$) est périodique dans le temps. Ces résultats ont été extraits sur trois points du temps de réponse d'une période effectuée sur les valeurs du nombre de Nusselt moyen.

L'étude de l'influence du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl faible Pr (0.05, 0.1, 0.667) sur la variation de Nusselt moyen ($\langle \overline{Nu} \rangle$) a été réalisée et ce pour deux valeurs du nombre de Rayleigh (Fig. 4.17). Comme c'est illustré, il est clair que pour les deux valeurs du nombre de Rayleigh, la valeur maximale du nombre de Nusselt moyen est atteinte pour le cas où $Pr = 0.667$. En effet, les fluides à large nombre de Prandtl sont capables de transporter plus de chaleur de la paroi chaude vers la sortie du canal.

Dans le cas du nombre de Rayleigh égale à 2420, on constate une légère diminution du nombre de Nusselt moyen avec l'augmentation du nombre de Reynolds, ce qui est différent de ce que l'on a pu observer dans le cas où $Pr = 6.4$ (Fig 4.2). Dans ce dernier cas, le nombre de Nusselt moyen chute brusquement jusqu'à $\langle \overline{Nu} \rangle = 1$ pour $Re = 1.5$.

L'augmentation du nombre de Reynolds mène à la prédominance de la convection forcée sur la convection naturelle, ce qui peut être expliqué par le fait que les fluides à faible nombre de

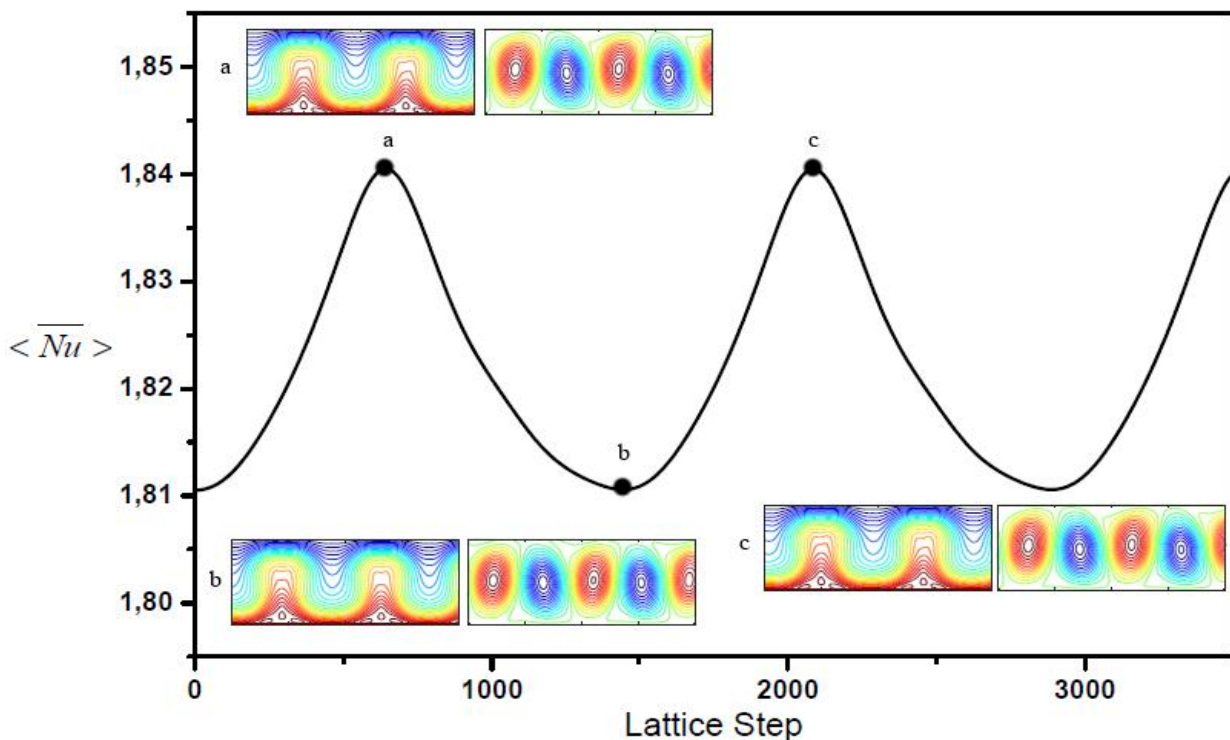


Figure 4.16 Variation du nombre de Nusselt moyen en temps et en espace pour $Pr = 0.05$, $Re = 1.5$ and $Ra = 4700$

Prandtl sont caractérisés par une haute conductivité thermique et une large couche limite thermique comparé aux fluides à nombre de Prandtl élevée

L'influence de l'augmentation du nombre de Prandtl sur le profil de vitesse adimensionnel (U_x) transversal est illustré dans la figure 4.18. La raison pour laquelle le profil est pris à $X = 5$ est d'éviter l'influence des conditions aux limites à la sortie (OBC) qui risquent de corrompre l'écoulement [44]. Les profils de vitesses montrent que pour des nombres de Prandtl faibles ($Pr < 0.1$), la déformation du profil au voisinage des paroi chaudes et froides est évidente et la valeur maximale se trouve près de la paroi chaude. Ceci est due aux petites couches limites dynamiques qui caractérisent les fluides à faible nombre de Prandtl. D'autre part les fluides à nombre de Prandtl élevés possèdent une faible conductivité thermique, ce qui génère de plus faibles températures. Ce dernier est très bien illustré dans la figure 4.19, où l'on constate que les températures augmentent avec la diminution du nombre de Prandtl.

La figure 4.20 montre l'effet du nombre de Prandtl sur le nombre de Nusselt moyen dans l'espace et le temps pour $Ra = 2420$ et $Ra = 4700$, et un nombre de Reynolds fixé à $Re = 1$. On remarque que la variation du nombre de Prandtl a un effet significatif sur le transfert de chaleur pour de faibles nombres de Prandtl (de 0.05 à 0.3). Toutefois, l'effet de ce dernier sur le nombre de Nusselt moyen devient négligeable lorsque $Pr > 0.3$, ce qui signifie que le transfert de chaleur reste quasi-constant avec l'augmentation du nombre de Prandtl, et cela pour les deux valeurs du nombre de Rayleigh utilisées : $Ra = 2420$ et $Ra = 4700$.

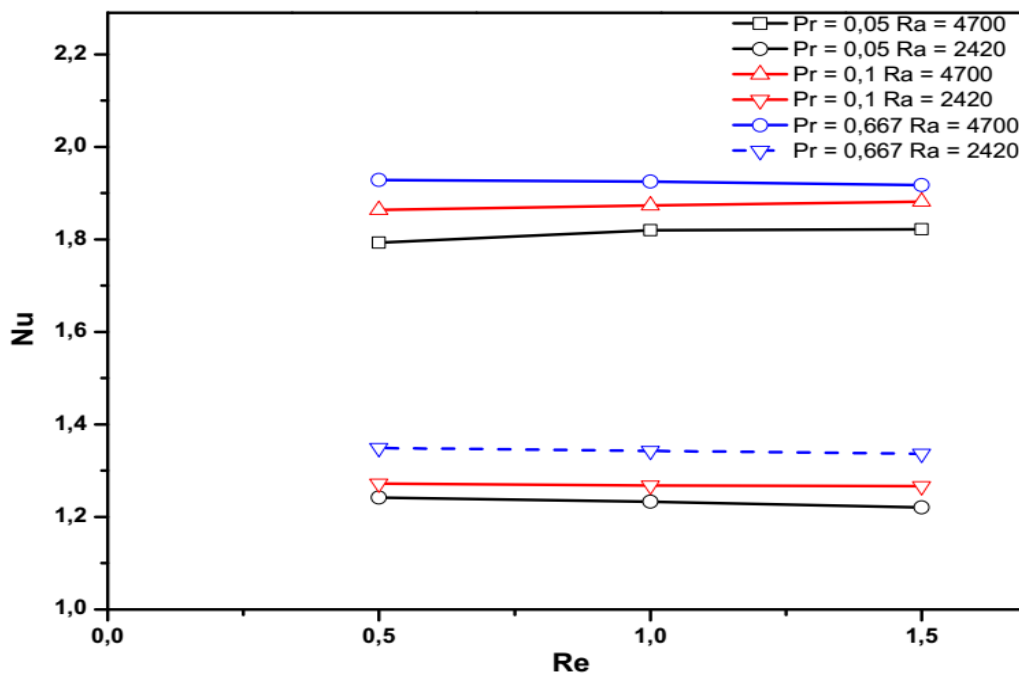


Figure 4.17 Nombre de Nusselt moyen dans l'espace et le temps en fonction de Re et de Ra pour Pr = 0.1, Pr = 0.05 et Pr = 0.667

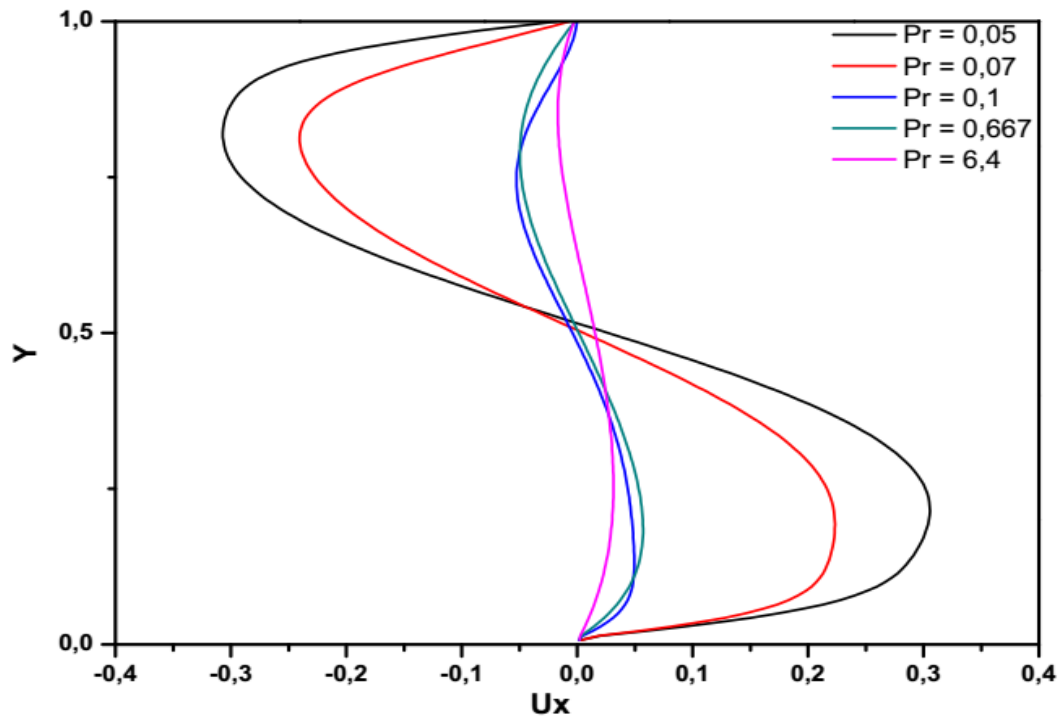


Figure 4.18 Profil de vitesse adimensionnelle (U_x) transversal à $X = 5$ pour $Pr = 0.05, 0.07, 0.1, 0.667$ et 6.4

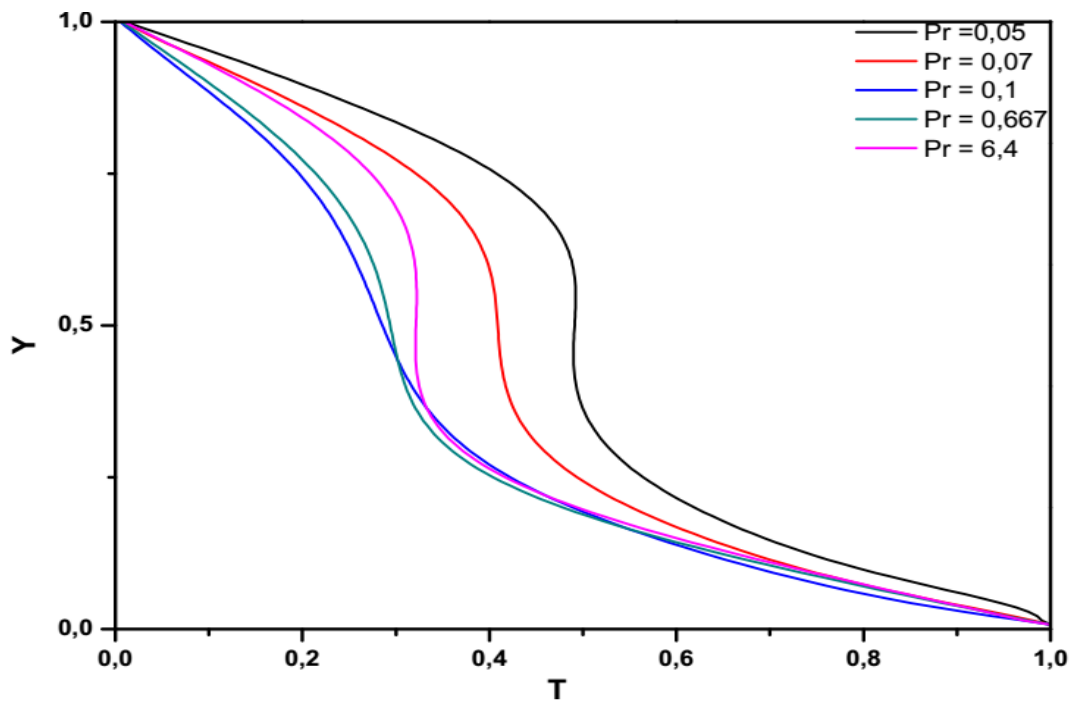


Figure 4.19 Profil de température adimensionnelle transversal à $X = 5$ pour $Pr = 0.05, 0.07, 0.1, 0.667$ et 6.4

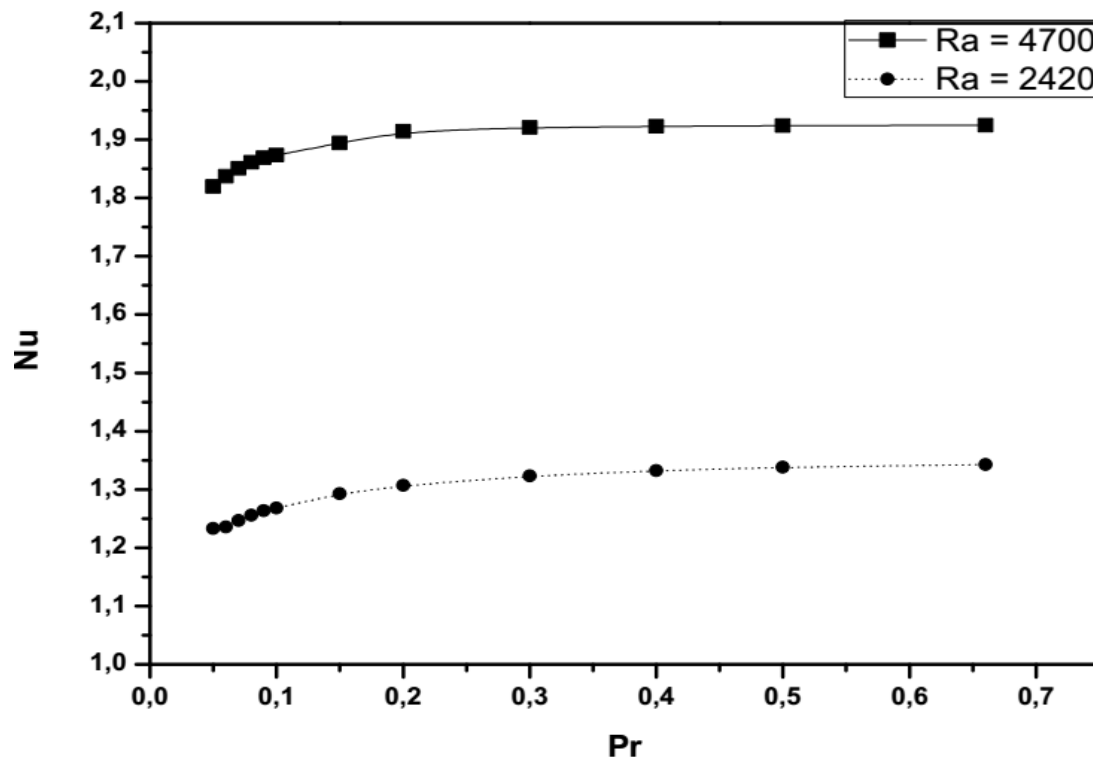


Figure 4.20 L'effet du nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur pour $Ra = 4700$, $Ra = 2420$ et $Re = 1$

4.3.2.2 L'effet du rapport d'allongement :

Le but de cette partie du travail est d'étudier l'effet du rapport d'allongement sur la structure de l'écoulement. Les résultats sont illustrés par les contours de température, les lignes de courants et les différents profils de vitesse seront présentés pour différents rapports d'allongement ($B = 8, 10, 12, 15$ et 20) et comparés à un canal de rapport d'allongement de $B=5$. On notera que pour cette partie, les paramètres suivants seront fixés ($Re = 10$, $Ra = 10^4$ et $Pr=0.667$).

Pour les contours de température (Fig. 4.21), on constate l'apparition de panaches servant à transporter la chaleur de la paroi chaude vers la sortie. Dans le cas où $B = 20$, neuf panaches peuvent être observées, tandis que pour $B = 15, 12, 10, 8$ et 5 on compte : sept, cinq, quatre, trois et deux panaches respectivement.

L'examen attentif sur les lignes de courant (Fig. 4.22) démontre que l'écoulement se caractérise par l'apparition de rouleaux transversaux. Pour $B = 20$, on compte approximativement 16 rouleaux occupent le canal, tandis que pour $B=15, 12, 10, 8$ et 5 on compte 16, 12, 8, 6, 3 rouleaux respectivement.

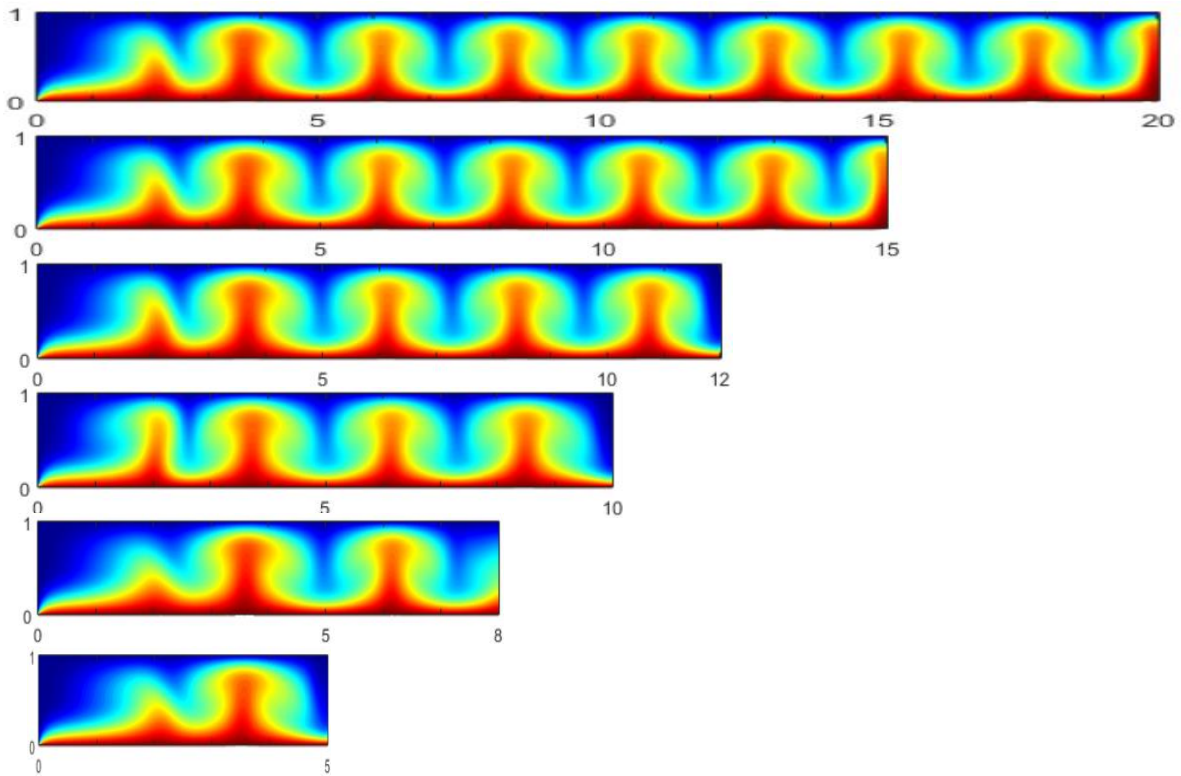


Figure 4.21 Contours de température pour $B = 5, 8, 10, 12, 15$ et 20 ($Ra = 10^4$, $Re = 10$ et $Pr = 0.776$)

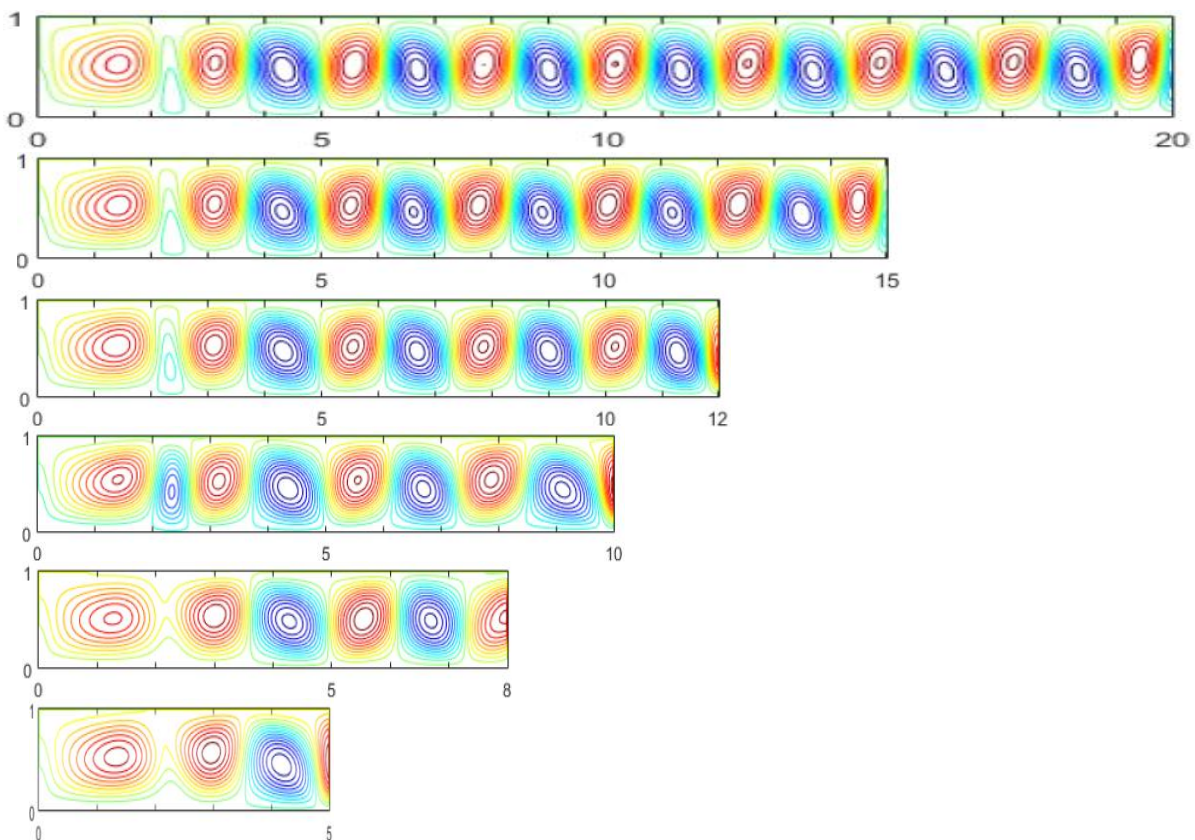


Figure 4.22 Lignes de courants pour $B = 5, 8, 10, 12, 15$ et 20 ($Ra = 10^4$, $Re = 10$ et $Pr = 0.776$)

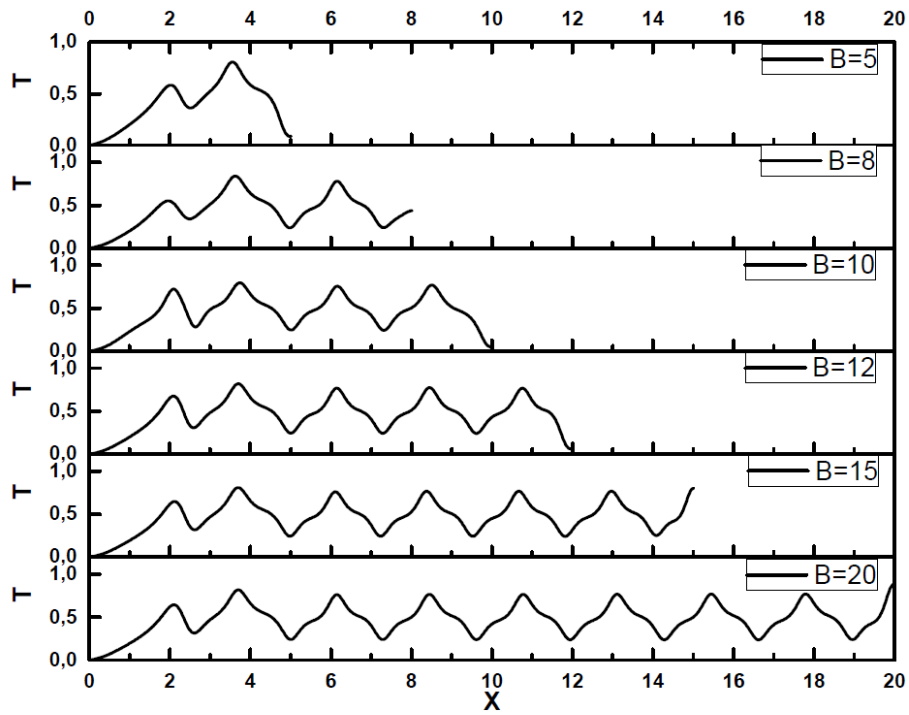


Figure 4.23 Profil de température adimensionnelle à $Y/2$ pour $B = 5, 8, 10, 12, 15, 20$

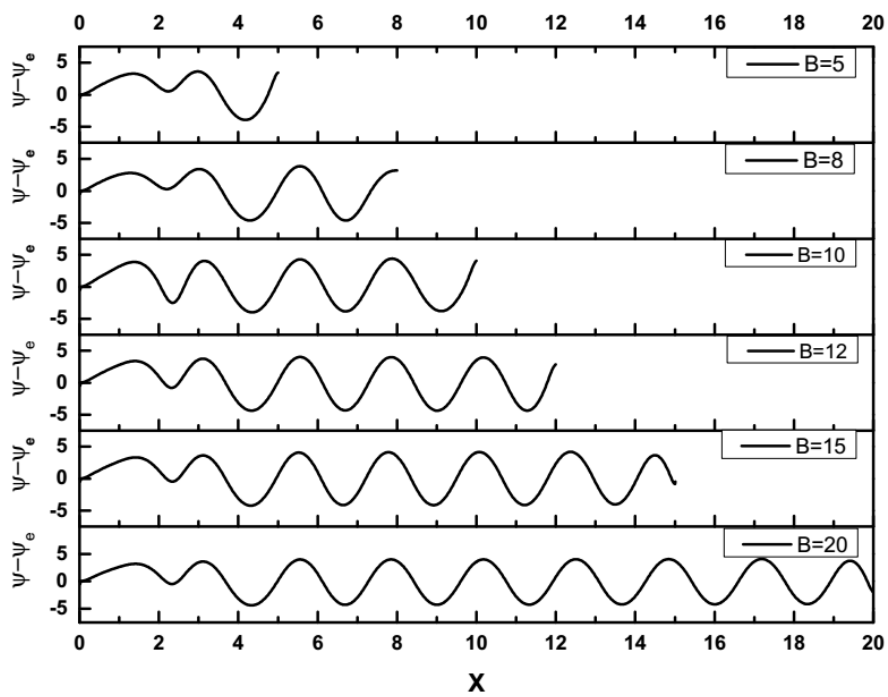


Figure 4.24 Oscillation de la perturbation de la fonction de courant le long du canal à $Y/2$ pour $B = 5, 8, 10, 12, 15, 20$

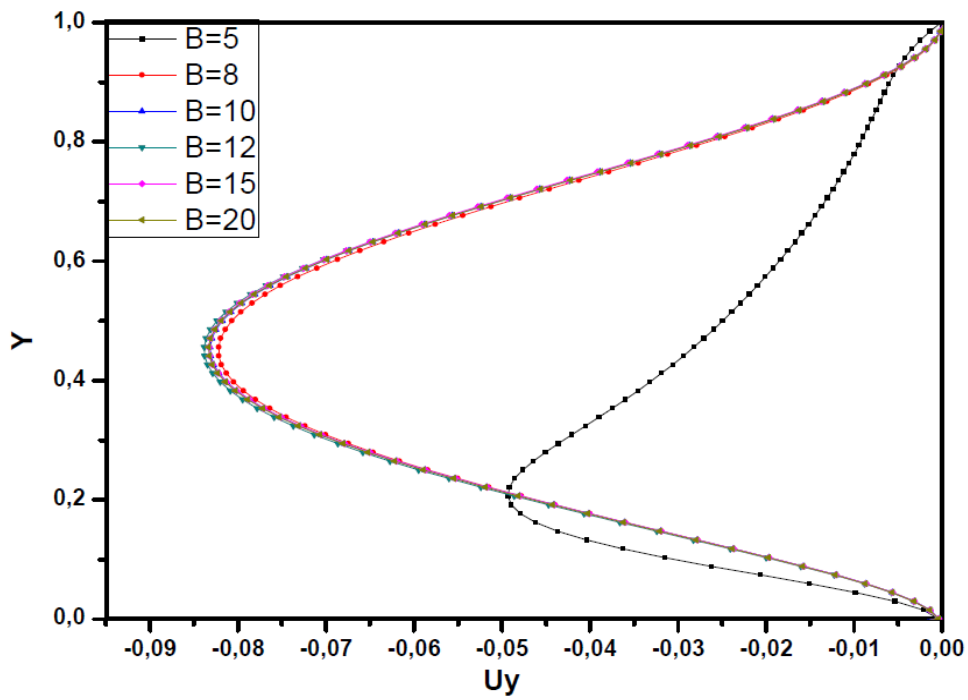


Figure 4.25 Profil de vitesse adimensionnelle (U_y) à $X=5$ pour $B = 5, 8, 10, 12, 15, 20$.

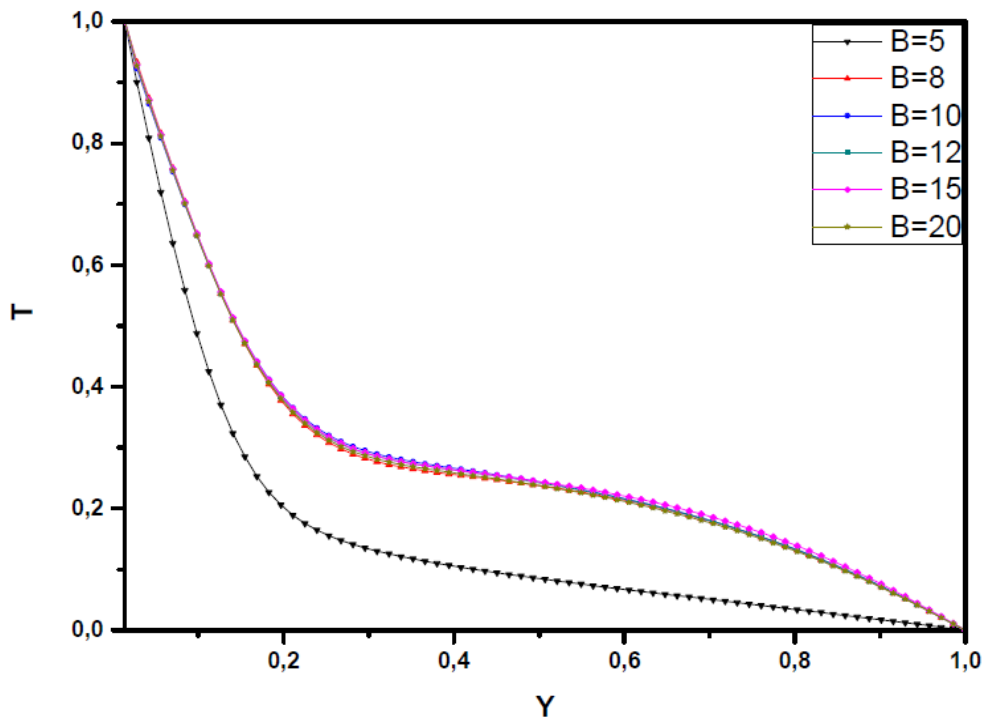


Figure 4.26 Profil de température adimensionnelle à $X=5$ pour $B = 5, 8, 10, 12, 15, 20$

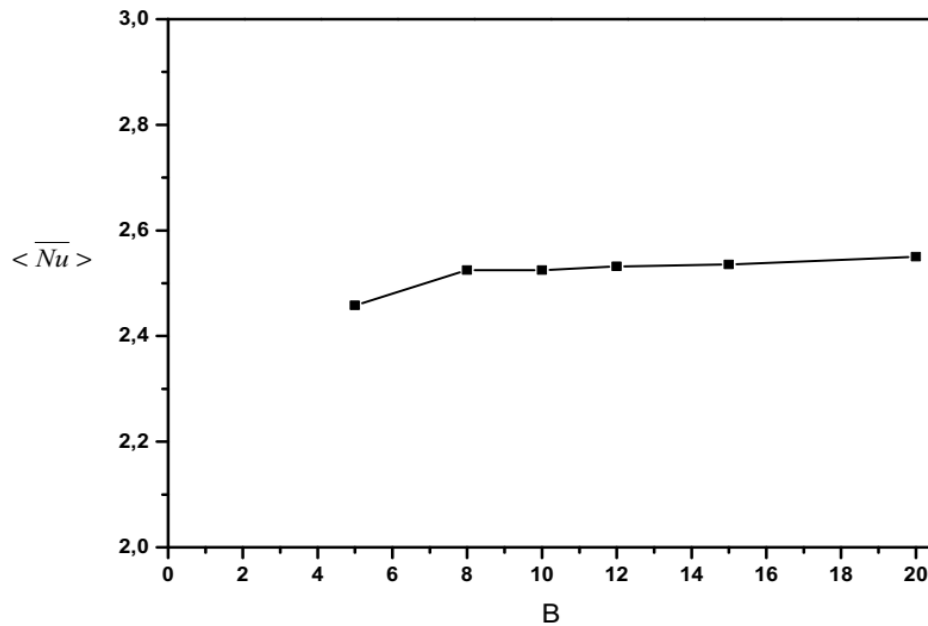


Figure 4.27 L'effet du rapport d'allongement sur le nombre Nusselt moyen

Le profil de température adimensionnelle ainsi que l'oscillation de la perturbation de la fonction de courant le long du canal sont représentés dans les figures 4.23 et 4.24 respectivement, on constate l'effet des conditions aux limites à la sortie (OBC) sur les profils, et plus particulièrement sur les profils de température.

Les effets des conditions aux limites à la sortie sont illustrés clairement sur les figures 4.25 et 4.26, sous forme le profil de vitesse et de température adimensionnels à $X=5$. Il est bien montré dans ces deux graphes que les conditions aux limites corrompent l'écoulement dans le cas où $B = 5$ (un canal court), en le comparant aux autres cas de rapport d'allongement plus long ($B > 5$), où la sortie est plus éloignée de la position $X = 5$.

L'effet du rapport d'allongement sur le nombre de Nusselt moyen est illustré dans la figure 4.27. La valeur du nombre de Nusselt moyen varie de 2,53 à 2,55, avec une petite augmentation n'excédant pas 0,8% entre $B = 8$ et 20 (rapport d'allongement considéré infini). Entre $B=5$ et $B=8$ l'augmentation est relativement importante.

4.4 Simulation du phénomène en utilisant la méthode de Boltzmann à plusieurs temps de relaxation (MRT):

Dans cette partie nous allons présenter les résultats de la simulation reproduisant le phénomène physique par la méthode MRT. Une étude de l'effet du nombre de Reynolds sur l'écoulement sera faite, en comparant les résultats obtenus avec ceux de la méthode LBM-SRT pour un nombre de Prandtl de $Pr = 0.667$ et un rapport d'allongement $B = 10$.

- **L'effet du nombre de Reynolds sur l'écoulement :**

Les résultats présentés dans cette partie ont été pris à un temps t_T qui correspond au minimum de la température à la sortie du canal, cet instant est choisis arbitrairement. Une comparaison des lignes de courant entre les méthodes SRT-MRT, dans la première moitié du domaine pour des valeurs du nombre de Reynolds de 10, 20 et 40 pour Rayleigh égal à 8000 est illustrée dans la figure 4.28. L'oscillation du déplacement des particules le long du canal avec les lignes de courant correspondantes pour les mêmes valeurs du nombre de Reynolds mais pour un nombre de Rayleigh $Ra = 15000$ sont présentés dans la figure 4.29, et cela pour les méthodes SRT et MRT.

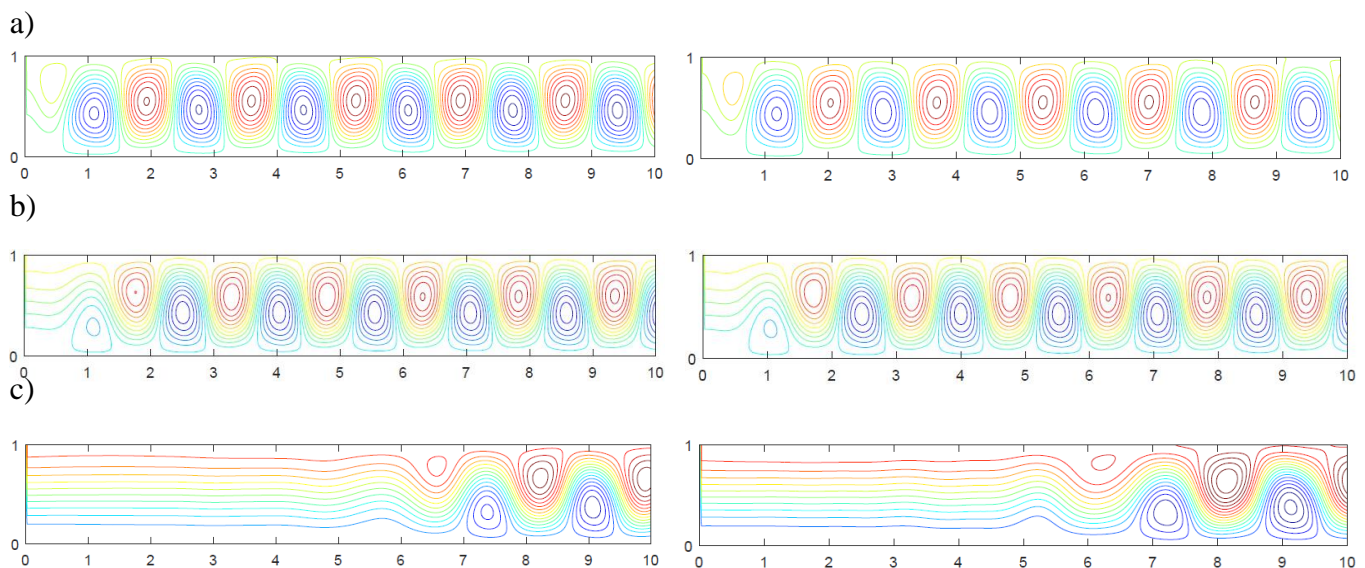


Figure 4.28 Lignes de courant pour : a) $Re = 10$, b) $Re = 20$, $Re = 40$ pour $Pr = 0.667$ ($Ra = 8000$),
Gauche : SRT, Droite : MRT

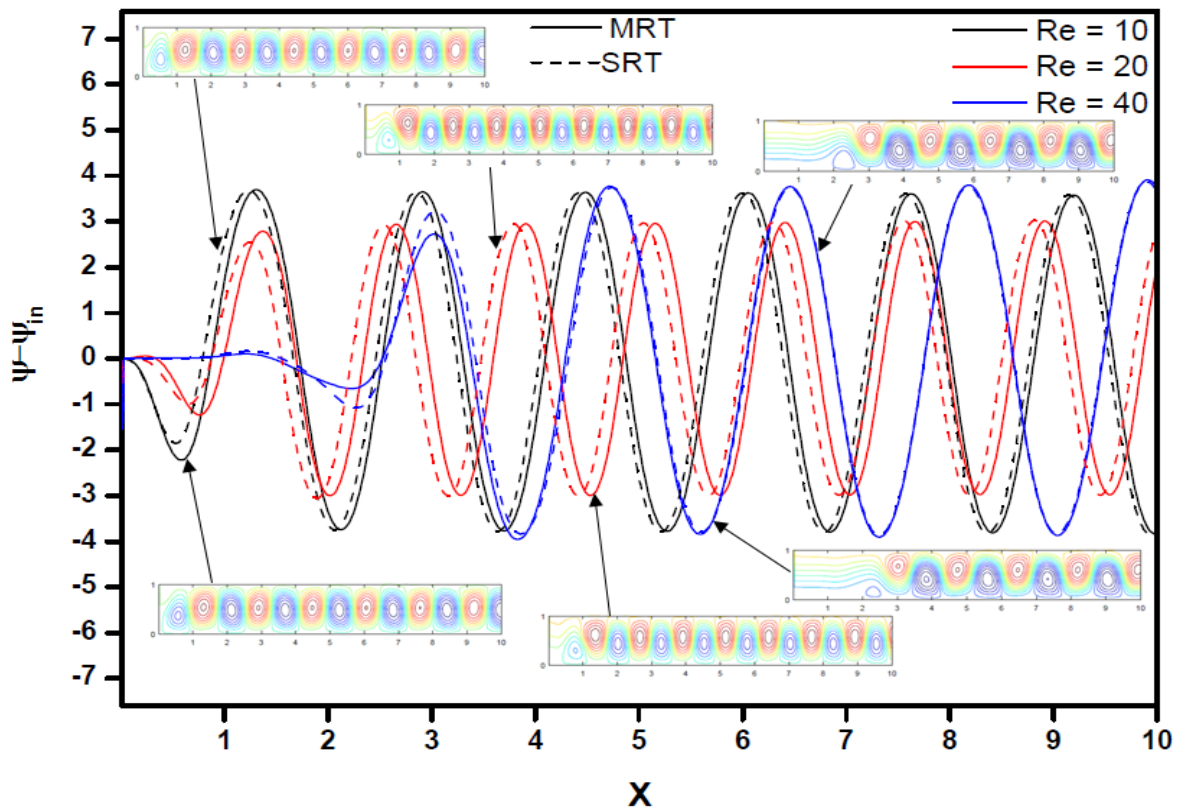


Figure 4.29 Oscillation de la perturbation de la fonction de courant le long du canal et les lignes de courants correspondant pour $Re = 10, 20$ et 40 ($Ra = 15000$)

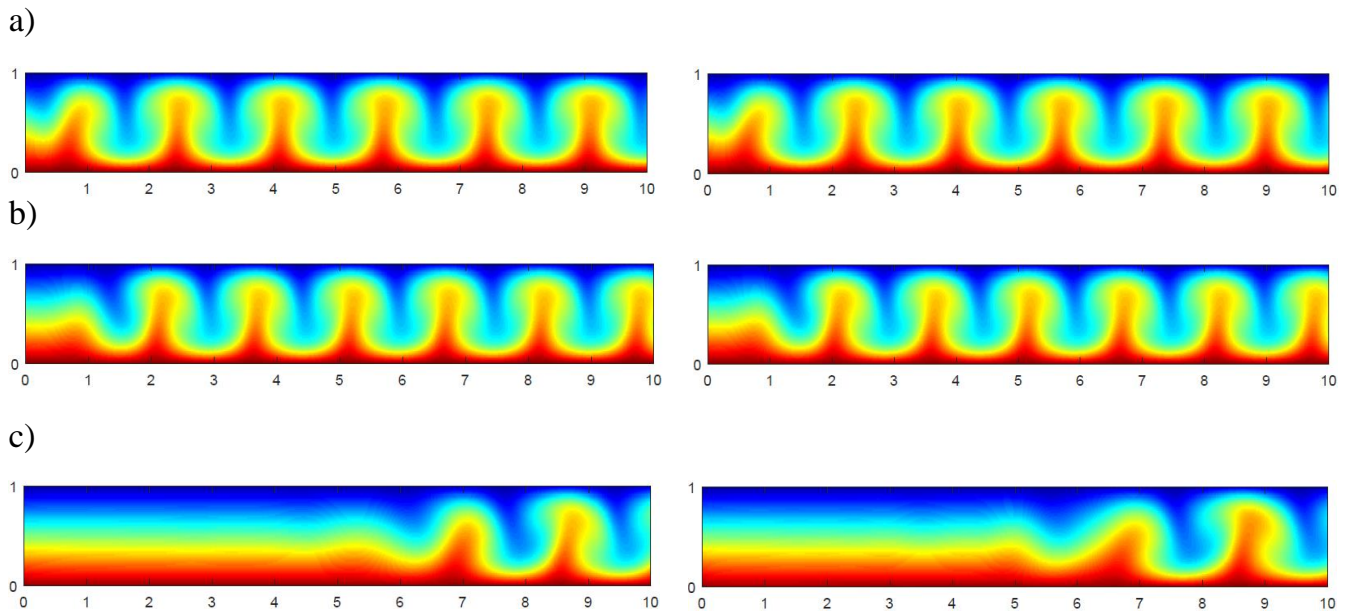


Figure 4.30 Contours de température pour : a) $Re = 10$, b) $Re = 20$, $Re = 40$ pour $Pr = 0.667$ ($Ra = 8000$), Gauche : SRT, Droite : MRT

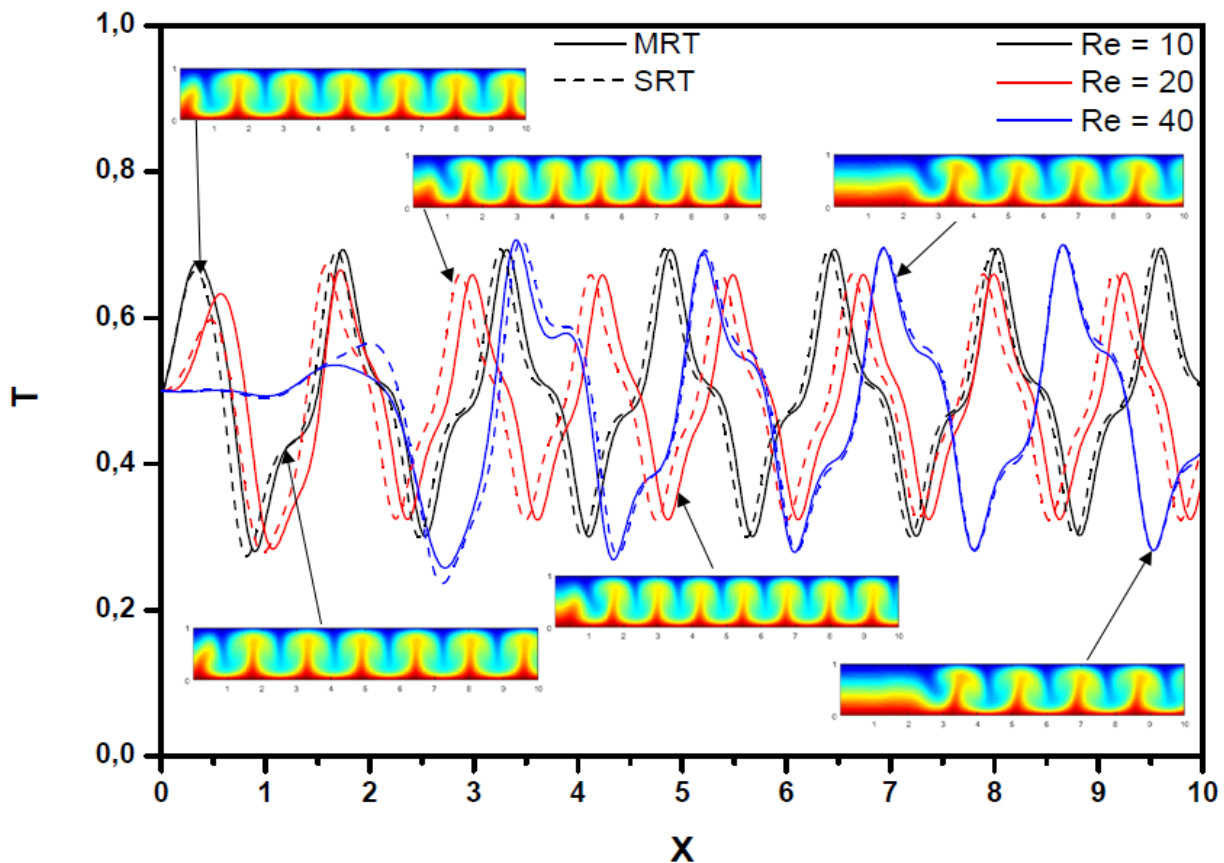


Figure 4.31 Le profil de température le long du canal avec les isothermes correspondants pour $Re = 10, 20$ and 40 ($Ra = 15000$)

On constate que la vitesse de déplacement des rouleaux convectifs observés dans les contours augmente, ainsi que l'oscillation des particules avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Par conséquent, on remarque que la longueur d'établissement de ces rouleaux s'allonge par rapport à la frontière d'entrée.

On remarque aussi que pour un faible nombre de Rayleigh, la convection forcée prend le dessus sur la convection naturelle. Par contre, pour un nombre de Rayleigh élevé ($Ra = 15000$), on constate que la longueur d'établissement se rétracte, suite au fait que la convection forcée est moins prédominante par rapport au cas où $Ra = 8000$.

Une comparaison entre isothermes pour les méthodes SRT et MRT ainsi que les profils de températures sont présentés dans les figure 4.30 et 4.31, et cela pour les mêmes valeurs du nombre de Reynolds et pour deux valeurs du nombre de Rayleigh $Ra = 8000$ et 15000 . La première constatation est que les deux méthodes reproduisent bien le phénomène physique avec une grande similarité de point de vue quantitatif.

On constate aussi bien dans ces figures que les panaches, sont moins dense pour un Rayleigh de $Ra = 8000$ par rapport à ceux obtenues pour le nombre de Rayleigh $Ra = 15000$. On remarque aussi que l'effet du nombre de Reynolds retarde l'apparition des panaches, mais que la longueur d'établissement pour le nombre de Rayleigh élevée ($Ra = 15000$) est plus courte à celle calculée pour $Ra = 8000$ et cela pour les mêmes raisons citées dans le cas des lignes de courant.

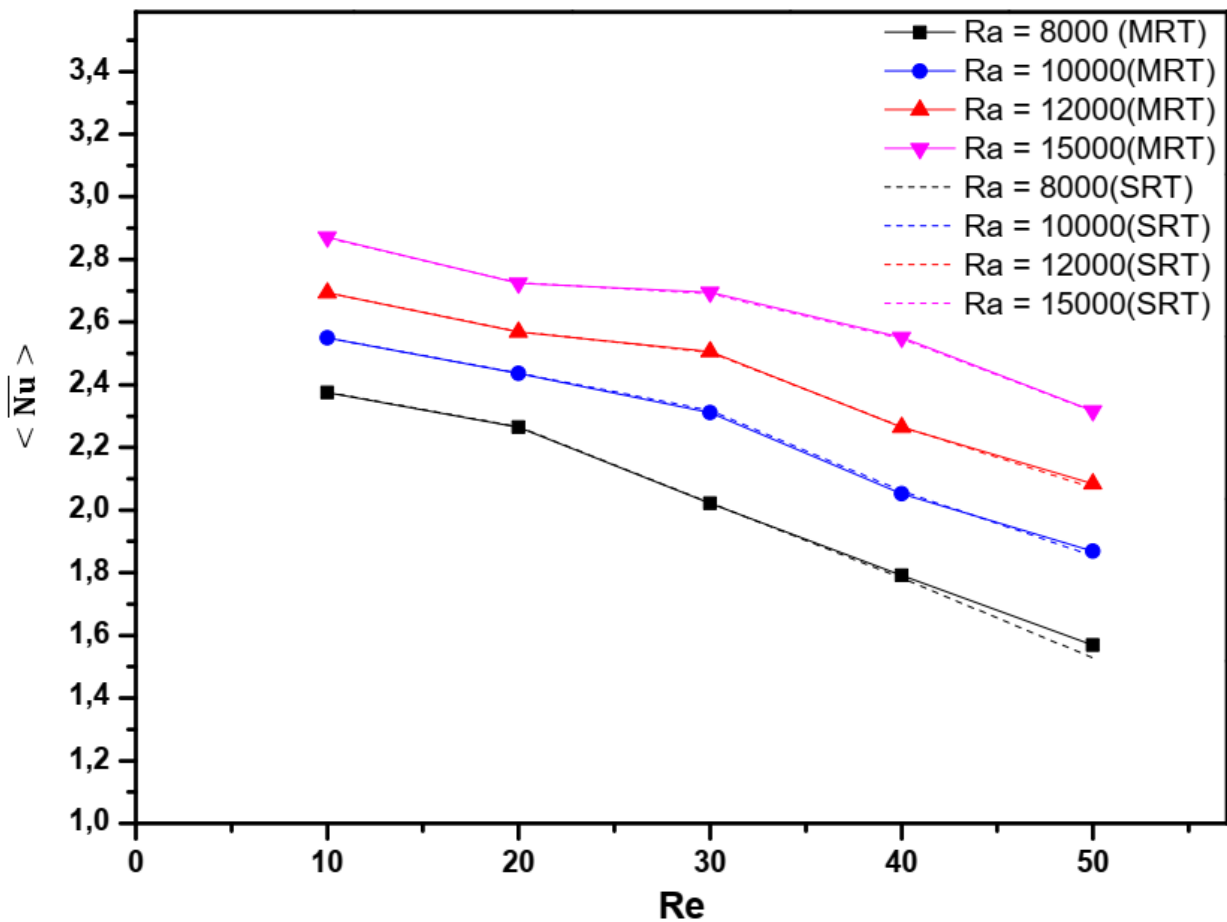


Figure 4.32 Le nombre de Nusselt moyen en temps et en espace en fonction de Re pour $Ra = 8000$, 10000, 12000 and 15000

Le nombre de Nusselt moyen dans l'espace et le temps $\langle \overline{Nu} \rangle$ pour différents nombre de Rayleigh $Ra = 8000$, 10000, 12000 et 15000 en fonction des nombres de Reynolds de $Re = 10$ jusqu'à 50 est illustré dans la figure 4.32, et cela pour les méthodes SRT et MRT. Les valeurs du nombre de Nusselt sont données en détails dans le Tableau 4.7. On constate qu'il y'a une bonne concordance entre les deux méthodes où la valeur de l'erreur maximale est de 2.61 %.

Tableau.4.7. Comparaison des $\langle \overline{Nu} \rangle$ obtenus par les méthodes SRT et MRT et cela pour des nombres de Rayleigh de $Ra = 8000, 10000, 12000$ et 15000 et $Re = 10, 20, 30, 40$ et 50

Nombre de Rayleigh	Nombre de Reynolds	Méthode numérique	$\langle \overline{Nu} \rangle$	erreur	
Ra = 8000	Re = 10	SRT	2,37630	0.07	
		MRT	2,37446		
	Re = 20	SRT	2,26580	0.028	
		MRT	2,26516		
	Re = 30	SRT	2,02248	0.08	
		MRT	2,02085		
	Re = 40	SRT	1,78302	0.45	
		MRT	1,79104		
	Re = 50	SRT	1,52861	2.61	
		MRT	1,56853		
	Ra = 10000	Re = 10	SRT	2,550	2.47
			MRT	2.487	
Re = 20		SRT	2,43694	0.05	
		MRT	2,43572		
Re = 30		SRT	2,31818	0.32	
		MRT	2,31058		
Re = 40		SRT	2,06121	0.45	
		MRT	2,05178		
Re = 50		SRT	1,85376	0.79	
		MRT	1,86849		
Ra = 12000		Re = 10	SRT	2,69297	0.005
			MRT	2,69313	
	Re = 20	SRT	2,56977	0.033	
		MRT	2,56892		
	Re = 30	SRT	2,50321	0.12	
		MRT	2,50631		
	Re = 40	SRT	2,26522	0.026	
		MRT	2,26462		
	Re = 50	SRT	2,07121	0.64	
		MRT	2,08462		
	Ra = 15000	Re = 10	SRT	2,86845	0.10
			MRT	2,87145	
Re = 20		SRT	2,72545	0.07	
		MRT	2,72354		
Re = 30		SRT	2,69047	0.2	
		MRT	2,69586		
Re = 40		SRT	2,54744	0.13	
		MRT	2,55076		
Re = 50		SRT	2,31554	0.05	
		MRT	2,31682		

On remarque que la variation du nombre de Nusselt diminue en fonction du nombre de Reynolds et augmente proportionnellement avec le nombre de Rayleigh. Ceci s'explique par le fait que lorsque la convection naturelle prédomine, le transfert de chaleur au niveau de la paroi chaude est plus élevé.

On constate aussi que pour un nombre de Rayleigh faible ($Ra = 8000$) et pour des valeurs nombre de Reynolds élevées ($Re = 40, 50$), la variation est plus significative que pour un nombre de Rayleigh élevé. Cela est dû au fait qu'il y'a prédominance de la convection forcée sur la convection naturelle. D'autre part, lorsque le nombre de Rayleigh est élevé ($Ra = 15000$), une sorte d'équilibre entre la convection naturelle et la convection forcée se crée pour des nombres de Reynolds élevés.

4.5. Conclusion :

Dans ce dernier chapitre, nous avons présenté les résultats et l'analyse physique de la convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas et refroidis par le haut. Tout d'abord, la validation des codes de calcul basés sur la méthode de Boltzmann sur réseau à double population, à simple et à multiples temps de relaxation, avec les travaux de la littérature est réalisée et discuté. Les résultats obtenus par la simulation sont en bon accord avec ceux de la bibliographie.

L'analyse des résultats de simulation a été présentée en deux parties : la première étant consacrée à l'analyse du phénomène physique avec la méthode de Boltzmann sur réseau à temps de relaxation simple (SRT), en étudiant l'effet des paramètres tel que le nombre de Prandtl et le rapport d'allongement sur l'écoulement. La deuxième partie fût consacrée à l'étude des résultats de simulation du phénomène avec la même méthode à temps de relaxation multiples (MRT). L'étude de l'effet du nombre de Reynolds et du nombre de Rayleigh sur les structures de l'écoulements et le transfert de chaleur a été effectué, et comparée avec ceux de la méthode SRT.

Conclusion générale :

Nous avons présenté dans cette étude notre contribution à l'étude numérique du phénomène physique de convection mixte, en régime laminaire pour la configuration géométrique d'un canal horizontal chauffé par le bas et refroidis par le haut. La méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double population, avec les deux modèles notamment à simple et à multiples temps de relaxation (SRT et MRT) a été utilisée.

Une validation des codes de calculs a été effectuée en comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature. Les résultats ont montré la bonne concordance entre la méthode LBM thermique et les méthodes conventionnelles basés sur la résolution numérique des équations classiques de Navier-Stokes et d'énergie.

L'analyse du phénomène physique ainsi qu'une étude paramétrique avec l'effet du nombre de Prandtl et du rapport d'allongement ont été réalisées par la méthode Boltzmann sur réseau thermique à simple temps de relaxation (SRT).

L'étude de l'effet du nombre de Reynolds sur les différentes structures de l'écoulement par la méthode de Boltzmann thermique à double population à temps de relaxation multiples (MRT) a été effectuée.

Les résultats de notre étude ont permis d'évaluer la capacité des deux méthodes de Boltzmann sur réseau (SRT) et (MRT) à reproduire le phénomène physique considéré dans ce travail ; qui se caractérise par l'apparition d'une instabilité thermique, rencontré souvent dans le domaine des écoulements énergétiques industrielles.

On peut conclure que les deux méthodes utilisées sont plus avantageuses dans la simulation de ce type de phénomènes d'instabilité thermique, notamment par la simplicité de la mise en œuvre informatique qu'elles peuvent offrir ainsi que par une résolution numérique plus stable. Ceci donne à ces méthodes la capacité de gérer différents problèmes d'écoulement thermique, notamment la convection mixte complexe.

La suite du travail va être consacrée à étudier la fiabilité de la méthode pour ces types d'instabilités, notamment celle de Poiseuille Rayleigh Bénard, avec la simulation en trois-dimensions en utilisant le réseau D3Q19 pour le champ dynamique et D3Q7 pour le champ thermique.

Références :

- [1] H. Bénard, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid". *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 11 (1900) 1261–1271.
- [2] H. Bénard, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur en régime permanent, *Annales de Chimie et de Physique*, 23 (1901) 62–144.
- [3] J. R. A. Pearson, On convection cells induced by surface tension, *J. Fluid Mech*, 4 (1958) 489–500.
- [4] M.J. Block, Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid, *Nature*, 178 (1956) 650–651.
- [5] J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et la théorie mécanique de la lumière, Tome II: Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité. Courant de convection, (1903) Gauthier-Villars.
- [6] H. Jeffreys, The stability of a layer of fluid heated from below, *Philosophical Magazine* (1926).
- [7] H. Jeffreys, Some cases of instability in fluid motion, *Proceedings of the Royal Society of London*, Serie A, (1928) 195–208.
- [8] E. L. Koschmieder, S. G. Pallas, Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer, *Int. J. heat Mass Transfer*, 17 (1974) 991-1002.
- [9] A. Purwar, Rayleigh-Bénard Convection, 1999.
- [10] D. Martinand. Détermination analytique des modes globaux tridimensionnels en écoulement de convection mixte du type Rayleigh-Bénard-Poiseuille. PhD thesis, Université Lyon I Claude Bernard, 2003.
- [11] E. Piquer, Convection mixte en fluide binaire avec prise en compte de l'effet Soret, Thèse de doctorat, Université de Paul Sabatier, Toulouse. 2005
- [12] E. Grandjean, Experimental investigation into localized instabilities of mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille Convection, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, 2008.
- [13] X. Nicolas, Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard: écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas, *Int. J. Therm. Sci* , 41 (2002) 961–1016.
- [14] P. Idrac, Sur les courants de convection atmosphérique et leur rapport avec le vol à voile et la formation des bandes nuageuses, CRAS 171 (1920) 42–44.
- [15] P. Idrac, Etudes expérimentales sur le vol à voile, Thèse de doctorat, Paris, 1921.
- [16] A. Graham, Shear patterns in an unstable layer of air, *Philos. Trans. Roy. Soc. A* 232

(1933) 285–296.

- [17] K. Chandra, Instability of fluids heated from below, *Proc. Roy. Soc. A* 164 (1938) 231–242.
- [18] D. Brunt, Experimental cloud formation, in: *Compendium of Meteorology*, *American Meteorological Society*, Boston, (1951) 1255–1262.
- [19] H. Bénard, D. Avsec, Travaux récents sur les tourbillons en bandes applications à l’astrophysique et à la météorologie, *J. Phys. Radium* 9 (1938) 468–500
- [20] T. Terada and second year students of physics, Some experiments on periodic columnar formation of vortices caused by convection, *Report of the Aeronautical Research Institute Univ. of Tokyo* 3 (1928) 1–52.
- [21] T. Terada, M. Tamano, Further researches on periodic columnar vortices produced by convection, *Report of the Aeronautical Research Institute Univ. of Tokyo* 4 (1929) 447–470.
- [22] K.W. Park, H.Y. Pak, Characteristics of three-dimensional flow, heat and mass transfer in a chemical vapor deposition reactor, *Numer. Heat Transfer A* 37 (2000) 407–423
- [23] Y. Kamotani, S. Ostrach, Effect of thermal instability on thermally developing laminar channel flow, *J. Heat Transfer* 98 (1976) 62–66.
- [24] Y. Kamotani, S. Ostrach, H. Miao, Convective Heat transfer augmentation in thermal entrance regions by means of thermal instability, *J. Heat Transfer* 101 (1979) 222–226
- [25] J. M. Luijckx, J. K. Platten, J. C. Legros, On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 24 (1981) 1287–1291.
- [26] J.R. Maughan, F.P. Incropera, Experiments on mixed convection heat transfer for airflow in a horizontal and inclined channel, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 1307–1318.
- [27] J.R. Maughan, F.P. Incropera, Regions of heat transfer enhancement for laminar mixed convection in a parallel plate channel, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 33 (1990) 555–570.
- [28] M.T. Ouazzani, J.P. Caltagirone, G. Meyer, A. Mojtabi, Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 261–269
- [29] Y. Mori, Y. Uchida, Forced convective heat transfer between horizontal flat plates, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 9 (1966) 803–817.
- [30] S. Ostrach, Y. Kamotani, Heat transfer augmentation in laminar fully developed channel flow by means of heating from below, *J. Heat Transfer* 97 (1975) 220–225.

- [31] K. Fukui, M. Nakajima, H. Ueda, The longitudinal vortex and its effects on the transport processes in combined free and forced laminar convection between horizontal and inclined parallel plates, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 26 (1983) 109–120.
- [32] G.J. Hwang, K.C. Cheng, A boundary vorticity method for finite amplitude convection in plane Poiseuille flow, *Proceedings of the 12th Midwestern Mechanics Conference, Univ. of Notre Dame, Dev. Mech.*, 6 (1971) 207–220.
- [33] M.T. Ouazzani, J.P. Caltagirone, G. Meyer, A. Mojtabi, Etude numerique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 261–269
- [34] M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur, L. Robillard, Mixed convective heat transfer in a horizontal channel heated periodically from below, *Numer. Heat Transfer A* 20 (1991) 297–315
- [35] C.H. Yu, M.Y. Chang, C.C. Huang, T.F. Lin, Unsteady vortex roll structures in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: A numerical study, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997) 505–518.
- [36] U. Narusawa, Mixed convection in a rectangular duct heated from below, *Internat. J. Fluid Mech. Res.* 25 (1998) 285–294
- [37] H.W. Müller, Thermische Konvektion in horizontaler Scherströmung, Thèse de doctorat, Université de Saarlandes à Sarrebruck, Allemagne, 1990.
- [38] H.W. Müller, M. Lücke, M. Kamps, Transversal convection patterns in horizontal shear flow, *Phys. Rev. A* 45 (1992) 3714–3725
- [39] L. Fung, K. Nandakumar, J.H. Masliyah, Bifurcation phenomena and cellular-pattern evolution in mixed-convection heat transfer, *J. Fluid Mech.* 177 (1987) 339–357
- [40] J.K. Platten, J.C. Legros, *Convection in Liquids*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [41] H.W. Müller, M. Lücke, M. Kamps, Transversal convection patterns in horizontal shear flow, *Phys. Rev. A* 45 (1992) 3714–3725.
- [42] A. Schlüter, D. Lortz, F. Busse, On the stability of steady finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.* 23 (1) (1965) 129–144.
- [43] G. Evans, R. Greif, A study of traveling wave instabilities in a horizontal channel flow with applications to chemical vapor deposition, *Int. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 895-911.
- [44] G. Evans, S. Paolucci, The thermoconvective instability of a plane Poiseuille flow heated from below: A proposed benchmark solution for open boundary flows, *Internat. J. Numer. Methods in Fluids* 11 (1990) 1001–1013

- [45] K.C. Chiu, J. Ouazzani, F. Rosenberger, Mixed convection between horizontal plates—2. Fully developed flow, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 1655–1662
- [46] C. Nonino, S. Del Giudice, Laminar mixed convection in the entrance region of horizontal rectangular ducts, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 13 (1991) 33–48
- [47] C.R. Kleijn, C.J. Hoogendoorn, A study of 2-D and 3-D transport phenomena in horizontal chemical vapor deposition reactors, *Chemical Engrg. Sci.* 46 (1991) 321–334.
- [48] M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur, L. Robillard, Mixed convective heat transfer in a horizontal channel heated periodically from below, *Numer Heat Tr A: Appl* 20 (1991) 297-315.
- [49] I. C. Walton, The Effect of a Shear Flow on Convection near a Two-Dimensional Hot Patch, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 38 (1985) 561-574.
- [50] E. Schroder, K. Buhler, Three-dimensional convection in rectangular domains with horizontal throughflow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 38 (1995) 1249-1259.
- [51] M.T. Ouazzani, J.K. Platten, H.W. Muller, M. Lucke, Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes, *Int. J. Heat Mass Transfer* 38, 875 (1995)
- [52] C.H. Yu, M.Y. Chang, T.F. Lin, Structures of moving transverse and mixed rolls in mixed convection of air in a horizontal plane channel, *Int. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997) 333–346
- [53] G. Comini, M. Manzan & G. Cortella, Open boundary conditions for the streamfunction-vorticity formulation of unsteady laminar convection, *Numer Heat Tr B: Fund.*, 31 (1997) 217-234.
- [54] X.Nicolas, A.Mojtabi, J.K Platten, Two-dimensional numerical analysis of the Poiseuille–Bénard flow in a rectangular channel heated from below, *Phys. Fluids* 9 (1997) 337-348.
- [55] M. T. Ouazzani, Transferts thermiques et mécanique des écoulements de convection mixte, Ph.D. thesis, University of Mons-Hainaut, Belgium, 1991.
- [56] M. T. Ouazzani, J. K. Platten, A. Mojtabi, Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes—2, *Int. J. Heat Mass Transfer* 33 (1990) 1417.
- [57] M.Y.Chang, T.F.Lin, Experimental study of aspect ratio effects on longitudinal vortex flow in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct, *Int. J. Heat Mass Transfer* 14 (1998) 719-733
- [58] H. Abbassi, S. Turki, S.B. Nasrallah, Numerical Investigation of Forced Convection in a Plane Channel with a Built-in Triangular Prism, *Int. J. Therm. Sci.*, 40 (2001) 649-658.
- [59] C. Bonnefoi, C. Abid, M. Medale, F. Papini, Poiseuille-Bénard instability in a horizontal rectangular duct water flow, *Int. J. Therm. Sci.* 43 (2004) 791.

- [60] H. Benhamed, R. Bennacer, Poiseuille Rayleigh-Bénard problem in a horizontal duct of finite length in streamwise direction: stability analysis, *Prog. Comput. Fluid Dynamics* 8, 342 (2008).
- [61] M. Nourollahi, M. Farhadi, K. Sedighi, Numerical study of mixed convection and entropy generation in the Poiseuille-Benard channel in different angles, *Therm. Sci.* 14 (2010) 329.
- [62] O. Rahli, R. Bennacer, K. Bouhadef, D.E. Ameziani, Three-dimensional mixed convection heat and mass transfer in a rectangular duct: case of longitudinal rolls, *Num. Heat Transfer A* 59 (2011) 349
- [63] X. Nicolas, S. Gounand, M. Medale, S. Glockner, Benchmark Solution for a Three-Dimensional Mixed-Convection Flow, Part 2: Analysis of Richardson Extrapolation in the Presence of a Singularity, *Num. Heat Transfer B* 60 (2011) 325.
- [64] K.F. Jensen, E.O. Einset, D.I. Fotiadis, Flow phenomena in chemical vapor deposition of thin films, *Ann. Rev. Fluid Mech* 23 (1991) 197–233.
- [65] G. Evans, R. Greif, Unsteady three-dimensional mixed convection in a heated horizontal channel with applications to chemical vapor deposition, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 34 (1991) 2039–2051.
- [66] H.K. Moffat, K.F. Jensen, Complex flow phenomena in MOCVD reactors—1. Horizontal reactors, *J. Crystal Growth* 77 (1986) 108–119.
- [67] H.K. Moffat, K.F. Jensen, Three-dimensional flow effects in silicon CVD in horizontal reactors, *J. Electrochemical Soc.* 135 (1988) 459–470.
- [68] J. Ouazzani, F. Rosenberger, Three-dimensional modelling of horizontal chemical vapor deposition—1. MOCVD at atmospheric pressure, *J. Crystal Growth* 100 (1990) 545–576.
- [69] C.R. Kleijn, C.J. Hoogendoorn, A study of 2-D and 3-D transport phenomena in horizontal chemical vapor deposition reactors, *Chemical Engrg. Sci* 46 (1991) 321–334.
- [70] K.C. Karki, P.S. Sathyamurthy, S.V. Patankar, Three-dimensional mixed convection in a horizontal chemical vapor deposition reactor, *J. Heat Transfer* 115 (1993) 803–806.
- [71] W.K.S. Chiu, C.J. Richards, Y. Jaluria, Flow structure and heat transfer in a horizontal converging channel heated from below, *Phys. Fluids* 12 (2000) 2128–2136.
- [72] E.P. Visser, C.R. Kleijn, C.A.M. Govers, C.J. Hoogendoorn, L.J. Giling, Return flows in horizontal MOCVD reactors studied with the use of TiO₂ particle injection and numerical calculations, *J. Crystal Growth* 94 (1989) 929–946, et errata 96 (1989) 732–735.
- [73] N.K. Ingle, T.J. Mountziaris, The onset of transverse recirculation during flow of gases in horizontal ducts with differentially heated lower walls, *J. Fluid Mech* 277 (1994) 249–269.

- [74] K.J. Kennedy, A. Zebib, Combined free and forced convection between horizontal parallel planes: some cases studies, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 26 (1983) 471–474.
- [75] M.E. Braaten, S.V. Patankar, Analysis of laminar mixed convection in shrouded arrays of heated rectangular blocks, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 28 (1985) 1699–1709.
- [76] M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur, L. Robillard, Mixed convective heat transfer in a horizontal channel heated periodically from below, *Numer. Heat Transfer A* 20 (1991) 297–315.
- [77] E. Bilgen, X. Wang, P. Vasseur, F. Meng, L. Robillard, On the periodic conditions to simulate mixed convection heat transfer in horizontal channels, *Numer. Heat Transfer A* 27 (1995) 461–472
- [78] S.Q. Zhang, A.V. Tangborn, Two- and three-dimensional heat transfer in mixed convection with streamwise periodic heating, *Numer. Heat Transfer A* 28 (1995) 431–442
- [79] A. R. M. Rosdzimin, S. M. Zuhairi, C. S. N. Azwadi, Simulation of mixed convective heat transfer using lattice Boltzmann method, *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering* 2 (2010), 130-143
- [80] Y.Guo, R. Bennacer, S.Shen, D.E.Ameziani, M.Bouzidi, Simulation of mixed convection in slender rectangular cavity with lattice Boltzmann method, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 20 (2010) 130-148.
- [81] M.A. Moussaoui, M.Jami, A.Mezrhab, H.Naji, MRT-Lattice Boltzmann simulation of forced convection in a plane channel with an inclined square cylinder, *Int. J. Therm. Sci* 49 (2010) 131–142.
- [82] A.A. Rabienataj Darzi, M. Farhadi, K. Sedighi, E. Fattahi, H. Nematy, Mixed convection simulation of inclined lid driven cavity using lattice Boltzmann method, *Transactions of Mechanical Engineering* 35 (2011) 73-83.
- [83] A. Karimipour, A. Nezhad, E. Shirani, A. Safaei, Simulation of fluid flow and heat transfer in inclined cavity using lattice Boltzmann method, *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering* 5 (2011) 840-847.
- [84] M.M. Rahman, S. Parvin, N.A. Rahim, M.R. Islam, R. Saidur, M. Hasanuzzaman, Effects of Reynolds and Prandtl number on mixed convection in a ventilated cavity with a heat-generating solid circular block, *Applied Mathematical Modelling* 36 (2012) 2056–2066.
- [85] M. Jafari, M. Farhadi, K. Sedighi, E. Fattahi, Lattice Boltzmann simulation of mixed convection in an inclined cavity with a wavy wall, *Heat transfer-Asian research* 41 (2012) 371-387.

- [86] A. Karimipour, A.H. Nezhad, A. D’Orazio, E. Shirani, The effects of inclination angle and Prandtl number on the mixed convection in the inclined lid driven cavity using lattice Boltzmann method, *J Theor App Mech-Pol* 51 (2013) 447-462.
- [87] S. Bettaibi, F. Kuznik, E. Sediki, Hybrid lattice Boltzmann finite difference simulation of mixed convection flows in a lid-driven square cavity, *Physics Letters A* 378 (2014), 2429-2435.
- [88] S. Bettaibi, E. Sediki, F. Kuznik, S. Succi, Lattice Boltzmann simulation of mixed convection heat transfer in a driven cavity with non-uniform heating of the bottom wall, *Commun. Theor. Phys* 63 (2015) 91-100.
- [89] G.H.R. Kefyati, R.R. Huilgol, Lattice Boltzmann method for simulation of mixed convection of a Bingham fluid in a lid-driven cavity, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 103 (2016), 725-743.
- [90] S. Jafari, S. Jafari, M. Rahnama, Simulation of mixed convection in eccentric annulus: A combined lattice Boltzmann and smoothed profile approach, *Heat transfer Engineering* (2018).
- [91] D. Enskog, Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen. PhD thesis, Uppsala 1917.
- [92] S. Chapman, F.W. Dootson, A note on thermal diffusion. *Philos. Mag*, 33 (1917) 248.
- [93] P. Bhatnagar, E. Gross, M. Krook, A model for collision process in gases. I. Small amplitude process in charged and neutral one-component systems, *Phys. Rev.* 94 (1954) 511-525.
- [94] J. Von Neumann, The theory of self-reproducing Automata. University of Illinois Press,
- [95] J. Broadwell, Study of rarified shear flow by the discrete velocity method, *Journal of Fluid Mechanics* 19 (1964) 401-414.
- [96] R. Gatignol, Théorie cinétique des gaz à répartition discrète des vitesses, Springer, Berlin, 1975.
- [97] J. Hardy, Y. Pomeau, O. De Pazzis, Time evolution of two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions. *J. Math. Phys.* 14 (1973) 1746-1759.
- [98] U. B. H. Frisch, Y. Pomeau, Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. *Phys. Rev. Letter* 56 (1986) 1505-1508.
- [99] D. d’Humière, P. Lallemand, U. Frisch, Lattice gas models for 3D hydrodynamics, *Europhys. Letter* 2 (1986), 291-297.
- [100] S. Wolfram, Theory and application of Cellular Automata, World Publishing Co 1986.
- [101] G. McNamara, G. Zanetti, Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas Automata. *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988) 2332-2335.

- [102] F. Higuera, J. Jimènez, Boltzmann approach to lattice-gas simulations, *Europhys. Lett.* 9 (1989) 663-668.
- [103] H. Chen, W.H. Matthaeus, Recovery of Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method, *Phys.Rev.A* 45 (1992) 39-42.
- [104] Y.H. Qian, D. d'Humières, P. Lallemand, Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys. Lett.* 17 (1992) 479-484.
- [105] X. He, L.S. Luo, A priori derivation of the lattice Boltzmann equation, *Phys. Rev. E* 55 (1997) R6333(R).
- [106] M. R. Arab, Reconstruction stochastique 3D d'un matériau céramique poreux à partir d'images expérimentales et évaluation de sa conductivité thermique et de sa perméabilité; thèse de l'Université de Limoges, N° d'ordre: 21-2010.
- [107] J. Wang, D. Wang, P. Lallemand, L.-S. Luo, Lattice Boltzmann simulations of thermal convective flows in two dimensions, *Comput. Math. Appl.* 65 (2) (2013) 262–286.
- [108] D. d'Humières, Generalized lattice-Boltzmann equations, in: B.D. Shizgal, D.P. Weave (Eds.), *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations*, *Prog. Astronaut. Aeronaut* 159, (1992) 450–458.
- [109] P. Lallemand, L. S. Luo, Theory of the lattice Boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability, *Phys. Rev. E* 61 (6) (2000) 6546–6562.
- [110] I. Ginzburg, Equilibrium-type and link-type lattice Boltzmann models for generic advection and anisotropic-dispersion equation, *Adv. Water Resour* 28 (11) (2005) 1171–1195.
- [111] I. Ginzburg, F. Verhaeghe, D. d'Humières, Two-relaxation-time lattice Boltzmann scheme: about parametrization, velocity, pressure and mixed boundary conditions, *Commun. Comput. Phys.* 3 (2008) 427–478.
- [112] I. Ginzburg, F. Verhaeghe, D. d'Humières, Study of simple hydrodynamic solutions with the two-relaxation-times lattice Boltzmann scheme, *Commun. Comput. Phys.* 3 (3) (2008) 519–581.
- [113] X. He, L.-S. Luo, Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equation, *J. Stat. Phys.* 88 (3/4) (1997) 927–944
- [114] Q. Zou, X. He, On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *Physics of Fluids*, 9(6) 1997 1591–1596.
- [115] I. Ginzburg, D. d'Humières, A. Kuzmin, Optimal stability of advection–diffusion lattice Boltzmann models with two relaxation times for positive/negative equilibrium, *J. Stat. Phys.* 139 (6) (2010) 1090–1143

- [116] F. Dubois, P. Lallemand, Towards higher order lattice Boltzmann schemes, *J. Stat. Mech.* (2009) 6006.
- [117] I. Ginzbourg, P.M. Adler, Boundary flow condition analysis for the three-dimensional lattice Boltzmann model, *J. Phys. II France* 4(2) 191 (1994).
- [118] A.J.C. Ladd, Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation, *J. Fluid Mech* (1994) 271-285
- [119] X. He, Q. Zou, L. S. Luo, and M. Dembo, Analytic solutions of simple flows and non-slip boundary condition for the lattice Boltzmann BGK model, *J. Stat. Phys.* 87 (1997) 115.
- [120] AA Mohamad, M El-Ganaoui, R Bennacer, Lattice Boltzmann simulation of natural convection in an open ended cavity, *Int. J. Therm. Sci* 48 (10), 1870-1875, 2009.
- [121] R Djebali, M El Ganaoui, H Sammouda, R Bennacer, Some benchmarks of a side wall heated cavity using lattice Boltzmann approach, *FDMP: Fluid Dynamics & Materials Processing* 5 (3), 261-282. 2009.
- [122] MR Arab, B Pateyron, M El Ganaoui, JC Labbe, Effective thermal conductivity estimate of heterogenous media by a lattice Boltzmann method, *The 4th international conference on thermal engineering theory and applications, Abu Dhabi, 2009*
- [123] MR Arab, E Semma, B Pateyron, M El Ganaoui, Determination of physical properties of porous materials by a lattice Boltzmann approach, *FDMP: Fluid Dynamics & Materials Processing* 5 (2), 161-176, 2009.
- [124] R Djebali, M El Ganaoui, H Sammouda, Investigation of a side wall heated cavity by using lattice Boltzmann method, *European Journal of Computational Mechanics*, 18(2), 217–238, 2009.
- [125] E Semma, M El Ganaoui, R Bennacer, AA Mohamad, Investigation of flows in solidification by using the lattice Boltzmann method, *Int. J. Therm. Sci* 47 (3), 201-208. 2008.
- [126] R Djebali, M. El Ganaoui, Investigating plasma jets behavior using axisymmetric lattice Boltzmann model under temperature dependent viscosity, *Commun. Comput. Phys.* 15 (3), 677-691, 2014.
- [127] R Djebali, B Pateyron, M El Ganaoui, A lattice Boltzmann based investigation of powder in-flight characteristics during APS process, part II: Effects of parameter dispersions at powder injection, *Surf. Coat. Tech* 220, 157-163, 2013
- [128] DE Ameziani, Y Guo, R Bennacer, M El Ganaoui, M Bouzidi, Competition between Lid-driven and natural convection in square cavities investigated with a Lattice Boltzmann method, *Computational Thermal Sciences: An International Journal* 2, 2010.

- [129] M El Ganaoui, R Bennacer, Lattice Boltzmann method for melting/solidification problems, *Comptes Rendus Mécanique* 335 (5-6), 295-303. 2007
- [130] R. Cornubert, D. d’Humières, D. Levermore, A Knudsen layer theory for lattice gases, *Physica D* 47 (1991), 241
- [131] D.P. Ziegler, Boundary conditions for lattice Boltzmann simulations. *J. Stat. Phys.* 71, 1171 (1993)
- [132] T. Krüger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, E.M. Viggien, The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice, Springer, Switzerland, 2017.
- [133] J.P. Rivet, J.P. Boon, Lattice Gas Hydrodynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [134] D.A. Wolf-Gladrow, Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models Springer, New York, 2005.