REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE

Pour obtenir le diplôme de

Magister **en Mathématiques**

Option : Analyse Spectrale et Micro-localisation

Existence et unicité des résonances dans le cas des potentiels non globalement analytiques

Présenté par

HAMMOU AMOURIA

Soutenu le ../../2012 devant le Jury

Ahmed MEDEGHRI	**Président**	Professeur	U. MOSTAGANEM
Amina LAHMAR-BENBERNOU	**Encadreur**	Professeur	U. MOSTAGANEM
Djillali BOUAGADA	**Examinateur**	Maître de conférences A	U. MOSTAGANEM
Sidi Mohamed BAHRI	**Examinateur**	Maître de conférences A	U. MOSTAGANEM

Année Universitaire : 2011 / 2012

Remerciements

Tout d'abord je remercie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail.

Je tiens à remercier

Madame **Amina LAHMAR-BENBERNOU** Professeur à l'université de Mostaganem, qui a accepté la direction de ce mémoire, et a mis à notre disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail.

Monsieur **Ahmed MEDEGHRI** Professeur à l'université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Monsieur **Djillali BOUAGADA** Maître de conférences A à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être Examinateur.

Monsieur **Sidi Mohamed BAHRI** Maître de conférences A à l'université de Mostaganem, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et me fait l'honneur d'être Examinateur.

Tous les enseignants que j'ai rencontré ou cotoyé durant mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.

Un spéciale remerciement à mon fiancé **Merine BOUZIANE**, à ma très chère amie M^{elle} **Nouria Ladjal** et à mes soeurs **TOUATIA** et **SAMRA** pour leur supportement, encouragement et présence effective.

Je remercie également tout mes collègues de post graduation **Khadidja BECHAOUI**, **Hanane ZERKOUK**, **Djillali BEKAI** et **Houcine KHELIFA MAHDJOUBI** d'avoir passé des bon moments avec eux.

Enfin, j'adresse mes remerciements à M^{elle} **D. BENSIKADDOUR**, **Naïma BOUSSEKKINE**, **Zineb KAISSERLI**, **SOUAD LAZAEGUI** et **Nawal MECHROUT**.

Amouria

Dédicaces

Je dédie ce travail à

A mes très chers parents et à toute ma famille dont l'affection et le soutien continues ont constitué un socle sur lequel j'ai pu m'appuyer pour élaborer ce modeste produit de recherche.

*A tous mes amis surtout mes chères amies **Houria DIALA** et **Nouria LADJAL**.*

A tous ceux qui m'ont assisté, aidé et soutenu de prés ou de loin dans ma contribution.

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes seront utilisées. En cas de changement, elles seront redéfinies conformément aux différentes articulations de la partie.

x	:	la position, $x \in \mathbb{R}^n$,
ξ	:	l'impulsion, $\xi \in \mathbb{R}^n$,
z	:	un nombre complexe,
$\mathrm{Re}(z)$	:	partie réelle du nombre complexe z,
$\mathrm{Im}(z)$	:	partie imaginaire du nombre complexe z,
h	:	la constante de planck,
H^s	:	espace de Sobolev non homogène,
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	:	espace de Schwartz,
$C^m(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions m fois continument différentiables,
$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} C^m(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions infiniment dérivable,
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$,
$L^p(\mathbb{R}^n)$	:	$\left\{ f \text{ mesurable sur } \mathbb{R}^n \text{ et } \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lvert f(x)\rvert^p \, dx < +\infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$
$S_d\left(< x >^m\right)$	:	espace des symboles d'ordre m,
$\langle x\rangle^m = (1+\lvert x\rvert^2)^{\frac{m}{2}}$	:	fonction d'ordre où $m \in \mathbb{R}$,
$B(\alpha, \beta)$	:	boule ouverte de centre α et de rayon β,
$\overline{B(\alpha, \beta)}$	:	boule fermée de centre α et de rayon β,
$d(x_0, x)$	:	la distance d'Agmon,
$\lVert f\rVert_p$	:	la norme de la fonction f dans L^p,
H_p	:	champ Hamiltonien,
$Supp f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}$	:	support d'une fonction f,
$\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	:	opérateur de Laplacien,
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$	:	vecteur gradient,
$D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},\ i^2 = -1$	:	la différentielle au point x,
$\langle ., .\rangle$	:	produit scalaire,
$\oplus$	:	somme directe,
σ_{disc}	:	spectre discret,
σ_{ess}	:	spectre essentiel,
$\rho(A)$	:	ensemble résolvant de l'opérateur A,
$[A, B]$	:	commutateur des opérateurs A et B,
$tr\,(A)$	:	trace de l'opérateur A.

INTRODUCTION

Historique

L'étude mathématique des résonances quantiques en régime semi-classique a maintenant plus d'une vingtaine d'années, et les techniques développées ainsi que les résultats obtenus diffusent largement dans d'autres domaine des EDP.

La résonance est un phénomène très important couvrant presque tous les domaines. Á titre d'exemple ses applications dans la vie courante sont les ondes du essentiellement par (radio, TV, explorations médicales, ...) et concerne toutes les catégories (acoustiques, mécaniques, électriques, électromagnétiques, séisme, ...).

En 1938 *Isidor Isaac Rabi* découvre le phénomène de résonance magnétique sur des jets moléculaires.

En 1946 *Felix Bloch* et *Edward Mills Purcell* précisent la notion de fréquence de résonance.

L'état d'un système physique (mécanique, électrique ou magnétique) est dit résonant lorsqu'il emmagasine de l'énergie dû à un déplacement de son état d'équilibre sous l'influence d'obstacle d'un système.

Problématique

Le cadre général de ce travail est celui de l'analyse semi-classique (ou la quasiclassiques), dans l'étude d'opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels dépendant d'un paramètre h qui tend vers 0.

Ce mémoire concerne les résonances de l'opérateur semi-classique de "*Schrödinger*" agissant sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de la forme :

$$P = -h^2\Delta + V, \tag{0.0.1}$$

où Δ est le Laplacien, le potentiel V est supposé globalement analytique et h désigne la constante de *Planck*.

On s'appuiera sur l'approche due à *A. Martinez* de l'arsenal technique semi-classique développé principalement par *B. Helffer* et *J. Sjöstrand*.

D'un point de vue physique, de telles résonances sont associées, à des états avec une durée de vie, elle est donnés par l'inverse de la valeur absolue de la partie imaginaire de la résonance correspondante.

La résonance est une valeur propre complexe E qui vérifie l'équation de *Schrödinger*

$$Pu = Eu, \tag{0.0.2}$$

ou u est la fonction propre associée à la valeur propre E.

Pour déterminer la première valeur propre nous passons par le problème de *Dirichlet* que nous formulons comme suit :

$$\begin{cases} P_D u_D = 0 & sur\ B_d(x_0, S-\eta) \\ u\,|_{\partial B_d(x_0,S-\eta)} = u_0 & ailleurs \end{cases}, \tag{0.0.3}$$

où $B_d(x_0, S-\eta)$ est la boule de centre x_0 et de rayon $S-\eta$ et u_D est la fonction propre de l'opérateur de *Dirichlet*.

Nous utilisons le problème de *Grushin*, explicité ultérieurement, pour localiser le problème de *Dirichlet* et utiliser l'estimation d'*Agmon* [**?**] pour conclure les résultats suivants :

1. $|\lambda_D(h) - E(h)| = \mathcal{O}(e^{-(2S-\varepsilon(\eta))/h})$.

2. $\left\| e^{s(x)/h} u(x,h) \right\|_{H^1(K)} = \mathcal{O}(h^{-N_K})$.

où $\lambda_D(h)$, $E(h)$, S, $s\,(x)$, $\varepsilon(\eta)$, u, K, N_K sont définies ci-dessous.

Partant des hypothèses $\mathbf{A}_1$,$\mathbf{A}_2$ et $\mathbf{A}_3$[**?**]

Hypothèse ($\mathbf{A}_1$)

($\mathbf{A}_{11}$) $V \in C^\infty$ à valeurs réels.

($\mathbf{A}_{12}$) Il existe un compact $K_0 \subset \mathbb{R}^n$, tels que V est analytique sur $K_0^C = \mathbb{R}^n \diagdown K_0$, et se prolonge holomorphiquement dans

$$D_0 = \left\{ x \in \mathbb{C}^m;\ |\mathrm{Im}\, x| < \sigma_0 \,|\mathrm{Re}\, x|\,,\ \mathrm{Re}\, x \in K_0^C \right\},$$

pour la constante $\sigma_0 > 0$.

($\mathbf{A}_{13}$) $V(x) \to 0$ quand $|\operatorname{Re} x| \to \infty,\ x \in D_0$.

Hypothèse ($\mathbf{A_2}$)

Il existe un domaine ouvert borné $\ddot{O}\subset\mathbb{R}^n$, un point x_0 dans $\ddot{O}$ et un nombre positif E_0 tels que :

$$V(x_0) = E_0,\ \frac{\partial V}{\partial x}(x_0) = 0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0) > 0,$$

et

$$V(x) > E_0 \text{ dans } \ddot{O}\diagdown\{x_0\},\ \ V(x) = E_0 \text{ sur } \partial\ddot{O}.$$

Hypothèse ($\mathbf{A_3}$)

Pour tout $(x,\xi) \in p^{-1}(E_0)$ avec $x \in \ddot{O}^C$, la quantité $|\exp(tH_p)(x,\xi)|$ tend vers l'infinie quand $|t|$ tend vers l'infinie.

nous allons prouver le théorème d'existence et d'unicité de la résonance dans le cas analytique.

Théorème 0.0.1 (Théorème d'existence et d'unicité dans le cas analytique) *[?] Sous les hypothèses **($\boldsymbol{A}_1$)-($\boldsymbol{A}_3$)**. Il existe une résonance unique $E(h)$ de P tel que*

$$h^{-1}|E(h) - \lambda_D(h)| \to 0,$$

lorsque $h \to 0^+$, qui vérifie :

$$|\lambda_D(h) - E(h)| = \mathcal{O}(e^{-(2S-\varepsilon(\eta))/h}). \tag{0.0.4}$$

De plus, si on note par $u(x,h)$ l'état résonant correspondant à $E(h)$, on trouve,

$$|u_D(x,h) - u(x,h)| = \mathcal{O}(e^{-(2S-d(x_0,x)-\varepsilon(\eta))/h}), \tag{0.0.5}$$

uniformément dans $\overline{B_d(x_0, S-\eta)}$, où $\varepsilon(\eta) \to 0$ quand $\eta \longrightarrow 0$ et pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tels que,

$$\left\| e^{s(x)/h} u(x,h) \right\|_{H^1(K)} = \mathcal{O}(h^{-N_K}), \tag{0.0.6}$$

uniformément quand $h \longrightarrow 0$, où

$$s(x) = \begin{cases} d(x_0,x) & \text{si } x \in B_d(x_0,S) \\ S & \text{ailleurs} \end{cases},$$

*et $d(x_0,x)$, S sont respectivement la distance d'*Agmon *et la distance minimale de x_0 au bord de $\ddot{O}$.*

Plan du mémoire

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notion de bases utiliser dans ce travail.

Dans le second chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des résonances dans le cas analytiques.

Dans le troisieme et dérnier chapitre , nous généralisons l'existence des résonances au cas non analytique.

Nous finissons ce travail par une conclusion, une annexe et une bibliographie.

Chapitre 1

Rappels des outils mathématiques utilisées

1.1 Le caractère auto-adjoint d'un opérateur

Une des premières questions à traiter lors de l'étude spectrale d'un opérateur linéaire est celle du caractère auto-adjoint, ou à défaut du caractère essentiellement auto-adjoint.

Rappelons qu'un opérateur linéaire A est essentiellement auto-adjoint si son unique fermeture $\overline{A}$ est auto-adjointe.

Quel est l'intérêt du caractère auto-adjoint ? Il ya au moins deux bonnes raisons d'en parler :

1. Si A est auto-adjoint, on a déjà une première information spectrale importante : le spectre de l'opérateur A est une partie de $\mathbb{R}$.
2. Le caractère auto-adjoint assure, en mécanique, l'unicité de la solution de l'équation de *Schrödinger* (**??**).

1.2 Eléments de la théorie des opérateurs

Nous rappelons dans cette partie des notions et des résultats de la théorie spectrale des opérateurs. Dans tout ce qui suit D_A et D_B désignent les domaines de définitions des opérateurs A et B respectivement.

Définition 1.2.1 *[**?**] On dit qu'un opérateur symétrique* (D_A, A) *est essentiellement auto-adjoint lorsque* $(\overline{D}_A, \overline{A})$*est auto-adjoint.*

Lemme 1.2.1 *[?] Si l'opérateur symétrique (D_A, A) est essentiellement auto-adjoint, alors il admet une unique extension auto-adjointe.*

Lemme 1.2.2 *[?] Soient (D_A, A) un opérateur auto-adjoint, et (D_B, B) un opérateur tel que $D_A \subset D_B$.*

B est $A-$borné si et seulement si il existe $z \in \rho(A)$ tel que, $BR_A(z)$ est un opérateur borné.

La borne relative a de B pour A est donné par

$$a = \lim_{\lambda \to \infty} \|BR_A(\pm i\lambda)\| .$$

Théorème 1.2.1 (Théorème de Kato-Rellich) *[?] Soient (D_A, A) un opérateur auto-adjoint (resp. essentiellement auto-adjoint) et (D_B, B) un opérateur $A-$borné de borne relative inférieur à 1.*

Alors $(D_A, A + B)$ est un opérateur auto-adjoint (resp. essentiellement auto-adjoint).

Lemme 1.2.3 *[?] Soient (D_A, A) un opérateur fermé et (D_B, B) un opérateur tel que $D_A \subset D_B$. Alors :*

B est $A-$compact s'il existe $z \in \rho(A)$ tel que $BR_A(z)$ est compact.

Si B est $A-$compact et B est $A-$borné de borne relative 0, on a alors :

$$BR_A(i\lambda) = (BR_A(i))((A + i)R_A(i\lambda)),$$

où le premier opérateur est compact et le second tend vers 0 lorsque $\lambda \to \infty$.

Théorème 1.2.2 (Théorème de Weyl) *[?] Si (D_A, A) est un opérateur auto-adjoint et (D_B, B) un opérateur symétrique $A-$compact.*

Alors, $(D_A, A + B)$ est un opérateur auto-adjoint et on a :

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + B).$$

1.3 Théorie des opérateurs pseudo-différentiels

1.3.1 Les opérateurs pseudo-différentiels et leurs propriétés

Définition 1.3.1 *[?] Soient $a \in S_d\left(\langle x\rangle^m\right)$ et $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de symboles dans $S_d\left(\langle x\rangle^m\right)$. On dit que a est asymptotiquement équivalent à la série formelle*

$$\sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j \text{ dans } S_d\left(\langle x\rangle^m\right),$$

où d et $\langle x\rangle^m$ sont respectivement l'ordre du symbole et la fonction d'ordre.

On note

$$a \backsim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j,$$

si et seulement si pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe $h_{N,\alpha} > 0$ et $C_{N,\alpha} > 0$ tel que :

$$\left|\partial^\alpha\left(a - \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j\right)\right| \leq C_{N,\alpha} h^N \langle x\rangle^m,$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d \times (0, h_{N,\alpha}[$. En particulier quand tout les a_j sont identiquement nuls, on dira que

$$a = \mathcal{O}(h^\infty) \text{ dans } S_d\left(\langle x\rangle^m\right).$$

Proposition 1.3.1 *[?] Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de symboles dans $S_d\left(\langle x\rangle^m\right)$ alors il existe $a \in S_d\left(\langle x\rangle^m\right)$ tel que*

$$a \backsim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j \text{ dans } S_d\left(\langle x\rangle^m\right),$$

on appelle une ressomassion de $\sum_{j=0}^{\infty} h^j aj$.

a est unique modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans le sens ou la différence entre deux symboles est $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans $S_d\left(\langle x\rangle^m\right)$.

Preuve. Posons :

$$C_j = \sup_{|\alpha|\leq j}\left|\partial^\alpha\left(\frac{a_j(x;h)}{\langle x\rangle^m}\right)\right|,$$

et soit $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres positifs vérifiant :

$$\forall j \in \mathbb{N}\ \varepsilon_j \leq \min\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{C_{j+1}}\right).$$

Soit la fonction troncature χ défini par :

$$\begin{array}{rcl}\chi & \in & C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ supp\chi & \subset &]-2,2[\,,\ \chi = 1 \text{ sur } [-1,1]\end{array}$$

alors a est définie par :

$$a(x,h) = \sum_{j=0}^{\infty} h^j (1-\chi(\frac{\varepsilon_j}{h}))a_j(x,h),$$

est une ressomassion de la série formelle $\sum_{j=0}^{\infty} h^j aj$. □

1.4 Transformation FBI et ses propriétés microlocales

Dans cette partie, nous définissions la transformation de *Fourier-Bros-Iagolnitzer* (*FBI)* que nous l'utiliserons par la suite mais avec une légère modification de la proposition 3.1 de *A. Martinez* [**?**].

Si $u \in L^2$ est une fonction d'onde, nous pouvons décrire quantitativement u au voisinage de la position $x \in \mathbb{R}^n$ et, en même temps, au voisinage de l'impulsion $\xi \in \mathbb{R}^n$. On est bien sur limité par le principe d'incertitude d'Heisenberg.

la transformation de *FBI* est donnée par :

Définition 1.4.1 *[**?**] Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la transformée* FBI *de u est donné par*

$$Tu(x,\xi;h) = \alpha_n(h)\int e^{i(x-y)\xi/h}e^{-(x-y)^2/2h}u(y)dy, \tag{1.4.1}$$

où

$$\alpha_n(h) = 2^{-\frac{n}{2}}(\pi h)^{-\frac{3n}{4}}.$$

Proposition 1.4.1 *1. La fonction Tu est C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$.*

2. La fonction $e^{\xi^2/h}Tu(x,\xi;h)$ est une fonction holomorphe de la variable $z = x - i\xi$.

3. Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $Tu \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

4. T est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, i.e ;

$$\|Tu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Le microsupport est une propriété qui explique le comportement de la solution.

Définition 1.4.2 (Microsupport) *[?] Soit u_h une (famille de) distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

On dit que $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ n'est pas dans le microsupport de u_h, lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (x_0, ξ_0), et deux réels $\delta > 0$ et $h_0 > 0$ tels que

$$\forall h \in \left]0, h_0\right], \ \forall (x, \xi) \in \mathcal{V}, \ Tu(x, \xi; h) = \mathcal{O}(e^{-\delta/h}).$$

Le complémentaire de tels points est appelé le microsupport de u_h, il est noté $MS(u_h)$. C'est un fermé de $\mathbb{R}^{2n}$.

Exemple [?]

1. $|T(\delta)(x, \xi; h)| = \alpha_{d,h} e^{-x^2/2h}$, on a $MS(\delta) = \{0\} \times \mathbb{R}^n$où δ est la fonction de Dirac $(\delta \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n))$.
2. On a $MS(1) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.
3. On a $MS(\mathcal{F}_h u) = R_{\frac{-\pi}{2}}(MS(u))$, où R_θ désigne la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Il est important pour nous de rappeler l'action de la transformation *FBI* sur les opérateurs pseudo-différentiels, le théorème suivant, qui est une approche du théorème d'*Egorov,* nous montre que la transformation *FBI* transporte un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^n$ en un autre opérateur pseudo-différentiel explicite sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Théorème 1.4.1 (Action de la transformée FBI sur les opérateurs pseudo-différentiels[?]) *Pour tout $p \in S_{2n}(\langle 1 \rangle)$ et pour toute $t \in [0, 1]$; on a :*

$$T \circ Op_h^t(p) = Op^t(\tilde{p}) \circ T,$$

où T est la transformation FBI *définie par* (**??**) *et $\tilde{p} \in S_{4n}(\langle 1 \rangle)$ est définie par :*

$$\tilde{p}(x, \xi, x^*, \xi^*) = p(x - \xi^*, x^*),$$

où x^* et ξ^* sont les variables duales de x et ξ respectivement telle que :

$$Op(x^*) = hD_x \text{ et } Op(\xi^*) = hD_\xi.$$

Définition 1.4.3 (Caractéristique) *[?] On appelle ensemble caractéristique de $P = Op_h(p)$ où $p \in S_{2n}(\langle\xi\rangle^m)$, et on note $char(P)$ l'hypersurface $p_0^{-1}(0)$ de $\mathbb{R}^{2n}$, que l'on définit également par :*

$$char(P) = \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ p_0(x,\xi) = 0\right\},$$

où p_0 est le symbole principal de P.

La proposition suivante décrit la relation entre le microsupport et la caractéristique :

Proposition 1.4.2 *[?] Soit $u = (u_h) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ une fonction vérifiant*

$$\begin{cases} Op_h(p)_u = 0 \\ \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \\ p \in S_{2n}(\langle\xi\rangle^m) \end{cases},$$

on a alors

$$MS(u) \subset char(Op_h(p)).$$

Les estimations microlocales à poids, est un outil très efficace dû à *A. Martinez*, et leurs preuves sont données par *S. Nakamura*. Le théorème suivant représente une de cas éstimation.

Théorème 1.4.2 *[?] Soit $P = Op_h^t(p)$ avec $p \in S_{2n}(\langle 1\rangle)$ une fonction (indépendante de h) qui se prolonge holomorphiquement dans la bande*

$$B = \left\{(x,\xi) \in \mathbb{C}^{2n}, |\operatorname{Im} x| < a, |\operatorname{Im}\xi| < b\right\}.$$

pour certains a, $b > 0$. On suppose de plus que $\partial^\alpha_{x,\xi} p(x,\xi) = \mathcal{O}(1)$ dans B et $t \in [0,1]$, soit aussi $\varphi \in S_{2n}(1)$ une fonction à valeurs réelles telle que

$$\sup_{x,\xi} |\partial_x \varphi(x,\xi)| < b \text{ et } \sup_{x,\xi} |\partial_\xi \varphi(x,\xi)| < a.$$

Alors pour toute fonction $f \in S_{2n}(1)$, il existe $h_0 > 0$ et un symbole $q \in S_{2n}(1)$ et un opérateur $R(h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ tel que :

1. $q(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j q_j(x,\xi)$ *avec*

$$q_0(x,\xi) = f(x,\xi)p(x - \partial_x\varphi - i\partial_\xi\varphi, \xi - \partial_\xi\varphi + i\partial_x\varphi).$$

2. $\|R(h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))} = \mathcal{O}(h^\infty)$

pour tout $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on ait :

$$\left\langle f e^{\varphi/h} T P u, e^{\varphi/h} T v \right\rangle = \left\langle (q(x,\xi;h) + R(h)) e^{\varphi/h} T u, e^{\varphi/h} T v \right\rangle . \tag{1.4.2}$$

Dans la démonstration de ce théorème, on utilise un lemme important, pratique que l'on énonce :

Lemme 1.4.1 *[?] Soit $Q = Op_h^t(q)$ avec $q \in S_{4n}(1)$ et $q \sim \sum_{j\geq 0} h^j q_j$ et soit $\varphi \in S_{2n}(1)$ une fonction à valeurs réelles, il existe $\widetilde{q} \in S_{2n}(1)$ et un opérateur $R(h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ de norme $\mathcal{O}(h^\infty)$ tels que pour tout $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on ait*

$$\left\langle (Q e^{\varphi/h} T u, e^{\varphi/h} T v \right\rangle = \left\langle (\widetilde{q}(x,\xi;h) + R(h)) e^{\varphi/h} T u, e^{\varphi/h} T v \right\rangle ,$$

avec

$$\widetilde{q}(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j q_j(x,\xi) \in S_{2n}(1),$$

et $\widetilde{q}_0(x,\xi) = q_0(x,\xi,\xi - \partial_\xi \varphi(x,\xi), \partial_x \varphi(x,\xi))$.

Dans le cas où $\varphi = 0$, l'analyticité sur p n'est pas nécessaire et dans ce cas on a le théorème suivant :

Théorème 1.4.3 *[?] Soit $P = Op_h^t(p)$ avec $p \in S_{2n}(1)$ une fonction (indépendante de h), $t \in [0,1]$. Alors pour tout*

$u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on ait :

$$\langle Pu, v \rangle = \langle TPu, Tv \rangle = \langle (\widetilde{p}(x,\xi;h) + R(h)) Tu, Tv \rangle ,$$

où

$$\begin{cases} \widetilde{p}(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j \tilde{p}_j(x,\xi) \in S_{2n}(1) \\ \widetilde{p}_0(x,\xi) = p(x,\xi) \\ \|R(h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))} = \mathcal{O}(h^\infty) \end{cases} .$$

1.5 Estimation d'Agmon

1.5.1 Métrique, distance d'Agmon et décroissance des fonctions propres

Dans la suite E_0 est fixée (si X était non compacte, on prendrait $E_0 < \lim_{x\to\infty} \inf V(x)$).

Soit α_{E_0} la métrique Riemannienne donné par

$$\alpha_{E_0} = (V(x) - E_0)_+ \, g.$$

Cette métrique est identiquement nulle dans $U_{E_0} = \{V(x) \leq E_0\}$.

Cette métrique, dite métrique d'*Agmon* (dépend de E_0), donne lieu à une distance, dite (distance d'*Agmon*), noté par d_{E_0} et défini par :

$$d_{E_0}(x,y) = \inf_{\gamma} \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \sqrt{V(\gamma(t) - E_0)_+} \, dt, \tag{1.5.1}$$

où le inf porte sur les arcs

$$\gamma : [0,1] \to X \text{ de classe } C^1 \text{ tels que } \gamma(0) = x, \, \gamma(1) = y \text{ et } f(x)_+ = \max\{f(x), 0\}.$$

Cas d'un puit non dégénéré [?]

On va décrire la distance d'Agmon lorsque $E_0 = \inf V$, (On supposera que $E_0 = 0$), et que le puit U non dégénérée, ce qui signifie que $V''(U)$ est une forme quadratique définie positive. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 *[?] Au voisinage d'un puit non dégénéré U la distance $d_0(x) = d_0(x,U)$ est une fonction C^∞.*

La distance d'Agmon dont le ds^2 est donné par

$$ds^2 = (V(x) - E_0)_+ \, dx^2, \tag{1.5.2}$$

où $dx^2 = g$ étant la métrique initiale.

Théorème 1.5.2 *[?] Soient un niveau d'énergie $E \in \mathbb{R}$ et soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que :*

$$\|u\| = 1,$$

et vérifiant

$$PE = Eu,$$

alors $\forall \varepsilon > 0$ *et* $\forall \varphi$ *vérifiant*

$$|\nabla_x \varphi|^2 \leq V(x) - E - \varepsilon,$$

sur le $\mathrm{supp}\varphi$, *on obtient*

$$\|u\|^2 = \mathcal{O}(e^{-\varphi(x)/h}), \tag{1.5.3}$$

uniformément quand $h \to 0^+$.

Remarque 1.5.1 1. *La phase* $\varphi(x)$ *désigne la métrique d'Agmon et* $\varphi(x) \sim (V(x))^{\frac{1}{2}}$ *pour* $\|x\| \to \infty$.

2. *La formule (??) montre que* $u(x)$ *décroit exponentiellement quand* $\|x\| \to \infty$ *à une vitesse contrôlée par la distance à l'origine de la métrique d'Agmon.*
3. *La métrique d'Agmon a plusieurs propriétés, elle satisfait l'inégalité triangulaire, et elle est Lipschitz continue.*

$$|d(\acute{x}, y) - d(x, y)| \leq d(x', x), \ \forall x, x', y \in \mathbb{R}^n.$$

$$|\nabla_x d(x, y)|^2 \leq (V - E_0)_+ (x).$$

Nous observons que la deuxième inégalité est satisfaite pour d'autres distances comme :

$$d(x, U) = \inf_{y \in U} d(x, y).$$

1.5.2 Inégalité d'Agmon

Nous allons retrouver l'inégalité d'*Agmon* par un calcul direct.

Proposition 1.5.1 *[?] Soit l'opérateur de Schrödinger*

$$P = -h^2 \Delta + V,$$

où $V \in S_{2n}(\langle 1 \rangle)$ *Soit* $\varphi = \varphi(x)$ *une fonction continue définie sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs réelles, bornées ainsi que toutes ses dérivées et satisfaisant*

$$|\Delta \varphi| \leq C_0, \ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap D(V),$$

où $D(V)$ est le domaine de définition de V. Alors

$$\operatorname{Re}\left\langle e^{\varphi/h} P_V u, e^{\varphi/h} u\right\rangle \geq \left\langle \left(V(x) - |\Delta\varphi(x)|^2\right) e^{\varphi/h} u, e^{\varphi/h} \right\rangle, \tag{1.5.4}$$

uniformément pour tout h suffisamment petit.

Remarque 1.5.2 *L'inégalité donnée par* (**??**) *est dite inégalité d'Agmon.*

1.6 Le problème de Dirichlet pour le Laplacien

Parmi les problèmes rencontrés par les chercheurs, les problèmes d'équations aux dérivées partielles, occupent à notre époque une place de choix, en particulier le problème de *Dirichlet,* qui consiste à trouver une fonction harmonique u dans D, continue sur $\overline{D}$, valant u_0 sur le bord ∂D où u_0 est une fonction continue sur le bord du disque unité ouvert D de $\mathbb{C}$. Donc il s'agit de trouver u telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ sur } D \\ u\,|_{\partial D} = u_0 \end{cases},$$

où Δ est le Laplacien.[**?**]

Chapitre 2

Etude de l'existence et de l'unicité des résonances dans le cas analytique

On se propose d'étudier les résonances de l'opérateur de *Schrödinger* donnée par :

$$P = -h^2\Delta + V, \tag{2.0.1}$$

Nous supposons que le potentiel V vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse ($\mathbf{A}_1$)

($\mathbf{A}_{11}$) $V \in C^\infty$ à valeurs réels.

($\mathbf{A}_{12}$) Il existe un compact $K_0 \subset \mathbb{R}^n$, tels que V est analytique sur $K_0^C = \mathbb{R}^n \diagdown K_0$, et se prolonge holomorphiquement dans

$$D_0 = \left\{ x \in \mathbb{C}^m;\ |\operatorname{Im} x| < \sigma_0 \left|\operatorname{Re} x\right|,\ \operatorname{Re} x \in K_0^C \right\},$$

pour la constante $\sigma_0 > 0$.

($\mathbf{A}_{13}$) $V(x) \to 0$ quand $|\operatorname{Re} x| \to \infty,\ x \in D_0$.

Pour mettre en évidence les résonances, nous suivrons la technique de *Hunziker*, nous commençons par la distorsion du potentiel que nous expliciterons ci-dessous.

2.1 Distorsion du potentiel et résonances

Nous allons tout d'abord définir la distorsion

2.1.1 Opérateur de distorsion

L'hypothèse $(\mathbf{A}_1)$, nous permet de définir les résonances prés de l'axe réel comme des valeurs propres complexes de l'opérateur distordu de P que l'on note $P_\theta = \widetilde{P}_{i\theta}$ pour θ suffisamment petit, $\widetilde{P}_\nu = U_\nu P U_{-\nu}$ est l'opérateur conjugué avec $\nu = i\theta$ et U_ν l'opérateur de distorsion sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par :

Pour tout $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ on a :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K_0 \\ x & \text{si } x \in K_0^C \end{cases}.$$

Pour tout $\nu > 0$, l'opérateur U_ν est définit par :

$$\begin{aligned} U_\nu \quad &: \quad L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ u \quad &\to \quad U_\nu u(x) = \det(1 + \nu dF(x))^{\frac{1}{2}} u(x + \nu F(x)). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

L'opérateur $\widetilde{P}_\nu$ est un opérateur différentiel à coefficients analytiques en ν, qui peut s'étendre à des ν complexe assez petit.

Proposition 2.1.1 *Soit $\nu > 0$ assez petit, l'opérateur U_ν possède les propriétés suivantes :*

1. $U_\nu : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.
2. U_ν *est un opérateur unitaire.*

Preuve. **1.** Montrons que : $U_\nu : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned} \|U_\nu u(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |U_\nu u(x)|^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\det(1 + \nu dF(x))^{\frac{1}{2}} u(x + \nu F(x))\right|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Posons :

$$\phi_\nu(x) = x + \nu F(x) = \begin{cases} x & \text{si } \; x \in K_0 \\ (1+\nu)\, x & \text{si } \; x \in K_0^C \end{cases}. \tag{2.1.3}$$

Donc l'équation (**??**) devient :

$$\begin{aligned}
\|U_\nu u(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\det(d\phi_\nu(x))^{\frac{1}{2}} u(\phi_\nu(x))\right|^2 dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\det(d\phi_\nu(x))^{\frac{1}{2}}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\phi_\nu(x))|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\left(\int_{K_0} dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{K_0^C} \left|\det(1+\nu)^{\frac{1}{2}}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \times \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \left[\sqrt{\tau(K_0)} + \det(1+\nu)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\tau(K_0^C)}\right] \times \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq +\infty.
\end{aligned}$$

D'où :

$$U_\nu : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

2. Montrons que U_ν est un opérateur unitaire :

a) Calculons d'abord U_ν^*.

On a :

$$\begin{aligned}
\langle U_v u, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} U_v(u(x))\overline{v(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \det\left(1+\nu dF(x)\right)\ ^{\frac{1}{2}} u\left(x+\nu F(x)\right)\overline{v(x)}dx.
\end{aligned}$$

Or, d'aprés (**??**) on trouve :

$$\langle U_v u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \det\left(d\phi_\nu(x)\right)\ ^{\frac{1}{2}} u\left(\phi_\nu(x)\right)\overline{v(x)}dx.$$

Comme ϕ_ν est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ alors,

$$\begin{aligned}
\langle U_v u, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \det(dy)\ ^{\frac{1}{2}} u(y)\,\overline{v(\phi_\nu^{-1}(y))}\det\left(d\phi_\nu^{-1}(y)\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\,\overline{v(\phi_\nu^{-1}(y))\det\left(d\phi_\nu^{-1}(y)\right)^{\frac{1}{2}}}dy \\
&= \langle u, U_\nu^* v\rangle
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
U_\nu^* \quad &: \quad L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\
v \quad &\rightarrow \quad U_\nu^* v(x) = v((x+\nu F(x))^{-1})\det\left(d\left(x+\nu F(x)\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

b) Montrons que U_ν est un opérateur unitaire :

$$U_v \text{ est unitaire} \Leftrightarrow \; U_v U_v^* = U_v^* U_v = I_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned}
U_v U_v^*(u)(x) &= U_v \left[U_v^*(u)\right](x) \\
&= \det\left(1+\nu dF(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left[U_v^*(u)\right](x+\nu F(x)) \\
&= \det\left(d\phi_\nu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left[U_v^*(u)\right](\phi_\nu(x)) \\
&= \det\left(d\phi_\nu(x)\right)^{\frac{1}{2}} u\left(\phi_\nu^{-1}\phi_\nu(x)\right) \det\left(d\phi_\nu^{-1}(\phi_\nu(x))\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= u(x)
\end{aligned}$$

car

$$\det\left(d\phi_\nu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \det\left(d\phi_\nu^{-1}(\phi_\nu(x))\right)^{\frac{1}{2}} = \det\left(d\phi_\nu^{-1}(\phi_\nu(x))\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

D'autre part, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned}
U_v^* U_v(v)(y) &= U_v^* \left[U_v(v)\right](y) \\
&= \det\left(d\phi_\nu^{-1}(y)\right)^{\frac{1}{2}} \left[U_v(v)\right]\left(\phi_\nu^{-1}(y)\right) \\
&= \det\left(d\phi_\nu^{-1}(y)\right)^{\frac{1}{2}} \det\left(d\phi_\nu\left(\phi_\nu^{-1}(y)\right)\right) v\left(\phi_\nu\left(\phi_\nu^{-1}(y)\right)\right) \\
&= v(y)
\end{aligned}$$

car

$$\det\left(d\phi_\nu^{-1}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \det\left(d\phi_\nu\left(\phi_\nu^{-1}(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \det\left(d\phi_\nu\left(\phi_\nu^{-1}(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

De tout ce qui précede, on en déduit que :

$$U_v U_v^* = U_v^* U_v = I_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

c'est à dire que U_v est unitaire. □

Proposition 2.1.2 *L'opérateur de Schrödinger $P = -h^2\Delta + V$ est un opérateur essentiellement auto-adjoint.*

Preuve. L'opérateur $P = -h^2\Delta + V$ est essentiellement auto-adjoint de domaine

$$H^2(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n), \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

En effet :

$P_0 = -h^2\Delta$ est essentiellement auto-adjoint de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$ avec $\sigma_{ac}(-\Delta) = [0. + \infty[$.

D'après l'hypothèse $(\mathbf{A}_{13})$, on a $V(x) \to 0$ quand $|\mathrm{Re}\, x| \to \infty,\ x \in D_0$ donc V est $(-\Delta)$ compact d'après le lemme (**??**). Ceci entraîne que d'après le lemme (**??**), V est $\Delta-$borné de borne relative inférieure à 1.

En fin d'après le théorème de Kato-Rellich (**??**), $(H^2(\mathbb{R}^n), P)$ est essentiellement auto-adjoint. $\square$

2.1.2 Résonances

La théorie des résonances pour l'opérateur de Schrödinger P a été développée dans un très grand nombre d'articles, il ya essentiellement deux façons d'introduire les résonances. Dans notre travail, nous utiliserons la méthode des dilatations analytiques explicitée ci-dessous.

Dilatation analytique et résonances

Dans cette partie nous définissons les résonances de l'opérateur de Schrödinger P donnée par (**??**) sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ à l'aide des dilatations analytiques.

Définition 2.1.1 (Dilatation analytique) *[?] Soit V une fonction sur $\mathbb{R}^n$. On dit que V est dilatable analytiquement lorsque la famille d'opérateurs $\left(V(xe^{\mu})(-h^2\Delta+1)^{-1}\right)_{\mu\in\mathbb{R}}$ s'étend en une famille d'opérateurs compacts sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, analytique par rapport à μ dans un voisinage complexe de 0.*

Nous supposons toujours que le potentiel V vérifier l'hypothèse $(\mathbf{A}_1)$, et l'on peut donc définir sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur P_θ avec $\mu = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^+$ assez petit de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} P_\theta &= U_\theta P U_{-\theta} \\ &= e^{-2i\theta}h^2D^2 + V(xe^{i\theta}), \end{aligned}$$

où

$$U_\theta f(x) = f(xe^{i\theta}),\ \text{avec } 0 < \theta < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \text{ et } \Delta = D^2.$$

Le théorème de Weyl (**??**) permet d'affirmer que le spectre essentiel de cet opérateur est la demi droite $e^{-2i\theta}\mathbb{R}^+$.

Soit un domaine Π_θ définie par :

$$\Pi_\theta = \{E \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, -2\theta < \arg E < 0\}.$$

C'est-à-dire :

$$\sigma_{ess}(P_\theta) = \sigma_{ess}(e^{-2i\theta}(hD)^2) = e^{-2i\theta}\mathbb{R}^+,$$

sont alors les éléments de la réunion $\Gamma(h)$ des spectres discrets des opérateurs P_θ pour $0 \leq \theta < \theta_0$.

Le spectre de P_θ est discret dans

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C}; -2\theta \leq \arg z \leq 0\}.$$

De plus si $\theta^{'} > \theta$, on aura alors :

$$\sigma_{disc}(P_{\theta'}) \cap S_\theta = \sigma_{disc}(P_\theta) \cap S_\theta.$$

En fin, les résonances de l'opérateur P sont les éléments de

$$\Gamma(h) = \sigma_{disc}(P_\theta) \cap S_\theta. \tag{2.1.4}$$

Définition 2.1.2 *[**?**] Soit $E \in \mathbb{C}$ avec $-2\theta_0 < arg(E) \leq 0$. On dit que E est une résonance de P s'il existe $\theta \in]0, \theta_0[$ tel que $arg(E) > -2\theta$ et $E \in \sigma_{disc}(P_\theta)$.*

L'ensemble des résonances de l'opérateur P est noté $\Gamma(h)$.

La définition des résonances donnée par la formule (**??**) est indépendante de θ dans le sens ou $\sigma_{disc}(P_{\theta'}) \cap S_\theta = \sigma_{disc}(P_\theta) \cap S_\theta$ si $\theta' > \theta$, elle est aussi indépendant de fonction $F(x)$.

En outre si u_θ est une fonction propre de P_θ, il existe alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, holomorphique dans un domaine D_0, telle que $u_\theta = U_{i\theta}u$.

Les fonctions u sont appelées les états résonnants de P.

2.1.3 Étude des résonances et approximation BKW des états résonnants dans le cas d'un puit dans une île

Pour tout ce qui suit nous ajouterons une autre hypothèse sur le potentiel de l'opérateur de Schrödinger (**??**).

Hypothèse ($\mathbf{A_2}$)

Il existe un domaine ouvert bornée $\ddot{O}\subset\mathbb{R}^n$, un point x_0 dans $\ddot{O}$ et un nombre positif E_0 tels que :

$$V(x_0) = E_0,\ \frac{\partial V}{\partial x}(x_0) = 0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0) > 0,$$

et

$$V(x) > E_0 \text{ dans } \ddot{O}\diagdown\{x_0\}\,,\ \ V(x) = E_0 \text{ sur } \partial\ddot{O}.$$

Au niveau du puit $U = \{x_0\}$ du potentiel V, on peut associer le problème de *Dirichlet* P_D (**??**).

Notons par :

a) $d(x,y)$: la distance d'*Agmon* associée à la pseudo-métrique $ds^2 = \max(V(x),0)dx^2$.

b) $S = d(x_0, \partial\ddot{O})$: la distance minimale de x_0 au bord de $\ddot{O}$.

c) $B_d(x_0,S) = \{x, d(x,x_0) < S\}$: la boule ouverte centrée en x_0 de rayon S par rapport à la distance d.

On considère la réalisation de *Dirichlet* P_D de l'opérateur de Schrödinger P dans le domaine $\overline{B_d(x_0, S-\eta)}$ pour η suffisament petit.

Soit $\phi(x)$ la fonction de phase dans un certain voisinage ouvert de x_0, et soit $d\,(x) = d(x,x_0)$ la distance d'*Agmon* associée à la pseudo-métrique

$$ds^2 = \max(V(x),0)dx^2.$$

Rappelons que la phase $\phi(x)$ est une solution (solution **BKW**) de l'équation Eiconale :

$$q(x,\phi'_x) = 0,\ \text{où } q(x,\xi) = \xi^2 - V(x).$$

Helffer et *Sjöstrand*, dans [?], ont montré que la fonction

$$\phi(x) = d(x, x_0),$$

est analytique dans un voisinage w de x_0, et on a :

Proposition 2.1.3 *[?] Dans un voisinage suffisamment petit de x_0, on a :*

$$\phi(x) = d(x, x_0).$$

Preuve. Soit $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe de C^1.

$$\begin{aligned} |\phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0))| &= \left| \int_0^1 \nabla\phi(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(t))}\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt \\ &= |\gamma|\,. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Par définition la dernière expression est la longueur de γ par la métrique d'Agmon.

En prenant de l'inf au dessus de tout la courbe C^1 de x à y, nous obtenons

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq d(x, y),$$

et en particulier pour $y = x_0$

$$0 \leq \phi(x) \leq d(x, x_0).$$

De plus, si γ est une courbe intégrale de $\nabla\phi$ jusqu'à la parametrisation, alors d'après (**??**) nous avons l'égalité :

$$|\phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0))| = |\gamma| \leq d(x, y).$$

Par conséquent

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq d(x, y).$$

On trouve égalité s'il ya une courbe intégrale $\nabla\phi$ de x à y. Mais pour tout x prés de 0, il ya une unique courbe intégrale de $\nabla\phi$ de x à 0, donc

$$\phi(x) = d(x, x_0).$$

□

La variété $\Lambda_\phi : \xi = \phi'_x$ est associée au champ *Hamiltonien* H_p qui a un point critique en $(x_0, 0)$.

Les états résonants u_D admettent prés de x_0 un développement BKW du type

$$u_D(x,h) = h^{-\frac{n}{4}} a(x,h) e^{-d(x_0,x)/h}, \tag{2.1.6}$$

où le symbole admet le developpement asymptotique :

$$a(x,h) \sim a_0(x) + h a_1(x) + ... + h^n a_n(x) + ...$$

Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction propre de l'opérateur de Schrödinger P associé à $hE(h)$ où $E(h)$ admet le développementt suivant :

$$E(h) \sim E_0 + E_1 h + E_2 h^2 + ... + E_n h^n + ...$$

On a alors le théorème suivant du à *Helffer* et *Sjöstrand* [**?**].

Théorème 2.1.1 (Helffer et Sjöstrand) *[?] Soit $\lambda_D(h)$ la première valeur propre de P_D et $u_D(x,h)$ la fonction propre normalisée correspondante.*

Alors $\lambda_D(h)$ a un développement asymptotique classique complet par rapport à h :

$$\lambda_D(h) = E_0 + E_1 h + E_2 h^2 + ...,$$

où

$$E_1 = tr\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0)},$$

est la première valeur propre correspondante à l'oscillateur harmonique :

$$-\Delta + \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0)x, x \right\rangle.$$

Dans le voisinage ω de x_0, $u_D(x,h)$ peut être s'écrit sous la forme de BKW *comme suit :*

$$u_D(x,h) = h^{-\frac{n}{4}} a(x,h) e^{-d(x_0,x)/h}, \tag{2.1.7}$$

où le symbole classique a est donnée par :

$$a(x,h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) h^j,\ a_0(0) > 0.$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons qu'il n'ya pas de trajectoires captées au dessus de $\ddot{O}^C$ pour le niveau d'énergie E_0 et dans ce sens nous avons :

Hypothèse $(\mathbf{A_3})$

Définition 2.1.3 *E_0 est un niveau d'énergie non trapping (non capture prés d'un niveau d'énergie E_0) sur $\ddot{O}^C$ si et seulement si*

$$K(E) = \emptyset,$$

où,

$$K(E) = \left\{(x,\xi) \in P^{-1}(E_0),\ \exp(tH_p)\,(x,\xi) \nrightarrow \infty, |t| \to \infty,\ x \in \ddot{O}^C\right\}.$$

Le champ Hamiltonien H_p de l'opérateur $P\,(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$ est donnée par :

$$H_p = \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} = 2\xi\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

En particulier dans le bord de $\ddot{O}$ $(x \in \partial\ddot{O})$, le seul point $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $p(x,\xi) = E_0$ est 0 et

$$H_p = -\nabla V(x)\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

En fin, $(\mathbf{A_3})$ implique :

$$\nabla V(x) \neq 0 \text{ sur } \partial\ddot{O}.$$

L'objectif de cette hypothèse est de déterminer le domaine ou les résonances n'existent pas.

2.2 Théorème d'existence et d'unicité des résonances

Le résultat principal d'existence et d'unicité des résonances dans le cas analytique est donné par le théorème (**??**).

Avant de démontrer ce théorème nous commençons par citer *le problème de Grushin*

2.2.1 Problème de Grushin ([?],[?])

Ce problème est utilisé pour inverser l'opérateur de Schrödinger P. En effet : soit E une valeur propre de P et soit $K'' = \overline{\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}}$ le sous espace propre engendré par les fonctions propres normalisées associée à E, ces fonctions propres vérifiant $P\varphi_j = E_j\varphi_j$, on note par K' le complément orthogonale de K'' dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ c'est-à-dire :

$$L^2(\mathbb{R}^n) = K' \oplus K''.$$

Soient $R_0^- : \mathbb{C}^m \to L^2(\mathbb{R}^n)$ et $R_0^+ : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^m$ les opérateurs définies respectivement par :

$$R_0^- u = \sum_{j=1}^{m} u_j^- \varphi_j \quad \text{et} \quad R_0^+ u = (\langle u, \varphi_j \rangle)_{j=1,\dots,m}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Soit

$$\Omega(h) = \{z \in \mathbb{C},\ d(\operatorname{Re} z, I(h)) < a(h), |\operatorname{Im} z| < b(h)\},$$

où :

a) Pour tout $\eta > 0$, η assez petit, on pose $M_0 = \overline{B_d(x_0, s-\eta)}$ et désignons par $P_D = P_{M_0}$ la réalisation de Dirichlet correspondante à l'opérateur P.

b) Pour tout $J \subset]0,1]$ avec $0 \in \overline{J}$ et $I(h)$, $h \in J$, une famille d'intervalles compacts avec $I(h) \to \{0\}$ lorsque $h \to 0$, supposons qu'il existe une fonction $a(h) > 0$, $h \in J$ qui tend vers 0 quand $h \to 0$ telle que :

$$a(h) \geq \frac{1}{C_\epsilon} e^{-\epsilon/h} \quad \text{pour tout } \epsilon > 0.$$

c) $b(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

Alors pour tout $z \in \Omega(h)$, on considère le problème de *Grushin* donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (P-z)u + R_0^- u^- = v \\ R_0^+ u = v^+ \end{array} \right. , \tag{2.2.1}$$

avec

$$(u, u^-) \in L^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{C}^m \text{ et } (v, v^+) \in L^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{C}^m.$$

En se référent à [**?**], la solution unique du problème de *Grushin* (**??**) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = (P' - z)^{-1} v' \\ u_j'' = v_j^+ \\ u_j^- = v_j'' + (z - u_j) v_j^+ \end{array} \right. .$$

Tout les outils sont mit en place pour démontrer le théorème d'existence et d'unicité des résonances dans le cas analytique (**??**). La démonstration de ce théorème est technique et basée sur plusieurs constructions.

Preuve. Considérons la distorsion analytique P_θ avec $\theta = h \ln \frac{1}{h}$ et U_ν tel que :

$$U_\nu \phi(x) = \det(1+\nu dF(x))^{\frac{1}{2}} \phi(x+\nu F(x)),$$

où $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{sur } \ddot{O} \subset K_0 \subset \mathbb{R}^n \\ F(x) = x & \text{pour } x >> \\ |F(x)| \leq |x| & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Posons :

$$\tilde{P}_\theta = P_\theta + W(x),$$

où

$$W \in C_0^\infty(\ddot{O}),\ W(x_0) > 0 \text{ et } W \geq 0 \text{ partout.}$$

En particulier le flot *Hamiltonien* de $P+W$ n'a aucune trajectoire captée d'énergie E_0 c'est-à-dire, le support de W $(suppW)$ est arbitrairement petit au voisinage de x_0.

Soit ψ_0 une fonction tel que $\psi_0 \in C_0^\infty((\mathbb{R}^n \diagdown supp\ W) \times \mathbb{R}^n)$ et

$$-\operatorname{Im} \widetilde{p}_\theta(x - t\partial_x\psi_0 - it\partial_\xi\psi_0\ ,\ \xi - t\partial_\xi\psi_0 + it\partial_x\psi_0) \geq \frac{1}{C_0}\ h \ln \frac{1}{h}, \tag{2.2.2}$$

pour $C_0 > 0$ assez grand et $t = 2C_0\theta$. L'inégalité (**??**) reste valable pour tout (x,ξ) tel que

$$|\operatorname{Re} \widetilde{p}_\theta(x,\xi) - E_0| \leq \frac{\langle\xi\rangle^2}{C_0}.$$

En particulier pour $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nous obtenons aisément

$$\left\| e^{t\psi_0 \diagup h} T_v \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \mathcal{O}(|h \ln h|^{-1}) \left\| e^{t\psi_0 \diagup h} T(\tilde{P}_\theta - z)v \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}, \tag{2.2.3}$$

uniformément pour $h > 0$ suffisamment petit et $|z - E_0| << h \ln\left(\frac{1}{h}\right)$. Ceci veut dire que la norme de $\left(\tilde{P}_\theta - z\right)^{-1}$ est équivalente à $\mathcal{O}(|h \ln h|^{-1})$ lorsque nous considérons que $\tilde{P}_\theta$ agit dans l'espace $H_t = L^2(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\|v\|_t = \left\| e^{t\Psi_0 \diagup h} T_v \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}. \tag{2.2.4}$$

Á partir de ce point, on peut procéder exactement comme dans [?], c'est-à-dire, on utilise le problème de Grushin pour P_D, ceci implique que :

$$|\lambda_D(h) - E(h)| = \mathcal{O}\left(e^{-(2S-\varepsilon(\eta)/h)}\right),$$

en employant l'estimation d'*Agmon* dans $\ddot{O}$ et $u_\theta = U_{i\theta}u\,(= u \text{ sur } K)$.

En ce procèdent comme dans la preuve du théorème 9.9 [?] et de la formule (9.37) [?], nous obtenons aisément l'égalité (**??**) (dans ce cas u doit être normalisée, i. e ; $\|u_\theta\|_t = 1$).

De plus, la même procédure montre que :

$$\left\|e^{t\psi_0/h}Tu_\theta\right\|_{L^2((\mathbb{R}^n\setminus B_{d(x_0,s-\eta)})\times\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(e^{-(2S-\varepsilon(\eta))/h}),$$

et donc,

$$\|u_\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus B_d(x_0,S-\eta)} = \mathcal{O}(e^{-(2S-\varepsilon'(\eta))/h}).$$

Par conséquence, la normalisation de u ne dépend pas du choix particulier de K, F et ψ_0.

Montrons maintenant l'égalité (**??**).

Soit $\chi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(B_d(x_{0,}S-\eta)$ tel que :

$$\chi_1 = 1 \text{ sur } B_d(x_0, S-2\eta) \ (\eta > 0 \text{ fixé assez petit}), \tag{2.2.5}$$

et soit $\chi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(B_d(x_{0,}\frac{1}{2}(s+\eta))$ tel que

$$\chi_2 = 1 \text{ sur } B_d(x_0, \frac{1}{2}(s-\eta)).$$

Posons

$$R_\theta(z) = \chi_1(P_D - z)^{-1}\chi_2 + (\tilde{P}_\theta - z)^{-1}(1-\chi_2). \tag{2.2.6}$$

Par la formule (9.39) dans [?], on a :

$$(P_\theta - z)R_\theta(z) = I + K_\theta(z), \tag{2.2.7}$$

où,

$$\begin{aligned} K_\theta(z) &= [P_\theta, \chi_1](P_D - z)^{-1}\chi_2 - W(\tilde{P}_\theta - z)^{-1}(1-\chi_2) \\ &= \left[-h^2\Delta, \chi_1\right](P_D - z)^{-1}\chi_2 - W(\tilde{P}_\theta - z)^{-1}(1-\chi_2). \end{aligned}$$

Si $suppW \subset B_d(x_0, \eta)$, alors, comme dans [?], l'estimation d'Agmon montre que :

$$\|K_\theta\| = \mathcal{O}(e^{-(S-\varepsilon(\eta))/2h}),$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit et $z \in \gamma$, où $\varepsilon(\eta) \longrightarrow 0$ quand $\eta \longrightarrow 0_+$. De la formule (??) en on déduit :

$$(P_\theta - z)^{-1} = R_\theta(z)(I + \mathcal{O}(e^{-(S-\varepsilon(\eta))/2h})). \tag{2.2.8}$$

Si on pose :

$$k = h \ln \frac{1}{h}, \tag{2.2.9}$$

et par (??)et (??), pour $z \in \gamma$, nous avons,

$$\begin{aligned} \|R_\theta(z)\|_{\mathcal{L}(H_t)} &= \mathcal{O}(h^{-2} + k^{-1}) \\ &= \mathcal{O}(h^{-2}), \end{aligned}$$

h correspond à P_D (l'oscillateur harmonique, comme $E = 0$ (dérivée nulle), alors, la valeur propre $E \sim \mathcal{O}(h^2)$).

En fin, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\|(P_\theta - z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H_t)} &= \mathcal{O}(h^{-2})\left(I + \mathcal{O}(e^{-(s-\varepsilon(\eta))/2h})\right) \\ &\leq ch^{-2}\left(I + (c_1 e^{-(s-\varepsilon(\eta))/2h})\right) \\ &\leq ch^{-2} + cc_1 h^{-2}(e^{-(s-\varepsilon(\eta))/2h}) \\ &\leq h^{-2}\left(I + (c_1 e^{-(s-\varepsilon(\eta))/2h})\right) \\ &= \mathcal{O}(h^{-2}). \end{aligned}$$

Et donc :

$$\left\|(P_\theta - z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H_t)} = \mathcal{O}(h^{-2}), \tag{2.2.10}$$

uniformément pour $z \in \gamma, h > 0$ assez petit. □

Chapitre 3

Géneralisation de l'existence des résonances dans le cas non analytique

Dans ce chapitre nous nous intéressons essentielement à la géneralisation de l'existence des résonances dans le cas non analytique.

Citons d'abord l'estimation de l'existance de l'île [**?**].

3.1 Estimation de l'existence de l'île

Considèrons la realisation de Dirichlet P_D de P sur le domaine dépandent de h :

$$M_h = \left\{ x \in \ddot{O},\ d(x, \partial \ddot{O}) \geq k^{\frac{2}{3}} \right\}.$$

Notons par :

a) λ_h : la première valeur propre.

b) v_h : la fonction propre normalisée.

c) d_h : la distance d'Agmon sur M_h associée à la pseudo-métrique $(V - \lambda_h)_+ dx^2$. (d_h dépend de h)

Posons :

$$\varphi_h(x) = d_h(x, x_0),$$

et soit χ_1 la troncature définie par la formule (**??**).

De ce qui précede, on remarque que :

$$(P_h - \lambda_D)\, \chi_1 u_D = (P_D - \lambda_D)\, \chi_1 u_D = \mathcal{O}(h^\infty),$$

et ainsi par le principe du $min - max$ (puisque $V \geq E_0$ sur M_h), on a :

$$E_0 \leq \lambda_h \leq \lambda_D + \mathcal{O}(h^\infty),$$

et en particulier $\lambda_h = E_0 + \mathcal{O}(h)$.

En outre, puisque x_0 est l'unique point de M_h où V atteint son minimum non dégénérée E_0, et puisque

$$V - E_0 \geq \delta k^{\frac{2}{3}} >> k \text{ prés du } \partial M_h$$

par la norme usuelle (voir par exemple [[**?**], section 3] et [**?**]) on trouve :

$$\lambda_h = \lambda_D + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Lorsque

$$V - \lambda_h \leq V - E_0,$$

on a :

$$\varphi_h(x) \leq d(x_0, x). \tag{3.1.1}$$

3.2 Quelques résultats

Dans cette partie, nous allons présenter quelques résultats, ces derniers découlent directement des résultats trouver précédemment.

Lemme 3.2.1 *[**?**] Sous les hypothèses **(A_2)** et **(A_3)**, il existe une constante $C_1 \geq 0$ tel que $\forall x \in M_h$, $h > 0$ assez petit, on a :*

$$\varphi_h(x) = d(x_0, x) \geq s(x) - C_1 k,$$

où $k = h \ln \frac{1}{h}$.

Preuve. Soit :

$$U_h^{\pm} = \{x \in M_h; \pm V(x) \geq \pm \lambda_h\}.$$

Alors,

$$V(x) - E_0 \sim k^{\frac{2}{3}} >> \lambda_h - E_0 \ \text{ sur } \ \partial M_h.$$

Par définition, on a :

$$\varphi_h(x) = d_h(U_h^-, x) = \inf_{\gamma\in\Gamma_x} \int_\gamma \sqrt{V(y) - \lambda_h}\, |dy| \,, \tag{3.2.1}$$

où :

$$\Gamma_x = \left\{\gamma : [0,1] \longrightarrow U_h^+ \text{ tq } \gamma \in C^1, \gamma(0) \in U_h^- \text{ et } \gamma(1) = x\right\}.$$

Entre outre :

$$\lambda_h = E_0 + E_1 h + \mathcal{O}(h^2) > E_0.$$

Les hypothèses $(\mathbf{A}_2)$ et $(\mathbf{A}_3)$ impliquent que $\nabla V \neq 0$ sur $\{V = \lambda_h\}$ pour $h > 0$ assez petit.

Alors ; si $\varphi_h(x) \leq S_h = d_h(x_0, \ddot{O})$, par des élément de la géométrie Riemanienne (C'est-à-dire, on utilise le fait que $\dot\gamma(t)$ est colinéaire à $\nabla\varphi_h(\gamma(t))$ pour tout géodésique γ minimale ([**?**] et [**?**]), on trouve :

$$V(x) > \lambda_h,$$

$\varphi_h(x)$ est atteint sur la géodésique minimale γ et peut-être reparmétrisée par l'application suivante :

$$t \longrightarrow (\gamma(t), \frac{1}{2}\dot\gamma(t)),$$

c'est une bicaractéristique nulle pour q_h où

$$q_h(x,\xi) = \xi^2 - (V(x) - \lambda_h). \tag{3.2.2}$$

En particulier γ vérifie

$$|\dot\gamma(t)| = 2\sqrt{V(\gamma(t)) - \lambda_h}, \tag{3.2.3}$$

on obtient donc

$$\varphi_h(x) = 2\int_0^{T_x} (V(\gamma(t)) - \lambda_h)\, dt,$$

où $T_x = T_x(h) > 0$ représente le temp nécessaire d'aller de U_h^- vers x dans la nouvelle paramétrisation.

Notons :

$$\lambda_h = E_0 + h\mu_h, \tag{3.2.4}$$

où

$$\mu_h = E_1 + \mathcal{O}(h).$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned}
\varphi_h(x) &= 2\int_0^{T_x} V(\gamma(t) - E_0)dt - 2T_x h\mu_h \quad (\text{par } (\mathbf{??})) \\
&= \int_0^{T_x} \sqrt{V(\gamma(t) - E_0}\sqrt{|\dot{\gamma}(t)|^2 + 4h\mu_h}dt - 2T_x h\mu_h \qquad (\text{par } (\mathbf{??})) \\
&\geq \int_\gamma \sqrt{V(y) - E_0}d\,|y| - 2T_x h u_h \quad (\text{par } (\mathbf{??})) \\
&\geq d(U_h^-, x) - 2T_x h\mu_h \qquad (\text{par } (\mathbf{??}))\,.
\end{aligned}$$

En outre, pour x proche de x_0, on a $d(x_0, x) = \mathcal{O}\left(|x - x_0|^2\right)$.

On remarque que :

$$d(U_h^-, x_0) = \mathcal{O}(h),$$

or par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
d(x_0, x) &\leq d(x_0, U_h^-) + d(U_h^-, x) \\
&\leq d(U_h^-, x) + Ch.
\end{aligned}$$

D'ou :

$$\begin{aligned}
\varphi_h(x) &\geq d(x_0, x) - Ch - 2T_x h u_h \\
&\geq s(x) - Ch - 2T_x h u_h,
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

pour tout x verifiant :

$$\varphi_h(x) < S_h.$$

Il reste à prouver que $T_x = \mathcal{O}(\ln \frac{1}{h})$. Il suffit de poser :

$$(x(t), \xi(t)) = (\gamma(t), \frac{1}{2}\dot{\gamma}(t)) = \exp tH_p\,(x_h, 0)\,,$$

où,

$$H_p\,(x, \xi) = (2\xi, \nabla V(x)),$$

est le champ *Hamiltonien* de p_h et $x_h = \gamma(0) \in U_h^-$.

Si $\varepsilon > 0$, un nombre arbitrerement fixé, alors $H_p(x, \xi)$ se déplace en dehors d'un certains voisinage fixé prés de 0 sur

$$\{(x, \xi); |x - x_0| \geq \varepsilon, q_h(x, \xi) = 0\},$$

par conséquent, si $|x - x_0| \geq \varepsilon$, le temps nécessaire pour que γ se déplace de x vers l'ensemble $\{y : |y - x_0| = \varepsilon\}$ est bornée.

Posons $\tilde{T}$ le temps estimé pour que γ se déplace de $\gamma(0) \in U_h^-$ vers $\{y : |y - x_0| = \varepsilon\}$.

Puisque on travaille sur un petit voisinage de x_0 on peut supposer que :

$$x(t)\nabla V(x(t)) \geq 4\delta^2 |x(t)|^2 \text{ pour } t \in \left[O, \tilde{T}\right], \delta > 0 \text{ constante.}$$

Posons :

$$f(t) = \frac{x(t)\xi(t)}{|x(t)|^2},$$

alors ;

$$f'(t) + 4(f(t))^2 = \frac{2|\xi(t)|^2 + x(t)\nabla V(x(t))}{|x(t)|^2} \geq 4\delta^2 \left(\text{car } \frac{x(t)\xi(t)}{|x(t)|^2} \geq 4\delta^2\right).$$

Dans le même domaine de définition, on définit la fonction g comme suit :

$$g(t) = (\delta - f(t))^{-1}.$$

Elle vérifie :

$$g' \geq 4\frac{\delta^2 - f^2}{(\delta - f)^2} = 4\frac{\delta + f}{\delta - f} = 8\delta g - 4,$$

comme $g(0) = \delta^{-1}$, on déduit aisément :

$$g(t) \geq \frac{1}{2\delta}(1 + e^{8\delta t}),$$

lorsque $f(t) < \delta$. On trouve alors ;

$$f(t) \geq \delta - \frac{2\delta}{1 + e^{8\delta t}}$$

dans le même intervalle.

Si

$$f(t_1) = \delta,$$

pour $t_1 \in \left[0, \tilde{T}\right)$, on fixe arbitrairement $\delta_1 < \delta$ et pour $t \sim t_1$, on pose

$$g_1(t) = (\delta_1 - f)^{-1},$$

en utilisant

$$f'(t) + 4(f(t))^2 \geq 4\delta_1^2,$$

de même, on trouve :

$$g_1(t) \geq \frac{1}{2\delta_1} - (\frac{1}{2\delta_1} + \frac{1}{\delta - \delta_1})e^{8\delta_1(t-t_1)} \text{ lorsque } f(t) > \delta_1,$$

et donc :

$$\frac{1}{f(t) - \delta_1} \leq (\frac{1}{2\delta_1} + \frac{1}{\delta - \delta_1})e^{8\delta_1(t-t_1)} - \frac{1}{2\delta_1}.$$

En particulier $(f(t) - \delta_1)^{-1}$ est borné sur tout intervalle fermé du type $[t_1, T_1]$ où $f(t) > \delta_1$, ceci veut-dire que $f(t)$ ne peut pas prendre la valeur δ_1 sur $[t_1, \tilde{T}]$ et dans ce cas on doit avoir

$$f(t) \geq \delta \text{ sur } [t_1, \tilde{T}].$$

Jusqu'a présent, nous avons prouver :

$$f(t) \geq \delta - \frac{2\delta}{1 + e^{8\delta t}} \text{ sur } [0, \tilde{T}]. \tag{3.2.6}$$

Par ailleurs,

$$\frac{d}{dt} \ln |x(t)| - \frac{x(t)x'(t)}{|x(t)|^2} = 2f(t),$$

et $|x(0)| \geq \delta' \sqrt{h}$ pour $\delta' > 0$ constante, de (**??**), on déduit :

$$\begin{aligned} \ln |x(t)| &\geq \ln(\acute{\delta}\sqrt{h}) + 2\delta t - \int_0^t \frac{2\delta ds}{1 + e^{8\delta s}} \\ &\geq \ln(\acute{\delta}\sqrt{h}) + 2\delta t - \int_0^{+\infty} \frac{2\delta ds}{1 + e^{8\delta s}}, \end{aligned}$$

et donc sur $[0, \widetilde{T}]$, on a :

$$|x(t)| \geq \delta'' \sqrt{h} e^{2\delta t}, \tag{3.2.7}$$

avec $\delta'' = \delta' e^{-C_2}$, $C_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2\delta ds}{1+e^{8\delta s}}$.

Comme

$$\varepsilon = \delta'' \sqrt{h} e^{2\delta t} \text{ lorsque } t = \frac{1}{2\delta} \ln(\frac{\varepsilon}{\delta'' \sqrt{h}}),$$

de (**??**) on déduit que :

$$\tilde{T} \leq \frac{1}{2\delta} \ln(\frac{\varepsilon}{\delta'' \sqrt{h}}),$$

et par la formule (**??**) on trouve :

$$\varphi_h(x) \geq s(x) - C_1' k, \tag{3.2.8}$$

pour tout x vérifiant $\varphi_h(x) < S_h$ et $C_1' > 0$ une constante indépendante de x.

Dans un autre sens, $\varphi_h(x)$ atteint S_h au point x_h qui vérifie

$$V(x_h) = \lambda_0 = E_0 + \mathcal{O}(h).$$

Par conséquent la distance d'Agmon montre que :

$$d\left(x_h, \ddot{O}\right) = \mathcal{O}(h),$$

et $d(x_0, x) \geq S - Ch$ pour une constante $C > 0$.

Par ailleurs, la formule (**??**) montre aussi que $S_h \geq S - C_1 k$ avec $C_1 = C_1' + C$, c'est-à-dire que la formule (**??**) reste valable pour $\varphi_h(x) \geq S_h$ (car par définition, nous avons $s\,(x) \leq S$), d'où le résultat. $\square$

Lemme 3.2.2 *[?] Sous les hypothèses* $(\mathbf{A_1}) - (\mathbf{A_3})$, *il existe une constante* $N_0 > 0$ *tel que :*

$$\|e^{\varphi_h/h} v_h\|_{H^1(M_h)} = \mathcal{O}(h^{-N_0}),$$

uniformément pour $h > 0$ *assez petit.*

Preuve. Posant :

$$\phi(x) = \begin{cases} \varphi_h(x) - Ch \ln\left[\frac{\varphi_h(x)}{h}\right] & \text{si } \varphi_h(x) \geq Ch \\ \varphi_h(x) - Ch \ln C & \text{si } \varphi_h(x) \leq Ch \end{cases}$$

où $C \geq 1$ est une certaine constante qui sera prise par la suite assez grande.

En utilisant l'estimation d'Agmon on trouve :

$$\mathrm{Re}\left\langle e^{\phi/h}(P - \lambda_h) v_h, e^{\phi/h} v_h \right\rangle = h^2 \left\|\nabla(e^{\phi/h} v_h)\right\|^2 + \left\langle \left(V - \lambda_h - (\nabla\phi)^2\right) e^{\phi/h} v_h, e^{\phi/h} v_h \right\rangle. \tag{3.2.9}$$

Maintenant si C est assez grand, alors par (**??**) nous avons :

$$M_h \cap \{\varphi_h(x) \geq Ch\} \subset \{V \geq \lambda_h\}.$$

D'ailleurs, sur cet ensemble nous avons

$$\nabla\phi = (1 - \frac{Ch}{\varphi_h})\nabla\varphi_h,$$

en utilisant le fait que :

$$(\nabla\varphi_h)^2 \leq (v - \lambda_h)_+$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned} v - \lambda_h - (\nabla\phi)^2 &\geq V - \lambda_h - \left(1 - \frac{Ch}{\varphi_h}\right)^2 (V - \lambda_h) \\ &\geq Ch\frac{V - \lambda_h}{\varphi_h}. \end{aligned}$$

Posons : $\lambda_h = E_0 + u_h h$ avec $u_h = E_1 + \mathcal{O}(h)$ et en utilisant (**??**) on en déduit :

$$\begin{aligned} V(x) - \lambda_h - (\nabla\phi(x))^2 &\geq Ch\frac{V(x) - E_0}{d(x_0, x)} - Ch\frac{\mu_h h}{\varphi_h} \\ &\geq \frac{Ch}{C_0} - \mu_h h, \end{aligned}$$

sur

$$M_h \cap \{\varphi_h(x) \geq Ch\} \cap \{|x - x_0| << 1\}$$

et ainsi, pour C assez grand

$$V(x) - \lambda_h - (\nabla\phi(x))^2 \geq \frac{Ch}{2C_0},$$

Sur le même ensemble, d'autre part, loin d'un certain voisinage de x_0, en M_h nous avons :

$$V(x) - \lambda_h - (\nabla\phi(x))^2 > \frac{hk^{\frac{2}{3}}}{C}.$$

En utilisant l'estimation (**??**), on obtient :

$$h^2 \left\|\nabla\left(e^{\phi/h} v_h\right)\right\|^2 + hk^{2/3} \left\|e^{\phi/h} v_h\right\|^2_{\{\varphi_h \geq Ch\}} = \mathcal{O}\left(\left\|e^{\phi/h} v_h\right\|^2_{\{\varphi_h \leq Ch\}}\right),$$

et ainsi $\phi \leq Ch(1 - \ln C) \leq 0$ sur $\{\varphi_h \leq Ch\}$, on conclue que :

$$h^2 \left\| \nabla \left(e^{\phi/h} v_h \right) \right\|^2 + hk^{2/3} \left\| e^{\phi/h} v_h \right\|^2 = \mathcal{O}(1).$$

On remarque que : $e^{\phi/h} \geq (h/M)^C e^{\varphi_h/h}$ avec $M = \sup \varphi_h = \mathcal{O}(1)$, d'où le résultat. $\square$

Soit $\chi_h \in C_0^\infty(M_h)$, tels que $\chi_h = 1$ sur

$$\left\{ x \in \ddot{O},\ d(x, \partial \ddot{O}) \geq 2k^{2/3} \right\},$$

et pour tout α,

$$\partial^\alpha \chi_h = \mathcal{O}(k^{-2|\alpha|/3})$$

En particulier, $\chi_h v_h$, est dans le domaine de P_θ, et nous avons :

Lemme 3.2.3 *[?] Sous les hypothèses* $(\mathbf{A}_1) - (\mathbf{A}_3)$**,** *Il existe une constante $N_1 \geq 0$, tels que l'on ait :*

$$\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z - P_\theta)^{-1} \chi_h v_h dz - \chi_h v_h \right\|_t = \mathcal{O}(h^{-N_1} e^{-S/h}),$$

où γ est le courbe positive orientée donnée par :

$$\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z - \lambda_D| = h^2 \right\},$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit.

Preuve. Posons : $w_h = \chi_h v_h$. on a alors ;

$$P_\theta w_h = P_h w_h = \lambda_h w_h + [P, \chi_h] v_h = \lambda_h w_h - 2h^2 (\nabla \chi_h)(\nabla v_h) - h_2 (\Delta \chi_h) v_h. \qquad (3.2.10)$$

De plus, sur support de $\nabla \chi_h$,

$$d\left(x, \partial \ddot{O}\right) \leq 2k^{\frac{2}{3}}$$

et par les propriétés de la distance d'Agmon prés de $\partial \ddot{O}$, on a :

$$s(x) \geq S - Ck$$

pour une constante $C > 0$.

Par conséquent, le lemme (**??**)donne :

$$\varphi_h(x) \geq S - C'k,\ (C' = C + C_0),$$

et par le lemme (**??**) et la formule (**??**), on déduit,

$$\|(P_\theta - \lambda_h)w_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{-N}e^{-S/h}),$$

avec une certaine constante $N \geq 0$. Par conséquent, puisque ψ_0 est bornée et T est une isométrie alors,

$$\|r_h\|_t = \left\|h^{-2C_0\psi_0}Tr_h\right\| = \mathcal{O}(h^{-M})\,\|r_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{-M'}e^{-S/h}) \tag{3.2.11}$$

avec $M, M' > 0$ constants et $r_h = (P_\theta - \lambda_h)\,w_h$.

De plus :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z-P_\theta)^{-1}\,w_h dz - w_h &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma [(z-P_\theta)^{-1} - (z-\lambda_h)^{-1}]w_h dz \qquad (3.2.12)\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-\lambda_h}(z-P_\theta)^{-1}\,r_h dz\end{aligned}$$

En utilisant (**??**) et (**??**). Le résultat découle immédiatement. □

Remarque 3.2.1 *[**?**] L'utilisation des lemmes* (**??**) , (**??**) *et* (**??**) *est très vaste, comme une application, nous pouvons démontrer aisement la formule donnée par* (**??**) *dans le théorème* (**??**)*.*

En effet, posons :

$$(P_h - \lambda_h)v_h = 0,$$

et en utilisant l'ellipticité de P_h, on déduit de (**??**) *et du lemme* (**??**) *que pour tout $l \geq 0$, il existe $M_l > 0$ tels que :*

$$\left\|P_\theta^l r_h\right\|_t = \mathcal{O}(h^{-M_l}e^{-S/h}). \tag{3.2.13}$$

Par conséquent, en appliquant P_θ^l à (**??**)*, on en déduit de* (**??**) *:*

$$\left\|P_\theta^l\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z-P_\theta)^{-1}\,\chi_h v_h dz - \chi_h v_h\right)\right\|_t = \mathcal{O}(h^{-N_l}e^{-S/h}), \tag{3.2.14}$$

pour tout $l \geq 0$ et une certaine constante $N_l > 0$. De plus en utilisant l'ellipticité de P_θ et le fait que, pour tout u,

$$\|u\|_{L^2} = \|Tu\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{-M}\,\|u\|_t),$$

on en déduit de (**??**)

$$\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z-P_\theta)^{-1}\,\chi_h v_h dz - \chi_h v_h\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(h^{-N_s}e^{-S/h}), \tag{3.2.15}$$

pour tout $s \geq 0$ *et une certaine constante* $N_s \geq 0$.

Du lemme (**??**) *et* (**??**) *on a :*

$$\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z - P_\theta)^{-1} \chi_h v_h dz - \chi_h v_h \right\|_t = 1 + \mathcal{O}(e^{-\delta/h}),$$

pour une certaine constante $\delta > 0$, *d'autre part, on a essentiellement :*

$$u_\theta = \frac{\alpha'}{2i\pi} \int_\gamma (z - P_\theta)^{-1} \chi_h v_h dz,$$

avec

$$|\alpha'| = 1 + \mathcal{O}(e^{-\delta/h}).$$

En particulier, par (**??**) , *nous avons :*

$$\|u_\theta - \alpha' \chi_h v_h\|_{H^s} = \mathcal{O}(h^{-N_s} e^{-S/h}). \tag{3.2.16}$$

Comme $u_\theta = u$ *sur* K *alors l'équation* (**??**) *découle directement des lemmes* (**??**) , (**??**) *et de l'équation* (**??**).

CONCLUSION

Plusieurs expériences physiques ont conduit à des résultats que la mécanique classique ne pouvait pas les expliquer, et qui semblaient même être contradictoires entre eux. En particulier, l'étude du rayonnement du corps noir, la mise en évidence de l'effet photoélectrique,.... *Schrödinger*, en raisonnant par analogie avec l'optique, proposa un modèle qui permet de prévoir avec une précision extraordinaire des résultats des expériences précédentes, et qui, de ce fait, s'est imposé dans le monde de la physique des particules, dite aussi, mécanique quantique. Ce passage, de la mécanique classique vers la mécanique quantique, se fait tout en respectant l'incertitude de Heisenberg $\Delta x \Delta \xi \geq h/4\pi$, ceci nous permet de mesurer et avec précision à la fois la vitesse et la position d'électron lorsque h est suffisamment petit, mais malgré tout ces précieux informations, on aimera bien retrouver, sous certains conditions, ces résultats en terme de mécanique classique à partir de la mécanique quantique.

Et ce n'est qu'à partir des années 1970 que ce terme de correspondance est paru. Il s'agit bien de l'analyse semi-classique, cette dernière permet de retrouver la mécanique classique à partir de la mécanique quantique lorsque la constante de Planck tend vers zéro ($h \to 0$).

L'un des majeurs problèmes traité par l'analyse semi-classique est celui de la résonance. La résonance est un phénomène bien connu en physique, c'est un système sur lequel certains systèmes physiques sont sensibles à certain fréquences, tandis qu'en mathématiques, les résonances sont les valeurs propres complexe de l'opérateur de *Schrödinger*.

L'objectif de travail est d'étudier, sous certains conditions sur le potentiel V et en utilisant certains outils de l'analyse semi-classique comme la transformation FBI et la méthode BKW, l'existence des résonances de l'opérateur de *Schrödinger* dans le cas des potentiels non globalement analytiques. Dans un premier temps nous avons montré l'existence et l'unicité des résonances de l'opérateur de *Schrödinger* dans le cas des potentiels globalement analytiques ceci nous a permi, et à l'aide d'autres résultats, de montrer l'existence des résonances de l'opérateur de *Schrödinger* dans le cas des potentiels non globalement analytiques et de conclure quelques lemmes très utiles.

Mais quand est-il de ce problème si on l'étend à d'autres espaces, avec ou sans d'autres conditions sur le potentiel V qui est soit globalement analytique, soit non globalement analytique ? En d'autre terme peut-on montrer l'existence et l'unicité de telle résonances ?.

Enfin, nous pouvons dire que les mathématiques sont partout : elles sont au coeur de la science contemporaine, mais aussi à la base d'innombrables réalisations technologiques et processus industriels ; elles fournissent des outils de modélisation et de prévision qui jouent un rôle croissant dans la conduite des affaires du monde.

ANNEXE

Lemme 3.2.4 *Si* $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *tend vers* 0 *à l'infinie, alors* V *est* $\Delta-$*compact.*

1. Espaces de Sobolev

Espace $\mathbf{H}^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2.1

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ telles que } \forall i \in [1, d] \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Remarque 3.2.2 *La dérivée dans la définition est à comprendre au sens des distributions.*

Théorème 3.2.1 $H^1(\Omega)$ *est un espace vectoriel. Muni du produit scalaire*

$$(f, g)_{H^1} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx.$$

C'est un espace de Hilbert. *Sa norme est notée* $\|.\|_{H^1}$.

Remarque 3.2.3 *On voit que*

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1} .$$

Et

$$\|\partial_i f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1} .$$

Remarque 3.2.4 *Pour tou* Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *on a*

$$D(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Espace de Sobolev non homogène H^s

L'habitude est prise, pour plus de clarté, de différentier la notation de l'ordre d'un espace de *Sobolev* selon qu'il est entier ou non. Alors que dans le cas entier on note souvent l'ordre avec la lettre "m", dans le cas non entier, on utilisera la lettre "s", et donc l'espace sera noté $\mathbf{H}^s$.

Définition 3.2.2 *Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace de* Sobolev $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *par*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty.$$

Proposition 3.2.1 $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de* Hilbert *muni du produit scalaire*

$$(u, v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)(1 + |\xi|^2)^s d\xi, \tag{3.2.17}$$

Et on note

$$\|u\|_s^2 = \int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi.$$

Propriétés de l'éspace $\mathbf{H}^s$

1. Si $s_1 \geq s_2$, on a $H^{s_1} \subset H^{s_2}$ et l'injection et continue.
2. Muni de produit scalaire (**??**), $\mathbf{H}^s$ est un éspace de *Hilbert*.
3. L'éspace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout n entier positif et pour tout $s \in \mathbb{R}$.

2. Opérateurs pseudo-différentiels et symboles

Définition 3.2.3 (Symboles) *Si on remplace D^α par ξ^α dans l' opérateur différentiel linéaire P on obtient :*

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

ce qu' on appelle symbole de l' opérateur P*, il est clair que* p *est un polynôme de ξ d' ordre m.*

Le symbole principal *de l'opérateur différentiel linéaire P est donné par :*

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Exemple 3.2.1 $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} u(x)$ *est un opérateur différentiel linéaire d' ordre* $m = 2$.
Δ *est appelé l'opérateur Laplacien.*
Son symbole est : $p(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi^2 = |\xi|^2$.
Son symbole principal est : $p_m(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi^2 = |\xi|^2$.

Définition 3.2.4 (Espaces des symboles) *Soit* $m \in \mathbb{R}$, *on note par* $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *l' ensemble des fonctions* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *tels que :*

$$\forall \alpha, \forall \beta : \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}.$$

On écrira :

$$\begin{aligned} S^{-\infty} &= \cap_{m \in \mathbb{R}} S^m. \\ S^{+\infty} &= \cup_{m \in \mathbb{R}} S^m. \end{aligned}$$

De plus on muni S^m *par la famille de semi norme suivante :*

$$\forall p \in S^m, \forall \delta \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{K} \subset \Omega : \ \mathcal{N}_{\delta,\mathcal{K}}^m(a) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{K} \\ |\alpha| + |\beta| \leq \delta}} \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)}{(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}},$$

et

$$\mathcal{N}_{\delta,\mathcal{K}}^{m,m'}(a * b) \leq \mathcal{N}_{\delta,\mathcal{K}}^m(a) * \mathcal{N}_{\delta,\mathcal{K}}^{m'}(b).$$

Définition 3.2.5 *Soient* $a \in S_{2n}\left(< \xi >^m\right)$ *et* $t \in [0,1]$. *On* $a\left(\left(1-t\right)x + ty, \xi\right) \in S_{3n}\left(< \xi >^m\right)$ *et on note :*

$$OP_h^t\left(a\right) = OP_h\left(a\left(\left(1-t\right)x + ty, \xi\right)\right).$$

Bibliographie

[1] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral Asymptotics in the Semi-classical limit*, London Math. Soc. Lecteur Note Series 268, Cambridge, University Press (1999).

[2] S. Fujiié, A. Lahmar-Benbernou and A. Martinez. *Width of shape resonances for non globally analytic potentiels*.J. Math. Soc. Japan. Vol. 63, No. 1 (2011) pp.$1-78$.

[3] C. Gérard and J.Sjöstrand. *Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type*. Comm. Math. Phys.,1081987,$391-421$.

[4] B. Helffer and J.Sjöstrand, *Multiple wells in the semi-classical limit I.* Comm. Partial Differential Equations, 9 (1984) .$337-408$.

[5] B. Helffer and J.Sjöstrand, *Résonances en limite semiclassique*. Bull. Soc. Math. France. Mémoire,24∕25 (1986).

[6] P. D. Hislop and I. M. Sigal. *Introduction to spectral theory with applications Schrödinger operators*, Applied Mathematical Sciences, 113, Springer-Verlag, New York, 1996.

[7] W. Hunziker. *Distortion analyticity and molecular resonance curves*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor., 45 (1986) $339-358$.

[8] A. Lahmar-Benbernou and A. Martinez. *On Helffer-Sjöstrand's theory of resonances*, Int.Math. Res. Notices, 13(2001), $697-717$.

[9] A. Lahmar-Benbernou, Guendouz Cheikh, *Etude Microlocale des resonances.* Mémoire de Magister en Mathématiques. Université Mostaganem.

[10] A. Martinez, *Estimations de l'effet tunnel pour le double puits II-Etats hautement excités*, Bull. Soc. Math. France, 116(1988), $199-229$.

[11] A. Martinez, *Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, New-York, 2002.

[12] A. Martinez, *Resonance Free Domains for Non Globally Analytic Potentials.* Ann. Henri Poincaré, 4(2002), 739 – 756.

[13] J. Milnor. *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963.

[14] T. Ramond. *Analyse semiclassique, Résonances et controle de l'équation de Schrödinger* . Prépublication avril 2005.

[15] B. Simon, *Semiclassical Limit of Low Lying Eigenvalues I-Non Degenerate minima*, Ann. de l'I.H.P., 38(1983), 295 – 307.

[16] G. Vodev. *Exponential bounds of the resolvent for a class of noncompactly supported perturbations of the Laplacian*, Math. Res. Letters, 7(2000), 287 – 298.

[17] Yves Colen de Verdière. *Méthodes semi-classiques et Théorie Spectrale.* Institut Fourier, UMR 5582(Université Grenoble 1-CNRS), BP 74,F-38402-St Martin d'Hères Cedex.

[18] C Zuily. *Eléments de Distributions et D'équations aux Dérivées Partielles.* Dunod, Paris, 2002.