



UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° D'ordre : /2014

MEMOIRE

Pour l'obtention du Diplôme de Magister

SPECIALITE: GENIE MECANIQUE

Option : **Modélisation, Simulation et Calculs Scientifiques Appliqués**

Présenté par Monsieur

TAGHEZOUT Kada

ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES CHARPENTES EN COMPOSITES SOUS L'EFFET DU FLAMBAGE

Soutenu le 30 / 10 /2014 devant le jury composé de:

Président	: Mr .A.SADOK	Professeur	(U.Mostaganem)
Examineur	: Mr. H.GUECHICHI	Professeur	(U.Mostaganem)
Examineur	: Mr. M.BENDOUKHA	M.C.A	(U.Mostaganem)
Examineur	: Mr. M.SAHNOUN	M.C.B	(U.Mostaganem)
Encadreur	: Mr. D.OUINAS	Professeur	(U.Mostaganem)

Remerciements

Je souhaiterais rendre ici hommage à toutes ces personnes formidables qui m'ont toujours entouré et soutenu et sans qui notre travail n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie, tout d'abord, Pr OUIINAS DJAMEL pour m'avoir fait l'honneur de diriger mon mémoire, suivi mes travaux de recherche et être toujours présent en faisant le nécessaire afin que notre travail soit à la hauteur. Merci pour sa disponibilité de toute heure, pour nos longues discussions, pour ses conseils, pour tous ses encouragements et pour la motivation qu'il m'a toujours apporté.

Je remercie également Pr A. SADOK pour avoir accepté de présider mon jury et pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail. Tout comme je remercie Pr H. GUECHICHI, Dr M.BENDOUKHA et Dr M.SAHNOUN qui m'ont fait le plaisir de participer à mon jury comme examinateurs. Merci également pour tous leurs commentaires concernant notre travail.

Enfin, que ceux qui ne sont pas mentionnés ne m'en tiennent pas rigueur.

Je vous dis à toutes et à tous MERCI !

Résumé

Le développement de l'utilisation des matériaux composites dans les structures nécessite de mettre en place des outils permettant la modélisation de leur comportement mécanique.

L'étude que nous avons menée dans le cadre de ce travail, consiste à déterminer l'effet de l'orientation des fibres des plis et l'effet des rapports géométriques des colonnes sur l'évolution du paramètre de flambement. L'analyse est effectuée en présence d'une sollicitation de compression par unité de longueur avec un déplacement imposé. Nous nous basons sur la méthode des éléments finis afin de trouver le rapport entre les sollicitations et le comportement des charpentes en matériaux composites (Hat section et Lipped channel section). La modélisation et la simulation ont été effectuées en utilisant le code de calcul ABAQUS 6.11.

L'étude paramétrique menée dégage beaucoup de résultats. Parmi ces résultats, nous avons montré que l'orientation des fibres des colonnes symétriques ou antisymétriques n'a aucun effet sur le paramètre du flambage λ , quelque soit le type et la longueur de la colonne (Hat Section ou Lipped Channel Section). Par ailleurs, le paramètre du flambage λ augmente proportionnellement avec l'angle des plis θ jusqu'à une valeur maximale obtenue à 45° quelque soit les paramètres géométriques α , β et γ et quelque soit le type de la section et la longueur de la colonne (Hat Section ou Lipped Channel Section).

Mots-clés : Flambement, éléments finis, Composite, Charpente, Délaminage.

Abstract

The development of the use of composite materials in structures requires putting in place tools for modeling their mechanical behavior.

The study that we conducted consists to determine the effect of the fiber orientation of the folds and the effect of geometric relationships columns on the evolution of the buckling parameter. The analysis is performed in the presence of a compression stress per unit length with an imposed displacement. We are focusing on the finite element method to find the relationship among stress and behavior of structures made of composite materials (Hat section and Lipped channel section). Modeling and simulation were performed using the computer code ABAQUS 6.11.

The conducted parameterized study provides some results. The most important of these allows for several conclusions as for example that the fiber orientation of symmetric or antisymmetric columns has no effect on the buckling parameter λ , whatever the type and length of the column (Lipped Channel Section or Hat Section). In addition, the buckling parameter λ increases with the angle θ . Once obtained a maximum value with 45° , the geometric parameters α , β and γ still not change whatever the type of the section and the length of the column (Lipped Channel Section or Hat Section).

Keywords: buckling, finite elements, composite, laminates.

ملخص:

تطوير استخدام الماد المركبة في الهياكل يتطلب وضع أدوات وأسس نموذجية لدراسة سلوكهم وحركتهم الميكانيكية.

الدراسة التي أجريناها في سياق هذا العمل تتمحور حول تحديد تأثير اتجاه الألياف القطع المركبة وكذلك الشكل الهندسي للأعمدة على تطور وتغير الالتواء .

التحليل تمت في وجود قوة ضغط مفروضة لكل وحدة طول مع التشدد المفروض وقد اعتمدنا على طريقة العناصر المحدودة للعثور على العلاقة بين التوتر وسلوك الأعمدة المركبة (عمود Hat أو عمود Lipped Channel Section) أجريت الدراسة باستخدام رمز الحساب ABAQUS 6.11 .

الدراسة البراميتريكية أعطت الكثير من النتائج ضمن هذه النتائج قد أظهرنا توجه ألياف الأعمدة المتماثلة أو الغير المتماثلة ليس له تأثير على المعلمة λ للالتواء بغض النظر عن نوع وطول العمود وعلاوة على ذلك فان المعلمة λ التواء تزداد بالتناسب مع زاوية الطيات θ حتى قيمة قصوى حصلت عليها عند 45° بغض النظر عن المعلمات هندسية α, β, γ (عمود Hat Section أو عمود Lipped Channel Section).

كلمات مفتاحيه: الالتواء، العناصر المحددة، وركب، إطار التبطين.

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre I Endommagement & Rupture des matériaux composites	
I.1. Définitions.....	3
I.1.1. Matériaux composites	3
I.1.2. Stratifiés.....	3
I.2. Mécanismes de rupture dans les matériaux composites.....	4
I.2.1. Divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel	4
I.2.2. Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale ou transverse....	7
I.3. Rupture des stratifiés	7
I.4. Observation des mécanismes de rupture.....	8
I.5. Propagation de la fissure.....	8
I.6. Critères de rupture.....	10
I.6.1. Critères en contraintes maximales.....	10
I.6.1.1. Critères dans les axes principaux	10
I.6.1.2. Critères de rupture en-dehors des axes principaux	11
I.6.2. Critères en déformations maximales	12
I.6.2.1. Critères dans les axes principaux	12
I.6.2.2. Critères en-dehors des axes principaux	13
I.6.3. Critères interactifs.....	13
I.6.3.1. Critère de Hill	13
I.6.3.2. Critère de Hill – Tsai	15
I.6.3.3. Critère de Hoffman	15
I.6.3.4. Critère tensoriel de Tsai-Wu.....	16
I.6.3.5. Critère de Hashin.....	17
I.6.3.6. Critère de Yamada-Sun	17
I.6.3.7. Critère de Puck	17
Chapitre II Théorie du flambage des matériaux composites	
II.1. Phénomène de flambement des structures	18
II.1.1. Définition du flambage.....	18
II.1.2. Flambement général des structures simples.....	18
II.1.3. Flambements locaux et post-flambement des structures.	21
II.2. Spécificité des composites par rapport au flambement.....	21
II.3. Flambement des poutres en matériaux composites.....	22

II.3.1. Equation du flambement.....	23
II.3.2. Poutre en appuis simples.....	24
II.3.3. Poutre encastree.....	24
II.4. Théorie des stratifiés.....	25
II. 4.1. Approches simplifiées.....	25
II.4.1.1. Module de Young longitudinal.....	26
II.4.1.2. Module de Young transversal.....	27
II.4.1.3. Coefficient de Poisson longitudinal.....	28
II.4.1.4. Matrices de rigidité et de souplesse.....	28
II.4.1.5. Constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules d'élasticité....	30
II.5. Loi de comportement d'un stratifié.....	30
II.6. Théorie des plaques stratifiées.....	32
II.6.1. Résultantes en membrane.....	32
II.6.2. Résultantes en cisaillement.....	33
II.6.3. Moment de flexion et de torsion.....	33
II.7. Théorie classique des stratifiés.....	34
II.7.1. Champ des déformations.....	35
II.7.2 Champ de contraintes.....	36
II.7.3. Expression des résultantes et des moments	37
II.7.3.1. Résultantes en membrane	37
II.7.3.2. Moment de flexion et de torsion.....	38

Chapitre III Comportement des colonnes en composites sous l'effet du flambage

III.1. Modélisation par éléments finis.....	39
III.1.1. Introduction	39
III.1.2. Modèle et la géométrie des colonnes	39
III.1.3. Les conditions aux limites.....	40
III.1.4. Caractéristiques mécaniques de la colonne	41
III.2. Discussions des résultats.....	44
III.2.1. Cas de l'alliage d'aluminium Al 2024.....	44
III.2.1.1. Influence de la géométrie des colonnes (α , β et γ) sur le paramètre.....	
du flambement λ	44

III.2.1.1.1.Effet du rapport géométrique α pour différentes longueurs de colonne.....	44
III.2.1.1.2 .Effet du rapport géométrique β pour différentes longueurs de colonne	46
III.2.1.1.3. Effet du rapport géométrique γ pour différentes longueurs de colonne.....	49
III.2.1.2. Influence de l'épaisseur e sur le paramètre du flambement λ	53
III.2.2. Cas du composite GFPP	56
III.2.2.1.Influence de l'orientation des fibres de la colonne sur le paramètre du flambement λ	56
III.2.2.2. Influence de l'orientation des plis de la colonne sur le paramètre du flambement λ	57
III.2.2.2.1.Effet du rapport géométrique α et pour différentes longueurs de colonne...	57
III.2.2.2.2.Effet du rapport géométrique β pour différentes longueurs de colonne.....	59
III.2.2.2.3.Effet du rapport géométrique γ pour différentes longueurs de colonne.....	64
Conclusion générale.....	70
Références	

Liste des figures

Figure I.1. Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés [2].....	4
Figure I.2. Rupture de fibres [2].....	5
Figure I.3. Rupture transverse de la matrice [2]	6
Figure I.4. Rupture longitudinale de la matrice [2].....	6
Figure I.5. Rupture de l'interface fibre/matrice [2].....	7
Figure I.6. Rupture de l'interface entre les plis [3].....	7
Figure I.7. Délaminage des plis dans les matériaux composites stratifiés. [3].....	8
Figure I.8. Propagation de la rupture dans le cas d'une forte adhérence fibre-matrice [2]..	9
Figure I.9. Propagation de la rupture dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice [2]..	9
Figure I.10. Contraintes dans les axes principaux d'une couche [2].....	11
Figure I.11. Contraintes en-dehors des axes principaux d'une couche [2].....	12
Figure II. 1. Exemple de la poutre d'Euler [13].....	18
Figure II.2. Plaque en compression [14].....	19
Figure II. 3. Plaque en cisaillement [12].....	20
Figure II.4. Coque en compression [14].....	20
Figure II.5. Flambement d'une poutre [18].....	22
Figure II.6. Poutre en compression sur deux appuis [19].....	24
Figure II.7. Flambement de Poutre encastree des deux extremités [18].....	24
Figure II.8. Conditions d'appuis des poutres [20].....	24
Figure II.9. Schéma simplifié d'une traction longitudinale [2].....	25
Figure II.10. Schéma par couche d'une traction transversale [2].....	27
Figure II.11. Repère local et repère global [22].....	31
Figure II.12. Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié [2]..	32
Figure II.13. Schématisation des résultantes de cisaillement [2].....	33
Figure II.14. Schématisation des moments de flexion et de torsion [2].....	34
Figure II.15. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés [2].....	35
Figure III.1. Configurations des colonnes étudiées [23].....	39
Figure III.2. Modèle géométrique des colonnes [24].....	40
Figure III.3. Variation de λ en fonction du déplacement U_3	40
Figure III.4. Conditions aux limites [24].....	41
Figure III.5. Modèle des éléments finis [24].....	42
Figure III.6. Formes des modes de flambement obtenues [24].....	44

Figure III.7. Variation de λ en fonction α avec la variation de l	45
Figure III.8. Variation de λ en fonction β pour différentes longueurs l	47
Figure III.9. Variation de λ en fonction β pour différentes longueurs l	47
Figure III.10. Variation de λ en fonction β pour différentes valeurs de α ($l=350\text{mm}$).....	48
Figure III.11. Variation de λ en fonction β pour différentes valeurs de α ($l=700\text{mm}$).....	48
Figure III.12. Variation de λ en fonction β pour différentes valeurs de α ($l=1400\text{mm}$).....	49
Figure III.13. Variation de λ en fonction γ pour différentes longueurs de l	50
Figure III.14. Variation de λ en fonction β pour différentes longueurs l	51
Figure III.15. Variation de λ en fonction γ pour différentes valeurs de α ($l=350\text{mm}$).....	52
Figure III.16. Variation de λ en fonction γ pour différentes valeurs de α ($l=700\text{mm}$).....	52
Figure III.17. Variation de λ en fonction γ pour différentes valeurs de α ($l=1400\text{mm}$).....	53
Figure III.18. Variation de λ en fonction de e pour $l=350\text{mm}$	54
Figure III.19. Variation de λ en fonction de e pour $l=700\text{mm}$	54
Figure III.20. Variation de λ en fonction de e pour $l=1400\text{mm}$	55
Figure III.21. Variation de λ en fonction de e avec la variation de l	55
Figure III.22. Comparaison entre une colonne à composite symétrique et antisymétrique (Hat-section).....	56
Figure III.23. Comparaison entre une colonne à composite symétrique et antisymétrique (Lipped Chanel Section).....	56
Figure III.24. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de α ($l=350\text{mm}$).....	58
Figure III.25. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de α ($l=700\text{mm}$).....	58
Figure III.26. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de α ($l=1400\text{mm}$).....	60
Figure III.27. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=350\text{mm}$).....	60
Figure III.28. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=700\text{mm}$).....	61
Figure III.29. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=1400\text{mm}$).....	61
Figure III.30. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=350\text{mm}$).....	63
Figure III.31. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=700\text{mm}$).....	63
Figure III.32. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=1400\text{mm}$).....	64
Figure III.33. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=350\text{mm}$).....	65
Figure III.34. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=700\text{mm}$).....	66
Figure III.35. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=1400\text{mm}$).....	66

Liste des Figures

Figure III.36. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=350\text{mm}$).....	68
Figure III.37. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=700\text{mm}$).....	68
Figure III.38. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=1400\text{mm}$).....	69

Notations

Notations

Majuscules latines

- V_f : Fraction volumique des fibres.
- V_m : Fraction volumique de la matrice..
- G_m : Module de cisaillement de la matrice.
- C_{ijkl} : Tenseur de rigidité.
- C_{ij} : Coefficient de la matrice de rigidité C .
- C : Matrice de rigidité.
- S : Matrice de souplesse.
- E_f : Module de Young de la fibre.
- E_m : Module de Young de la matrice.
- G_f : Module de cisaillement de la fibre.
- G_m : Module de cisaillement de la matrice.
- N_{cr} : La charge critique de flambement.

Minuscules latines

- e : épaisseur.de la colonne
- l : longueur de la colonne
- u : vecteur de déplacement.

Minuscules grecques

- σ_f : Contrainte de traction dans une fibre.
- σ_{fr} : Contrainte à la rupture de la fibre.
- σ_m : Contrainte en traction dans la matrice.
- σ_{mr} : Contrainte à la rupture de la matrice.
- τ_m : La contrainte de cisaillement dans la matrice.
- τ_{mr} : La contrainte en cisaillement à la rupture.
- ε_{ry} : Déformation à La rupture transverse.
- σ_c : Résistance en compression.

Notations

σ_i	: Contrainte dans la direction i .
θ	: Angle d'orientation des fibres.
ν_f	: Coefficient de Poisson de la fibre.
ν_m	: Coefficient de Poisson de la matrice.
ρ	: Masse volumique.
λ	: Paramètre du flambement
α	: Rapport géométrique
β	: Rapport géométrique
γ	: Rapport géométrique

Abréviations

MEF	: Méthode des éléments finis.
HS	: Hat section
LCS	: Lipped channel section

Introduction générale

Introduction générale

Que ce soit dans les industries : automobile, aéronautique, spatiale, marine, ferroviaire ou encore sportive, médicale et nucléaire, l'utilisation des matériaux composites dans les applications industrielles tend à augmenter depuis plusieurs années. Les activités de recherche propres à ces matériaux sont également très présentes dans les laboratoires du monde entier pour permettre de mieux comprendre le comportement des structures en composites à travers de nombreux thèmes d'études, dans le but d'optimiser leur utilisation et leur adéquation avec l'application industrielle.

En effet, le développement de l'utilisation des matériaux composites dans les structures nécessite de mettre en place des outils permettant la modélisation de leur comportement mécanique. Ces matériaux dont l'emploi industriel ne cesse de s'étendre, possèdent de très bonnes caractéristiques en début d'utilisation, ils sont en revanche très sensibles, au cours du temps, à l'environnement extérieur et notamment au vieillissement hygrothermique qui détériore leurs propriétés.

Par ailleurs, le passage des matériaux métalliques aux matériaux composites engendre des coûts importants. L'inhomogénéité et l'anisotropie des matériaux composites rendent leurs mécanismes d'endommagement plus nombreux et plus complexes (micro-décohésions et de microfissures, des ruptures de pli, ruptures des fibres et des matrices, décohésion de l'interface, fibre-matrice).

La connaissance de l'état d'endommagement d'une structure travaillante en matériaux composites est une nécessité largement reconnue et ce, tant pour des raisons de fiabilité, et par conséquent de sécurité, que pour des raisons économiques. Par conséquent, l'instabilité de la structure du matériau composite devient un souci important dans la conception sûre et fiable des structures en composites.

Le travail que nous présentons dans le cadre de ce mémoire de magister a pour objectif de déterminer l'effet de l'orientation des fibres des plis et l'effet des rapports géométriques des colonnes de différentes formes sur l'évolution du paramètre de flambement.

Sachant que les méthodes numériques et particulièrement la méthode des éléments finis constituent des outils très efficaces pour le dimensionnement des structures composites complexes. Nous nous basons sur la méthode des éléments finis pour déterminer le rapport entre les sollicitations et le comportement des charpentes en matériaux composites pour

deux types de section (Hat section et Lipped channel section) et ceci pour deux types de matériaux différents (Al 2024 et GFPP(twintex)).

La modélisation et la simulation vont être effectuées en utilisant le code de calcul ABAQUS 6.11. Le mémoire est structuré en trois chapitres :

Le chapitre I porte sur les matériaux composites et décrit les concepts qui leur sont associés comme par exemple les mécanismes de rupture, les critères de rupture, la propagation de la fissure, etc.

Le Chapitre II présente la théorie du flambage des matériaux composites en mettant l'accent sur la théorie des stratifiés, le flambage des poutres, etc.

Quant au chapitre III, il représente les principaux résultats obtenus par la simulation en utilisant l'outil ABAQUS 6.11 et les commentaires sous forme d'interprétations par configurations.

Le mémoire est terminé par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre I

Endommagement & Rupture des matériaux composites

I.1. Définitions

I.1.1. Matériaux composites

Classiquement, les matériaux composites sont définis comme la constitution de l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [1]. D'une manière générale, on distingue deux phases : une phase continue appelée « la matrice » et une phase discontinue appelée « renfort ou matériau renforçant ». La matrice est considérée comme le constituant qui enrobe les fibres. Ces dernières agissent comme un renfort dont l'orientation détermine l'anisotropie du matériau. Cet aspect constitue une des caractéristiques fondamentales des matériaux composites. L'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs.

Il faut différencier *charges* et *renforts*. Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance aux UV, le comportement au feu...). Les renforts, sous forme de fibres, contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés.

Les composites trouvent leurs principales applications dans le transport aérien (civil et militaire), maritime et ferroviaire, le bâtiment, l'aérospatial ainsi que les sports et loisirs.

Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases.

Les composites peuvent être classés suivant la forme ou la nature. Nous nous intéressons dans cette étude aux composites stratifiés que nous allons détailler dans la section suivante.

I.1.2. Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations, permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

-Équilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.

-Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.

-Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.

-Croisé : stratifié comportant autant de couche à 0° que de couche à 90° .

-Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes.

I.2. Mécanismes de rupture dans les matériaux composites

I.2.1. Divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel

Le phénomène d'endommagement et de rupture dans les matériaux composites est caractérisé par une rupture non brutale précédé d'une dégradation progressive. Ces dégradations peuvent résulter de plusieurs mécanismes élémentaires:

- la rupture des fibres,
- la rupture transverse de la matrice,
- la rupture longitudinale de la matrice,
- la rupture de l'interface "fibre - matrice".
- Auxquels s'ajoute, dans le cas de stratifiés, un mécanisme de rupture entre couches, appelé Rupture par délaminage.

Ces divers mécanismes coexistent et se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de ces divers mécanismes élémentaires (Figure I.1).

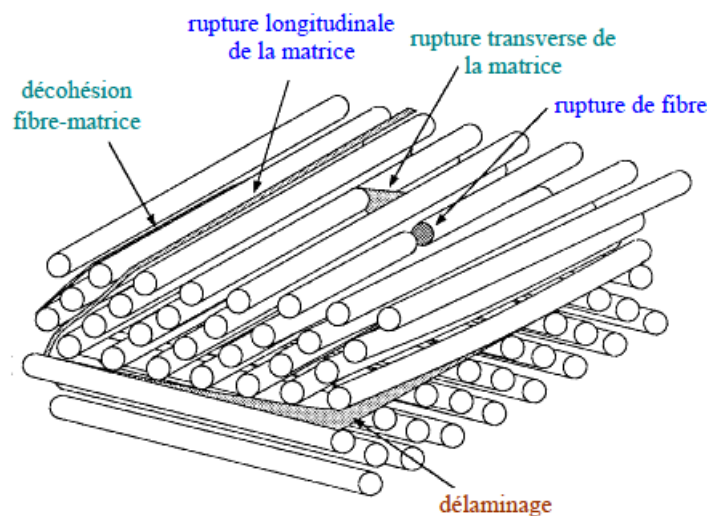


Figure I.1. Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés [2].

- **Rupture des fibres :** C'est un mécanisme qui va généralement conduire à la rupture finale du matériau.

La rupture de fibre intervient lorsque la contrainte de traction σ_f dans une fibre atteint la contrainte à la rupture σ_{fu} de la fibre. Elle se produit souvent dans les plis les moins désorientés par rapport à la direction de sollicitation. L'excès d'effort provoquera la rupture des constituants voisins (Figure I.2).

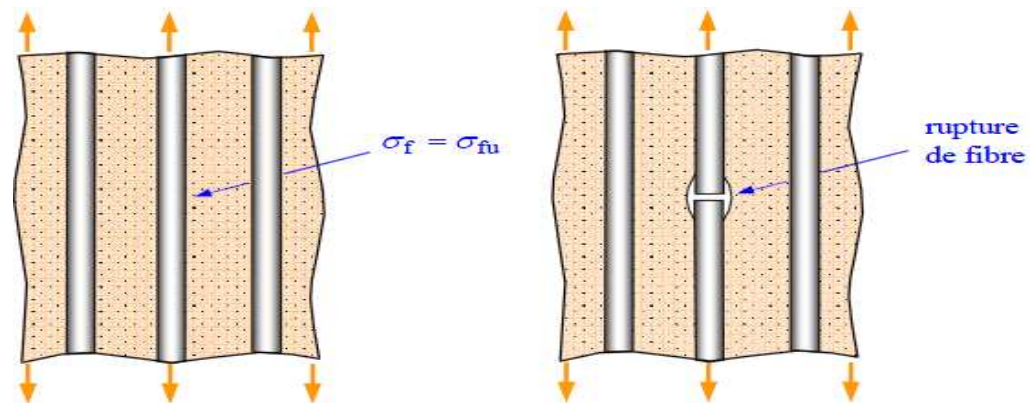


Figure I.2. Rupture de fibres [2].

- **Rupture de la matrice**

Les microfissures se produisant au sein de la matrice, apparaissent aux niveaux des porosités et des inclusions, soit par **fissuration transversale** (Figure I.3), soit par **fissuration longitudinale** (Figure I.4).

- **Fissuration transversale de la matrice**

Il s'agit de fissures qui traversent toute l'épaisseur des couches les plus désorientées par rapport à l'axe de sollicitation. Des micro-défauts au sein du matériau (comme des vides, des fibres cassées, le décollement fibre/matrice ou des microfissures de la matrice) peuvent être à l'origine de ces fissures amorcées par une forte concentration de contraintes locales. Ces fissures sont assez rectilignes et généralement perpendiculaires aux interfaces entre les couches adjacentes. Ce cas de fissure se produit lorsque la contrainte en traction σ_m dans la matrice atteint la contrainte à la rupture σ_{mu} de la matrice.

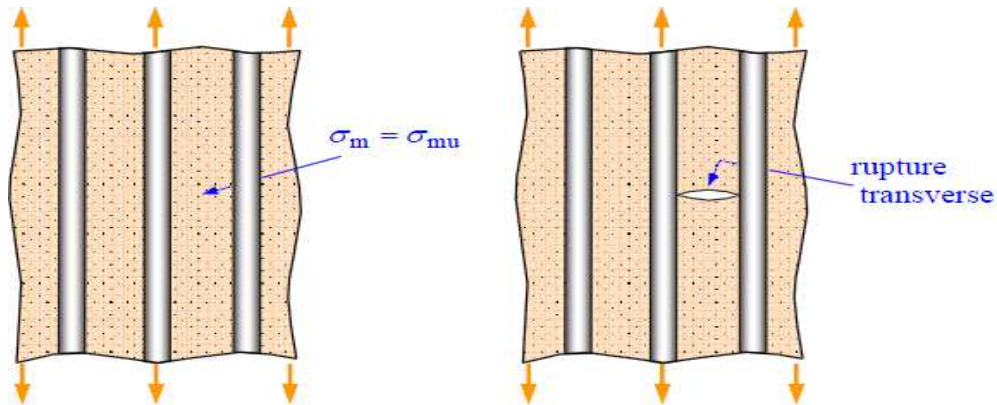


Figure I.3. Rupture transverse de la matrice [2].

➤ Rupture longitudinale de la matrice

Il s'agit de fissures qui sont analogues aux précédentes, apparaissent toujours dans la matrice et sont perpendiculaires aux interfaces des couches, mais qui traversent toute l'épaisseur des couches orientées à 0° par rapport à l'axe de sollicitation.

Ce dernier mode de rupture se produit lorsque la contrainte de décohesion est supérieure à celle de cisaillement. Cette fissuration se propage selon la direction perpendiculaire à la sollicitation et elle peut provoquer une décohesion fibre matrice.

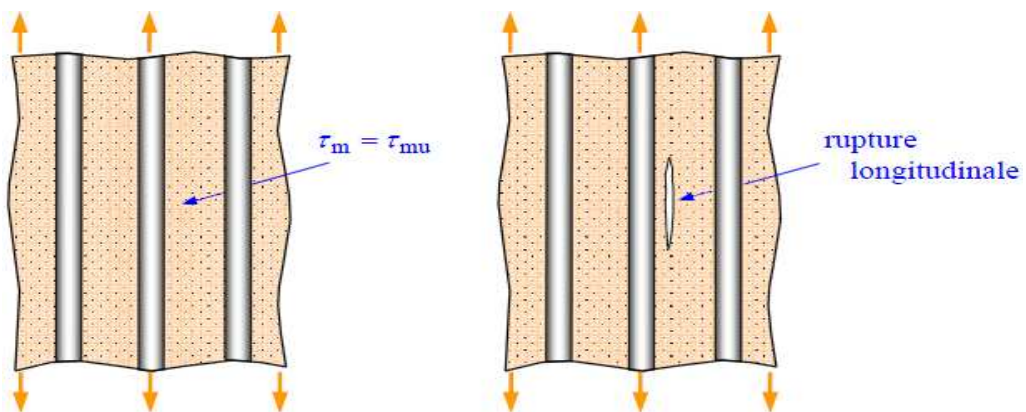


Figure I.4. Rupture longitudinale de la matrice [2].

➤ Rupture de l'interface "fibre - matrice"

La rupture par décohesion de l'interface fibre matrice se produit lorsque la contrainte de décohesion est inférieure à la contrainte en cisaillement à la rupture $\tau_d < \tau_{mu}$.

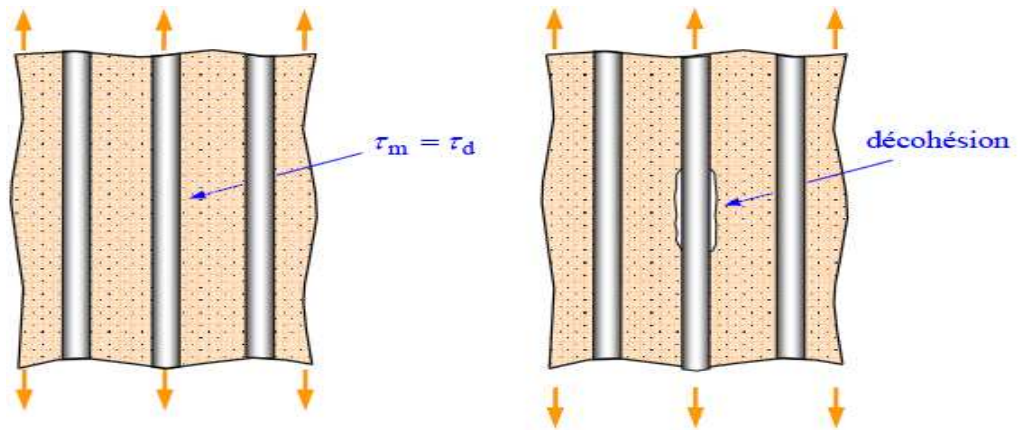


Figure I.5. Rupture de l'interface fibre/matrice [2].

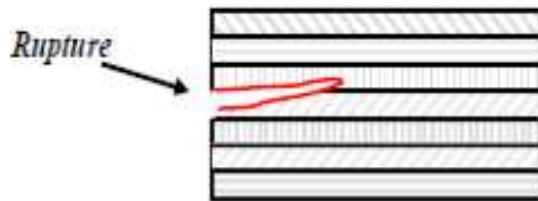


Figure I.6. Rupture de l'interface entre les plis [3].

I.2.2. Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale ou transverse

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale l'initiation de la rupture se produit généralement soit par rupture des fibres lorsque la déformation à la rupture des fibres est plus faible que celle de la matrice, soit par rupture transverse de la matrice dans le cas contraire.

Pour une traction transverse la rupture se produit soit par la rupture de la matrice, soit par décohésion de l'interface fibre –matrice, suivant les caractéristiques à la rupture de la matrice et de l'interface.

I.3. Rupture des stratifiés

Dans le cas des stratifiés, les mécanismes élémentaires décrits précédemment s'ajoute un mécanisme de rupture, appelé rupture par délaminage et qui est un mécanisme de décohésion entre les couches qui apparaît sur le bord libre ou/et à l'intérieur de l'éprouvette. A cause des contraintes inter-laminaires élevées près des bords, le délaminage s'amorce généralement à cet endroit, puis progresse en séparant les couches (Figure I.7).

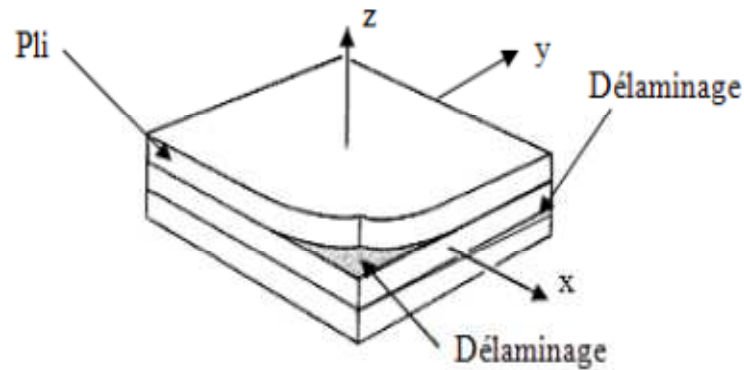


Figure I.7. Délaminage des plis dans les matériaux composites stratifiés [3].

I.4. Observation des mécanismes de rupture

L'observation des mécanismes de rupture peut être effectuée par les techniques suivantes:

- **Observation par microscopie est une** technique d'observation qui se fait à l'aide d'une binoculaire ou d'un microscope optique, permettant éventuellement une observation continue des phénomènes de rupture au cours des essais.
- **Visualisation par radiographie est une** technique de visualisation par radiographie X qui consiste à imprégner l'éprouvette fissurée à l'aide d'un opacifiant (iodure de zinc) et à faire ensuite une radiographie X de l'éprouvette.
- **Analyse par émission acoustique** qui est un processus physique qui permet d'accéder en temps réel à des informations sur les mécanismes de rupture mis en jeu.

I.5. Propagation de la fissure

Selon la nature de l'interface fibre matrice, la propagation de la fissure diffère. Dans le cas d'une adhérence fibre matrice élevée, la rupture initiée, soit par rupture des fibres, soit par rupture de la matrice, induit en front de fissure des concentrations de contraintes conduisant à une propagation de la fissure successivement dans les fibres et dans la matrice.

Comme cela est montré dans la Figure I.8, la rupture observée est de type fragile, il est également possible d'observer une jonction, par rupture longitudinale de la matrice ou par décohérence fibre matrice, de deux fissures adhérentes dans des zones différentes.

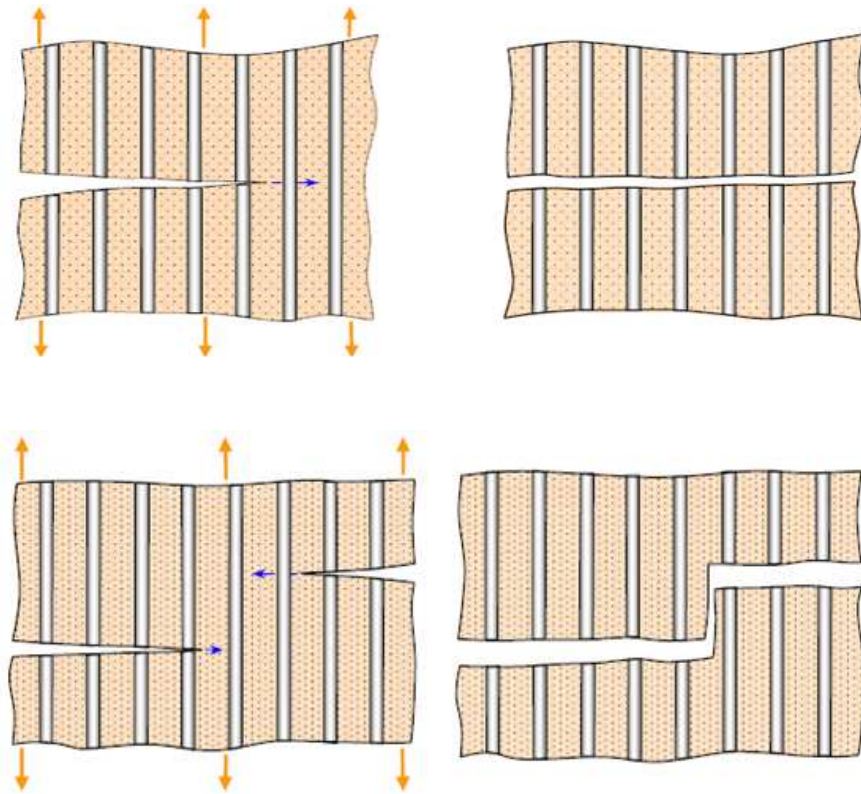


Figure I.8. Propagation de la rupture dans le cas d'une forte adhérence fibre-matrice [2].

Dans le cas d'une faible adhérence fibre matrice, la propagation transverse de la fissuration peut être schématisée sur la figure suivante :

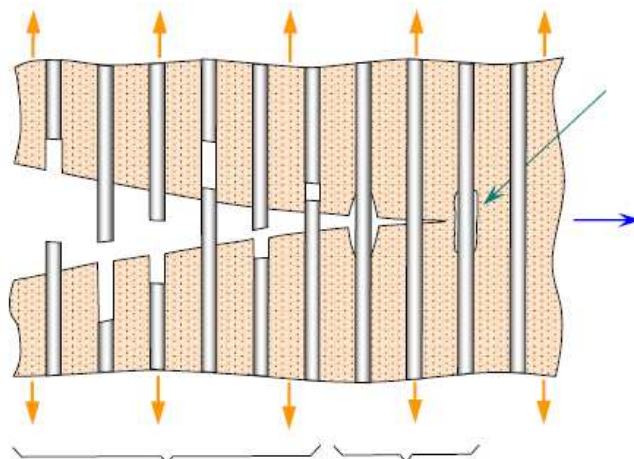


Figure I.9. Propagation de la rupture dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice [2].

I.6. Critères de rupture

Les critères de rupture ont pour objectifs de permettre au concepteur d'avoir une évaluation de la résistance mécanique des matériaux stratifiés.

D'une manière générale, la résistance mécanique d'un matériau correspond à une dégradation irréversible, soit à la rupture réelle du matériau, soit à la limite du domaine élastique [2].

Les critères de rupture sont établis dans le cas d'une couche d'un stratifié et peuvent être classés comme suit :

- ✓ Des Critères en contraintes maximales,
- ✓ Des Critères en déformations maximales,
- ✓ Des critères interactifs (énergétiques).

I.6.1. Critères en contraintes maximales

I.6.1.1. Critères dans les axes principaux

Les critères en contraintes maximales font intervenir:

X_t , X_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression.

Y_t , Y_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et en compression.

S : la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

Les grandeurs à la rupture sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction, compression ou cisaillement.

Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes dans des axes principaux, Figure I.10, les critères en contraintes maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes aux quelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante. Les critères de rupture s'écrivent ainsi sous la forme [2]:

$$\begin{aligned}
 -X_c < \sigma_L < X_t, \\
 -Y_c < \sigma_T < Y_t, \\
 -S < \sigma_{LT} < S.
 \end{aligned}
 \tag{I.1}$$

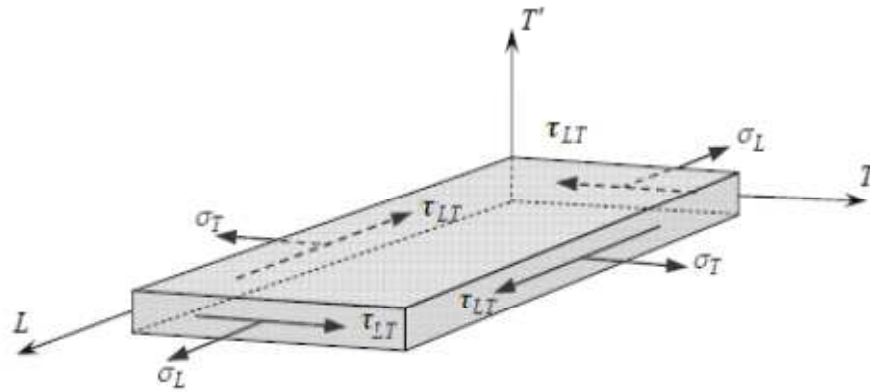


Figure I.10. Contraintes dans les axes principaux d'une couche [2].

- Si les équations sont vérifiées, l'état de contrainte limite n'est pas atteint, la rupture de la couche ne se produit pas.
- Si l'une quelconque des équations n'est plus vérifiée, l'état limite est atteint, la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'équation non vérifiée.

I.6.1.2. Critères de rupture en-dehors des axes principaux

Dans le cas où l'état de contraintes est exprimé dans des axes de référence (x, y, z) , (Figure I.11), il est nécessaire de se ramener aux axes principaux par une rotation d'angle (θ) . Les contraintes exprimées dans les axes principaux s'écrivent [2]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2 \sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta \\
 \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2 \sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta \\
 \sigma_{LT} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
 \end{aligned} \tag{I.2}$$

Les critères (I.1) en contraintes maximales s'expriment :

$$\begin{aligned}
 -X_c &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2 \sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < X_t \\
 -Y_c &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2 \sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < Y_t \\
 -S &< (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) < S
 \end{aligned} \tag{I.3}$$

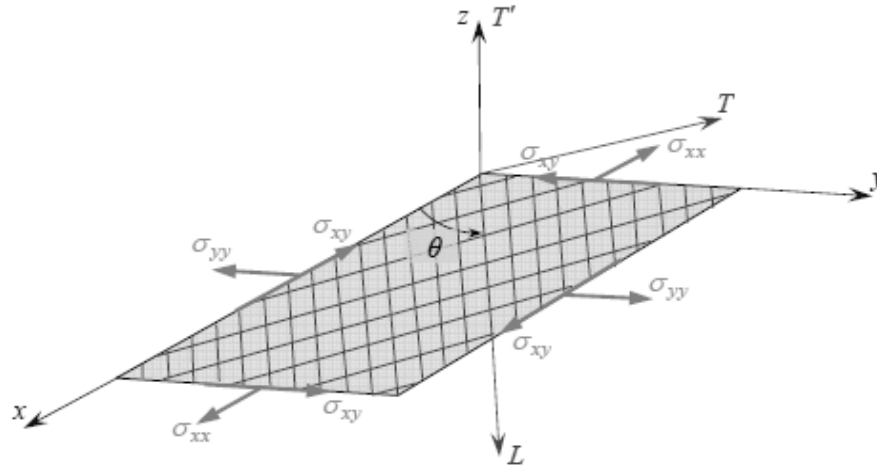


Figure I.11. Contraintes en-dehors des axes principaux d'une couche [2].

Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes principaux, les contraintes (I.3) se réduisent à :

$$\begin{aligned}
 \sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta \\
 \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta \\
 \sigma_{LT} &= -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{I.4}$$

I.6.2. Critères en déformations maximales

I.6.2.1. Critères dans les axes principaux

Les critères en déformation maximale sont transposés des critères en contraintes maximales, les déformations étant bornées, au lieu des contraintes. Les critères en déformations principales font intervenir :

$X_{\varepsilon t}$ ($X_{\varepsilon c}$): la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe longitudinal. $Y_{\varepsilon t}$ ($Y_{\varepsilon c}$): la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe transversal. S_{ε} : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche. La résistance mécanique est alors considérée comme étant atteinte, lorsque l'une des déformations principales atteint la déformation à la rupture correspondante.

Les critères en déformations maximales s'écrivent donc sous la forme [2]:

$$\begin{aligned}
 -X_{\varepsilon c} &< \varepsilon_L < X_{\varepsilon t} \\
 -Y_{\varepsilon c} &< \varepsilon_T < Y_{\varepsilon t} \\
 -S_{\varepsilon} &< \gamma_{LT} < S_{\varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{I.5}$$

I.6.2.2. Critères en-dehors des axes principaux

Dans le cas d'une traction ou compression en-dehors des axes principaux, les déformations principales sont [2]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= \frac{1}{E_L} (\cos^2\theta - \nu_{LT}\sin^2\theta)\sigma_{xx} \\ \varepsilon_T &= \frac{1}{E_T} (\sin^2\theta - \nu_{TL}\cos^2\theta)\sigma_{xx} \\ \gamma_{LT} &= \frac{1}{G_{LT}} \sigma_{xx} \sin\theta\cos\theta\end{aligned}\quad (I.6)$$

Il en résulte que les critères en déformations maximales peuvent être réécrits comme suit:

$$\begin{aligned}-\frac{X_c}{\cos^2\theta - \nu_{LT}\sin^2\theta} &< \sigma_{xx} < \frac{X_t}{\cos^2\theta - \nu_{LT}\sin^2\theta} \\ -\frac{Y_c}{\sin^2\theta - \nu_{LT}\cos^2\theta} &< \sigma_{xx} < \frac{Y_t}{\sin^2\theta - \nu_{LT}\cos^2\theta} \\ \frac{-S}{\sin\theta\cos\theta} &< \sigma_{xx} < \frac{S}{\sin\theta\cos\theta}\end{aligned}\quad (I.7)$$

I.6.3. Critères interactifs

Ces critères sont parfois appelés critères énergétiques, ils ont été recherchés pour compléter les critères de la contrainte maximale et de la déformation maximale, qui ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des résultats expérimentaux d'une part, d'autre part, ils excluent l'existence d'interaction entre les contraintes ou déformations principales.

Les mécanismes de rupture longitudinales, transversales ou en cisaillement sont supposés se produire indépendamment [2].

Ces critères interactifs étendent aux matériaux orthotropes le critère de Von Mises, utilisé pour les matériaux isotropes. Ce dernier (critère de Von Mises) est relié à l'énergie de déformation emmagasinée par unité de volume du matériau déformé.

I.6.3.1. Critère de Hill

Un des premiers critères interactifs de rupture appliqués aux matériaux composites a été introduit par R. Hill [4]. Ce critère peut être formulé en disant que la limite de contraintes d'un matériau composite n'est pas atteinte tant que l'inégalité suivante est vérifiée.

$$F(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + G(\sigma_T - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 + 2L\sigma_{TT'}^2 + 2M\sigma_{LT'}^2 + 2N\sigma_{LT}^2 < 1 \quad (I.8)$$

La rupture donc se produit lorsque l'égalité est vérifiée.

$$F(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + G(\sigma_T - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 + 2L\sigma_{TT'}^2 + 2M\sigma_{LT'}^2 + 2N\sigma_{LT}^2 = 1 \quad (I.9)$$

Les paramètres F , G , H , L , M et N sont des paramètres caractéristiques du matériau considéré, qui sont reliés aux contraintes à la rupture X , Y et S du matériau.

Dans le cas d'un essai de traction ou de compression dans la direction (L), le critère de Hill se réduit à :

$$\begin{aligned} G+H &= \frac{1}{X^2} \\ F+H &= \frac{1}{Y^2} \\ F+G &= \frac{1}{Z^2} \end{aligned} \quad (I.10)$$

Avec :

X : la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction (L).

Y : la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction (T).

Z : la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction (\hat{T}).

Dans le cas d'un essai de cisaillement dans le plan (L , T), le critère de Hill se réduit à [5]:

$$\begin{aligned} 2N &= \frac{1}{S_{LT}^2} \\ 2M &= \frac{1}{S_{LT'}^2} \\ 2L &= \frac{1}{S_{TT'}^2} \end{aligned} \quad (I.11)$$

Avec :

S_{LT} : la contrainte de rupture en cisaillement dans le plan (L , T).

$S_{LT'}$ et $S_{TT'}$: sont les contraintes de rupture en cisaillement, respectivement dans les deux plans (L , T') et (T , T'), de cela le critère de Hill est:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T'}}{Z}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) \sigma_L \sigma_T - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right) \sigma_L \sigma_{T'} - \\ & \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right) \sigma_T \sigma_{T'} + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT'}}{S_{LT'}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{TT'}}{S_{TT'}}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (I.12)$$

I.6.3.2. Critère de Hill – Tsai

Le critère de rupture de Hill en contraintes planes a été simplifié par V.D.Azzi et S.W.Tsai [6] dans le cas des matériaux composites unidirectionnels. Dans ce cas le critère s'écrit:

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 = 1 \quad (I.13)$$

Avec : σ_L , σ_T et σ_{LT} les contraintes appliquées correspondantes dans le sens des fibres, transverse et cisaillement. Dans le cas d'une traction ou d'une compression en dehors des axes principaux, les contraintes sont données par les expressions Equation (I.4) et en reportant ces expressions dans la relation (I.13) le critère de Tsai-Hill s'écrit :

$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left(\frac{1}{S_{LT}^2} - \frac{1}{X^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma_{XX}^2} \quad (I.14)$$

I.6.3.3. Critère de Hoffman

Une généralisation du critère de Hill, tenant compte de la différence du comportement des matériaux en traction et en compression, a été formulée par O. Hoffman [7]. Ce critère admet que la rupture du matériau se produit lorsque l'égalité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} & C_1(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + C_2(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + C_3(\sigma_L - \sigma_T)^2 + C_4\sigma_L + C_5\sigma_T + C_6\sigma_{T'} + C_7\sigma_{TT'}^2 + \\ & C_8\sigma_{LT'}^2 + C_9\sigma_{LT}^2 = 1 \end{aligned} \quad (I.15)$$

Les constantes C_1 à C_9 sont caractéristiques du matériau et reliées aux contraintes à la rupture du matériau par les relations :

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{X_t X_c} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_t Z_c} + \frac{1}{X_t X_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c} \right)$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \\
C_5 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \\
C_6 &= \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c} \\
C_7 &= \frac{1}{S_{TT}^2} \\
C_8 &= \frac{1}{S_{LT}^2} \\
C_9 &= \frac{1}{S_{LT}^2}
\end{aligned} \tag{I.16}$$

Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan (L,T), le critère de Hoffman se réduit à:

$$\frac{\sigma_L^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_T^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_c X_t} \sigma_L + \frac{Y_c - Y_t}{Y_c Y_t} \sigma_T + \frac{\sigma_L^2}{S_{LT}^2} = 1 \tag{I.17}$$

I.6.3.4. Critère tensoriel de Tsai-Wu

Ce critère, tenant compte de diverses inadéquations du critère précédent de Hill-Tsai, postule une surface de rupture dans l'espace des contraintes de la forme [8]:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \tag{I.18}$$

Cette surface est compliquée dans le cas général, cette théorie se ramène, dans le cas d'un matériau orthotrope sous chargement plan.

$$F_1 \sigma_L + F_2 \sigma_T + F_6 \sigma_{LT} + F_{11} \sigma_L^2 + F_{22} \sigma_T^2 + F_{66} \sigma_{LT}^2 + 2F_{12} \sigma_L \sigma_T = 1 \tag{I.19}$$

Les paramètres F_i et F_{ij} peuvent être exprimés à l'aide des contraintes à la rupture, mesurées dans divers essais. Dans le cas de la compression, il faut toute fois tenir compte des phénomènes d'instabilité, et les modes de rupture associés sont nombreux et complexes : flambage structural du composite, cisaillement des fibres en compression, fissuration de la matrice, suivie de l'instabilité des fibres, micro flambage des fibres et délaminage d'une partie du composite, entraînant la ruine de l'ensemble. Le critère de Tsai-Wu en contraintes planes s'écrit [2]:

$$\left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}\right) \sigma_L + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}\right) \sigma_T + \frac{\sigma_L^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_T^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{LT}^2}{S_{LT}^2} + 2F_{12}^* \frac{\sigma_L \sigma_T}{X_t X_c} = 1 \quad (\text{I.20})$$

F_{12}^* Coefficient de couplage

I.6.3.5. Critère de Hashin

Ce critère présenté par Hashin s'applique aux composites unidirectionnels et basé sur quatre modes principaux de rupture du matériau [9]:

$$\text{-Rupture de fibres en traction : } \sigma_L \geq 0 \quad \left(\frac{\sigma_L}{X_t}\right) \leq 1 \quad (\text{I.21})$$

$$\text{-Rupture de fibres en compression : } \sigma_L < 0 \quad \left(\frac{\sigma_L}{X_c}\right) \leq 1 \quad (\text{I.22})$$

$$\text{-Rupture de la matrice en traction : } \sigma_T \geq 0 \quad \left(\frac{\sigma_T}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{I.23})$$

$$\text{-Rupture de la matrice en compression : } \sigma_T < 0 \quad \left(\frac{\sigma_L}{Y_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{I.24})$$

I.6.3.6. Critère de Yamada-Sun

Pour la Rupture de fibres on a la relation suivante [9]:

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{I.25})$$

I.6.3.7. Critère de Puck

Pour la rupture de la matrice on a la relation suivante [9]:

$$\left(\frac{\sigma_L}{2X_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y_c Y_t}\right)^2 + \sigma_T \left(\frac{1}{Y_c} + \frac{1}{Y_t}\right) \leq 1 \quad (\text{I.26})$$

Chapitre II

Théorie du flambage des matériaux composites

II.1. Phénomène de flambement des structures

On peut considérer qu'il y a flambement lorsque sous l'action d'une charge axiale et l'introduction d'une charge transversale minime, la structure fléchit et reste dans sa position même après suppression de la charge transversale [10 ,11].

II.1.1 Définition du flambage

Le flambage ou flambement est un phénomène d'instabilité d'une structure (les poutres longues, les plaques et les coques minces, etc ..) qui soumise à un effort normal de compression, a tendance à fléchir et se déformer dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression (passage d'un état de compression à un état de flexion). Une poutre droite flambe en compression lorsque sa ligne neutre ne reste pas droite. La force au-delà de laquelle le risque est avéré est la force critique de flambement. Sa valeur dépend étroitement du module du matériau qui constitue la poutre, de la forme de la section droite, de la longueur de la poutre, mais aussi des conditions aux limites (poutre sur appui simple ou encastrée).

II.1.2 Flambement général des structures simples

Les structures sont constituées en grande partie d'éléments qui peuvent s'apparenter à des poutres, des plaques ou des coques. Les phénomènes au sein d'une structure complexe sont souvent une combinaison de phénomènes plus simples que l'on retrouve sur ces structures élémentaires. La poutre permet d'illustrer et de comprendre une grande partie des problèmes de flambement. Pour une poutre soumise à une charge compressive P , l'expression de la charge critique de flambement s'écrit [12] :

$$P_{cr} = c \frac{\pi^2}{l^2} EI \quad (\text{II.1})$$

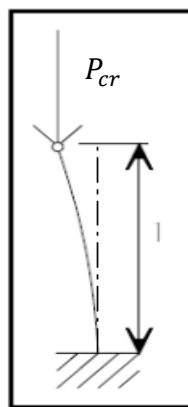


Figure II. 1. Exemple de la poutre d'Euler [13].

Avec : E : module de Young

I : moment quadratique

l : longueur de la poutre

- ✓ dans le cas d'un double encastrement $c = 4$,
- ✓ pour une poutre articulée, $c = 1$,
- ✓ pour une poutre avec une extrémité libre et l'autre encastree $c = 1/4$.

Une simple poutre en compression montre donc que pour qu'une structure supporte des charges élevées de compression sans flamber, elle a besoin d'une rigidité élevée et de forts moments quadratiques (éloignement de la matière de la fibre neutre). La connaissance des conditions aux limites est essentielle et il faut veiller à éviter de concevoir des structures trop élancées. D'un point de vue pratique, le module de Young, les moments quadratiques ainsi que les données géométriques d'une poutre ou d'une structure plus généralement sont déterminables avec précision compte tenu des moyens techniques actuels. Les conditions aux limites posent plus de problèmes car l'encastrement et l'articulation par exemple sont des conditions booléennes qui n'existent pas réellement à l'état naturel. Compte tenu de l'importance de ces conditions aux limites, elles constituent donc une des problématiques majeures du flambement.

Pour les plaques isotropes, le raisonnement est similaire. En compression suivant la longueur, la contrainte critique de flambement s'écrit [12] :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{eb} = KE \left(\frac{e}{b} \right)^2 \text{ soit : } F_c = K \frac{E}{b} e^3 \quad (\text{II.2})$$

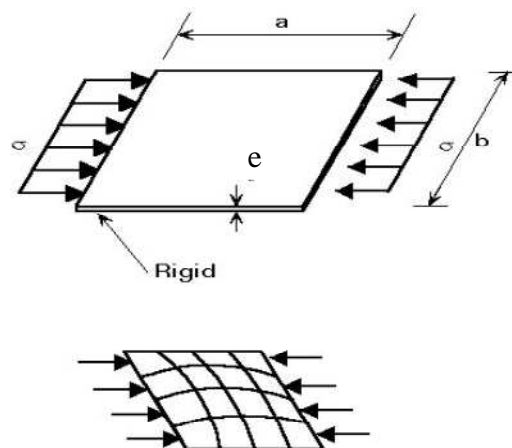


Figure II.2. Plaque en compression [14].

- ✓ Bords sur appuis simples $K=3.62$
- ✓ Bords encastrés $K=6.31$

Le module de Young ainsi que la largeur de la plaque sont donc importants mais le paramètre déterminant en termes d'effort de flambement reste l'épaisseur de plaque. Le nombre de demi-ondes qui apparaissent dans le cas de bords sur appuis simples est lié au rapport a/b . On obtiendra m demi-ondes si : $m(m - 1) < a / b < m(m + 1)$. Comme pour la poutre, l'influence des conditions aux limites est très importante.

Outre la compression, le cisaillement sur le pourtour de la plaque mène également au flambement. Un changement de repère permet de montrer que le cisaillement se traduit par une compression dans la direction Y et par de la traction dans le sens de X. L'apparition du phénomène est liée à la présence de la contrainte principale de compression Y, σ résultant de l'état de cisaillement simple, ce qui explique la forme et l'inclinaison des plis.

La contrainte de cisaillement critique s'écrit [12] :

$$\tau_c \approx \left(5 + \frac{6b}{a}\right) \times E \left(\frac{e}{b}\right)^2 \tag{II.3}$$

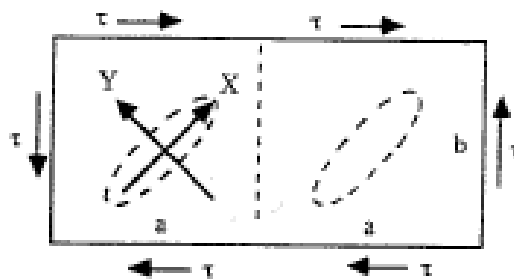


Figure II. 3. Plaque en cisaillement [12].

Le paramètre géométrique déterminant est comme pour la compression le rapport e/b .

Pour les coques, la courbure entraîne une meilleure résistance au flambement. La

contrainte critique pour des cylindres « moyens » s'écrit [21]: $\sigma_c = 0.3E(e/R)$ (II.4)

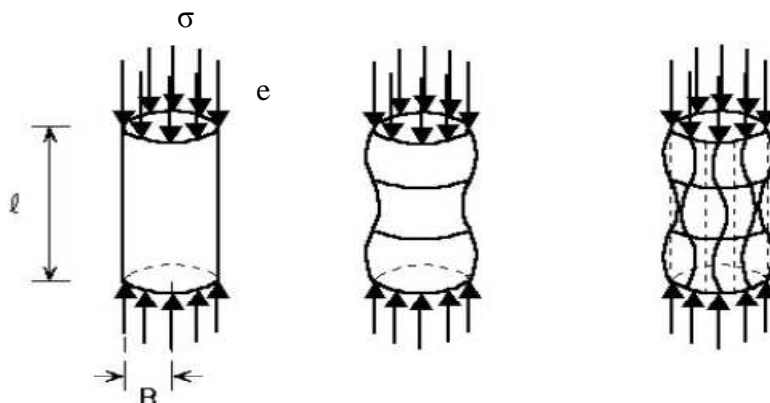


Figure II.4. Coque en compression [14].

De façon générale e/R est le paramètre déterminant du flambement des coques. Ceci explique que les tôles galbées présentent des caractéristiques de stabilité très supérieures à celles des tôles planes de mêmes dimensions.

II.1.3. Flambements locaux et post-flambement des structures.

Sur des structures plus complexes composées d'éléments poutres et d'éléments plaques, il peut exister plusieurs modes de flambement pour une même structure et pour un chargement donné. Les flambements ne concernant qu'une seule partie de la structure sont appelés flambements locaux. Les flambements locaux sont donc une instabilité partielle d'une structure. Il existe deux types de flambements locaux :

- ✓ les flambements locaux conduisant une rupture directe des structures (non admissibles),
- ✓ les flambements locaux ne conduisant pas à la rupture directement (admissibles).

Dans le premier cas (flambements non admissibles), la perte de rigidité de la zone flambée devient critique pour l'ensemble de la structure. Elle s'effondre donc car la stabilité ne peut pas être assurée par les zones non flambées.

On définit par post-flambement le comportement de la structure pour des charges comprises entre la charge de flambement et la charge de rupture de l'ensemble de la structure. Il convient de définir à ce stade les notions de flambement général et de flambement local.

II.2. Spécificité des composites par rapport au flambement

Les matériaux composites se caractérisent entre autre par leur comportement anisotrope. Le comportement de structures composites a été identifié dès 1975 [15 ,16]. Les termes de la matrice de rigidité font apparaître un comportement en membrane, en flexion ainsi qu'un couplage membrane/flexion. Cette nouveauté pose le problème de l'applicabilité des méthodes développées pour les matériaux métalliques.

Pour palier ce problème, la notion de matériau homogénéisé est d'abord utilisée et permet ainsi de caractériser le comportement des structures après empilement des stratifiés dans leur ensemble et simplifiant considérablement les calculs. Si cette simplification peut s'avérer intéressante dans certains cas, en flambement elle peut conduire à des erreurs considérables sur les charges de flambement. Gallet [17] montre par exemple sur des plaques planes des écarts de plus de 30% entre les charges de flambement calculées à partir des modules homogénéisés et en considérant l'empilement réel. La position des plis dans l'épaisseur joue donc un rôle important sur les charges de flambement.

Housner et Stein [15] effectuent des études paramétriques sur plaques planes et montre que l'orientation des plis joue également un rôle considérable sur les charges de flambement. Ils mettent notamment en évidence que ce sont les plis orientés à 45° qui présentent la meilleur tenu au flambement en cisaillement mais aussi en compression .

II.3. Flambement des poutres en matériaux composites

Dans le cas de stratifiés symétriques ou orthotropes, les équations permettant de déterminer la déformée latérale du stratifié sont indépendantes des équations des déplacements en membrane. Il résulte de ces équations qu'un chargement de membrane (déplacement ou force imposée) ne peut produire que des déformations en membrane.

Par exemple, si l'on considère une poutre droite (figure II.5), encastree suivant l'une de ses extrémités et soumise à un effort de compression N_{xx}^0 , les équations des plaques montrent que la poutre se raccourcit, la ligne moyenne restant rectiligne si en un point M de la poutre, on crée une petite perturbation transversale, le système revient à sa position initiale lorsque la perturbation disparaît : l'équilibre est stable .

Si l'on fait croître progressivement la charge N_{xx}^0 , on observe toutefois que dans le cas d'une poutre à élancement élevé et pour une certaine valeur critique N_{cr} . Correspondant à une valeur σ_{cr} de la contrainte normale bien inférieure à la contrainte de rupture, il se produit une déformation latérale il n'est plus possible alors d'augmenter la charge de compression sans provoquer la rupture ou une flèche très importante de la poutre.

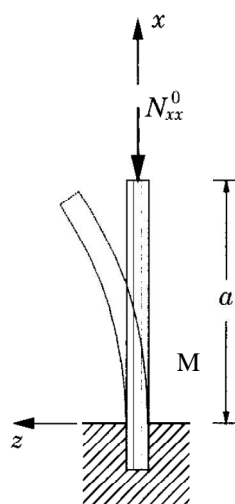


Figure II.5. Flambement d'une poutre [18].

Suivant les conditions d'appui (encastrement, appui simple), le flambement peut différer.

II.3.1. Equation du flambement

Dans le cadre de la théorie des poutres, les équations du flambement s'écrivent de la façon suivante [2] :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x^i \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial t^2} \quad (\text{II.5})$$

De plus

$$\frac{d^2 \omega_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I} = -b \frac{M_x}{E_x I} \quad (\text{II.6})$$

Où E_x et I sont respectivement les modules et moment quadratique de la poutre. L'expression (II.5) s'écrit :

$$-\frac{E_x I}{b} \frac{\partial^4 \omega_0}{\partial x^4} + N_x^i \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial t^2} \quad (\text{II.7})$$

Dans le cas où la poutre est soumise à une compression uniforme $N_x^i = -N_0$

L'équation (II.7) se met sous la forme :

$$\frac{\partial^4 \omega_0}{\partial x^4} + \frac{b}{E_x I} \left(N_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} + \rho_s \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (\text{II.8})$$

Où en introduisant l'expression du moment I :

$$\frac{\partial^4 \omega_0}{\partial x^4} + \frac{12}{E_x h^3} \left(N_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} + \rho_s \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (\text{II.9})$$

L'équation du flambement statique se réduit de ces équations et s'écrit sous l'une des formes :

$$\frac{d^4 \omega_0}{dx^4} + \frac{b}{E_x I} N_0 \frac{d^2 \omega_0}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{d^4 \omega_0}{dx^4} + \frac{12}{E_x h^3} N_0 \frac{d^2 \omega_0}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.11})$$

L'équation (II.10) peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^4 \omega_0}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 \omega_0}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Avec

$$k^2 = \frac{b N_0}{E_x I} = \frac{12 N_0}{E_x h^3}$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$\omega_{0(x)} = A \cos kx + B \sin kx + Cx + D \quad (\text{II.13})$$

Les coefficients A, B, C et D dépendent des conditions imposées aux extrémités de la poutre $x=0$ et $x=L$, où L est la longueur de la poutre.

II.3.2. Poutre en appuis simples

Dans le cas d'appuis simples ou d'articulations aux extrémités de la poutre, les conditions aux frontières sont aux extrémités $x=0$ et $x=L$:

$$\omega_0 = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\omega_0}{dx^2} = 0$$

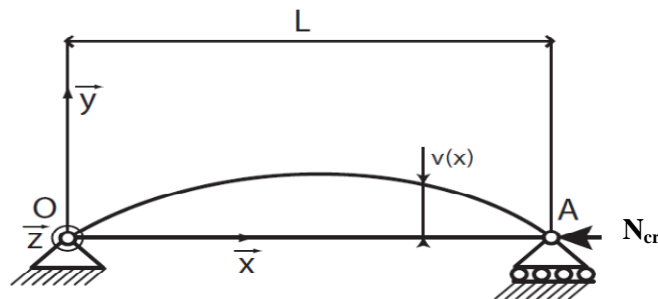


Figure II.6. Poutre en compression sur deux appuis [19].

La charge critique correspond au mode fondamentale ($m=1$) soit :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{12L^2} E_x h^3 \quad (\text{II.14})$$

II.3.3. Poutre encastrée

Dans le cas d'un encastrement des deux extrémités de la poutre, les conditions pour $x=0$ et $x=L$ sont : $\omega_0 = 0, \frac{d\omega_0}{dx} = 0$

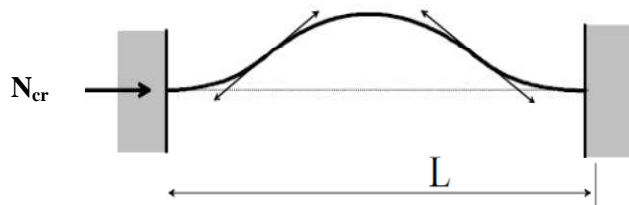


Figure II.7. Flambement de Poutre encastrée des deux extrémités [18].

La charge critique correspond au mode fondamentale, $m=1$ soit :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{3L^2} E_x h^3 \quad (\text{II.15})$$

La comparaison entre les équations (II.14) et (II.15) montre que l'encastrement des extrémités multiplie par 4 la charge critique de flambement obtenue dans le cas d'appuis simples.

Dans le cas d'une poutre encastree à une extrémité et en appui simple à l'autre, la charge critique est exprimée par :

$$N_{cr} = 2,047 \frac{\pi^2}{12L^2} \quad (\text{II.16})$$

Dans le cas d'une poutre encastree à une extrémité et l'autre extrémité étant libre, la charge critique est exprimée par :

$$N_{cr} = 0,25 \frac{\pi^2}{12L^2} E_x h^3 \quad (\text{II.17})$$

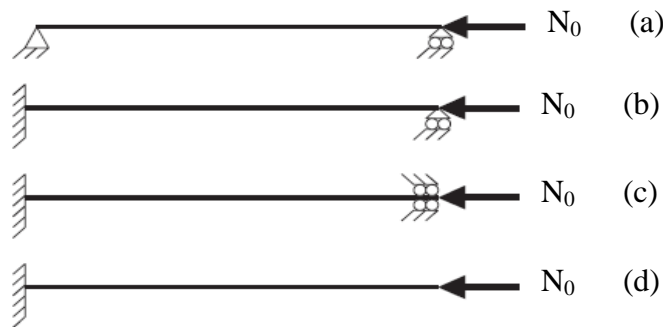


Figure II.8. Conditions d'appuis des poutres [20].

II.4. Théorie des stratifiés

II. 4.1. Approches simplifiées

Des expressions simplifiées et pratiques des modules peuvent être obtenues en faisant une approche très simplifiée du comportement mécanique de la cellule élémentaire du matériau composite unidirectionnel.

Le problème de détermination des modules d'élasticité d'un matériau composite unidirectionnel consiste à rechercher des expressions de ces modules (5 modules indépendants) en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants; modules d'élasticité des fibres, de la matrice, fraction volumique des fibres, longueurs des fibres, etc.

Les propriétés mécaniques et géométriques des fibres et de la matrice seront caractérisées par leurs modules d'élasticité, coefficients de Poisson et de fractions volumiques notés respectivement E_f , E_m , ν_f , ν_m , V_f et V_m [2, 21].

II.4.1.1 Module de Young longitudinal

Le module de Young longitudinal est déterminé par un essai de traction longitudinale figure (II.9). On suppose que les fibres et la matrice subissent une déformation identique et uniforme. Si ΔL est l'allongement de la cellule du composite, la déformation longitudinale imposée à la cellule est:

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L} \quad (\text{II.18})$$

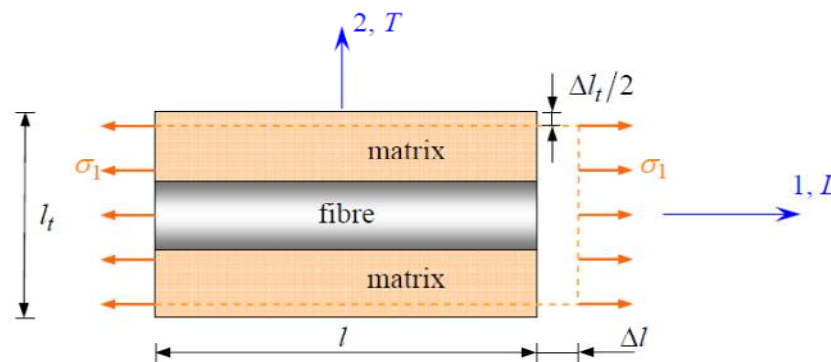


Figure. II.9. Schéma simplifié d'une traction longitudinale [2].

Où L est la longueur initiale de la cellule considérée.

La déformation dans la fibre et la matrice est:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_L \quad (\text{II.19})$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique. Les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par:

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f \quad (\text{II.20})$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m \quad (\text{II.21})$$

La charge totale appliquée est :

$$F_1 = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m \quad (\text{II.22})$$

Où S_f et S_m sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice.

Si S est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne $\sigma_1 = F_1/S$ notée (II.23) s'écrit:

$$\sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (\text{II.24})$$

Les relations précédentes, conduisent à l'expression du module de Young longitudinal

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (\text{II.25})$$

Cette expression est connue sous le nom de la loi de mélange pour le module de Young dans la direction des fibres.

II.4.1.2. Module de Young transversal

Le module de Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversale où le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres (figure II.10).

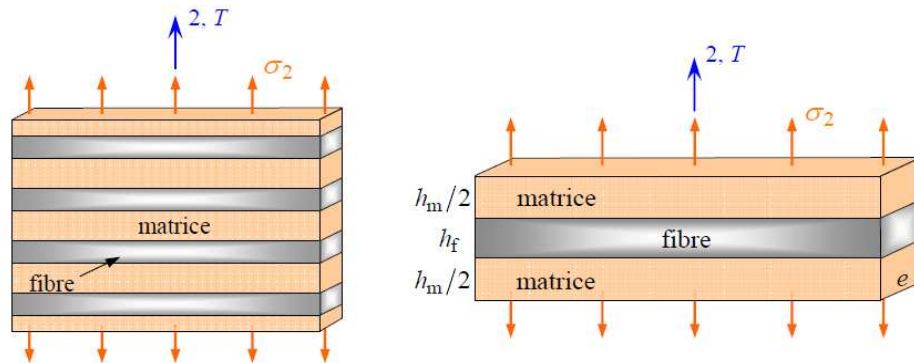


Figure II.10. Schéma par couche d'une traction transversale [2].

La charge F_2 imposée suivant dans la direction transverse est transmise intégralement dans les fibres et la matrice et impose des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2 \quad (\text{II.26})$$

Il en résulte que les déformations respectives des fibres et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent:

$$\varepsilon_f = \sigma_2 / E_f \quad (\text{II.27})$$

$$\varepsilon_m = \sigma_2 / E_m \quad (\text{II.28})$$

La déformation transverse est donnée par:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad (\text{II.29})$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée à la cellule par le module transversal:

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2 \quad (\text{II.30})$$

La combinaison des relations précédentes conduit à l'expression du module de Young transversal :

$$\frac{1}{E_f} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m} \quad (\text{II.31})$$

Cette expression est connue sous le nom de loi inverse des mélanges.

II.4.1.3. Coefficient de Poisson longitudinal

Le coefficient de Poisson longitudinal ν_{LT} , est déterminé par essai de traction longitudinale. Il en résulte que les déformations transversales des fibres et de la matrice sont données par:

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_m \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2f} = -\nu_f \varepsilon_1 \quad (\text{II.32})$$

L'allongement transversal de la cellule élémentaire est:

$$\Delta L_t = -\nu_m \varepsilon_1 h_m - \nu_f \varepsilon_1 h_f \quad (\text{II.33})$$

La déformation transversale est donnée par :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_t}{h_f + h_m} = -[\nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f)] \varepsilon_1 \quad (\text{II.34})$$

D'où l'expression du coefficient de Poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad (\text{II.35})$$

Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal. La valeur du coefficient de Poisson longitudinal ν_{LT} est proche de 0.3.

II.4.1.4. Matrices de rigidité et de souplesse

Le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel peut être décrit en introduisant soit la matrice de rigidité notée C_{ij} , soit la matrice de souplesse S_{ij} . La loi de Hooke s'écrit suivant la forme [2]:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (\text{II.36})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Pour un matériau orthotrope, qui possède trois plans symétrie, perpendiculaires deux à deux, les matrices d'élasticités et de souplesse s'écrivent :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

Les constantes de rigidité et de souplesse sont liées aux modules d'élasticité E_L , E_T , G_{LT} et ν_{LT} . Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est donc caractérisé par (9) coefficients indépendants, les matrices de rigidité et de souplesse étant inverses l'une de l'autre, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S}, C_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S}, C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S} \\ C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{\Delta S}, C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{\Delta S}, C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{\Delta S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, C_{55} = \frac{1}{S_{55}}, C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

$$\Delta S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}$$

Le composite unidirectionnel est un cas particulier de matériau orthotrope dit orthotrope de révolution, pour lequel :

$$\begin{aligned}
C_{13} &= C_{12}, C_{33} = C_{22} \\
C_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), C_{55} = C_{66} \\
S_{13} &= S_{12}, S_{33} = S_{22}, S_{55} = S_{66} \\
S_{44} &= 2(S_{22} - S_{23})
\end{aligned} \tag{II.44}$$

II.4.1.5. Constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules d'élasticité

Les expressions des constantes de souplesse et de rigidité s'obtiennent à partir des relations

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{E_1}, S_{22} = \frac{1}{E_2}, S_{33} = \frac{1}{E_3} \\
S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, S_{12} = -\frac{\vartheta_{12}}{E_1}, S_{13} = -\frac{\vartheta_{13}}{E_1} \\
S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, S_{66} = \frac{1}{G_{12}}, S_{23} = -\frac{\vartheta_{23}}{E_2} \\
C_{11} &= \frac{1 - \vartheta_{23}\vartheta_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{44} = G_{23}, C_{55} = G_{13}, C_{66} = G_{12} \\
C_{12} &= \frac{\vartheta_{21} + \vartheta_{31}\vartheta_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\vartheta_{12} + \vartheta_{32}\vartheta_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{22} &= \frac{1 - \vartheta_{13}\vartheta_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, C_{13} = \frac{\vartheta_{31} + \vartheta_{21}\vartheta_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\vartheta_{13} + \vartheta_{12}\vartheta_{23}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{33} &= \frac{1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, C_{23} = \frac{\vartheta_{32} + \vartheta_{12}\vartheta_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\vartheta_{23} + \vartheta_{21}\vartheta_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\
\Delta &= \frac{1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21} - \vartheta_{23}\vartheta_{32} - \vartheta_{31}\vartheta_{13} - 2\vartheta_{21}\vartheta_{32}\vartheta_{13}}{E_1 E_2 E_3}
\end{aligned} \tag{II.45}$$

II.5. Loi de comportement d'un stratifié

Le matériau composite stratifié est constitué d'un nombre de couches ou plis unidirectionnelles en négligeant les contraintes dans le sens d'épaisseur de chaque couche, et en adoptant la théorie classique des stratifiées, les forces et les moments sont liés aux déformations à mi-plan et aux courbures par la relation matricielle suivante [2, 22].

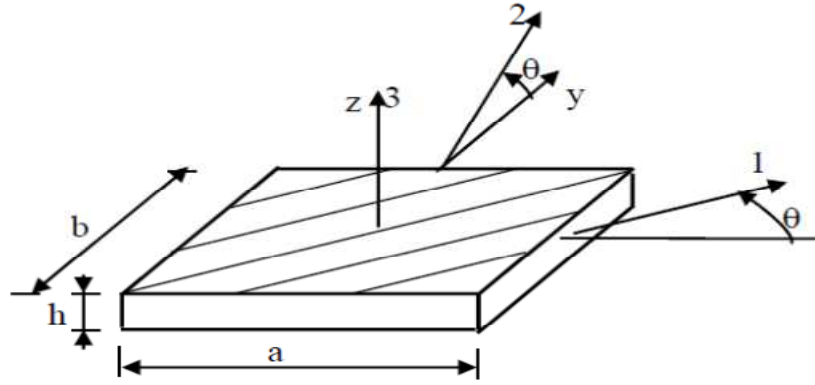


Figure II.11. Repère local et repère global [22].

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

Et on peut écrire cette expression sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{Bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

En notant par σ_{ij} les contraintes dans le plan, on peut écrire:

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dz$$

$$M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z dz \quad (\text{II.48})$$

Les rigidités extensionnelle, flexionnelle et de couplage sont définies par:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz$$

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z dz$$

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z^2 dz \quad (\text{II.49})$$

Avec \bar{Q}_{ij} désignant les coefficients d'élasticité d'une couche dans le repère global (x, y, z) du stratifié faisant un angle θ avec le repère local $(1, 2, 3)$.

II.6. Théorie des plaques stratifiées

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux autres composantes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , cette hypothèse est généralement vérifiée dans la pratique, et dans ce cas la loi de Hooke généralisée hors axes principaux d'une couche s'écrit [2] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

Où \bar{Q}_{ij} sont les coefficients de la matrice de rigidité d'une couche k donné. La discontinuité des matrices de rigidité d'une couche à l'autre implique la discontinuité des contraintes au passage d'une couche à l'autre.

II.6.1. Résultantes en membrane

Le champ des résultantes en membrane noté $N(x, y)$ est défini par:

$$N(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_k dz \quad (\text{II.51})$$

Où σ_k est la matrice des contraintes en membrane σ_{xy} , σ_{yy} , σ_{xx} , dans la couche k .

$N(x, y)$ peut s'écrire

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (\text{II.52})$$

Les composantes N_x , N_y et N_{xy} sont les résultantes par unité de longueur de plaque des contraintes normales suivant x et y et des contraintes de cisaillement dans le plan (x, y) .

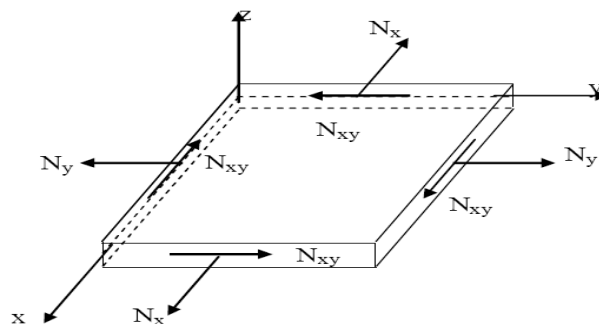


Figure II.12. Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié [2].

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à la relation précédente sous la forme:

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (\text{II.53})$$

II.6.2. Résultantes en cisaillement

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (\text{II.54})$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié.

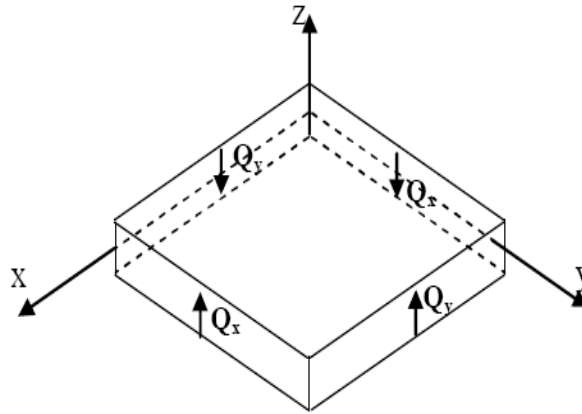


Figure II.13. Schématisation des résultantes de cisaillement [2].

II.6.3. Moment de flexion et de torsion

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un élément du stratifié sont définis par:

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (\text{II.55})$$

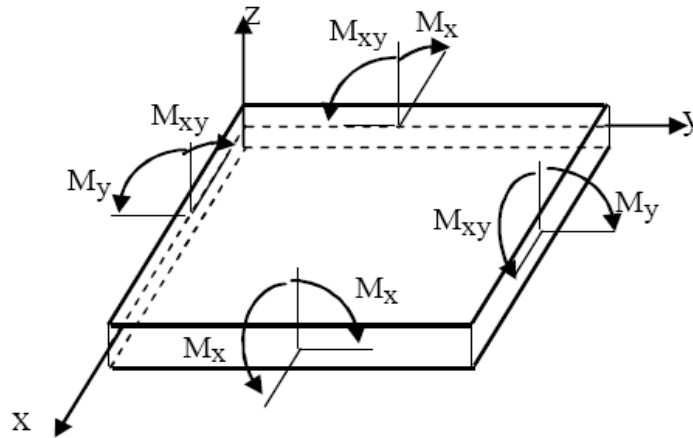


Figure II.14. Schématisation des moments de flexion et de torsion [2].

II.7. Théorie classique des stratifiés

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier degré (Figure II.15). Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse (les déformations en cisaillement transverse sont donc nulles). Les rotations de la section suivant les axes X et Y s'écrivent [2] :

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\tag{II.56}$$

Le champ des déplacements s'écrit alors:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y)\end{aligned}\tag{II.57}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

u_0 et v_0 sont les déplacements membranaires de la feuille moyenne de la plaque.

w_0 est le déplacement hors plan feuille moyenne de la plaque.

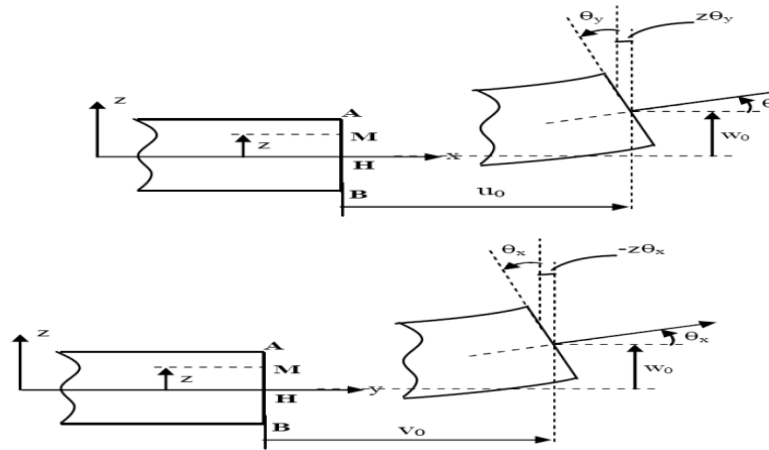


Figure II.15. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés [2].

II.7.1. Champ des déformations

Le champ des déformations s'écrit :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{II.58}$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$$

Le tenseur des déformations en un point M est donnée par:

$$\epsilon(M) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{II.59}$$

La matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles:

$$\epsilon(M) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \tag{II.60}$$

Le champ des déformations est la superposition des déformations en membrane donnée par:

$$\epsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{II.61}$$

Et les déformations en flexion données par :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \varepsilon_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

Généralement, les déformations en flexion et en torsion s'expriment suivant la relation:

$$\varepsilon_f(M) = z k(x, y) \quad (\text{II.63})$$

En posant:

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.64})$$

La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque stratifiée en flexion. Les angles de rotation de la déformée du plan moyen au point $H(x, y, 0)$ s'expriment en fonction du déplacement transversal $w_0(x, y)$ de ce point par:

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.65})$$

$$\theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

Finalement le champ des déplacements s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

Ou sous la forme:

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(x, y) + z k(x, y) \quad (\text{II.67})$$

II.7.2 Champ de contraintes

Le Tenseur des contraintes en un point est donné par:

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

Le champ de contraintes se réduit aux composantes en membrane donnée par:

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.69})$$

Les contraintes dans une couche k sont données par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.70})$$

Cette relation peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.71})$$

Où

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k k(x, y) \quad (\text{II.72})$$

$\sigma_k(M)$ Représente la matrice contrainte dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$, la matrice de rigidité réduite \bar{Q}_k varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes dans les couches successives.

II.7.3. Expression des résultantes et des moments

II.7.3.1. Résultantes en membrane

L'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés:

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k k(x, y)] dz \quad (\text{II.73})$$

Soit :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \bar{Q}_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \quad (\text{II.74})$$

Ou en intégrant dans l'épaisseur :

$$N(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] k(x, y) \quad (\text{II.75})$$

L'expression de la matrice des résultantes s'écrit sous la forme :

$$N(x, y) = A\varepsilon_m(x; y) + Bk(x, y) \quad (\text{II.76})$$

Les matrices, A, B s'écrivent

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \quad (\text{II.77})$$

$$A = [A_{ij}]$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_{kj}$$

$$\text{avec } B = [B_{ij}]$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_{kj} \quad (\text{II.78})$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.79})$$

II.7.3.2. Moment de flexion et de torsion

L'expression des moments de flexion et de torsion :

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k-1}} [z Q_k \varepsilon(x, y) + z^2 Q_k k(x, y)] dz \quad (\text{II.80})$$

Ce qui conduit à :

$$M(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right] \varepsilon(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \right] k(x, y) \quad (\text{II.81})$$

La matrice des moments de flexion s'écrit :

$$M(x, y) = B\varepsilon(x, y) + Dk(x, y) \quad (\text{II.82})$$

En introduisant la nouvelle matrice D:

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \quad (\text{II.83})$$

$$D = [D_{ij}] = (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.84})$$

Chapitre III

Comportement des Colonnes en Composites Sous l'effet du flambage

III.1. Modélisation par éléments finis

III.1.1. Introduction

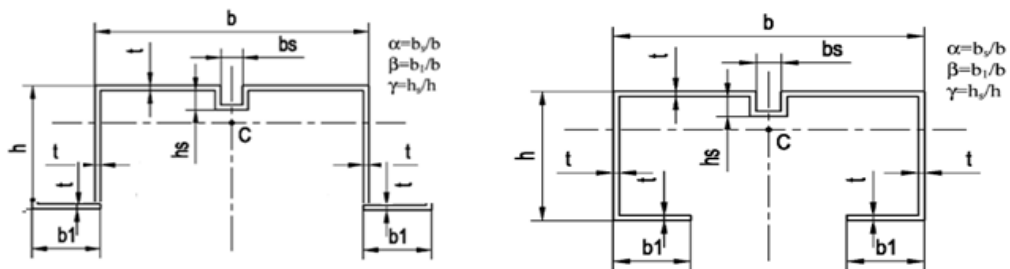
Notre étude s'est penchée sur deux types de matériaux différents à savoir le matériau composite GFFP et l'alliage d'Aluminium AL2024. Parmi les effets sur lesquels notre étude va porter, nous pouvons citer l'effet de l'orientation des plis et l'effet de rapports géométriques des colonnes sur l'évolution du paramètre de flambement.

En se basant sur la méthode des éléments finis, nous envisageons à trouver le rapport entre les sollicitations et le comportement des charpentes en matériaux composites (Hat section et Lipped channel section). L'analyse est faite en présence d'une sollicitation de compression par unité de longueur avec un déplacement imposé. Dans cette étude l'évaluation de l'endommagement dans les charpentes en composite, estimation et la validation du modèle de calculs numériques sont basées sur les concepts de la mécanique de la rupture. Pour la modélisation nous aurons recours au code de calculs ABAQUS 6.11.

III.1.2. Modèle et la géométrie des colonnes

Le modèle géométrique utilisé a les caractéristiques montrées sur la figure III.1. Pour les deux matériaux utilisés, l'étude est effectuée pour deux types de géométries Hat section et Lipped channel section. Les dimensions sont présentées sur les figures III.1, III.2 pour les deux sections, on définit les rapports géométriques α , β et γ comme suit : $\alpha=bs/b$, $\beta=b_1/b$, $\gamma=hs/h$.

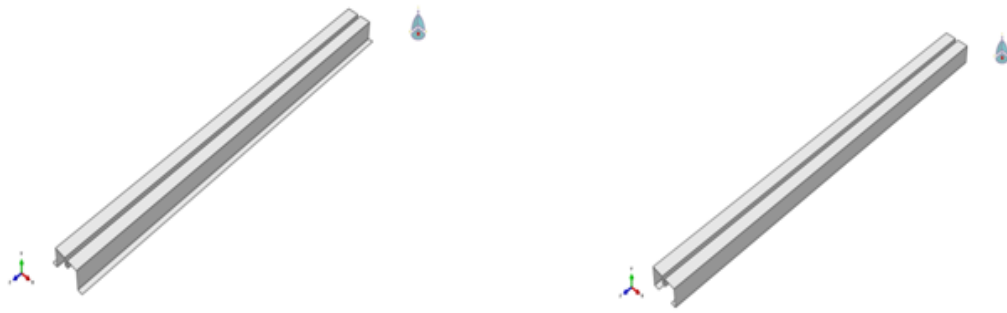
Les paramètres α , β et γ varient en fonction des valeurs choisies à b_s , b_1 , h_s respectivement. La colonne est constituée de douze plis, chacun à une épaisseur de l'ordre de 0.125mm.



Configuration I : Hat section

Configuration II : Lipped-Channel section

Figure III.1. Configurations des colonnes étudiées [23].



I : Hat section

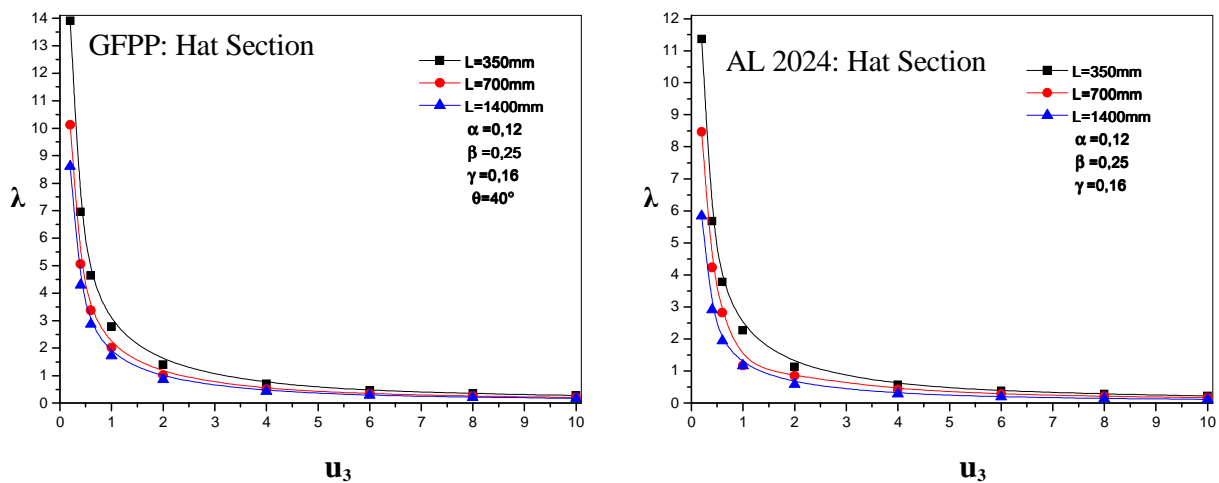
II : Lipped-Channel section

Figure III.2. Modèle géométrique des colonnes [24].

III.1.3. Les conditions aux limites

Pour pouvoir comparer les résultats de la simulation pour les différents cas, il faut imposer un déplacement au lieu d'une force appliquée ceci est justifié par le fait que la surface change au cours des simulations (c-à-d qu'elle n'est pas constante). Afin de déterminer la valeur du déplacement imposé, nous avons tracé la charge critique de flambement λ en fonction du déplacement imposé U_3 qui varie de 0.2 mm jusqu' à 10mm pour les deux cas de matériaux étudiés (voir Figure III.3). Cette étude a été effectuée pour les trois longueurs de colonnes ($l= 350, 700, 1400$ mm).

À partir des graphes donnés aux figures, nous prenons la valeur du déplacement égale à 5mm afin d'assurer un flambement linéaire.

Figure III.3. Variation de λ en fonction du déplacement U_3 .

Nous avons appliqué les conditions aux limites montrées sur la figure III.4. Une extrémité fixe, tout en étant modélisée par encastrement, et l'autre, modélisée avec un déplacement imposé selon la longueur de la colonne, tout en maintenant les autres degrés de liberté immobiles.



Figure III.4. Les conditions aux limites [24].

Nous avons utilisé un maillage quadratique à 8 nœuds, type shell (S8R). Le test de convergence a été réalisé de telle sorte que nous avons utilisé un maillage raffiné avec 12500 d'éléments.

III.1.4. Caractéristiques mécaniques de la colonne

Les données présentées dans les tableaux suivants résument les propriétés mécaniques des deux matériaux utilisés dans cette modélisation numérique.

<i>Matériau 1</i>	<i>E(MPa)</i>	<i>ν</i>
Al 2024	73400	0.3

<i>Matériau 2</i>	<i>E₁(MPa)</i>	<i>E₂(MPa)</i>	<i>ν_{12}</i>	<i>G₁₂(MPa)</i>	<i>G₁₃(MPa)</i>	<i>G₂₃(MPa)</i>
GFPP(twintex)	13000	13000	0.1	1720	1720	1690

Tableau III.1. Caractéristiques mécaniques des matériaux [25].

La figure III.5 montre deux cas des modèles utilisés dans nos calculs avec des différentes orientations et le maillage typique correspondant.

En ce qui concerne le matériau qui est le Al 2024, nous avons étudié pour les trois types de longueur ($l=350\text{mm}$, $l=700\text{mm}$ et $l=1400\text{mm}$) :

- L'effet de la géométrie des colonnes (α , β et γ) sur la charge du flambement λ .
- L'effet de la longueur de la colonne l sur le paramètre du flambage λ .
- L'effet de type des colonnes (Hat Section et Lipped Channel Section) sur le paramètre du flambage λ .
- L'effet de l'épaisseur e de la colonne sur le paramètre du flambage λ .

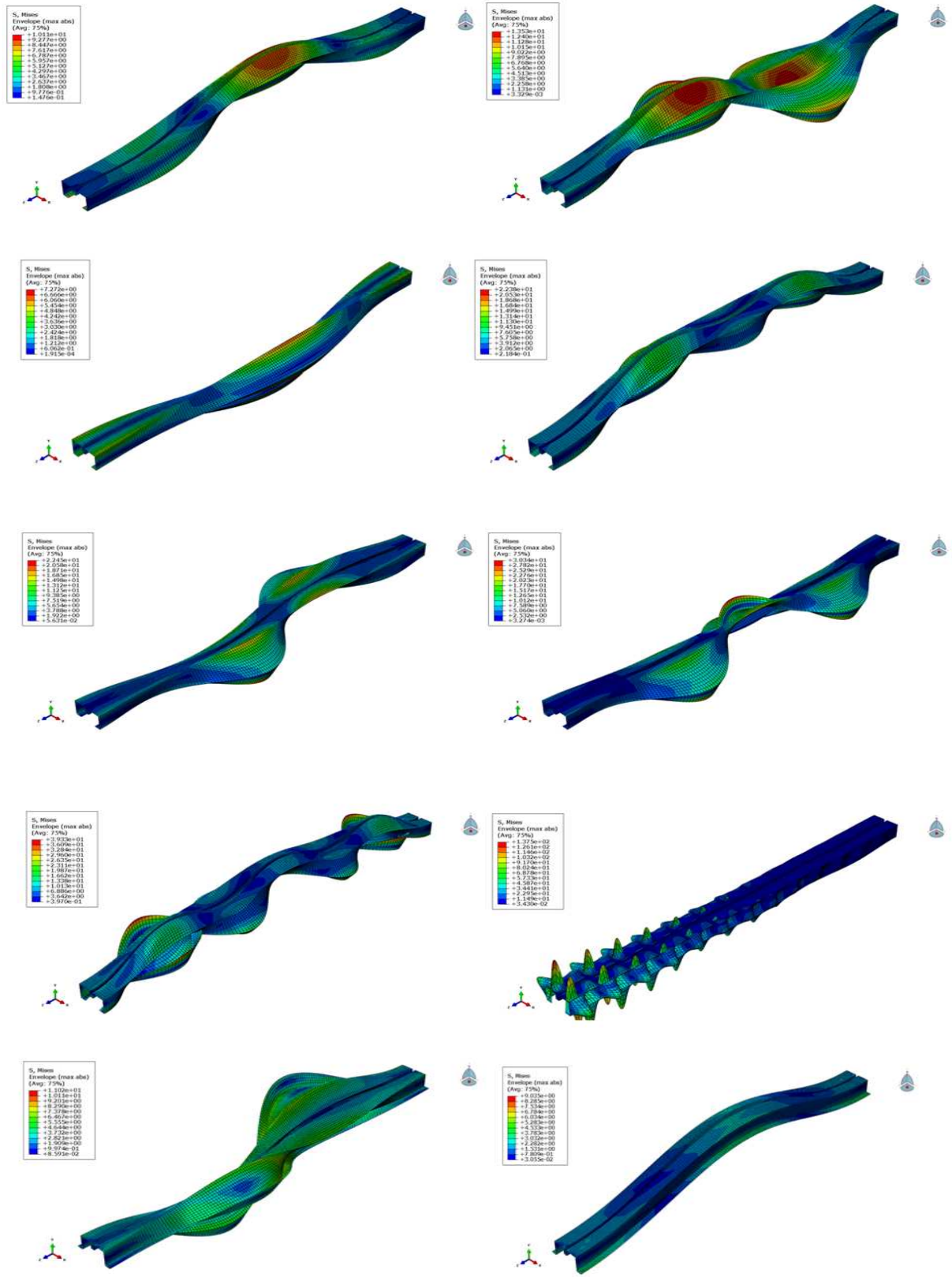
Alors que pour le matériau composite GFPP (twintex), nous avons étudié pour les mêmes longueurs ;

- L'effet de l'orientation des fibres pour un système symétrique et antisymétrique sur le paramètre du flambage λ .
- L'effet de l'orientation des plis de la colonne sur la charge du flambement λ .
- L'effet de la géométrie des colonnes (α , β et γ) sur la charge du flambement λ .
- L'effet de la longueur de la colonne l sur le paramètre du flambage λ .
- L'effet de type des colonnes (Hat Section et Lipped Channel Section) sur le paramètre du flambage λ .



Figure III.5. Modèle des éléments finis [24].

Nous allons montrer dans ce qui suit à travers des courbes, les résultats obtenus pour toutes les simulations faites.



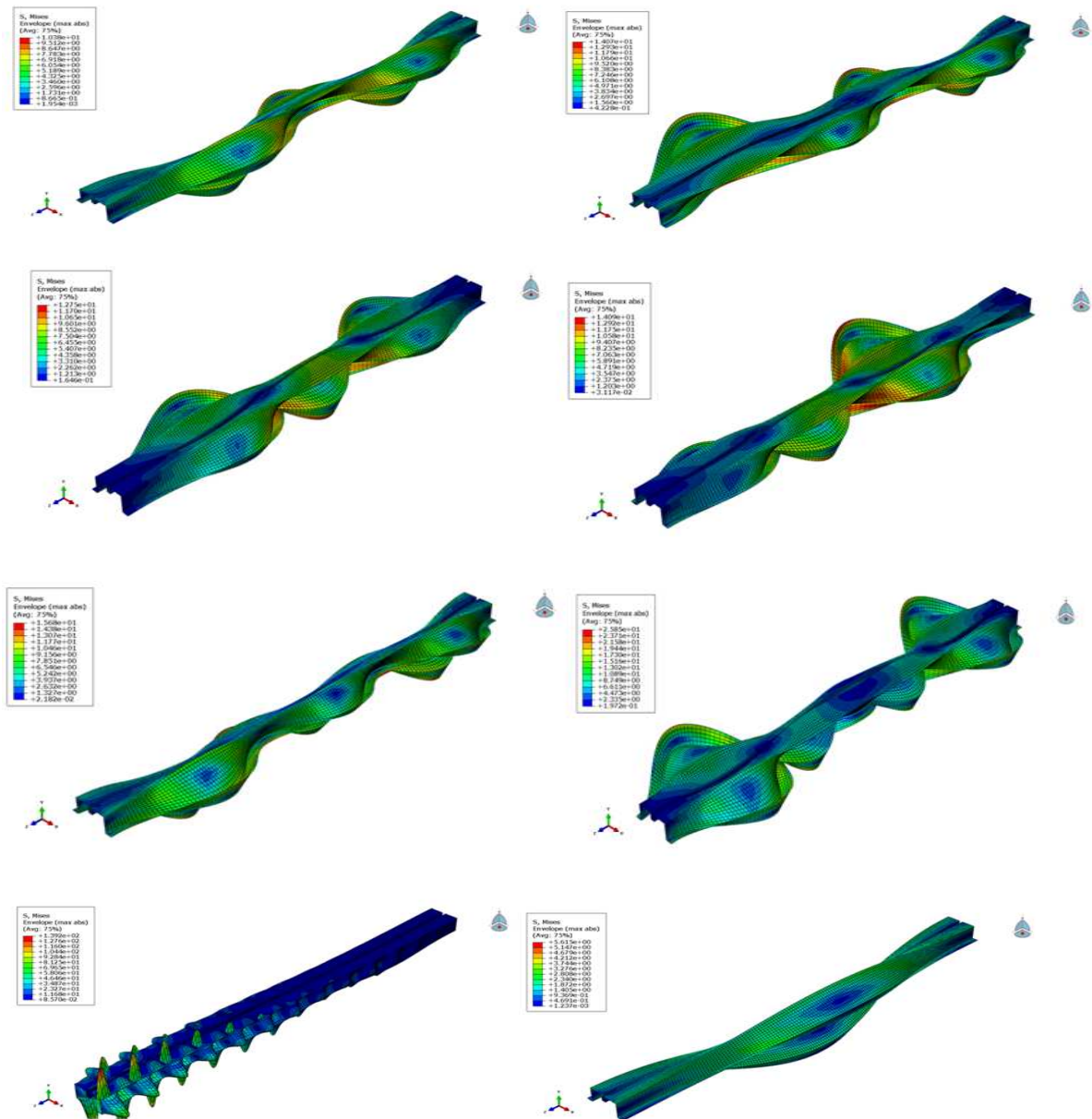


Figure III.6. Formes des modes de flambement obtenues [24].

III.2. Discussions des résultats

III.2.1. Cas de l'alliage d'aluminium Al 2024

III.2.1.1. Influence de la géométrie des colonnes (α , β et γ) sur le paramètre du flambement λ

❖ Effet du rapport géométrique α pour différentes longueurs de colonne

La Figure III.7 montre l'effet du paramètre géométrique α sur le paramètre du flambement λ pour différentes longueurs de colonne Hat section et Lipped channel section.

Les dimensions β et γ sont considérées fixes à savoir $b_1=12.5\text{mm}$ et $h_s=4\text{mm}$ notées respectivement $\beta=0.25$ et $\gamma=0.16$ alors que le paramètre géométrique α varie en fonction de la variation de la dimension b_s ($b_s=0, 1, 2, 6, 12, 18\text{mm}$).

Lorsque la longueur de la colonne est $l=350\text{mm}$, on constate que le paramètre de flambage λ augmente rapidement en fonction de l'augmentation du paramètre géométrique α jusqu'à atteindre la valeur de 0.05 ($b_1=2.5\text{mm}$), à partir de cette valeur, cette augmentation devient quasi-linéaire. La même constatation est faite pour le cas Lipped channel section.

Pour $l=700\text{mm}$, on constate une légère augmentation linéaire du paramètre de flambage λ pour le cas du Hat section alors que pour le cas de Lipped channel section, la valeur du paramètre de flambage λ reste constante.

Par ailleurs, pour $l=1400\text{mm}$, on constate une légère augmentation linéaire du paramètre de flambage λ pour les deux cas.

L'augmentation de la longueur de la colonne Hat Section produit une réduction du paramètre de flambage λ , par contre, pour la colonne Lipped channel, la résistance maximale est constatée lorsque la longueur l est égale à 700mm .

De plus, l'effet de la section est mis en évidence pour les mêmes paramètres géométriques, pour $l=350\text{mm}$, le paramètre de flambage λ diminue de 10% pour le Lipped channel en comparaison avec le Hat Section. Alors que pour $l=700\text{mm}$, le paramètre λ augmente de 67%, tandis que pour $l=1400\text{mm}$, l'augmentation est de 90%.

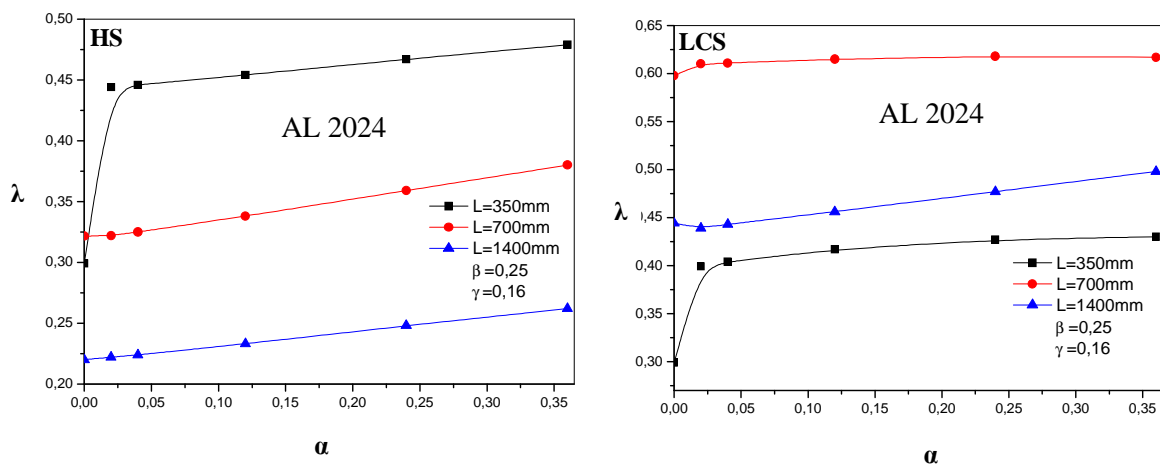


Figure III.7. Variation de λ en fonction α avec la variation de l .

❖ Effet du rapport géométrique β pour différentes longueurs de colonne

Dans cette section, l'effet du rapport géométrique β est mis en évidence pour deux cas de la profondeur de l'entaille présente dans les colonnes ($\alpha=0.04$ et $\alpha=0.12$).

- **Cas de $\alpha = 0.12$**

Sur la figure III.8, nous montrons l'évolution du paramètre de flambage λ en fonction du paramètre géométrique β pour les différentes longueurs de colonnes, Hat Section et Lipped channel Section. Dans ce cas, les dimensions considérées fixes sont $b_s=6\text{mm}$ et $h_s=4\text{mm}$ (notées respectivement $\alpha = 0.12$ et $\gamma=0.16$), alors que le paramètre géométrique β varie en fonction de b_1 , β ($b_1=0, 1, 2.5, 5, 10, 15, 20\text{mm}$).

Dans le cas où la longueur $l=350\text{mm}$, on constate que le paramètre de flambage λ augmente en fonction de β jusqu'à la valeur maximale de 0.45 ($\beta = 0.25$), à partir de laquelle, on note une diminution. La constatation reste valable pour le cas de Lipped channel où la valeur de λ max est égale à 0.41 ($\beta = 0.3$).

Lorsque la longueur l est égale à 700mm, on note une stabilité du paramètre de flambage λ jusqu'à la valeur de $\beta=0.1$ qui sera suivie par une diminution avec l'augmentation de la valeur de β .

Tandis que pour le cas de Lipped channel, la variation du paramètre de flambement est stable entre l'intervalle de β (0 - 0.05) ensuite elle augmente jusqu'à la valeur de 0.3 et enfin une stabilité est enregistrée à partir de cette valeur. En ce qui concerne la longueur $l=1400\text{mm}$, la courbe montre trois étapes : une stabilité suivie d'une diminution linéaire à partir de 0.05 et finalement une stabilité du paramètre de flambement λ . Pour le cas de Lipped channel, on enregistre une stabilité entre l'intervalle de β (0 - 0.05) suivie d'une augmentation linéaire.

Nous remarquons ainsi que la valeur maximale du paramètre de flambement λ est atteinte pour une longueur de $l=700\text{mm}$ lorsque β est entre 0 et 0.15. Alors qu'elle est maximum, pour une longueur de $l=350\text{mm}$ lorsque β est entre 0.15 et 0.4. Par contre, pour la section lipped channel, la valeur maximale est atteinte pour une longueur de $l=700\text{mm}$.

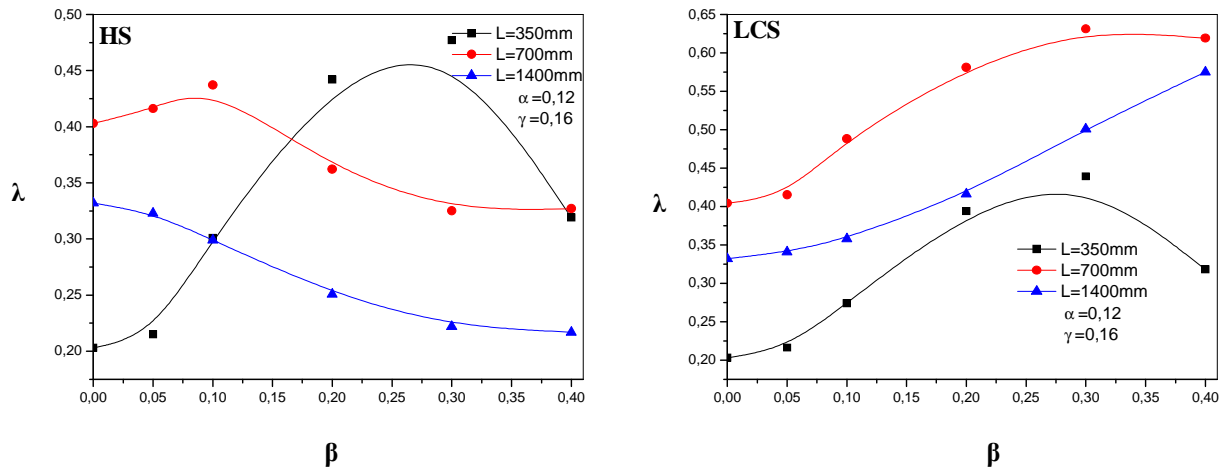


Figure III.8. Variation de λ en fonction β pour différentes longueurs l .

- **Cas de $\alpha = 0.04$**

La figure III.9 correspondant à la valeur du paramètre géométrique $\alpha=0.04$ et montre les mêmes résultats que ceux obtenus sur la figure III.8 ($\alpha=0.12$). Ceci indique que le paramètre α n'a pas un effet sur la section de la colonne. Pour mieux illustrer ce comportement, nous avons tracé sur la figure III.10, les allures pour deux paramètres α de la longueur $l=350\text{mm}$. Il est clair que l'effet de α est négligeable.

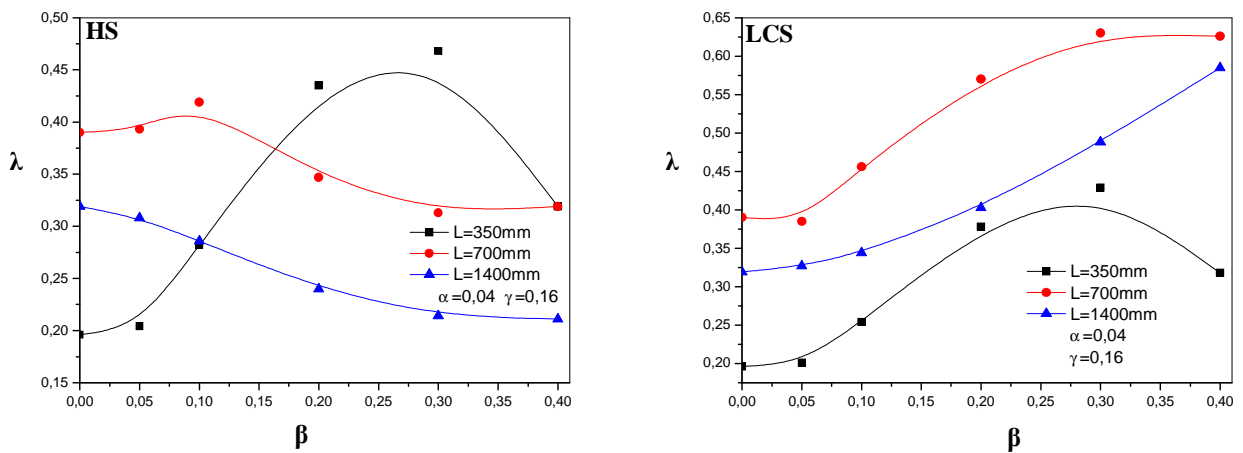


Figure III.9. Variation de λ en fonction β pour différentes longueurs l .

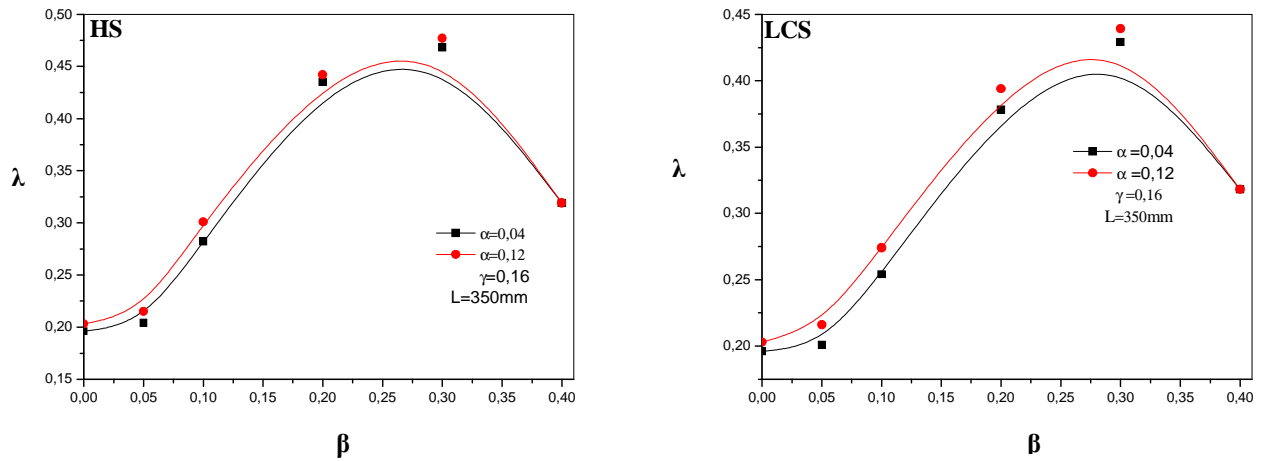


Figure III.10. Variation de λ en fonction β pour différentes valeurs de α ($l=350\text{mm}$).

- Pour $l=700\text{mm}$ avec la variation de α

Considérant les figures III.10, III.11 et III.12, nous pouvons dire que le paramètre géométrique α n'a pas d'effet significatif sur la valeur de λ qui varie en fonction du paramètre géométrique β .

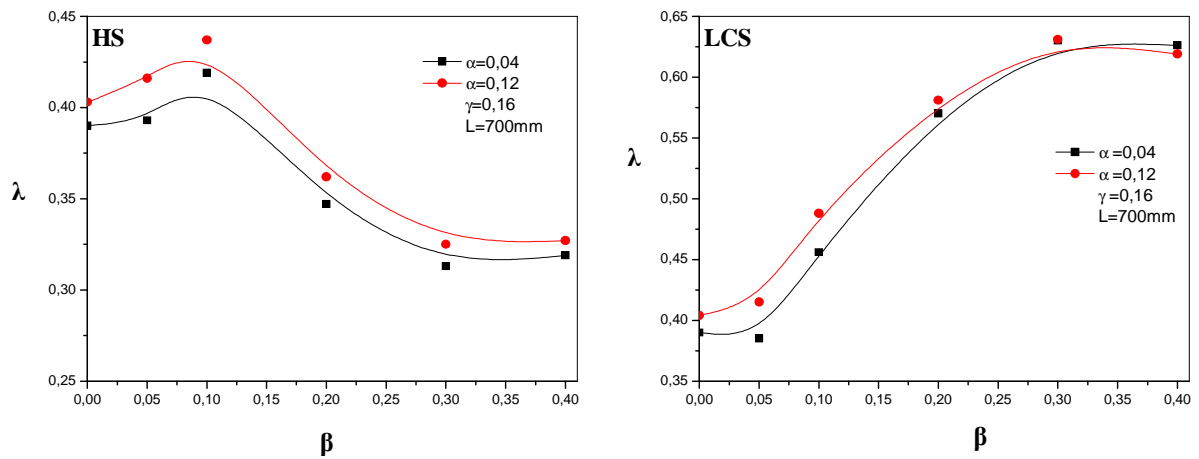


Figure III.11. Variation de λ en fonction β pour différentes valeurs de α ($l=700\text{mm}$).

- Pour $l=1400\text{mm}$ avec la variation de α

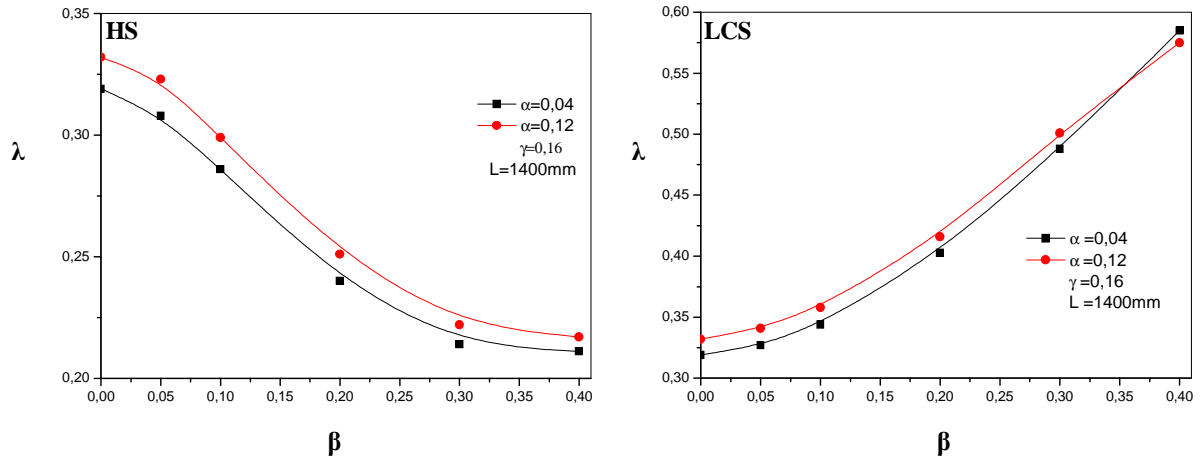


Figure III.12. Variation de λ en fonction β pour différentes valeurs de α ($l=1400\text{mm}$).

❖ Effet du rapport géométrique γ pour différentes longueurs de colonne

- Cas de $\alpha=0,04$

Sur la figure III.13, nous montrons l'influence du rapport géométrique γ sur le paramètre de flambage λ pour les différentes longueurs de colonnes Hat section et Lipped channel section. Dans ce cas, les dimensions considérées fixes, à savoir $b_s=2\text{mm}$ et $b_1=10\text{mm}$ (notées respectivement $\alpha = 0,04$ et $\beta = 0,2$), alors que le rapport géométrique γ varie en fonction de la profondeur de l'entaille h_s ($h_s=0, 1,25, 2,5, 5, 10, 20\text{mm}$).

Il est à constater que lorsque la longueur l est égale 350mm , le paramètre de flambage λ augmente rapidement en fonction de paramètre géométrique γ jusqu'à la valeur de $0,2$ ($h_s= 5\text{mm}$), à partir de laquelle, cette variation devient presque stable. Alors que pour le cas de Lipped channel section, l'augmentation du paramètre de flambage λ est linéaire. La valeur maximale du flambement est de l'ordre de 36% par rapport à celle du premier cas. Dans le cas où la longueur $l=700\text{mm}$, on constate que la valeur du paramètre de flambage reste constante (variation stable). La même remarque reste valable pour le cas de Lipped channel section.

En ce qui concerne la longueur $l=1400\text{mm}$, nous remarquons que la variation est stable (valeur de λ reste constante), pour les deux cas (Hat section et Lipped channel section).

L'augmentation de la longueur l de la colonne Hat section produit la réduction du paramètre de flambage λ . Pour la colonne Lipped channel, la valeur maximale est atteinte lorsque $l=700\text{mm}$ et c'est la même pour $l=350\text{mm}$ et $\gamma=0.8$.

En outre, l'effet de la section est mis en évidence pour les mêmes paramètres géométriques, avec une longueur $l=350\text{mm}$, le paramètre λ augmente de 36% pour le Lipped channel en comparaison avec le Hat Section, tandis que pour $l=700\text{mm}$, l'augmentation est de 76%. Pour $l=1400\text{mm}$, la valeur de λ augmente de 73%.

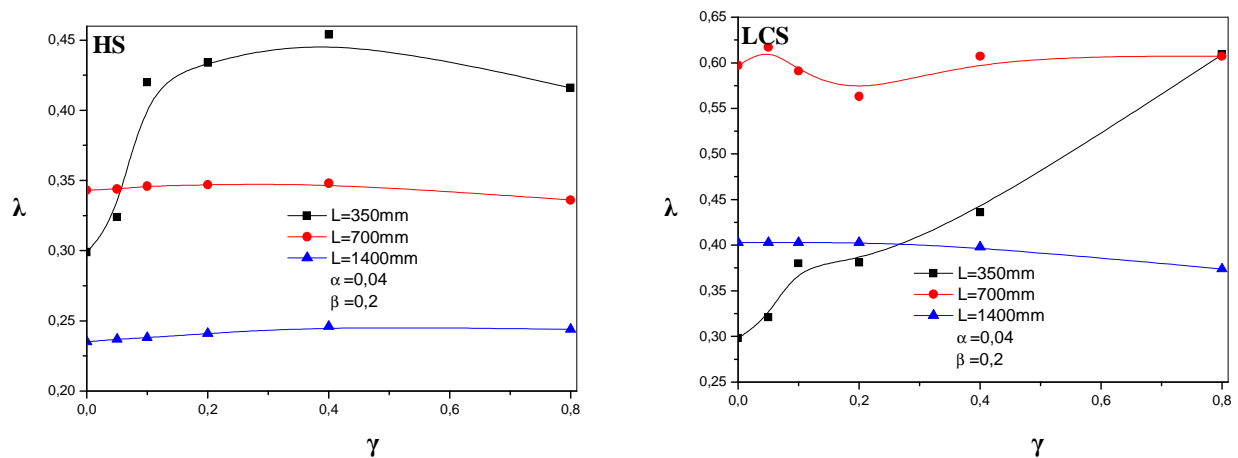


Figure III.13. Variation de λ en fonction γ pour différentes longueurs de l .

- **Cas de $\alpha=0.12$**

Lorsque la longueur de la colonne $l=350\text{mm}$, on constate que le paramètre de flambage λ augmente rapidement en fonction de paramètres géométriques γ jusqu'à une valeur de 0.1 ($h_s=2.5\text{mm}$), à partir de cette valeur, cette variation devient stable, (la valeur le paramètre de flambage λ devient constante). Alors que pour le cas Lipped channel section, la variation augmente rapidement jusqu'à la valeur ($\gamma=0.1$) puis devient linéaire.

Pour $l=700\text{mm}$, on constate que l'augmentation du paramètre de flambage λ varie d'une façon linéaire. Alors que pour le cas de Lipped channel section, la variation est au début stable jusqu'à ce que la valeur du paramètre $\gamma=0.2$ ($h_s=5\text{mm}$) puis elle augmente d'une façon linéaire.

Lorsque la longueur passe du simple au double ($l=1400\text{mm}$), la variation du paramètre de flambage λ augmente d'une façon linéaire pour le cas du Hat Section et elle est quasi-stable dans le deuxième cas.

En ce qui concerne la colonne Hat section, l'augmentation de la longueur de la colonne l produit la réduction du paramètre de flambage λ . Pour la colonne Lipped channel, la valeur maximale est atteinte lorsque $l=700\text{mm}$.

Par ailleurs, l'effet de la section est mis en évidence pour les mêmes paramètres géométriques, pour $l=350\text{mm}$ le paramètre de flambage λ augmente de 30% pour le Lipped channel en comparaison avec le Hat Section, tandis que pour $l=700\text{mm}$ et $l=1400\text{mm}$, l'augmentation est de 72%, 46% respectivement.

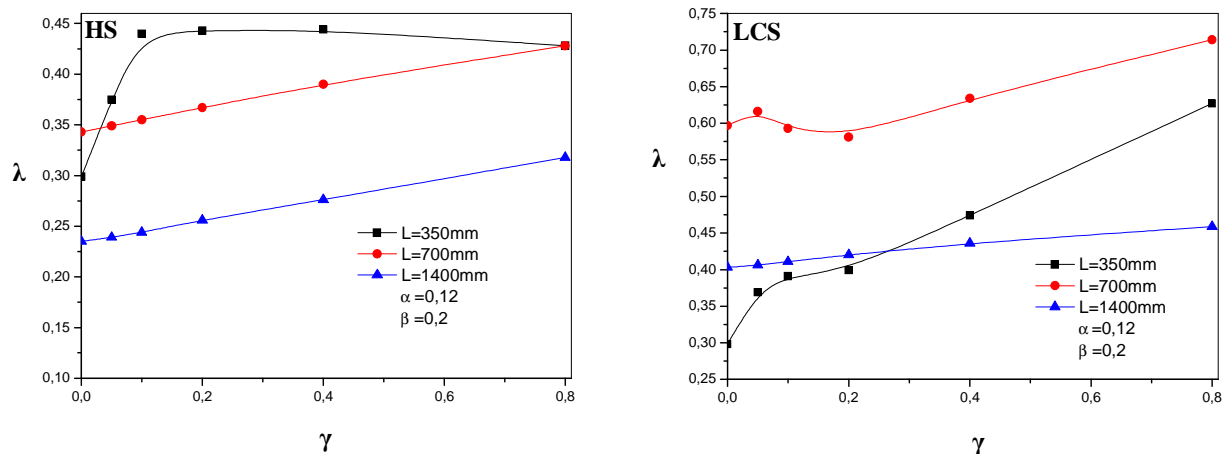


Figure III.14. Variation de λ en fonction β pour différentes longueurs l .

Les figures III.15, III.16, et III.17, montrent l'influence de la variation du paramètre géométrique α sur le paramètre de flambage λ en fonction du paramètre géométrique γ pour les différentes longueurs de colonnes Hat Section et Lipped channel Section.

Pour $l=350\text{mm}$, on constate que l'effet est négligeable (la variation est de l'ordre de 0.02), pour les deux types de colonnes.

Par contre pour $l=700\text{mm}$, l'effet du paramètre géométrique α sur la valeur du paramètre de flambage λ augmente en fonction de l'augmentation de la valeur du paramètre γ .

Pour le cas de Lipped channel section, la variation ne devient considérable qu'à partir de la valeur de $\gamma=0.1$.

Alors que pour le cas de $l=1400\text{mm}$, l'effet du paramètre α sur la valeur du paramètre de flambage λ est important en fonction de l'augmentation du paramètre γ . La même remarque est signalée pour le cas de Lipped channel section.

• Cas de $l=350\text{mm}$ avec la variation de α

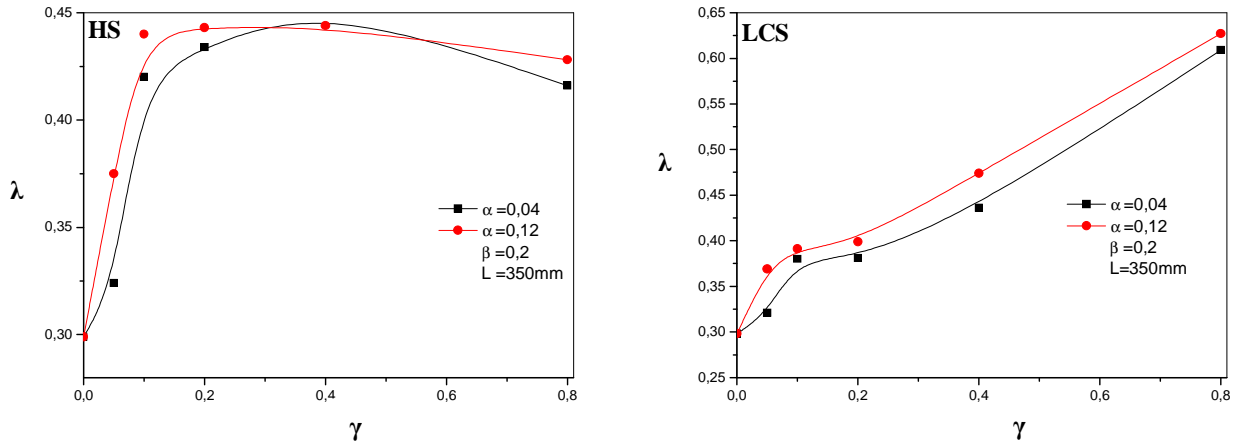


Figure III.15. Variation de λ en fonction γ pour différentes valeurs de α ($l=350\text{mm}$).

• Cas de $l=700\text{mm}$ avec la variation de α

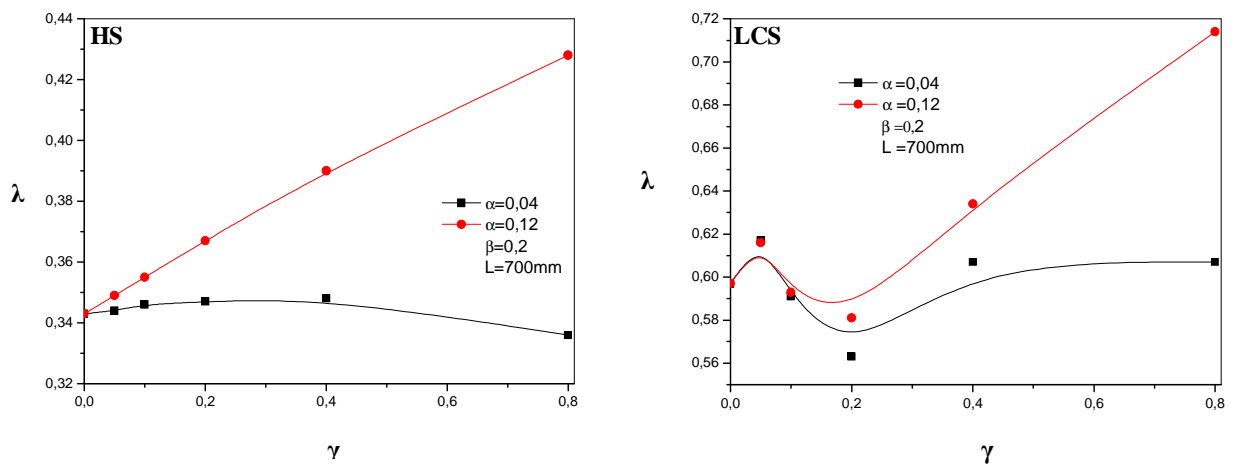


Figure III.16. Variation de λ en fonction γ pour différentes valeurs de α ($l=700\text{mm}$).

- Cas de $l=1400\text{mm}$ avec la variation de α

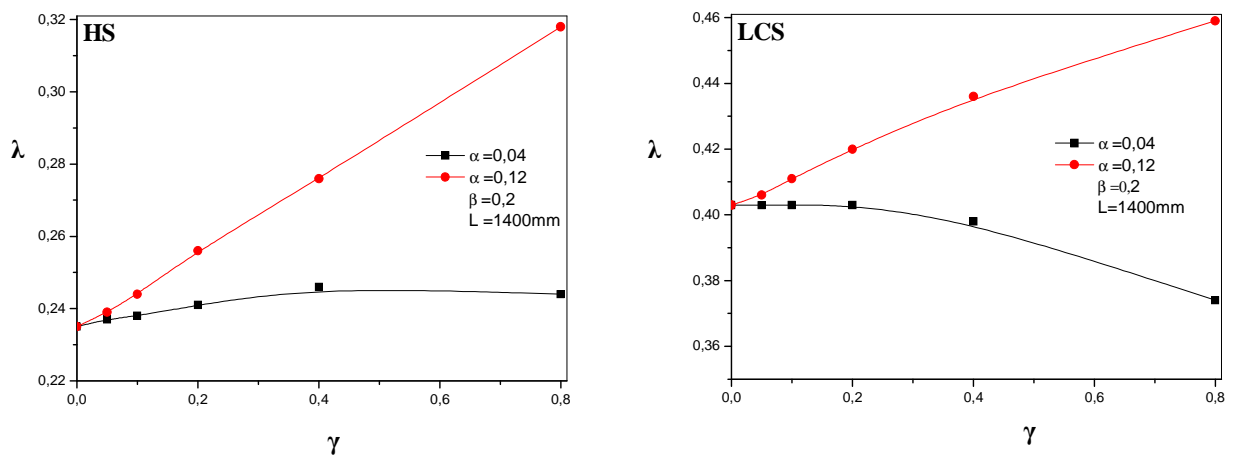


Figure III.17. Variation de λ en fonction γ pour différentes valeurs de α ($l=1400\text{mm}$).

III.2.1.2. Influence de l'épaisseur e sur le paramètre du flambement λ

Les figures III.18, III.19, et III.20, indiquent l'évolution du paramètre du flambage λ en fonction de l'épaisseur de la colonne e pour différentes sections de colonne (Hat section et lipped channel section). Dans ce cas, les dimensions α , β et γ sont considérées fixes, et seule l'épaisseur est variable $e = (0,125, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1, 1,5, 2, 3, 4 \text{ mm})$.

Lorsque la longueur de la colonne $l=350\text{mm}$, on constate que le paramètre de flambage λ augmente rapidement en fonction de l'augmentation de l'épaisseur e jusqu'à la valeur de 1 mm, à partir de laquelle cette augmentation devient linéaire et lente. Ceci indique que l'effet du flambement se réduit en augmentant l'épaisseur de la colonne.

Alors que pour le cas Lipped channel section, l'augmentation du paramètre de flambage est linéaire. La valeur maximale du flambement est de l'ordre de 43% en comparaison avec le premier cas.

Il est à constater que le paramètre de flambage augmente rapidement en fonction de l'épaisseur jusqu'à la valeur de 0,8 mm ($l=700\text{mm}$). Au-delà de cette valeur, l'augmentation devient lente et linéaire. Par contre pour la colonne Lipped Channel section, l'augmentation devient moins significative à partir de la valeur de 2mm. La valeur maximale de flambement dans ce cas dépasse 73%.

Pour la longueur $l=1400\text{mm}$, la courbe illustre trois stades de la variation du rapport du flambement λ en fonction de l'augmentation de l'épaisseur (e) à savoir rapide entre 0.2 et 0.4 mm linéaire entre 0.4 et 3mm et stable du 3 à 4mm. Dans ce dernier stade, l'épaisseur n'a pas d'effet sur λ .

La même constatation a été faite pour le cas de Lipped channel section avec les valeurs de 0.2 à 0.6mm (augmentation rapide), 0.6 à 2 mm (linéaire) et de 2 à 4 mm (stable).

Il est à noter que la valeur maximale du flambement est la même pour les deux sections, autrement dit, la géométrie de la section n'a pas un effet à signaler.

- Cas de $l=350\text{mm}$

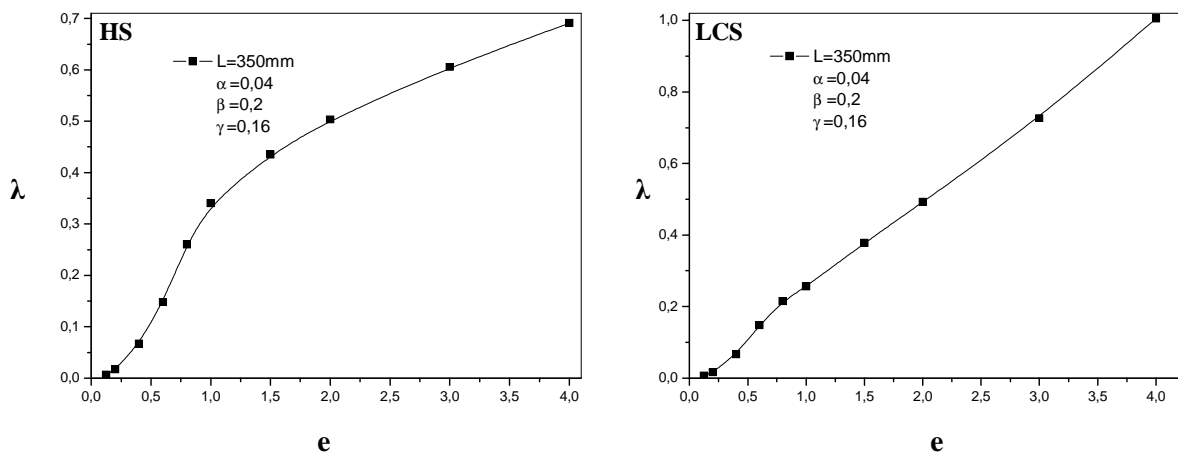


Figure III.18. Variation de λ en fonction de e pour $l=350\text{mm}$.

- Cas de $l=700\text{mm}$

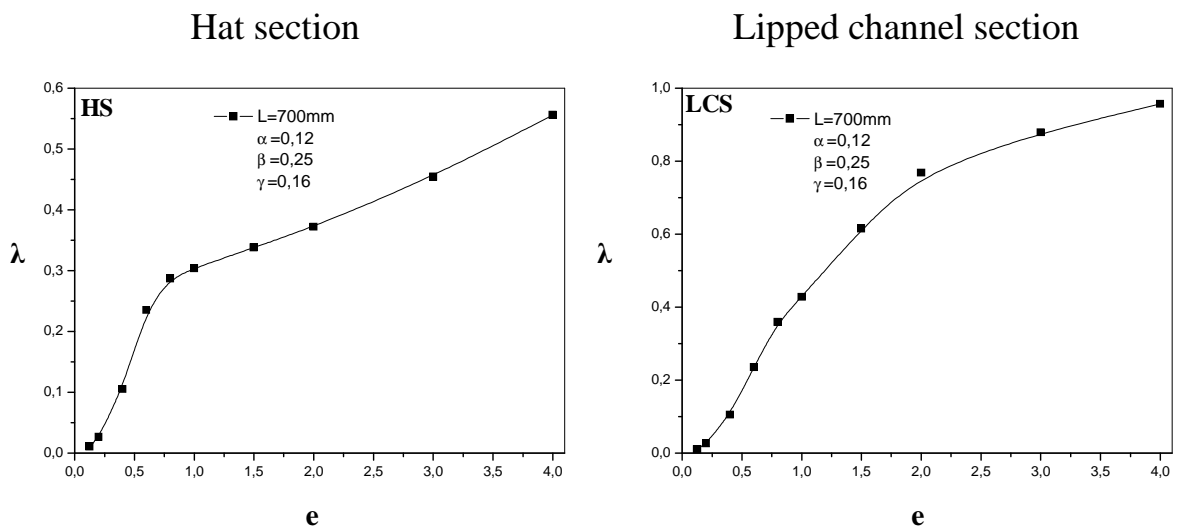


Figure III.19. Variation de λ en fonction de e pour $l=700\text{mm}$.

- Cas de $l=1400\text{mm}$

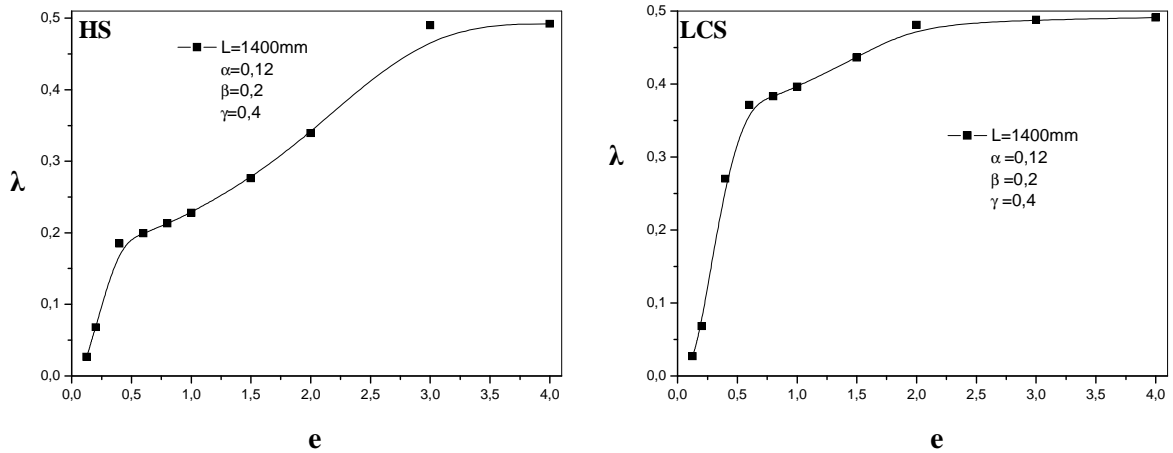


Figure III.20. Variation de λ en fonction de e pour $l=1400\text{mm}$.

Pour mieux illustrer les effets jumelés de l'épaisseur et la longueur de la colonne, nous avons tracé sur la figure III.21, pour les paramètres géométriques.

- L'évolution de λ en fonction de l'épaisseur de la colonne.

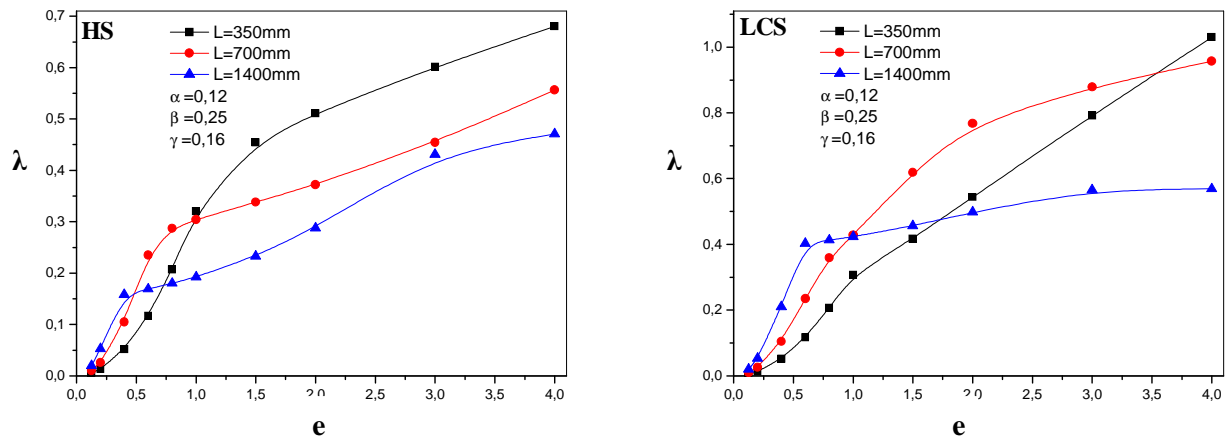


Figure III.21. Variation de λ en fonction de e avec la variation de l

Au-delà de $e=1\text{mm}$, la colonne de longueur faible présente une résistance meilleure en comparaison avec les colonnes Hat section de longueur $l=700\text{mm}$ et 1400mm . Un comportement inverse est montré pour le Lipped channel section. La bonne résistance est obtenue pour la colonne de longueur moyenne ($l=700\text{mm}$).

III.2.2. Cas du composite GFPP

III.2.2.1. Influence de l'orientation des fibres de la colonne sur le paramètre du flambement λ

Les Figures III.22 et III.23 montrent l'effet de l'orientation des fibres pour un système symétrique et antisymétrique, respectivement de la colonne en Hat section et Liped channel section. Il est clair que le paramètre du flambement augmente en fonction de l'angle θ jusqu'à la valeur maximale obtenue à 45° . A partir de cette dernière, la contrainte du flambement décroît. Il est à signaler qu'aucune différence n'est apparue entre les colonnes symétrique et antisymétrique. A cet effet, dans ce qui suit, nous procédons à l'analyse que des colonnes en composites symétriques.

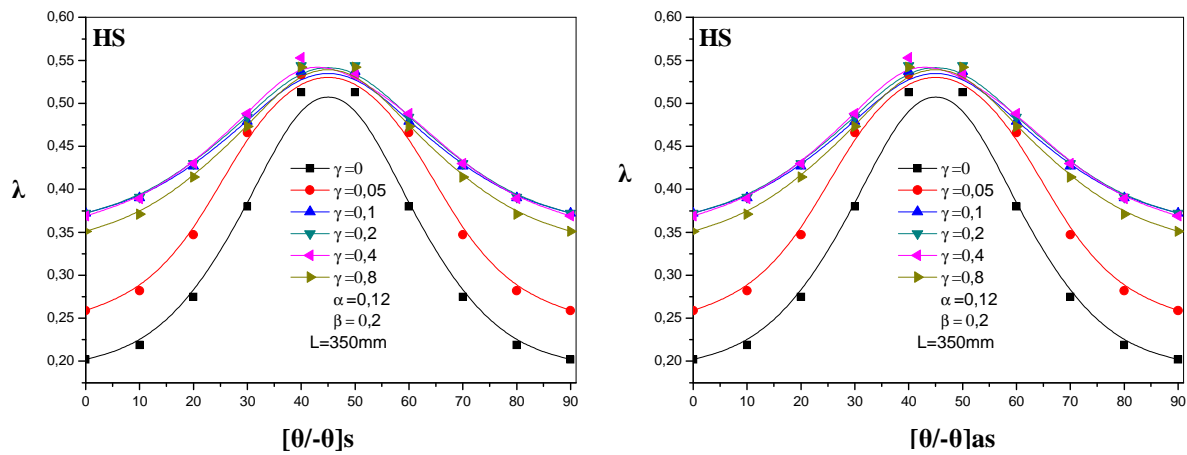


Figure III.22. Comparaison entre une colonne à composite symétrique et antisymétrique (Hat-section).

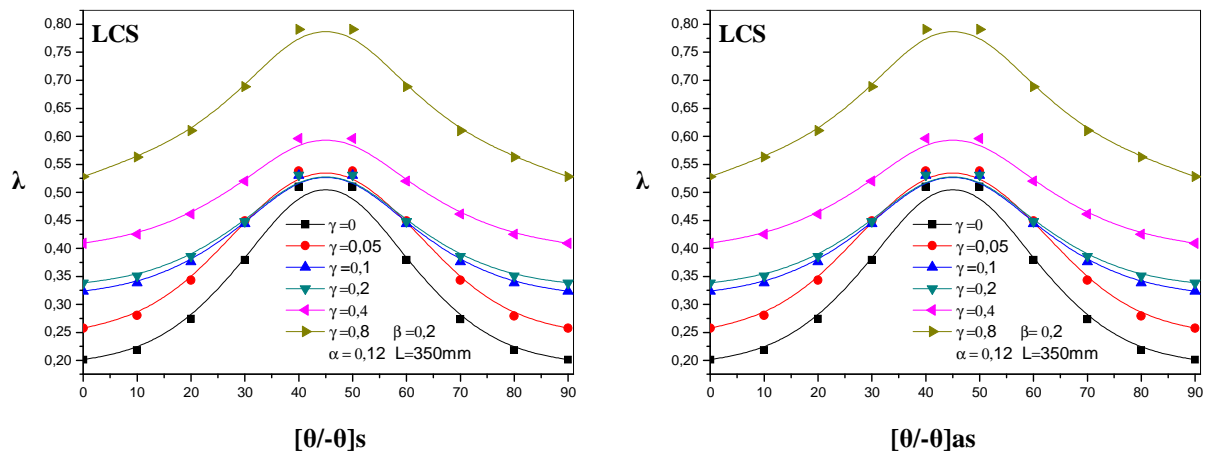


Figure III.23. Comparaison entre une colonne à composite symétrique et antisymétrique (Lipped Channel Section).

III.2.2.2. Influence de l'orientation des plis de la colonne sur le paramètre du flambement λ

III.2.2.2.1. Effet du rapport géométrique α pour différentes longueurs de colonne

- Cas de $l=350\text{mm}$

Sur les figures III.24, III.25 et III.26, nous montrons l'évolution du paramètre du flambage λ en fonction de l'orientation des plis symétriquement orientés pour différentes longueurs de colonne Hat section et lipped channel section. Dans ce cas, les dimensions sont considérés fixes à savoir $b_1=12.5\text{mm}$ et $h_s=4\text{mm}$ notées respectivement $\beta=0.25$ et $\gamma=0.16$. Il est à noter que le paramètre λ augmente proportionnellement avec l'angle des plis θ jusqu'à une valeur maximale obtenue à 45° quelque soit le paramètre géométrique α ($b_s=0, 1, 2, 6, 12, 18\text{mm}$).

La résistance est maximale pour une longueur $l=350\text{mm}$, lorsque le paramètre $\alpha=0.36$ ($b_s=18\text{mm}$) alors que la valeur minimale est obtenue pour $\alpha=0$ (sans entaille). Cette remarque est notée pour les deux sections. Lorsque la longueur de la colonne passe du simple au double, la constatation reste valable pour la colonne Hat section quelque soit la dimension b_s . Un effet inverse est signalé dans le cas de la colonne lipped channel section. La valeur maximale est obtenue pour une section sans entaille, ainsi que l'augmentation de la résistance de la colonne est de l'ordre de 40%. En ce qui concerne la colonne Hat section, l'augmentation de la longueur l produit la réduction du paramètre du flambage λ , par contre, pour la colonne lipped channel section, la résistance maximale est marquée lorsque la longueur $l=700\text{mm}$.

Par ailleurs, l'effet de la section est mis en évidence pour les mêmes paramètres géométriques. Lorsque les longueurs $l=350\text{mm}$ et 1400mm , le paramètre du flambage est quasiment identique, et la géométrie de la section n'a pas un effet significatif, tandis que, pour une longueur de 700mm , le paramètre du flambage passe du simple au double dans la section lipped channel en comparaison avec Hat-section.

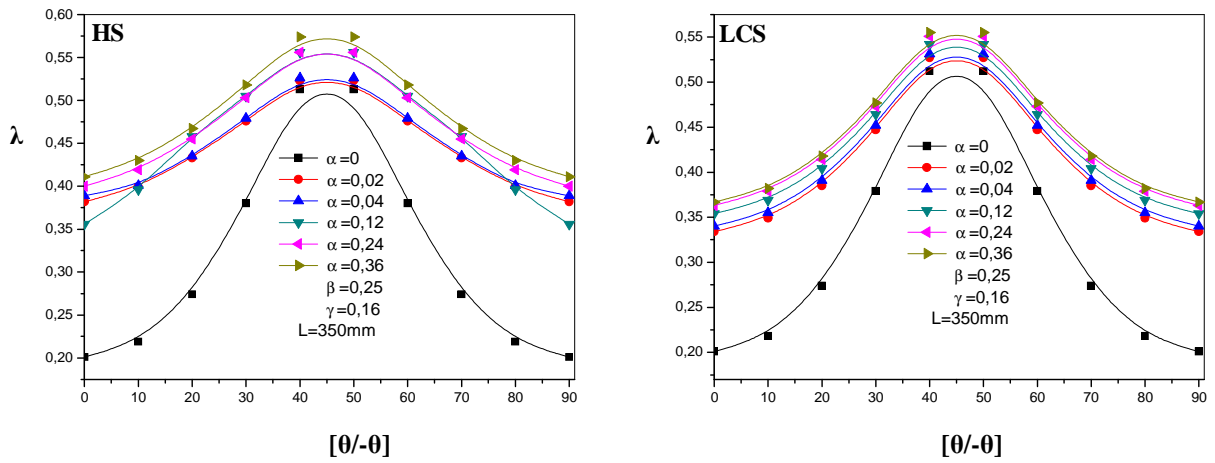


Figure III.24. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de α ($l=350\text{mm}$).

Cas de $l=700\text{mm}$

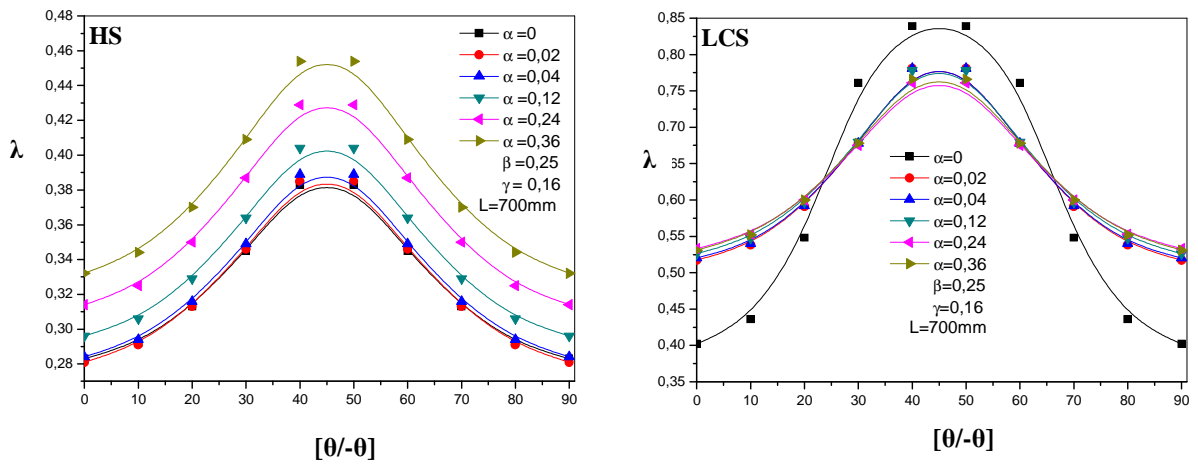


Figure III.25. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de α ($l=700\text{mm}$).

- Cas de $l=1400\text{mm}$

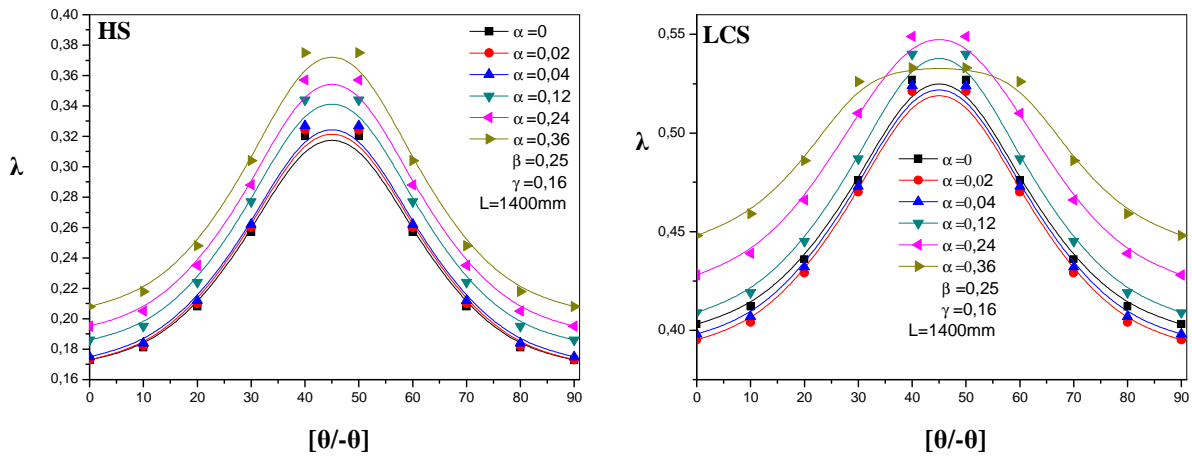


Figure III.26. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de α ($l=1400\text{mm}$).

III.2.2.2.2. Effet du rapport géométrique β pour différentes longueurs de colonne

Prenons maintenant les figures III.27, III.28 et III.29, nous pouvons dire que les allures montrent l'évolution du paramètre du flambage λ en fonction de l'orientation des plis symétriquement orientés pour différentes longueurs des colonnes Hat section et Lipped channel section.

Dans ce cas on précise que les dimensions sont considérées constantes à savoir $b_s=2\text{mm}$ et $h_s=4\text{mm}$, notées respectivement $\alpha=0.04$ et $\gamma=0.16$, seul le paramètre β varie, afin de montrer l'effet de la dimension b_1 sur l'évolution de λ .

Il est à signaler que le paramètre λ augmente proportionnellement avec l'angle θ des plis jusqu'à une valeur maximale obtenue à 45° quelque soit β ($b_1=0, 2.5, 5, 10, 15, 20\text{mm}$).

La résistante est maximale pour une longueur $l=350\text{mm}$, lorsque $\beta=0.4$ ($b_1=20\text{mm}$) alors qu'elle est minimale pour $\beta=0.05$, cette remarque est notée pour les deux sections. Dans ce cas, la résistance de la structure au flambage pour les deux sections est similaire.

Alors que pour une longueur $l=700\text{mm}$, la résistante est maximale lorsque le paramètre $\beta=0$ ($b_1=0\text{mm}$) et la valeur minimale est obtenue pour $\beta=0.3$ ($b_1=15\text{mm}$), un effet inverse est signalé dans le cas de la colonne Lipped channel section. Cette dernière a une bonne tenue en comparaison avec la colonne Hat section, donc dans les conditions de

dimensionnement adéquates, il est évident de choisir une colonne Lipped channel avec une dimension de $b_1=15\text{mm}$, symétrique, orientée à 45° .

Pour $l=1400\text{mm}$, la résistante est maximale lorsque le paramètre $\beta=0.05$ ($b_1=2.5\text{mm}$) alors qu'elle est minimale pour $\beta=0.4$ ($b_1=20\text{mm}$). Pour le cas de la colonne Lipped channel section, la résistante est maximale lorsque le paramètre $\beta=0.4$ ($b_1=20\text{mm}$) et minimale lorsque $\beta=0$ ($b_1=0\text{mm}$).

La valeur maximale est obtenue pour une section où $\beta=0$ ($b_1=0\text{mm}$), ainsi que l'augmentation de la résistance de la colonne est de l'ordre de 60%.

Concernant la colonne Hat section, l'augmentation de la longueur l produit la réduction du paramètre du flambage λ , par contre, pour la colonne Lipped channel section, la résistance maximale est constatée lorsque la longueur $l=700\text{mm}$.

De plus, l'effet de la section est mis en évidence pour les mêmes paramètres géométriques. Lorsque la longueur $l=350\text{mm}$, le paramètre du flambage est quasiment identique, et la géométrie de la section n'a pas un effet significatif. Par contre, pour une longueur de 700mm ou de $l=1400\text{mm}$ le paramètre du flambage s'amplifie de 50% dans la section Lipped channel en comparaison avec Hat-section.

- Cas de $\alpha = 0.04$ et $l = 350\text{mm}$

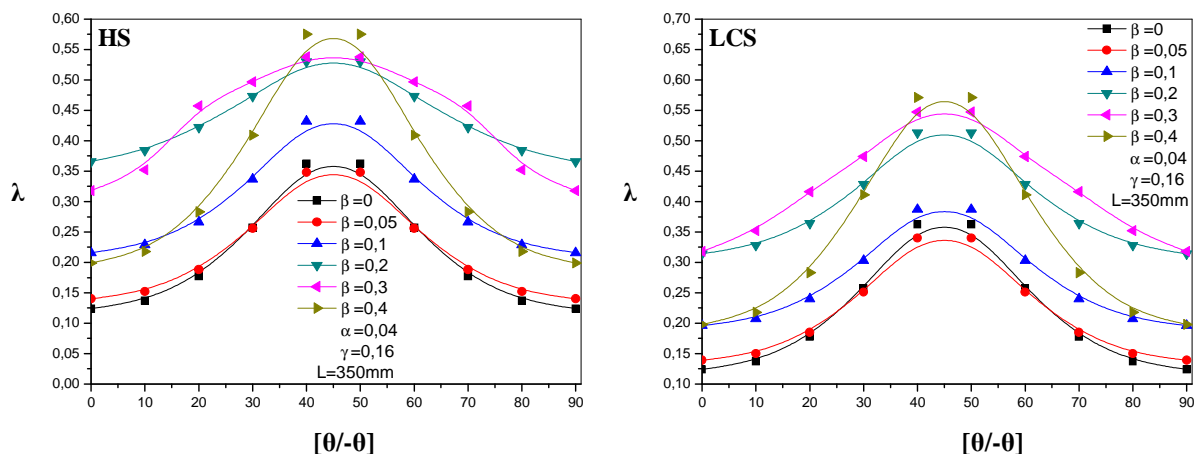


Figure III.27. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=350\text{mm}$).

• Cas de $\alpha = 0.04$ et $l = 700\text{mm}$

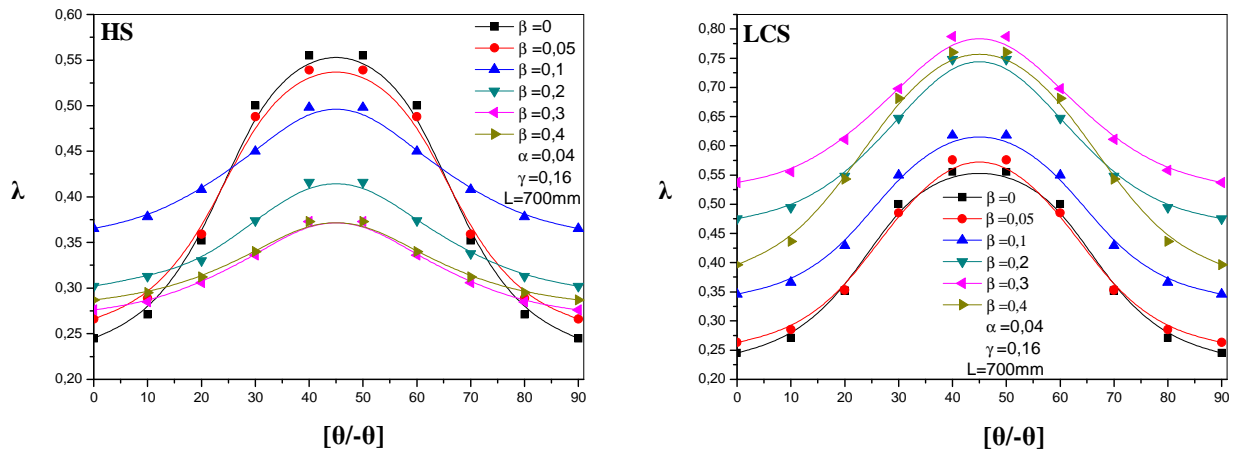


Figure III.28. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=700\text{mm}$).

• Cas de $\alpha = 0.04$ et $l = 1400\text{mm}$

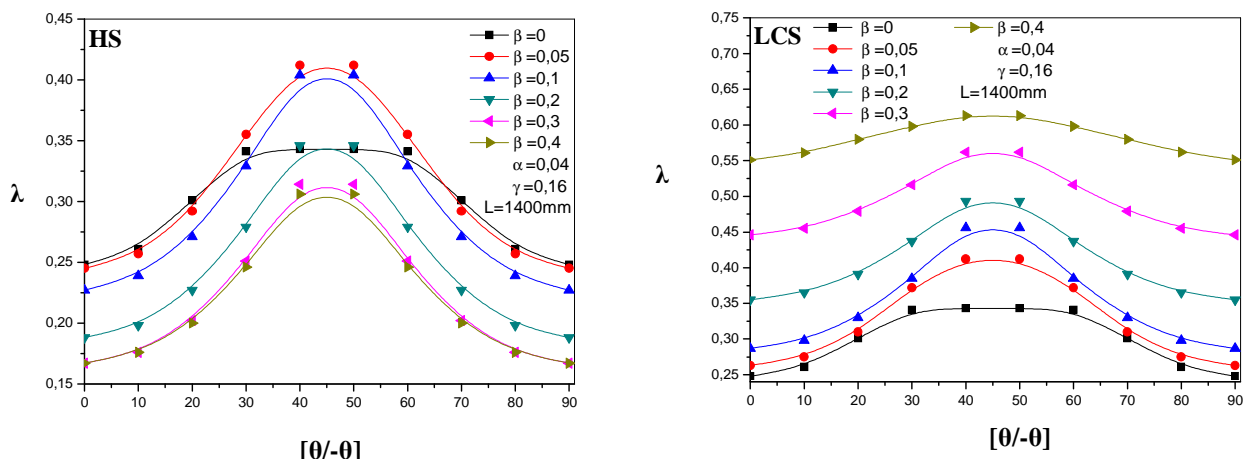


Figure III.29. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=1400\text{mm}$).

De même, pour $\alpha=0.12$ les figures III.30, III.31 et III.32, montrent l'évolution du paramètre λ en fonction de l'orientation des plis symétriquement orientés pour différentes longueurs des deux sections. Dans ce cas, les dimensions sont considérées constantes à savoir $b_s=6\text{mm}$ et $h_s=4\text{mm}$, notées respectivement $\alpha = 0.12$ et $\gamma = 0.16$.

Nous pouvons dire que le paramètre λ augmente proportionnellement avec l'angle des plis θ jusqu'à une valeur maximale obtenue à 45° quelque soit le paramètre géométrique β ($b_1 = 0, 2.5, 5, 10, 15, 20$ mm).

En effet, la résistance pour une longueur $l = 350$ mm, est maximale à 45° lorsque le paramètre $\beta = 0.4$ ($b_1 = 20$ mm) alors qu'elle est minimale pour $\beta = 0.05$; cette remarque est notée pour les deux sections. Les valeurs de λ sont quasi-stables.

Pour une longueur $l = 700$ mm, la résistance est maximale lorsque le paramètre $\beta = 0$ ($b_1 = 0$ mm) alors que la valeur minimale est obtenue pour $\beta = 0.4$ ($b_1 = 20$ mm), un effet inverse est signalé dans le cas de la colonne lipped channel section.

Pour $l = 1400$ mm, la résistance est maximale lorsque le paramètre $\beta = 0.05$ ($b_1 = 2.5$ mm) alors que la valeur minimale est obtenue pour $\beta = 0.4$ ($b_1 = 20$ mm), dans le cas de la colonne lipped channel section l'effet est inverse. Il est à constater que la dimension b_1 a un effet positif sur les colonnes lipped channel et négatif sur les colonnes Hat section, lorsqu'elle croît. Ceci est vrai pour les longueurs de colonnes 700mm et 1400mm.

La valeur maximale est obtenue pour une section où $b_1 = 20$ mm, et la résistance de la colonne se trouve augmentée de 75%.

Par rapport à la colonne Hat section, l'augmentation de la longueur de 350mm à 700mm a aucun effet sur λ , à partir de 700mm l'augmentation de la longueur produit la réduction du paramètre du flambage λ , par contre, pour la colonne lipped channel section, la résistance maximale est constatée lorsque la longueur $l = 700$ mm.

Par ailleurs, l'effet de la section est mis en évidence pour les mêmes paramètres géométriques. Lorsque la longueur $l = 350$ mm, le paramètre du flambage est quasiment identique, et la géométrie de la section n'a pas un effet remarquable. Tandis que, pour une longueur de 700mm ou de 1400mm, le paramètre du flambage augmente de 50% dans la section lipped channel en comparaison avec Hat-section.

Il est à signaler qu'aucune différence n'est apparue entre les résultats obtenues pour un $\alpha = 0.12$ et $\alpha = 0.04$, le paramètre du flambage est quasiment identique (aucun effet du rapport α sur le paramètre du flambage). Donc pour une raison économique, il vaut mieux prendre $\alpha = 0.04$.

• Cas de $\alpha = 0.12$ et $l = 350\text{mm}$

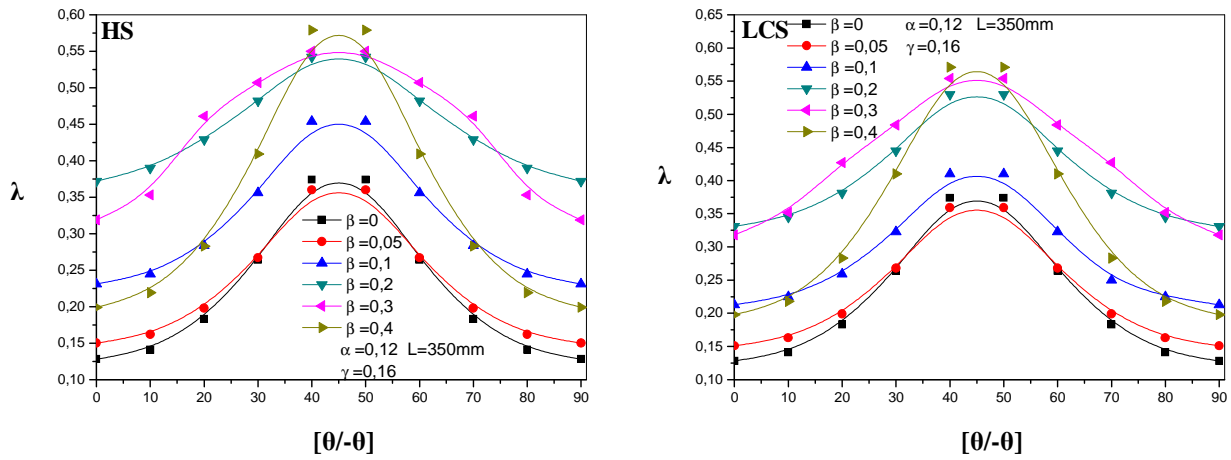


Figure III.30. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=350\text{mm}$).

• Cas de $\alpha = 0.12$ et $l = 700\text{mm}$

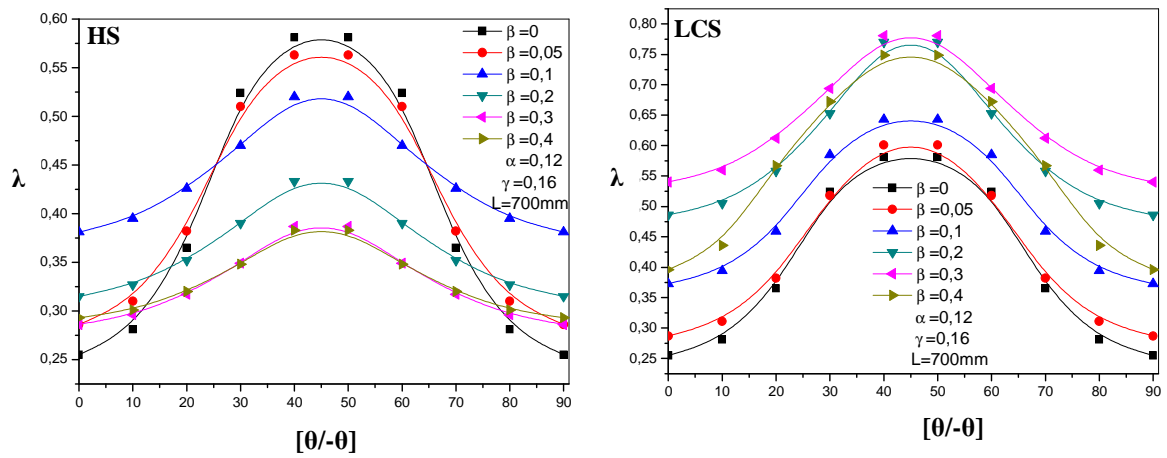


Figure III.31. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=700\text{mm}$).

• Cas de $\alpha = 0.12$ et $l = 1400\text{mm}$

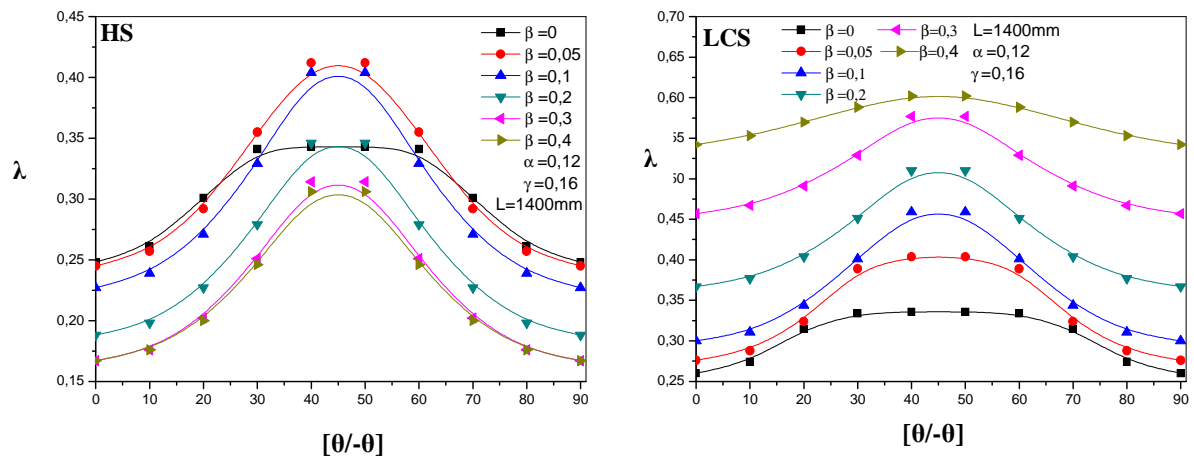


Figure III.32. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de β ($l=1400\text{mm}$).

III.2.2.2.3. Effet du rapport géométrique γ pour différentes longueurs de colonne

Tout en fixant les paramètres géométriques $\beta = 0.2$ et $\alpha = 0.12$, nous montrons l'effet du paramètre γ , c'est-à-dire la dimension h_s .

Sur les figures III.33, III.34 et III.35, nous montrons l'évolution du paramètre du flambage λ en fonction de l'orientation des plis symétriquement orientés pour différentes longueurs de colonne Hat section et Lipped channel section. Dans ce cas, les dimensions sont considérées fixes à savoir $b_1=10\text{mm}$ et $b_s= 6\text{mm}$ notées respectivement $\beta = 0.2$ et $\alpha = 0.12$. Nous pouvons dire que quelque soit le paramètre géométrique γ ($h_s= 0, 1.25, 2.5, 5, 10, 20\text{mm}$), le paramètre λ augmente proportionnellement avec l'angle des plis θ jusqu' à une valeur maximale obtenue à 45° .

La résistante pour une longueur $l=350\text{mm}$, est maximale lorsque le paramètre $\gamma=0.4$ ($h_s=10\text{mm}$) pour la colonne Hat section et $\gamma=0.8$ ($h_s=20\text{mm}$) dans le cas de la colonne Lipped channel section, alors que pour les deux sections la valeur minimale est obtenue pour $\gamma=0$ (sans entaille).Ceci montre que la profondeur de l'entaille provoque un effet sur le flambage des colonnes.

Dans le cas ou la longueur $l=700\text{mm}$ ou 1400mm , la résistante est maximale lorsque le paramètre $\gamma=0.8$ ($h_s=20\text{mm}$) et elle est minimale lorsque $\gamma=0$ (sans entaille). Cette constatation reste valable dans le cas de la colonne Lipped channel section pour $l=700\text{mm}$

alors que pour une longueur de 1400mm la résistante est maximale lorsque le paramètre $\gamma=0.2$ ($h_s=5\text{mm}$) et elle est minimale lorsque $\gamma=0.8$.

La valeur maximale est obtenue pour une section avec une grande entaille $\gamma=0.8$ ($h_s=20\text{mm}$), de même que pour la résistance de la colonne qui se trouve augmentée avec une valeur de 60%.

En ce qui concerne la colonne Hat section, l'augmentation de la longueur l produit la réduction du paramètre du flambage λ , par contre, pour la colonne lipped channel section, la résistance maximale est constatée lorsque la longueur $l=700\text{mm}$.

Par ailleurs, l'effet de la section est mis en évidence pour les mêmes paramètres géométriques. Lorsque les longueurs $l=350\text{mm}$ ou 700mm , le paramètre du flambage augmente de 50% dans la section lipped channel en comparaison avec Hat-section qui est de 20% dans le cas où $l=1400\text{mm}$ (la géométrie de la section a un effet important sur le paramètre λ).

- Cas de $\alpha = 0.12$ et $l = 350\text{mm}$

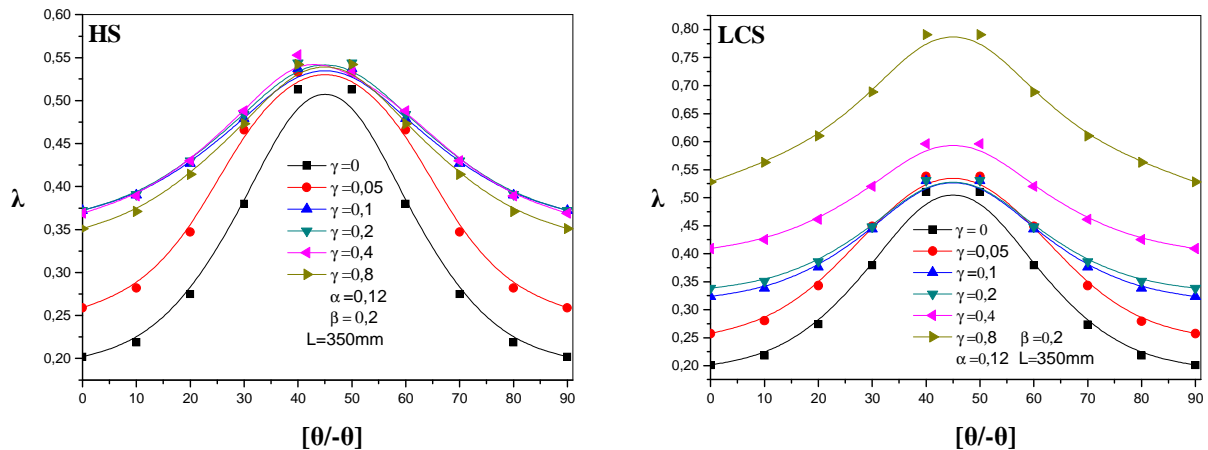


Figure III.33. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=350\text{mm}$).

• Cas de $\alpha = 0.12$ et $l = 700\text{mm}$

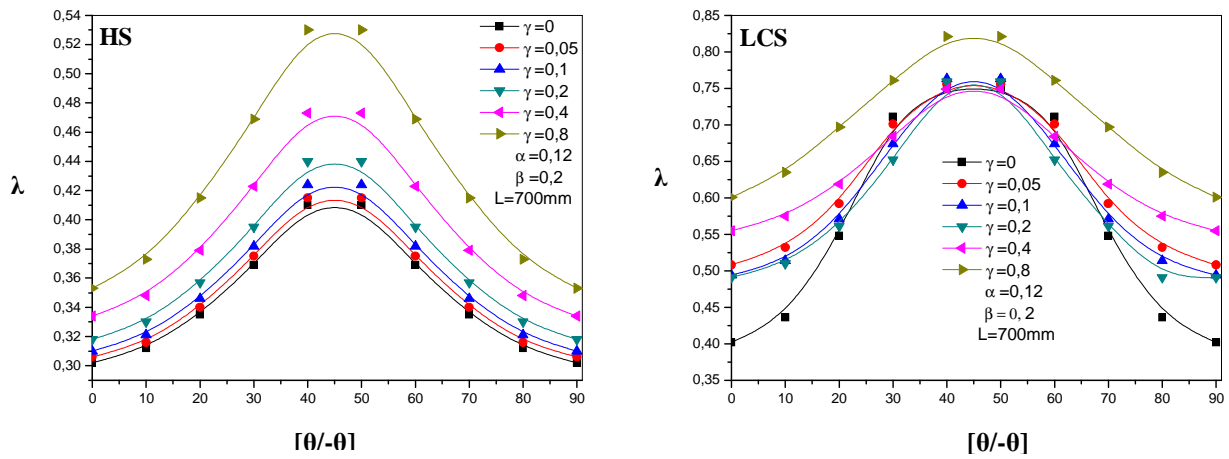


Figure III.34. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=700\text{mm}$).

• Cas de $\alpha = 0.12$ et $l = 1400\text{mm}$

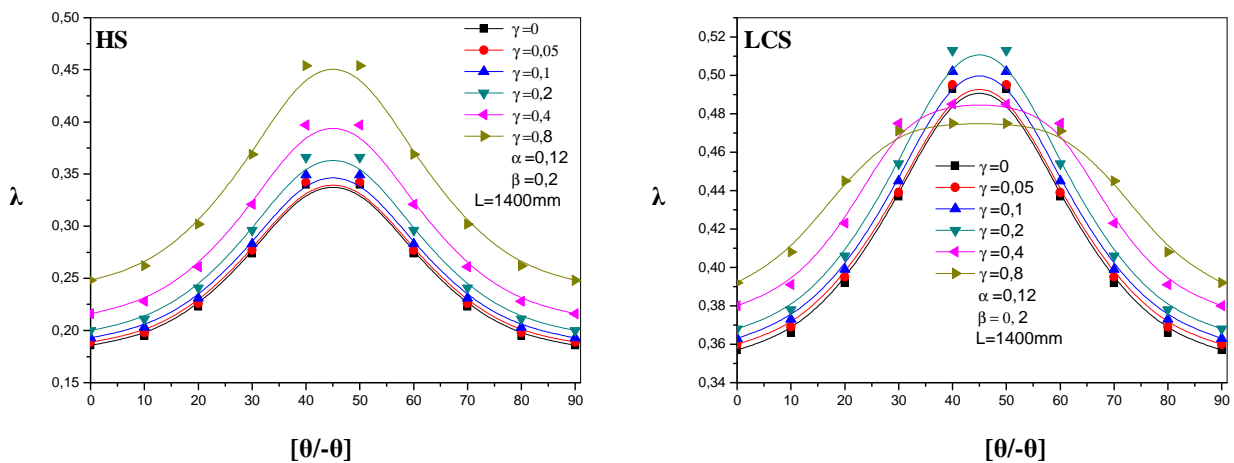


Figure III.35. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=1400\text{mm}$).

De même, pour $\alpha=0.04$ les figures III.36, III.37 et III.38, montrent l'évolution du paramètre du flambage en fonction de l'orientation des plis symétriquement orientés pour différentes longueurs de colonne et différentes sections. Dans ce cas, les dimensions $b_1=10\text{mm}$ et $b_s= 2\text{mm}$ ($\beta =0.2$ et $\alpha = 0.04$) sont considérées constantes. Il est à noter que le paramètre λ

augmente proportionnellement avec l'angle des plis θ jusqu' à une valeur maximale obtenue à 45° quelque soit le paramètre géométrique γ ($h_s = 0, 1.25, 2.5, 5, 10, 20\text{mm}$).

La résistante pour une longueur $l=350\text{mm}$, est maximale lorsque le paramètre $\gamma=0.4$ ($h_s=10\text{mm}$) pour la colonne Hat section et 0.8 ($h_s=20\text{mm}$) dans le cas de la colonne Lipped channel section. Pour les deux sections la valeur minimale est obtenue pour $\gamma = 0$ (sans entaille).

Dans le cas où la longueur $l=700\text{mm}$, la résistante est maximale lorsque $\gamma=0.4$ ($h_s=10\text{mm}$) et elle est minimale lorsque $\gamma= 0$ (sans entaille) pour la colonne Hat section. Alors qu'elle est maximale lorsque $\gamma=0$ et minimale à $\gamma= 0.8$ pour lipped channel section.

Lorsque la longueur est de 1400mm , la résistante est maximale pour $\gamma = 0.8$ et minimale à $\gamma= 0$ (sans entaille). Un effet inverse est signalé dans le cas de la colonne Lipped channel section. La valeur maximale est obtenue pour une section de taille d'entaille importante $\gamma=0.8$ ($h_s=20\text{mm}$).

L'augmentation de la longueur l mène à la réduction du paramètre λ pour les deux types de colonnes.

Par ailleurs, l'effet de la section est mis en accent pour les mêmes paramètres géométriques. Lorsque la longueur $l=350\text{mm}$, le paramètre du flambage augmente de 48% dans la section Lipped channel en comparaison avec Hat-section qui est de 78% dans le cas où $l=700\text{mm}$ alors qu'elle n'augmente que de 36% dans le cas où $l=1400\text{mm}$ dans la section Lipped channel en comparaison avec Hat-section (la géométrie de la section a un effet significatif sur le paramètre du flambage).

Pour l'influence du paramètre α , il est à signaler qu'aucune différence n'est apparente entre les résultats obtenus pour $\alpha =0.12$ et $\alpha =0.04$, et cela pour la longueur $l=350\text{mm}$ des deux types de colonnes (le paramètre du flambage est quasiment identique) par contre on constate que le paramètre du flambage augmente de 9 à 14% avec l'augmentation de α de 0.04 à 0.12 pour $l=700\text{mm}$ et 1400mm et cela pour les deux types de sections analysées.

• Cas de $\alpha = 0.04$ et $l = 350\text{mm}$

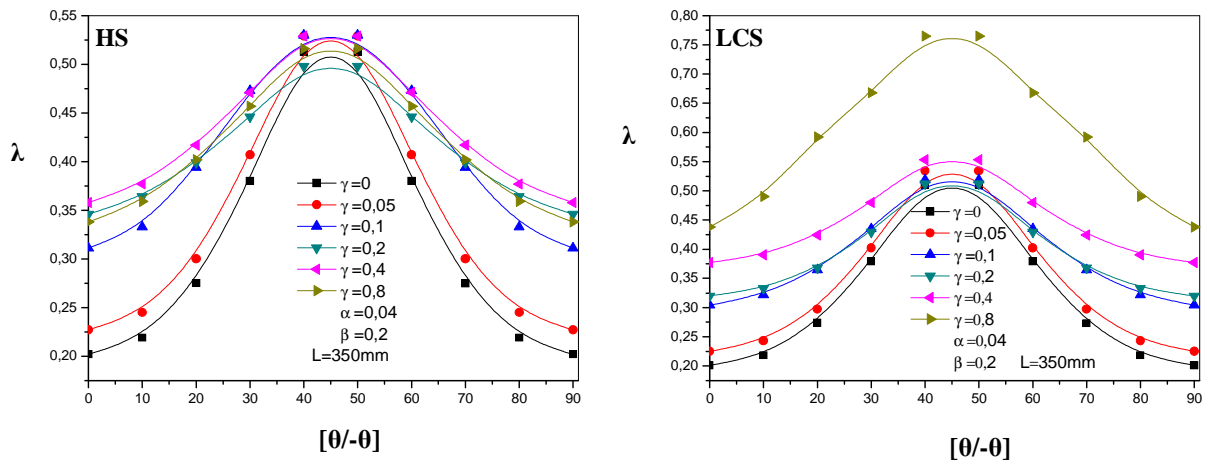


Figure III.36. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=350\text{mm}$).

➤ cas de $\alpha = 0.04$ et $l = 700\text{mm}$

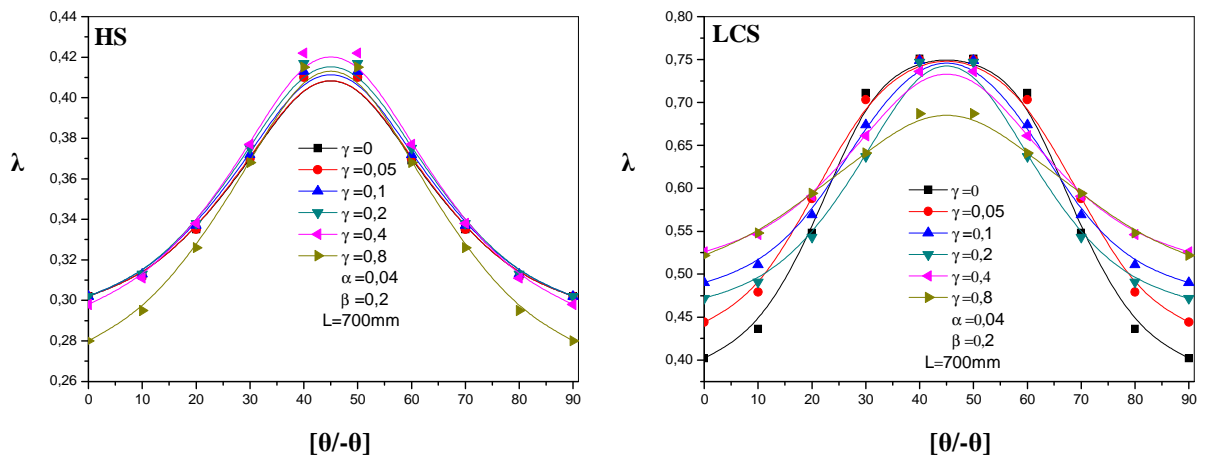


Figure III.37. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=700\text{mm}$).

- Cas de $\alpha = 0.04$ et $l = 1400\text{mm}$

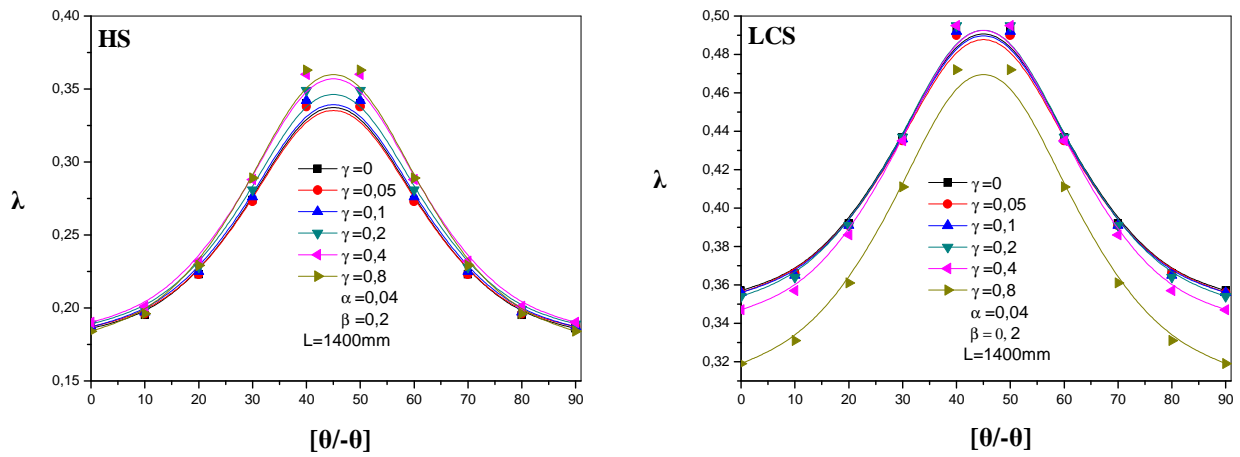


Figure III.38. Variation de λ en fonction θ pour différentes valeurs de γ ($l=1400\text{mm}$).

Conclusion générale

Ce travail a été réalisé dans le but de trouver le rapport entre les sollicitations et le comportement des charpentes en matériaux composites (Hat section et Lipped channel section), en se basant sur la méthode des éléments finis. De plus, l'analyse est faite en présence d'une sollicitation de compression par unité de longueur avec un déplacement imposé.

La synthèse des résultats tirés à partir de l'analyse numérique a permis de dégager les conclusions suivantes :

En ce qui concerne le matériau **AI 2024**.

- Quelque soit le paramètre géométrique α , aucun effet n'est constaté pour les longueurs $l=700$ mm et 1400mm. Pour une longueur $l=350$ mm, l'augmentation du paramètre α a un effet positif sur les deux types de section lorsque $b_1 < 2.5$ mm.
- L'augmentation du paramètre géométrique β a un effet positif sur les colonnes Lipped channel et négatif sur les colonnes Hat section de longueurs de 700mm et 1400mm alors que pour $l=350$ mm, l'effet du paramètre géométrique β est positif jusqu' à la valeur de 0.3.
- L'accroissement du paramètre géométrique γ n'a aucun effet sur les deux types de colonnes de longueurs de 350mm et 1400mm alors que pour $l=700$ mm, l'effet du paramètre géométrique γ est positif sur la colonne Lipped channel.
- Lorsque les paramètres β et γ sont constants, l'augmentation de la longueur de la colonne Hat Section, produit la réduction du paramètre de flambage λ , par contre, pour la colonne Lipped channel, la résistance maximale est constatée pour la longueur $l=700$ mm.
- Lorsque les paramètres α et γ sont constants et β varie entre 0 et 0.15, nous remarquons que la valeur maximale du paramètre de flambement λ pour la colonne Hat Section est atteinte pour une longueur de $l=700$ mm. Alors qu'elle est maximum, pour une longueur de $l=350$ mm lorsque β est situé entre 0.15 et 0.4. Par contre, pour la section Lipped channel, la valeur maximale est atteinte pour une longueur de $l=700$ mm.
- Lorsque les paramètres géométriques α et β sont constants, l'augmentation de la longueur l de la colonne Hat Section produit la réduction du paramètre de flambage λ , pour la colonne Lipped channel, la valeur maximale est atteinte lorsque $l=700$ mm et elle est identique pour $l=350$ mm et $\gamma=0.8$.

- Lorsque les paramètres β et γ sont constants, pour une longueur $l=350\text{mm}$, le paramètre de flambage λ diminue de 10% pour le Lipped channel en comparaison avec le Hat Section. Alors que pour $l=700\text{mm}$, le paramètre de flambage λ augmente de 67%, tandis que pour $l=1400\text{mm}$, l'augmentation est de 90%.
- Lorsque les paramètres géométriques α et γ sont constants, et la longueur $l=350\text{mm}$, le paramètre de flambage λ diminue de 10% pour le Lipped channel en comparaison avec le Hat Section. Alors que pour $l=700\text{mm}$ le paramètre de flambage λ augmente de 100%, tandis que pour $l=1400\text{mm}$, l'augmentation est de 160%.
- Lorsque les paramètres géométriques α et β sont constants, la géométrie de la section a un effet important sur le paramètre du flambage λ quelque soit la longueur de la colonne.
- Pour la longueur de la colonne $l=350\text{mm}$, nous constatons que le paramètre de flambage λ augmente rapidement en fonction de l'augmentation de l'épaisseur e jusqu'à la valeur de 1 mm, à partir de laquelle cette augmentation devient linéaire et lente. En ce qui concerne le cas Lipped channel section, l'augmentation du paramètre de flambage est totalement linéaire.
- Pour $l=700\text{mm}$, le paramètre de flambage augmente rapidement en fonction de l'épaisseur e jusqu'à la valeur de 0.8 mm. Au-delà de cette valeur, l'augmentation devient lente et linéaire. Pour la colonne Lipped Channel section, l'effet de l'augmentation devient moins significatif à partir de la valeur de 2mm.
- Pour la longueur $l=1400\text{mm}$, l'effet du flambement se réduit en augmentant l'épaisseur et cela pour les deux types de sections.

Pour le matériau composite **GFPP (twintex)**, nous dégagons les constatations suivantes :

- L'orientation des fibres des colonnes (symétrique ou antisymétrique) n'a aucun effet sur le paramètre du flambage λ , quelque soit le type de la section et la longueur de la colonne.
- L'orientation des plis θ a un effet significatif sur la charge du flambement λ . Le paramètre du flambage λ augmente proportionnellement avec l'angle des plis θ jusqu'à une valeur maximale obtenue à 45° quelque soit les paramètres géométriques α , β et γ , quelque soit le type de la section et la longueur de la colonne.

- L'augmentation de la longueur de la colonne Hat-section produit la réduction du paramètre du flambage λ , alors que pour la colonne Lipped channel section, sa résistance maximale est constatée pour $l=700\text{mm}$.
- Dans le cas où les paramètres géométriques β et γ sont constants et la longueur de la colonne $l=350\text{mm}$ ou 1400 mm , la géométrie de la section n'a pas un effet significatif sur le paramètre du flambage λ . Ainsi, pour une longueur de 700mm , le paramètre du flambage passe du simple au double dans la section Lipped channel en comparaison avec Hat-section.
- Lorsque les paramètres géométriques α et γ sont constants et la longueur de la colonne $l=350\text{mm}$, la géométrie de la section n'a pas un effet significatif, tandis que, pour une longueur de 700mm ou $l=1400\text{mm}$ le paramètre du flambage augmente de 50% dans la section Lipped channel en comparaison avec Hat-section.
- Lorsque les paramètres géométriques α et β sont constants, la géométrie de la section a un effet important sur le paramètre du flambage λ quelque soit la longueur de la colonne.
- L'augmentation du paramètre géométrique α , a un effet positif sur les deux types de colonnes de longueurs 350mm et 1400mm . Pour $l=700\text{mm}$, l'effet de la dimension b_s est positif sur les colonnes Hat section et négatif sur les colonnes Lipped channel section.
- L'accroissement du paramètre géométrique β , a un effet positif sur les colonnes Lipped channel et négatif sur les colonnes Hat section, de longueurs 700mm et 1400mm . L'effet de la dimension b_1 est positif sur les deux types de colonnes de longueur 350mm .
- L'accroissement du paramètre géométrique γ a un effet positif sur les deux types de colonnes (Lipped channel et Hat section), quelle que soit les longueurs des colonnes.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Centre D'animation Régional en Matériaux Avances. *Glossaire des matériaux composites*, éditions Carma –Octobre 2006.
- [2] J.M. Berthelot. *Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures*, 5^{ème} Editions, Tec & Doc, 2005.
- [3] S. Brek. *Modélisation numérique de la propagation de l'endommagement et de la rupture dans les matériaux composites stratifiés sous sollicitations thermomécaniques et cycliques*, Thèse de doctorat soutenue à l'université Hadj-Lakhdar de Batna, 2012.
- [4] R.Hill. *The mathematical theory of plasticity*, book, Oxford University Press, 1950.
- [5] D. Gay. *Matériaux composites*, Hermes, 4^{ème} éditions, 1997.
- [6] V. D. Azzi et S. W. Tsai. *Anisotropic strength of components*, Experimental Mechanics, 5, 283-288, 1965.
- [7] O. Hoffman. *The Brittle strength of orthotropic Materials*, Journal of Composite Materials April, 1, 200-206, 1967.
- [8] S.W. Tsai et M. E.Wu, A General Theory of Strength for Anisotropic Materials, Journal of Composite Materials, 5, 58-80, 1971.
- [9] V. Reynaud, G. Subra, M. Calderini, *Les matériaux composites*, book, ENSCM, 1993.
- [10] P.Vallat, Aérospatiale Itw. *Résistance des matériaux appliquée à l'aviation*, Tome 1, 1945.
- [11] S. Timoshenko. *Résistance des matériaux, théorie développée et problèmes*, Edition Dunod, Tome 2, 1968.
- [12] J. Bertolini. *Contribution à l'analyse expérimentale et théorique des ruptures de structures composites en post-flambement par décollement de raidisseurs*. Thèse de doctorat soutenue à l'université Toulouse III – Paul Sabatier, avril 2008.
- [13] R. Itterbeek. *Résistance des Matériaux – Flambement*, Version du 9 mai 2013.
- [14] R. Maquoi. *Stabilité appliquée*, cours (Support pédagogique pour l'enseignement de la construction métallique) : Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Centre régional de Cluny, vol. 6, (www.mmaya.fr/PDF/Instabilité.pdf).
- [15] J.M. Housner and M.Stein. *Numerical analysis and parametric studies of the buckling of Composite orthotropic compression and shear panels*, NASA TN D-7996, 1975.
- [16] R.M. Jones. *Mechanics of composite Materials*, Edition Taylor & Francis, Washinton D.C. 1998.

- [17] C. Gallet. *Influence de la séquence d'empilement sur la stabilité d'une plaque mince plane en composite*, Note interne Airbus F, 2005.
- [18] Auch Albouy Ch Pedeches JM. *Instabilité élastique, flambement, Cours de mécanique*, Le Garros, Cours en ligne (www.systemx.fr/meca/btsiut/flambement.pdf).
- [19] P.A. Boucard. *Cours de dimensionnement des structures résistance des matériaux*, IUT de Cachan, Génie Mécanique et productique, Université de Paris Sud, (meca.iutcachan.free.fr/files/RdM_print.pdf).
- [20] S. Drapier. *Mécanique des Structures et Approximations Numériques*, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, book, Février 2014.
- [21] S. Mokhtari. *Instabilité par flambage élastique des plaque stratifiées munies d'une singularité géométrique*», Mémoire de Magistère soutenu à l'université Skikda, 20 Aout 2007.
- [22] A.Tati. *Analyse du comportement de flambage des plaques minces stratifiée en matériaux composites par la méthode des éléments finis*, Courrier du Savoir – N°09, Mars 2009.
- [23] H. T. Nguyen, S. E. Kim. *Buckling of composite columns of lipped-channel and hat sections with web stiffener*, Thin-Walled Structures, 47, 1149–1160, 2009.
- [24] ABAQUS, Documentations ABAQUS 6.11.
- [25] D. Karagiozova, G.S. Langdon, G.N. Nurick, S. Chung Kim Yuen. *Simulation of the Response of fibre–metal laminates to localised blast loading*, International Journal of Impact Engineering, 37, 766–782, 2010.