

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA
NATURE ET DE LA VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté par

SALEM MOHAMED

pour obtenir le

DIPLOME DE MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Harmounique et EDP

Sujet

Méthode de collocation à bases d'ondelettes pour
la solution des équations à dérivées partielles

Soutenu le 26 /06/2012 devant les Jurys

M. N. LAID.	Président	Prof.	U. MOSTAGANEM
M ^{em} SAIDANI. K.	Examineur	Prof.	U. MOSTAGANEM
M. S . BAHRI.	Encadreur	Prof.	U. MOSTAGANEM

2011/2012

Dédicace

Tout d'abord, le grand Merci à notre « DIEU » le tout puissant, qui nous a donné la force et la volonté pour finir ce projet.

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents, à mon encadreur Mr. Bahri.

À mes frères : Mokhtar, Kada, Mustafa, Ousama et Nabil.

À mes soeurs : Omlkhaïr, Mokhtaria, Nada et Amina.

À mes collègues de la promotion Licence de l'année 2011/2012.

Sans oublier tout mes amis sans exception surtout mes très cher amis Houari, Elhabib, Taher et Toufik.

Remerciements

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toute ces années de recherche, c'est grâce à Lui que ce travail de mémoire a vu le jour. **Je Lui dois tout.**

Je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de près, à la réalisation de ce mémoire de Master, tout particulièrement :

Mon encadreur **M. Bahri** qui a accepté d'encadrer ce travail et pour sa totale disposition et ses conseils efficaces qui ont permis l'accomplissement de ce travail. Je le remercie tout aussi pour avoir dirigé mes travaux, pour m'avoir écouté et m'encouragé durant cette période. Merci aussi pour toutes les relectures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire.

Je remercie Monsieur **N. LAID** d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire et je remercie également **M^{em}. SAIDANI. K.** Pour avoir accepté de juger ce travail.

Je n'oublierai pas de remercier le corps enseignant du Département de Mathématiques de l'Université de Mostaganem pour les efforts qu'il ne cesse de déployer afin d'assurer le développement et l'épanouissement de la formation surtout l'ensemble de nos professeurs pour leur enseignement précieux.

Sans oublier tous les membres de ma famille : Achour, Salem, Nedjadi, Gouasmi.

Table des matières

1	Notions préliminaires	iii
1.1	Base de Riez	iii
1.2	Méthode de Galerkin	iii
1.3	Les opérateurs différentielles	iv
1.3.1	Dérivées du premier ordre	iv
1.3.2	Dérivées d'ordre plus élevés	iv
1.4	Généralité sur les ondelettes	v
1.5	La transformation en ondelette	vii
1.5.1	La transformation en ondelette continue :	vii
1.5.2	Construction de la fonction originale	viii
1.5.3	La transformation en ondelette discrète	viii
2	Base d'ondelettes et analyse multi-résolution :	x
2.1	Base d'ondelettes	x
2.1.1	Base d'ondelettes dans D1	x
2.2	Analyse multi-résolution(AMR)	xi
2.3	Base d'ondelettes bidimensionnelles :	xiii
2.3.1	Analyse multi-résolution bidimensionnelles	xiii
3	Méthode de collocation à base d'ondelettes	xv
3.1	Formule de passage d'un espace à un autre	xv

3.2 Approximation d'opérateurs différentiels xvii

3.3 Solution d'équations aux dérivées partielles xvii

Bibliographie **xx**

Notation

$\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

$\langle \cdot \rangle$: Produit scalaire de L^2 .

$\|f\|$: Norme de f .

$\oplus$: La somme directe

$\otimes$: Produit tensoriel.

$L^1(\mathbb{R})$: Espace des fonctions définies et intégrables sur $\mathbb{R}$.

$L^2(\mathbb{R})$: Espace de Hilbert des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à carrés intégrables.

Ω : Un ouvert de $\mathbb{R}^n$

ABREVIATIONS UTILISES

TOC : **T**ransformation en **O**ndelette **C**ontinue.

TOD : **T**ransformation en **O**ndelette **D**iscrete.

AMR : **A**nalyse **M**ulti-**R**ésolution.

INTRODUCTION

Les ondelettes constituent une famille relativement recente de fonctions permettant une bonne représentation des fonctions de carré sommable sur $\mathbb{R}$. L'émergence aux début des années 80 de cette classe de fonctions a fourni un outil efficace pour le traitement du signal.

Leur utilisation a été plus tard étendue à d'autre domaines de l'analyse numérique, notamment l'approximation numérique d'équations aux dérivées partielles. Leurs propriétés remarquables, orthogonales, régularités arbitraire, bonne localisation(elles sont de support compact ou tendent exponentiellement vers 0 en dehors d'un compact) etc...enfont une base bien adaptée pour des situations raides où les méthodes classiques Fourier, Différences Finies ne réussissent pas. L'approximation numérique des équations aux dérivées partielles par les les ondelettes repose couramment sur la projection Galerkin ([2], [3]). Le but de cette note est de présenter une approche du type collocation pour la solution numérique des EDP. La méthode repose sur l'expression des opérateurs différentiels en fonction des valeurs des dérivées de la fonction d'échelle aux points entiers. De ce fait une régularité suffisante des ondelettes est demandée.

Ce mémoire comporte trois chapitres qui se présentent comme suit : Dans le premier chapitre nous allons présenter notions préliminaires et une introduction historique sur le développement de la théorie des ondelettes. Le deuxième chapitre est totalement consacrée à base d'ondelette et l'analyse multi-résolution, dans le troisième chapitre nous présentons une méthode de collocation à une base d'ondelettes.

Enfin, nous terminerons par une conclusion.

Notions préliminaires

Définition 1.0.1 (*support d'une fonction*)

soit la fonction $\varphi : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. On définit le support de φ par

$$\text{support}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} / \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.0.2 (*Produit de convolution*) :

Soient f, g deux fonctions de caré sommable, on définit le produit de convolution de ces deux fonctions par

$$f(x) * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt.$$

1.1 Base de Riez

Une famille de vecteur $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est appelé une base de Riez d'un espace de Hilbert H si :

1. Elle est linéairement indépendant.
2. S'il existe deux constantes $A, B > 0$ tel que :

$$\forall f \in H : A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

1.2 Méthode de Galerkin

cette méthode introduite par le mathématicien et ingénieur Boris Grigoryevich Galerkin en 1915. Dans cette méthode les fonctions de pondérations sont les fonctions de base P_{ij} de la

solution approximative :

$$\psi_{ij} = P_{ij}, i = 1, \dots, n_x \quad ; \quad j = 1, \dots, n_y,$$

où n_x, n_y représente le nombre des points de collocation sur l'axe des x et l'axe des y respectivement.

1.3 Les opérateurs différentielles

1.3.1 Dérivées du premier ordre

Pour simplifier les écritures, on note usuellement la dérivée partielle première par rapport à la coordonnée x_k par le symbole

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k},$$

on est également amené à introduire l'opérateur différentiel D_k du premier ordre défini par

$$D_k = -i\partial_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k},$$

dans cette définition i est la racine de l'unité complexe :

$$i^2 = -1,$$

l'intérêt de définir cet opérateur D_k apparaîtra plus tard, en relation avec la transformée de Fourier.

On utilise les notation sous forme de multi-indices : un multi-indices α est un n -uplet d'entiers

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_k \in \mathbb{N},$$

sa longueur $|\alpha|$ est définie comme la somme de α_i .

1.3.2 Dérivées d'ordre plus élevés

La dérivée partielle d'ordre α_k par rapport à la coordonnée x_k correspond au symbole : $\partial_k^{\alpha_k}$

On définit alors les dérivées partielles, d'ordre global $|\alpha|$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n},$$

et les opérateurs différentielle D^α d'ordre globale $|\alpha|$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Définition 1.3.1 *un opérateur différentielle linéaire d'ordre m est définie par :*

$$P = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha,$$

où les $a_\alpha(x)$ sont des fonctions de n variables, appelées coefficient de l'opérateur P .

1.4 Généralité sur les ondelettes

D'un point de vue historique, l'analyse d'ondelette est une nouvelle méthode, après la théorie de base de Joseph Fourier au dix-neuvième siècle. Fourier a créé les bases avec ses théories d'analyse de fréquence, qui se sont avérées énormément importantes.

La terminologie ondelette a été utilisée par Morlet en 1975, bien que la première base d'ondelette connue date de 1910, créée par Haar. Il est intéressant de remarquer que les premiers travaux sur les ondelettes ont été réalisés dans le formalisme de la physique théorique par Morlet et Grossman.

La transformée en ondelettes permet d'exprimer, sans perte les informations d'un signal dans une base dans laquelle on obtient la contribution locale de chaque fréquence au signal. Mallat et Meyer créèrent un environnement, appelé analyse multi-résolution, permettant une construction systématique de bases d'ondelettes, associées à une transformée discrète rapide.

Définition 1.4.1 *une ondelette est une petite onde qui a un début et une fin c'est la signification physique. Mathématiquement une ondelette est une fonction oscillante de valeurs réelles, de carré intégrable et de moyenne nulle*

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0.$$

Et de norme 1

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt = 1.$$

ψ est aussi dite ondelette mère.

Remarque 1.4.1 *on a :*

1. ψ est de moyenne nulle veut dire $\psi \in L^1(\mathbb{R})$.

2. ψ est une ondelette $\Rightarrow \psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 1.4.1 Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$:

1. Si ψ est admissible, alors $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) d\xi = 0$.

2. Si $\hat{\psi}(0) = 0$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ et si la dérivée de $\hat{\psi}$ est bornée, alors ψ est admissible.

Définition 1.4.2 Les ondelettes filles sont obtenues par translation et dilatation (contraction) de l'ondelette mère ψ et ont la forme :

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \quad (1)$$

où

$u \in \mathbb{R}$: est la translation temporelle.

$s \in \mathbb{R}^*$: est l'échelle de dilatation ($s > 1$) / contraction ($s < 1$).

Définition 1.4.3 (Moments nuls d'une ondelette) On dit que l'ondelette ψ est à m moments nuls si

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0, \quad 0 \leq k < m,$$

cela revient à dire que ψ est orthogonale à tous les polynômes de degré inférieur à m .

Exemple 1 Ondelette de Haar

Nous définissons sur $\Omega = L^2[0, 1]$ la fonction suivante :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

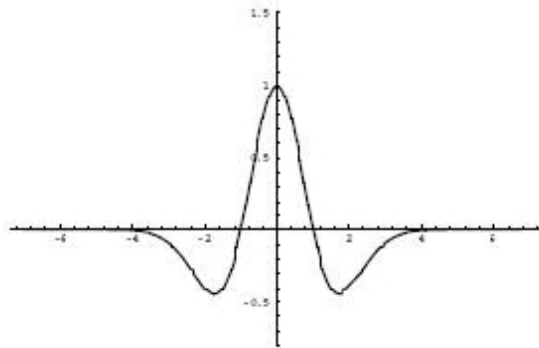
Exemple 2 Ondelette de Morlet :

Elle est définie comme suite :

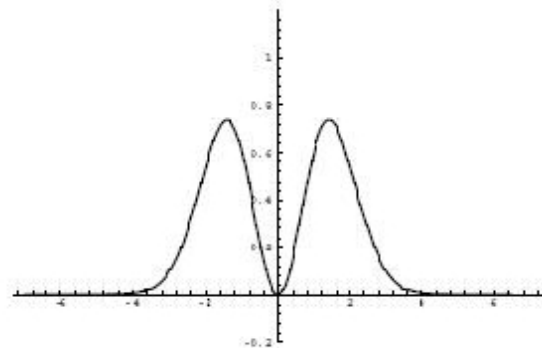
$$\psi(t) = \sqrt{2} \exp\left(\frac{-t^2}{\alpha^2}\right) \left[\exp(-\pi t) - \exp\left(-\frac{\pi^2 \alpha^2}{4}\right) \right].$$

Exemple 3 *Chapeaux Mexicane*

$$\psi(t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \right] = (1 - t^2) \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right),$$



(a) Ondelette



(b) Transformée de Fourier

1.5 La transformation en ondelette

On peut classer les transformés en ondelettes selon la famille à laquelle appartiennent les fonctions analytique choisies. Les transformée obtenues sont suivant les cas continues, discrètes.

Les transformés continues sont obtenues en prenant le facteur d'échelle s et le pas de translation u dans l'ensemble des nombres réels. Ces transformés sont évidemment très redondantes car l'espace temps-fréquence est parcouru continûment, ce type de transformation ne peut, dans la pratique, être effectué que de façon approximation et il ya toujours en fait une discrétisation du calcul qui est opérée.

1.5.1 La transformation en ondelette continue :

Pour bien comprendre la transformation en ondelette continue, on revient à la transformation de Fourier :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-j\xi t} dt.$$

Définition 1.5.1 La transformation en ondelette continue (TOC) d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie comme la somme sur tout le temps du signal multiplié par des échelles :

$$Wf(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

La transformation en ondelette continue est une analyse temps échelle, elle permet d'avoir des transformations d'une fonction au voisinage du point u et à l'échelle s .

Remarque 1.5.1 On peut interpréter cette expression comme une projection du signal sur une famille de fonction (1) c-à-d :

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{s,u} \rangle.$$

La TOC peut se réécrire comme un produit de convolution

$$Wf(u, s) = \left(f * \tilde{\psi}_s \right) (u),$$

Définition 1.5.2 avec

$$\tilde{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi}\left(\frac{-t}{s}\right).$$

1.5.2 Construction de la fonction originale

Pour pouvoir reconstruire la fonction originale f , l'ondelette ψ doit nécessairement vérifier la condition d'admissibilité suivante :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \left| \hat{\psi}(\xi) \right|^2 \frac{d\xi}{\xi} < +\infty,$$

où $\hat{\psi}(\xi)$ est la transformée de Fourier de ψ . Cette reconstruction s'effectue par :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \iint Wf(u, s) \psi_{s,u}(x) \frac{du}{u^2} ds.$$

1.5.3 La transformation en ondelette discrète

La transformation en ondelette discrète (TOD) est une technique utilisée dans la compression de données numériques avec perte. La compression est réalisée par approximation successives l'information initiale du plus grossier au plus fin.

Notons par $s = s_0^m$ et $u = nu_0 s_0^m$ avec $s_0, u_0 \in \mathbb{Z}$.

On définit la transformation en ondelette discrète par :

$$Wf(m, n) = s_0^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(s_0^{-m}t - nu_0) dt, (s_0, u_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, (m, n) \in \mathbb{Z}^2,$$

où

s_0^m l'échelle et $nu_0s_0^m$ représente la translation.

Remarque 1.5.2 *On parlera de transformation en ondelettes dyadique dans le cas où $s_0 = 2$ et $u_0 = 1$*

$$Wf(m, n) = 2^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(2^{-m}t - n) dt,$$

le signal décomposé $f(x)$ est reconstruit par la formule suivante :

$$f(x) = \sum_j \sum_n Wf(j, n) \psi_{j,n}(x).$$

Base d'ondelettes et analyse multi-résolution :

2.1 Base d'ondelettes

2.1.1 Base d'ondelettes dans D1

Définition 2.1.1 Une base d'ondelette est une base préhilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $\psi_{j,k}$ obtenue par translation et dilatation dyadique de l'ondelette mère ψ :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) , \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 4 La base d'ondelettes de Haar est définie par :

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -1 & \text{si } \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Définition 2.1.2 Une base d'ondelettes $\psi_{m,k}(t)$ est dite orthonormales si

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{i,l} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x) \psi_{i,l}(x) dx = \delta(j-i) \delta(k-l),$$

où δ est la matrice de Kroneker

$$\delta(j-i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} , \quad \delta(k-l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} .$$

Théorème 2.1.1 Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, alors il existe une unique fonction $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, telle que la famille :

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

soit une base orthonormale de V_j .

2.2 Analyse multi-résolution(AMR)

Les AMR (analyse multi-résolution) d'ondelettes, sont des espaces d'approximation générés par des bases de fonctions introduites par **Stéphan Mallat** en **1986**. Cette thématique permet de calculer des approximations successives d'une fonction à des résolutions spatiales de plus en plus grossières. L'approximation multi-résolution calcule l'approximation d'une fonction f à diverses résolutions par sa projections orthogonales sur une famille des espaces $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

Définition 2.2.1 Une analyse multi-résolution (AMR) de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de sous espaces vectoriels fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ constitue une suite d'espaces emboîtés :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}.$$

2. $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \{0\}$, $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
3. Une fonction $f(x)$ appartient à V_j si et seulement si sa dilatée $f(2x)$ appartient à V_{j+1} .
4. Il existe $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, appelée fonction d'échelle ou l'ondelette père telle que

$$\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\} \text{ forme une base orthonormale de } V_0.$$

Remarque 2.2.1

1. La première condition signifie que V_j est un sous espace de V_{j+1} et donc la projection d'une fonction sur V_j constitue une moins bonne approximation que sa projection sur V_{j+1} . Cette inclusion montre que l'approximation sur V_{j+1} contient toute l'information nécessaire pour calculer l'approximation sur V_j .

2. Les secondes montre que quand $j \rightarrow +\infty$ on prend toutes les informations sur la fonction,alorsque quand $j \rightarrow -\infty$ l'approximation est asymptotiquement égale au fonction d'origine .
3. De troisième condition, on peut passer de V_j à V_{j+1} en multipliant par le facteur d'échelle 2.

Les espaces d'approximations, détails

Les espaces V_j sont appelés les espaces d'approximation et le complémentaire orthogonale de V_j dans V_{j+1} noté par W_j est appelé espace de détails et on écrit :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

où $\oplus$ désigne la somme directe de sous espaces vectoriels.

Ainsi la projection orthogonale d'une fonction f sur V_{j+1} peut se décomposer comme la somme de sa projection orthogonale sur V_j et W_j .

Les familles

$$\{\phi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^j t - n), n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } \{\psi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^j t - n), n \in \mathbb{Z}\},$$

étants les bases orthonormales des espaces V_j et W_j respectivement.

la projection de f sur V_{j+1} est donnée par

$$Pv_{j+1}f(t) = Pv_jf(t) + Pw_jf(t),$$

où

$$Pv_jf(t) = \sum_n a_j[n] 2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^j t - n),$$

$$Pw_jf(t) = \sum_n c_j[n] 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^j t - n),$$

et

$$a_j[n] = \left\langle f(t), 2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^j t - n) \right\rangle, \quad c_j[n] = \left\langle f(t), 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^j t - n) \right\rangle,$$

les coefficients $a_j[n]$ et $c_j[n]$ sont appelés coefficients d'approximation et coefficients d'ondelettes ou de détails du fonction au niveau de résolution j .

2.3 Base d'ondelettes bidimensionnelles :

2.3.1 Analyse multi-résolution bidimensionnelles

Considérons $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$, on définit l'analyse multi-résolution séparable de $L^2(\mathbb{R}^2)$ par

$$\mathbf{V}_j = V_j^2 = V_j \otimes V_j,$$

si $\phi(x)$ est la fonction d'échelle associée à l'AMR $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ alors on peut donner une base orthonormale de $(\mathbf{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ par

$$\{\phi_{n,m}(x, y) = 2^{-j} \phi(2^{-j}x - n) \phi(2^{-j}y - m), (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Remarque 2.3.1 *L'AMR dans le cas bidimensionnel a les mêmes propriétés que dans le cas monodimensionnel.*

Supposons l'espace de détails W_j est le complémentaire orthogonal de $\mathbf{V}_{j+1}$ dans V_j .

Dans le cas 2D, on a besoin de trois espaces de détails $\mathbf{W}_j^h, \mathbf{W}_j^d, \mathbf{W}_j^v$ de telle sorte que

$$\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j^h \oplus \mathbf{W}_j^d \oplus \mathbf{W}_j^v,$$

où $\mathbf{W}_j^h$ est l'espace de détails horizontaux, $\mathbf{W}_j^d$ est l'espace de détails diagonaux et $\mathbf{W}_j^v$ est l'espace de détails verticaux.

Si $\psi(t)$ est l'ondelette mère associée à l'AMR $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ on pose les trois fonctions :

$$\psi^h(x, y) = \phi(x)\psi(y),$$

$$\psi^d(x, y) = \psi(x)\psi(y),$$

$$\psi^v(x, y) = \psi(x)\phi(y),$$

par translation et dilatation de ces bases, on obtient des bases orthonormales de 3 espaces de détails

$$\{2^{-j} \psi^h(2^{-j}x - n, 2^{-j}y - m) \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} \text{ base orthonormale de } \mathbf{W}_j^h,$$

$$\{2^{-j} \psi^v(2^{-j}x - n, 2^{-j}y - m) \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} \text{ base orthonormale de } \mathbf{W}_j^v,$$

$$\{2^{-j} \psi^d(2^{-j}x - n, 2^{-j}y - m) \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} \text{ base orthonormale de } \mathbf{W}_j^d,$$

ces ondelettes extraient les détails d'une fonction à différentes échelles et orientations.

Définition 2.3.1 *Une base d'ondelette séparable de $L^2(\mathbb{R}^2)$ peut être associée à toute base d'ondelettes orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$*

$$\psi_{k_1, k_2}^{j_1, j_2}(x, y) = \{\psi_{j_1, k_1}(x)\psi_{j_2, k_2}(y)\}_{j_1, j_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^4},$$

les fonctions $\psi_{j_1, k_1}(x)\psi_{j_2, k_2}(y)$ mélangent informations à deux échelles différentes 2^{j_1} , 2^{j_2} le long de x et y , ce qui souvent nous voulons éviter.

Méthode de collocation à base d'ondelettes

3.1 Formule de passage d'un espace à un autre

Nous utilisons les ondelettes de Daubechies [1] pour illustrer notre technique. Elles constituent une base de fonctions à support compact pour l'espace des fonctions de carré sommables sur $\mathbb{R}$. Elles sont engendrées par translation et dilatation d'une simple fonction d'échelle φ satisfaisant la relation dite d'échelle

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \varphi(2x - k), \quad (1)$$

les coefficients h_k sont tels que le support φ est contenu dans l'intervalle $[0, N - 1]$. La fonction φ induit alors une analyse multirésolution sur $L^2(\mathbb{R})$, c'est à dire une suite omboitée d'ensembles $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ dont la réunion est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et pour chaque j la famille de fonctions $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ définies par

$$\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^{j/2}x - k), \quad (2)$$

constitue une base de *Riesz* de V_j . Notons u_j l'approximation de la fonction u sur l'espace V_j , u_j s'écrit alors dans la base des fonctions $\varphi_{j,k}$

$$u_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{j,k}(x), \quad (3)$$

les coefficients c_k définissent la fonction u_j dans l'espace des ondelettes. Dans le cas périodique, ces coefficients s'obtiennent facilement à partir des valeurs de la fonction aux points

dyadiques $2^{-j}k$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$ au moyen de FFT [2]. Pour ce faire on effectue tout d'abord un changement de variable en posant

$$y = 2^j x, \quad \tilde{u}(y) = u_j(x) = \sum_k \tilde{c}_k \varphi(y - k), \quad (4)$$

avec $\tilde{c}_k = 2^j c_k$. Si maintenant u_j est une fonction périodique de période 1, alors $\tilde{u}(y)$ ainsi que les coefficients $\tilde{c}_k$ sont périodiques de période 2^j . Les valeurs de la fonction $\tilde{u}$ aux points entiers $0, \dots, 2^j - 1$ définissent la fonction u_j aux points dyadiques $2^{-j}i$, $i = 0, \dots, 2^j - 1$. Développons la relation permettant de passer de l'espace des ondelettes à l'espace physique et inversement. Pour cela on écrit (4) aux points entiers

$$\tilde{u}(i) = \sum_k \tilde{c}_k \varphi(i - k), \quad i = 0, \dots, 2^j - 1, \quad (5)$$

comme φ est à support dans $]0, N - 1[$, la somme (5) se réduit à

$$U_j = \sum_{k=2^j-i-N}^{i-1} \tilde{c}_k \varphi_{i-k}, \quad i = 0, \dots, 2^j - 1, \quad (6)$$

avec $U = \tilde{u}(i) = u_j(x_j)$, $\varphi_{i-k} = \varphi(i - k)$. Compte tenu de la périodicité des coefficients $\tilde{c}_k$, on déduit de (6) un système de 2^j équations liant les coefficients $\tilde{c}_k$ aux valeurs physiques $\tilde{c}_i$ de la fonction, système qui se met sous forme d'un produit de convolution

$$U = K_\varphi * C, \quad (7)$$

où $U = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{2^j-1})$, $C = (\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{2^j-1})$ et le noyau de convolution K_φ est donné par

$$k_\varphi = (0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-2}, 0, \dots, 0), \quad (8)$$

un produit de convolution se traduisant par un produit terme à terme dans l'espace de Fourier, la relation (7) s'écrit tout simplement dans l'espace de Fourier

$$\hat{U} = \hat{K}_\varphi \cdot \hat{C} \quad \text{soit} \quad \hat{C} = \hat{U} / \hat{K}_\varphi, \quad (9)$$

le signe chapeau faisant référence aux coefficients dans l'espace de Fourier. Enfin en prenant la transformée de Fourier inverse de (9) on obtient U ou C .

3.2 Approximation d'opérateurs différentiels

La précédente technique peut être généralisée aux opérateurs différentiels. Considérons en effet la dérivée d'ordre n . En dérivant n fois la relation (4), on obtient

$$u_J^{(n)}(x) = 2^{nJ} \tilde{u}^{(n)}(y) = 2^{nJ} \sum_k \tilde{c}_k \varphi^{(n)}(y - k), \quad (10)$$

ecrivans maintenant (10) aux points entiers :

$$u_J^{(n)}(i) = 2^{nJ} \sum_{k=i+2-N}^{i-1} \tilde{c}_k \varphi^{(n)}(i - k), \quad (11)$$

où l'on a utilisé le fait que les dérivées de φ sont nulles à l'extérieur de l'intervalle $]0, N - 1[$. Evoquant de nouveau la périodicité des coefficients $\tilde{c}_k$, on déduit de (11) une relation similaire à (7) liant les valeurs phisiques $U^{(n)}$ de la dérivée aux coefficients des ondelettes

$$U^{(n)} = K_\varphi^{(n)} * C, \quad (12)$$

avec le noyau de convolution défini par

$$K_\varphi^{(n)} = \left(0, \varphi_1^{(n)}, \dots, \varphi_{N-2}^{(n)}, 0, \dots, 0\right). \quad (13)$$

La représentation (8) est valable à condition que la fonction φ soit suffisamment régulière. Dans le cas des ondelettes de Daubechies, la régularité croît avec le support. Pour des valeurs de N suffisamment petites ($N \leq 20$), l'estimation de régularité montre que ces fonctions sont dans $C^{\alpha N}(\mathbb{R})$ avec le paramètre α voisin de 0.15 (voir [1]). Ainsi pour $N = 14$, la fonction φ est au moins dans $C^2(\mathbb{R})$. De fait pour l'opérateur dérivée seconde, l'approximation (12) a tout à fait un sens dès que $N \geq 14$.

3.3 Solution d'équations aux dérivées partielles

Nous utilisons ici les ingrédients développés précédemment à la résolution d'équations aux dérivées partielles. Classiquement l'approximation de tels problèmes par des ondelettes repose sur la méthode de projection Galerkin. L'équation est exprimée et ensuite projetée dans la base des ondelettes en utilisant comme fonctions tests les éléments de la base, ce qui conduit à un système d'équations donnant les coefficients de la solution dans la base. Cependant,

des études récentes ont montré qu'une approche collocation peut être envisagée. La présente méthode est du type collocation. L'équation exprimée dans la base est ensuite écrite en un certain nombre de poits discrets (les poits dyadiques).

Comme dans le cas le cas Galekin, un système d'équations est alors obtenu pour les coefficients des ondelettes. Pour illustrer la méthode, considérons comme problème modèle l'équation de Helmholtz monodimensionnelle

$$u'' - \sigma u = f \quad \text{dans } [-1, 1], \quad (14)$$

avec des conditions aux limites périodiques. On se place à l'échelle j et l'on discrétise l'intervalle $[-1, 1]$ suivant les points dyadiques $x_i = 2^{-j}i$, $i = 0, \dots, 2^j - 1$. On considère alors la projection de l'équation (14) sur l'espace V_j que l'on écrit aux points discets x_i :

$$\sum_{k=i+2-N}^{i-1} \tilde{c}_k (2^{2j} \varphi_{i-k}'' - \sigma \varphi_{i-k}) = \sum_{k=i+2-N}^{i-1} \tilde{g}_k \varphi_{i-k}, \quad 0 \leq i \leq 2^j - 1, \quad (15)$$

$\tilde{c}_k$ et $\tilde{g}_k$ étant les coefficients de u_j et f respectivement dans la base. Ici encore la périodicité des coefficients $\tilde{c}_k$ et $\tilde{g}_k$ permet d'écrire (15) sous forme d'un produit de convolution

$$K_H * C = G, \quad (16)$$

est défini par où C et G sont les vecteurs des coefficients $\tilde{c}_k$ et $\tilde{g}_k$ respectivement, et le noyau de convolution K_H est défini par

$$K_H = 4^j K_\varphi'' - \sigma K_\varphi, \quad (17)$$

avec K_φ et K_φ'' donnés par (8) et (13) respectivement. La résolution de (16) se fait alors par des FFT. En prenant la transformée de Fourier de l'équation (16) on obtient

$$\hat{K}_H \cdot \hat{C} = \hat{G}, \quad (18)$$

par ailleurs de (7) on a

$$\hat{C} = \hat{U} / \hat{K}_\varphi \text{ et } \hat{G} = \hat{F} / \hat{K}_\varphi, \quad (19)$$

où U et F contiennent les valeurs physiques de u_j et de f respectivement aux points discrets. Injectant (19) dans (18) on obtient

$$\hat{K}_H \cdot \hat{U} = \hat{F} \dots 20, \quad (20)$$

d'ou les valeurs de U dans l'espace de Fourier

$$\hat{U} = \hat{F}/\hat{K}_H. \quad (21)$$

Finalement en prenant la transformée de Fourier inverse de (21), obtient la solution dans l'espace physique. La résolution du problème (16) s'est donc ramenée en gros à une 2FFT, problème moins coûteuse qu'une inversion directe.

Remarque 3.3.1 *Dans le cas où le coefficient σ s'annule, l'opérateur K_H est singulier. En conséquence le mode constant $(K_H)_0$ est nul. La solvabilité du problème (18) implique $\hat{G}_0 = 0$ et, de (19) on a $\hat{F}_0 = 0$. Pour éviter une division par zéro dans (21), on pose alors $\hat{U}_0 = 0$, ce qui revient à prendre la solution dont la moyenne est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.*

CONCLUSION

Nous présentons une méthode du type collocation pour l'approximation numérique d'équation aux dérivées partielles par les ondelettes. Les opérateurs différentiels sont exprimés en fonction des valeurs de la fonction d'échelle aux poits entiers. Nous utilisons les ondelettes de Daubechies pour illustrer la méthode. Les résultats numériques obtenus sur l'équation de Helmholtz monodimensionnelle montrent qu'une précision du type spectrale est obtenue pourvu que les fonctions de base soient suffisamment régulière.

Comme perspectives de ce travail, nous tachons de voir le cas non périodique, en utilisant des bases d'ondelettes sur l'intervalle.

Bibliographie

- [1] I.Daubechies, Orthogonal bases of compactly supported wavelets, Comm. Pure Appl. Math, 41, 1988, pp. 909-966.
- [2] K. Amaratunga and J.Williams, Wavelet-Galerkin solutions for the one-dimensional partial differential equations, Int. Journ. Num. Meth. Eng, vol. 37, 1994, pp. 2703-2716.
- [3] J. Restrepo and G. K. Leaf, wavelet-Galerkin discretization of hyperbolic equations, Journ. Comp. Phys. 122, 1995, pp. 118-128.
- [4] S.Mallat A wavelet tour of signal processing , Academic Press, New-York à paraitre (1997).
- [5] Y.Meyer Ondelettes et opérateurs, I : Ondelettes, II : Opérateurs de Calderon-Zygmund, III : Opérateurs multilinéaires Hermann, Paris (1990).