

Faculty of Sciences and Technology
التكنولوجيا
Department of Mechanical Engineering

كلية العلوم و
قسم الميكانيكا

N° d'ordre : M...../GM/2026

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

**Analyse du comportement statique des structures
en matériaux composites sous l'effet de la porosité**

Présenté par :

❖ SID AHMED Ilyes

❖ SAIDI Mustapha

Soutenu le 24 / 06 / 2026 devant le jury composé de :

Président	Pr. OUINAS Djamel	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Dr. BELHACHEMI Amina	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Dr. ZAOUI Fatima Zohra	Université de Mostaganem UMAB

Année Universitaire : 2025 / 2026

Résumé

Cet article présente des solutions analytiques pour des plaques en matériaux composites stratifiés et en matériaux à gradient fonctionnel (FGM), en considérant l'effet de la porosité dans l'épaisseur. La cinématique de déformation des plaques est modélisée à l'aide d'une théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé non polynomiale (HSDT). Les performances relatives et la précision de cette théorie sont évaluées à travers l'analyse de flexion statique de plaques soumises à des chargements mécaniques. La théorie proposée prend en compte une distribution non linéaire de la déformation en cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque, tout en satisfaisant les conditions de surface libre de contraintes sur les faces supérieure et inférieure. Les équations gouvernantes, dérivées via le principe des travaux virtuels, sont résolues analytiquement par la méthode de Navier dans le cas de conditions aux limites d'appui simple. Un ensemble étendu d'exemples numériques est examiné afin de valider la précision et la polyvalence de la HSDT proposée. Les résultats sont comparés aux solutions d'élasticité tridimensionnelle, et une série de solutions de référence pour les plaques FGM avec et sans porosité est ensuite établie pour des comparaisons.

Mots-clés : Plaques Composites et FGM; Porosité; Principe des Travaux Virtuels ; Solution Analytique, Flexion.

Abstract

This paper presents analytical solutions for laminated composite and functionally graded material (FGM) plates, considering through-thickness porosity. The deformation kinematics of plates are captured using a non-polynomial higher-order shear deformation theory (HSDT). The relative performance and accuracy of this theory are evaluated through the static bending analysis of plates subjected to mechanical loading. the proposed theory incorporate a nonlinear transverse shear strain distribution across the plate thickness, while satisfying the traction-free conditions at the top and bottom surfaces. The governing equations, derived via the principle of virtual work, are solved analytically using Navier's approach under simply supported boundary conditions. An extensive set of numerical examples is examined to validate the accuracy and versatility of the proposed HSDT. The results are benchmarked against three-dimensional elasticity solutions, and a series of reference solutions for FGM plates with and without porosity are subsequently established for future comparison.

Keywords: Composite and FGM plates; Porosity; Virtual work; Analytical solution; Bending response

المخلص

يقدم هذا البحث حلولاً نظرية للصفائح المركبة متعددة الطبقات والمواد متدرجة الخصائص (FGM) مع الأخذ بعين الاعتبار المسامية عبر السمك. يتم وصف حركية التشوه للصفائح باستخدام نظرية تشوه القص من الرتبة العليا غير متعددة الحدود (HSDT). تم تقييم الأداء النسبي ودقة هذه النظرية من خلال تحليل الانحناء الساكن للصفائح الخاضعة لقوى ميكانيكية. تستعمل النظرية المقترحة توزيعاً غير خطي لإجهادات القص العرضي عبر سمك الصفيحة، مع تحقيق شروط انعدام الإجهاد على السطحين العلوي والسفلي. يتم اشتقاق المعادلات التفاضلية الحاكمة للصفيحة باستخدام مبدأ الشغل الافتراضي، ويتم حلها باستخدام طريقة نافايي تحت شروط حدية بسيطة الارتكاز. تم دراسة مجموعة واسعة من الأمثلة العددية للتحقق من دقة ومرونة نظرية HSDT المقترحة وتمت مقارنة النتائج مع حلول الموجودة في الأدبيات السابقة. كما تم لاحقاً تقديم مجموعة من الحلول المرجعية للصفائح مع وبدون مسامية لاستخدامها في المقارنات المستقبلية.

الكلمات المفتاحية: للصفائح المركبة متعددة الطبقات والمواد متدرجة الخصائص، المسامية، مبدأ الشغل الافتراضي، حلول نظرية، الانحناء

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials, FGM) ont suscité un intérêt croissant dans le domaine de l'ingénierie en raison de leurs performances mécaniques et de leur adaptabilité aux exigences technologiques avancées. Ces matériaux représentent des solutions innovantes permettant de dépasser les limitations des matériaux traditionnels homogènes.

Les matériaux composites sont constitués de l'association de deux ou plusieurs phases distinctes, généralement une matrice continue et un renfort, dont les propriétés complémentaires permettent d'obtenir un matériau aux caractéristiques améliorées. Le renfort, souvent sous forme de fibres, confère la rigidité et la résistance, tandis que la matrice assure la cohésion, la protection et la transmission des efforts. Cette combinaison offre des avantages significatifs tels qu'un rapport résistance/masse élevé, une bonne résistance à la fatigue et une excellente tenue à la corrosion, ce qui explique leur large utilisation dans des secteurs tels que l'aéronautique, l'automobile et le génie civil.

Par ailleurs, dans des conditions réelles de fabrication, la présence de porosité au sein des matériaux composites et des FGM est souvent inévitable et peut influencer de manière significative leurs propriétés mécaniques. L'intégration de cet effet dans les modèles analytiques constitue donc un enjeu essentiel pour une prédiction fiable du comportement des structures.

Malgré les performances remarquables des matériaux composites et des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), leur modélisation précise demeure un défi majeur, notamment dans le cadre de l'analyse des structures minces telles que les plaques. Les théories classiques des plaques présentent des limitations significatives, en particulier dans la prise en compte des effets de cisaillement transversal, ce qui peut conduire à des estimations imprécises des contraintes et des déformations.

Par ailleurs, la présence de porosité, souvent introduite lors des procédés de fabrication, modifie les propriétés mécaniques des matériaux et influence leur comportement global. Cette hétérogénéité supplémentaire rend l'analyse encore plus complexe, en particulier pour les structures en FGM où les propriétés varient déjà de manière continue à travers l'épaisseur.

Dans ce contexte, il devient nécessaire de développer des modèles théoriques avancés capables de représenter avec précision les effets combinés de la variation matérielle, du cisaillement transversal et de la porosité. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur

(HSDT) apparaît ainsi comme une approche pertinente pour améliorer la prédiction du comportement mécanique des plaques composites et FGM.

Dans ce contexte, le présent travail s'inscrit dans l'étude du comportement mécanique des plaques en matériaux composites et FGM, en tenant compte des effets de la porosité, en s'appuyant sur une formulation basée sur la théorie HSDT. L'objectif principal est de proposer une modélisation précise et efficace permettant d'analyser la réponse des structures sous différents types de chargement.

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier le comportement mécanique des plaques en matériaux composites et en matériaux à gradient fonctionnel, en tenant compte de la présence de porosité, à l'aide d'une formulation basée sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

De manière plus spécifique, ce travail vise à :

- Développer un modèle théorique basé sur la HSDT pour l'analyse des plaques ;
- Intégrer l'effet de la porosité dans la modélisation des propriétés matérielles ;
- Analyser la réponse des plaques sous différents types de chargements mécaniques ;
- Évaluer l'influence des paramètres géométriques et matériels sur le comportement des structures ;
- Valider les résultats obtenus par comparaison avec des solutions existantes dans la littérature.

Le présent mémoire est structuré comme suit :

- **Chapitre 1** : Présentation générale des matériaux composites et des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), incluant leurs propriétés, leurs avantages et leurs domaines d'application.
- **Chapitre 2** : Formulation théorique du modèle proposé. Ce chapitre présente les hypothèses de base, les relations cinématiques, les équations constitutives et la dérivation des équations gouvernantes à l'aide du principe des travaux virtuels.
- **Chapitre 3** : Résolution analytique du problème et présentation des résultats numériques. Une analyse paramétrique est effectuée afin d'évaluer l'influence des différents paramètres. Discussion des résultats obtenus et comparaison avec les travaux de référence.

- **Conclusion générale** : Synthèse des principaux résultats, limites de l'étude et perspectives de recherche futures.

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux composites et les FGM

1.1. Introduction

Les avancées technologiques dans les domaines de l'ingénierie moderne ont conduit au développement de matériaux innovants capables de répondre à des exigences mécaniques, thermiques et environnementales de plus en plus élevées. Parmi ces matériaux, les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) occupent une place prépondérante en raison de leurs propriétés spécifiques et de leur grande adaptabilité [1].

1.2. Matériaux composites

1.2.1 Définition d'un matériau composite

Le mot composites, dans le terme matériau composite, signifie que deux matériaux ou plus sont combiné à une échelle macroscopique nettement inférieur à celle de la pièce pour former un troisième matériau. Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [1]. Donc un matériau composite est un matériau hétérogène et anisotrope.

Un matériau composite est constitué dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue, appelée **renfort** ou matériau renforçant, est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue, appelée **matrice**. Les matrices a pour rôle de transmettre au renfort les efforts mécaniques extérieurs (Figure 1.1) [2]. Une interphase se crée entre les deux constituants et aura pour rôle de transmettre les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement d'où l'établissement d'une bonne adhérence.

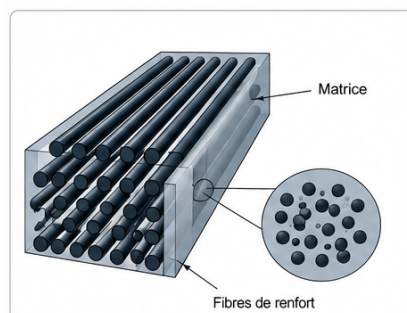


Figure 1.1 : Structure d'un matériau composite (Source : AI)

1.2.2 Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants (Figure 1.2).

1.2.2.1. Classification suivant la forme des fibres

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à fibres et les matériaux composites à particules.

- Composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues: fibres coupées, fibres courtes... etc. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur la nature des constituants, la proportion des constituants, l'orientation des fibres suivant le cahier des charges imposées.

- Composites à particules

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées. Par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage. Des particules de métaux fragiles tels que le tungstène, le chrome et le molybdène, incorporé dans des métaux ductiles, augmenteront leurs propriétés à températures élevées, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante [3].

1.2.2.2. Classification suivant la nature de la matrice

Les matériaux composites sont classés en trois grandes catégories selon la nature chimique de leur matrice : **organique (polymère)**, **métallique** ou **céramique (minérale)**. La matrice détermine la tenue en température, la résistance chimique et le domaine d'application du composite.

- **Composites à Matrice Organique (CMO / CMP)**

Il s'agit de la famille la plus répandue (environ 95% de la production). La matrice est constituée d'une résine polymère :

- **Thermodurcissables** : Les résines (époxy, polyester, vinylester) durcissent de manière irréversible. Elles offrent une excellente tenue thermique et chimique.
- **Thermoplastiques** : Les résines (PEEK, polyamide, polypropylène) peuvent être ramollies et remises en forme sous l'effet de la chaleur. Elles sont recyclables et très résistantes aux chocs.

- **Composites à Matrice Métallique (CMM)**

La matrice est un métal léger ou un alliage (aluminium, titane, magnésium), renforcé généralement par des fibres céramiques ou des particules. Ils ont caractérisé par une excellente conductivité thermique et électrique, très bonne résistance à l'usure et aux très hautes températures, ductilité supérieure aux céramiques.

- **Composites à Matrice Céramique (CMC)**

La matrice est en céramique (carbure de silicium, alumine, nitrure de silicium), renforcée par des fibres du même type. Ils ont une capacité à résister à des températures extrêmes (souvent au-delà de (1000°C)), très grande dureté, résistance à l'oxydation et légèreté. Elles suppriment le comportement fragile habituel des céramiques monolithiques.

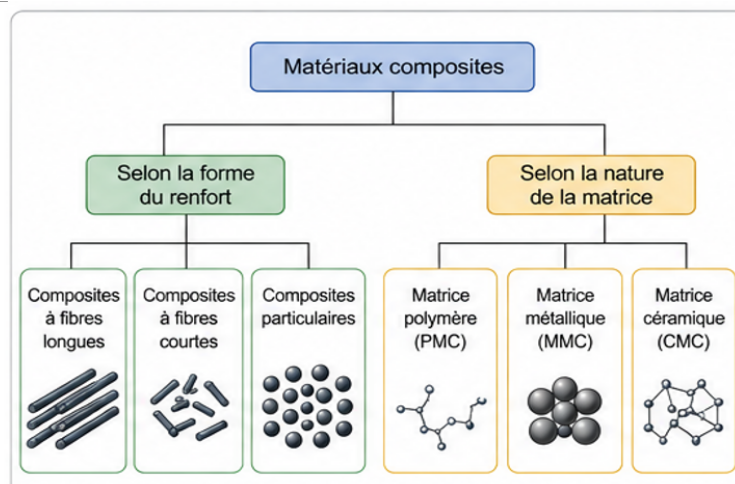


Figure 1.2 : Classification des matériaux composites

1.2.3. Avantages et inconvénients des composites

Les composites sont préférés à d'autres matériaux parce qu'ils offrent des atouts liés à leur légèreté ; leur résistance à la corrosion et aussi à la fatigue ; Leur insensibilité aux produits comme les graisses, les liquides hydrauliques, les peintures et les solvants ; Leur possibilité de prendre plusieurs formes, d'intégrer des accessoires et permettre la réduction de bruit.

Cependant certains inconvénients freinent leur diffusion comme les coûts des matières premières et des procédés de fabrication ; la gestion des déchets engendrés et la réglementation de plus en plus stricte.

L'industrie des matériaux composites doit donc aujourd'hui relever certains défis tels que: la maîtrise des émanations de produits organiques volatiles, par exemple le styrène; La maîtrise des procédés de transformations et des performances des matériaux qui sous-entend une très bonne connaissance des constituants mis en place; La mise en place de technologies et des filières pour la gestion des déchets en fin de vie qui est la partie la plus difficile à satisfaire en raison du caractère thermostable de la plupart des composites.

De plus, dans ce dernier point, le recyclage est actuellement très limité parce que le broyage ou les autres procédés sont très coûteux et fournissent une matière de faible qualité.

Ces quelques inconvénients et défis à relever, ont poussé les chercheurs et les pouvoirs publics à investir et orienter les recherches vers les ressources renouvelables et biodégradables [4].

1.2.4 Limites des composites stratifiés

Les composites stratifiés peuvent présenter des discontinuités aux interfaces entre couches, ce qui entraîne des concentrations de contraintes et des phénomènes de délaminage [3]. Ces limitations ont conduit au développement de nouvelles classes de matériaux, notamment les matériaux à gradient fonctionnel.

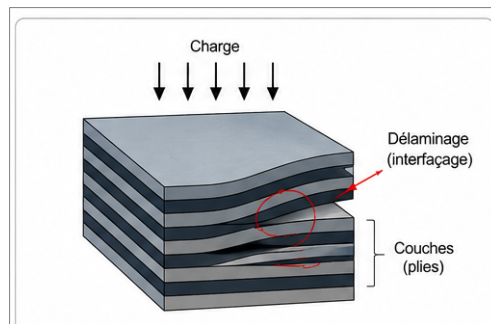


Figure 1.3 : Phénomène de délaminage dans un composite stratifié

1.3. Matériaux fonctionnellement gradués

1.3.1 Définition d'un FGM

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) sont une famille de matériaux qui présentent des compositions et des microstructures évolutives de manière continue à travers leur épaisseur, leur conférant ainsi des propriétés remarquables. Initialement inventé par un scientifique japonais en 1984 dans le but de développer un matériau capable de résister à des températures élevées pour des applications spatiales, le concept de FGM a depuis été largement adopté dans le monde entier, suscitant un intérêt croissant tant dans le domaine académique que dans

l'industrie, notamment pour des applications à haute valeur ajoutée. Les FGM se distinguent des matériaux composites classiques par leur transition progressive entre différentes phases constitutives, ce qui réduit les risques de fissuration et de rupture, et permet de bénéficier des meilleures propriétés de chaque matériau (Figure 1.4) [5].

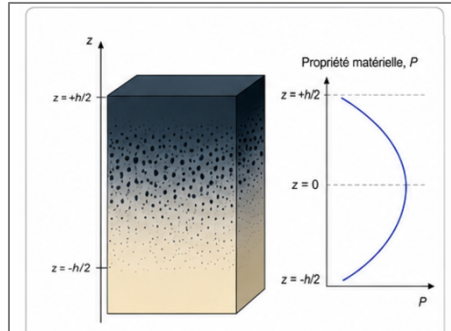


Figure 1.4 : Variation des propriétés dans un matériau FGM

1.3.2 Différents types des matériaux à gradient évalué

Lors des débuts de l'élaboration des matériaux à gradients fonctionnels, le concept était de substituer l'interface actuelle présente dans les composites classiques par une interface graduellement progressive. Face à l'augmentation de la demande pour ce genre de matériau, plusieurs variétés de FGM ont été élaborées afin de répondre aux diverses exigences d'application. Le type de FGM sélectionné est généralement déterminé par l'utilisation prévue. Actuellement, les types de FGM qui sont fabriqués comprennent le FGM à gradient de composition chimique, le FGM à gradient de porosité ainsi que le FGM à gradient microstructural.

1.3.2.1 Matériaux à gradient microstructural

Les matériaux à gradient microstructural (MGM) sont des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) dont la microstructure se modifie de manière progressive dans une ou plusieurs directions. Cette variation de microstructure peut être obtenue en utilisant différents types de matériaux, tels que des céramiques, des métaux, des polymères ou des composites, qui présentent des propriétés microstructurales différentes (Figure 1.5) [6].

On peut diviser les MGMs en deux grandes catégories : les MGMs unidirectionnels et les MGMs multidirectionnels. Les MGMs unidirectionnels possèdent une microstructure qui évolue progressivement dans une direction unique, alors que les MGMs multidirectionnels présentent une microstructure qui change progressivement dans diverses directions [7].

Les caractéristiques des MGMs sont influencées par leur microstructure, laquelle peut présenter des variations en termes de taille des grains, de porosité, de texture, de composition chimique, de répartition de phase et d'orientation cristalline. Il est possible de modifier les caractéristiques

des MGMs afin de satisfaire les besoins particuliers de chaque application en gérant la microstructure de la transition [8].

1.3.2.2. Matériaux à gradient de composition chimique

Les matériaux à gradient de composition chimique, ou Chemical Composition Gradient Materials - CCGMs, constituent une forme de matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) présentant une variation progressive de leur composition chimique sur une distance déterminée. Cette variation de composition est obtenue en utilisant divers matériaux ayant des caractéristiques chimiques distinctes, qui sont associés afin de produire une transition progressive entre les différentes zones. (Figure 1.5) [9].

1.3.2.3. Matériaux à gradient de porosité

Les matériaux à gradient de porosité (PGMs) représentent une catégorie de matériaux à propriétés graduées (FGMs), caractérisés par une variation progressive de leur porosité dans une direction spécifique. À l'inverse des matériaux traditionnels ayant une structure poreuse homogène, les PGMs offrent une distribution continue de la dimension et de la configuration des pores. On peut obtenir cette variation de la porosité par divers moyens, comme l'incorporation de particules ayant une porosité élevée, ou encore par le recours à des procédés de fabrication sophistiqués tels que la stéréolithographie. Les PGMs affichent une combinaison distinctive de caractéristiques, telles que la légèreté, la solidité, l'aptitude à absorber de l'énergie et la conductivité thermique, illustrée par la figure I.5 [10].

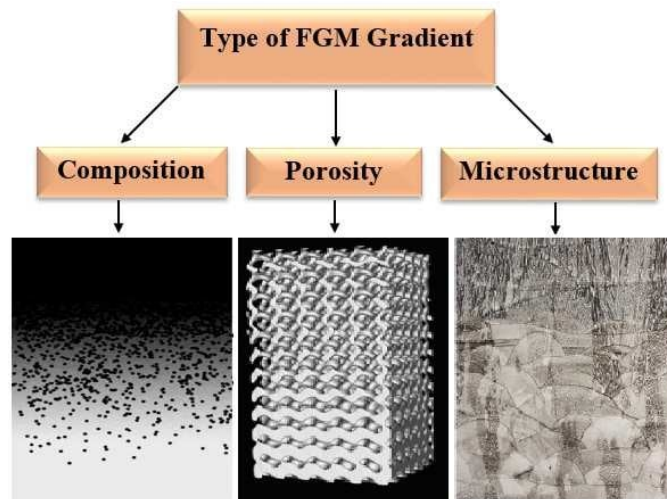


Figure 1.5. Classification des matériaux fonctionnellement gradués selon le type de gradient :

a) composition, b) porosité et c) microstructure [6]

1.3.3 Avantages et Inconvénients des matériaux FGM

L'utilisation croissante des matériaux fonctionnellement gradués dans divers domaines est indéniable. Ces matériaux offrent de multiples avantages [4, 11]:

- Leur capacité à assurer une excellente adhérence entre différents matériaux, tels que la combinaison de céramique et de métal.
- La possibilité de créer des structures complexes, ce qui réduit les coûts d'assemblage.
- La capacité de fabriquer des matériaux aux propriétés particulières, comme un coefficient de Poisson négatif ou une dilatation quasi-nulle.
- La possibilité de dimensionner les structures avec des propriétés spécifiques uniquement dans les axes de chargement.
- Un meilleur contrôle des contraintes grâce à l'absence d'interfaces nettes.
- Une faible sensibilité à la fatigue.
- Une faible sensibilité à la corrosion.
- Une ténacité élevée en cas de rupture.

La fabrication des matériaux fonctionnellement gradués pose des défis en raison de l'inadéquation entre leurs différentes propriétés. Des contraintes telles que la taille, la morphologie et la température peuvent influencer leur fabrication.

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent une porosité élevée et une faible adhérence entre leurs différents composants. En effet, la composition d'un matériau FG est souvent déterminée par des températures incompatibles entre elles, comme la température des céramiques et celle des métaux. Cela résulte d'une application difficile du matériau FG.

Les procédés de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués sont coûteux, car ils nécessitent des conditions de production en atmosphère protectrice ou sous basse pression [8].

1.4 Domaines d'application

Les FGM sont largement privilégiés dans de nombreux domaines en raison de leurs caractéristiques essentielles. Ils sont légers, résistants et durables, offrant un énorme potentiel d'application dans diverses industries. Les domaines d'application actuels comprennent l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical, la défense, l'électricité/électronique, l'énergie, la marine, l'optoélectronique et la thermoélectronique (Figure 1.6) [5,12].

Les FGM sont prometteurs pour des conditions de fonctionnement difficiles, tels que les revêtements résistants à l'usure dans l'industrie minière ou les boucliers thermiques de fusées. Ils sont également idéaux pour réduire les incompatibilités thermomécaniques dans les liaisons métal-céramique et prévenir le décollement. Les futurs domaines d'application des FGM incluent des applications nécessitant des propriétés mécaniques, thermiques et chimiques exceptionnelles dans des environnements de travail sévères.

Ces matériaux seront également utilisés lorsque des combinaisons de fonctions incompatibles, comme la dureté et la ténacité, seront nécessaires. La réduction des coûts de production ouvrira de nouvelles perspectives pour les applications futures des matériaux à gradation fonctionnelle [13].

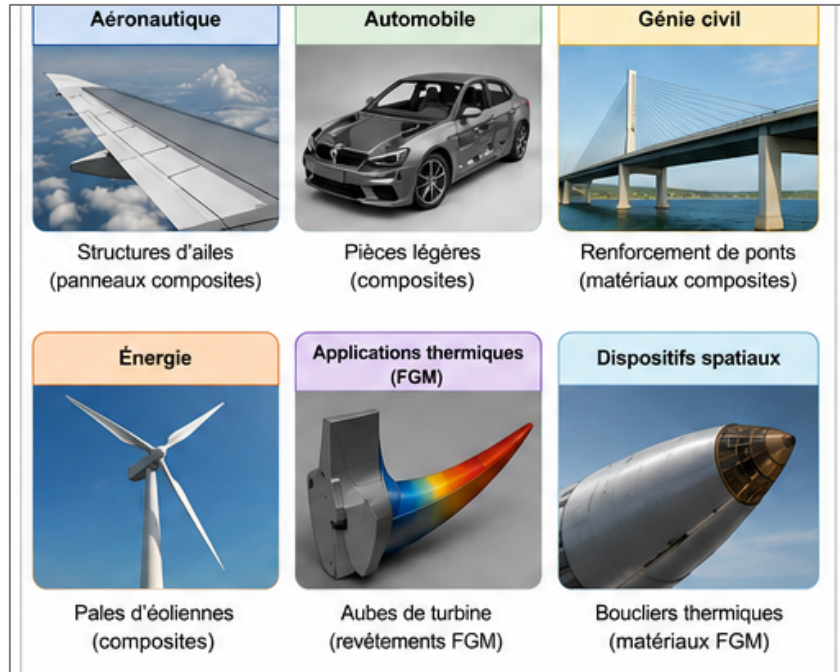


Figure 1.6 : Applications des composites et FGM

1.5. Conclusion

Les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel constituent des solutions avancées pour répondre aux exigences des structures modernes. Leur étude est essentielle pour le développement de modèles mécaniques fiables, notamment dans l'analyse des structures minces, qui sera abordée dans les chapitres suivants.

Chapitre 2 : Flexion des plaques composites et FGM : Modèle mathématique

2.1. Introduction

Dans le cadre de l'analyse des structures minces telles que les plaques, la modélisation précise du comportement mécanique de ces matériaux revêt une importance particulière. Les théories classiques des plaques montrent certaines limitations, notamment dans la prise en compte des effets de cisaillement transversal, ce qui a conduit au développement de théories plus avancées telles que la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (Higher-Order Shear Deformation Theory, HSDT). Cette approche permet de représenter de manière plus réaliste la distribution des déformations à travers l'épaisseur, sans recourir à des coefficients de correction du cisaillement.

Ce chapitre est consacré à l'établissement de la formulation théorique décrivant le comportement des plaques en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) en présence de porosité, en s'appuyant sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). L'objectif est de développer un modèle permettant de prédire avec précision les déformations et les contraintes sous chargement mécanique.

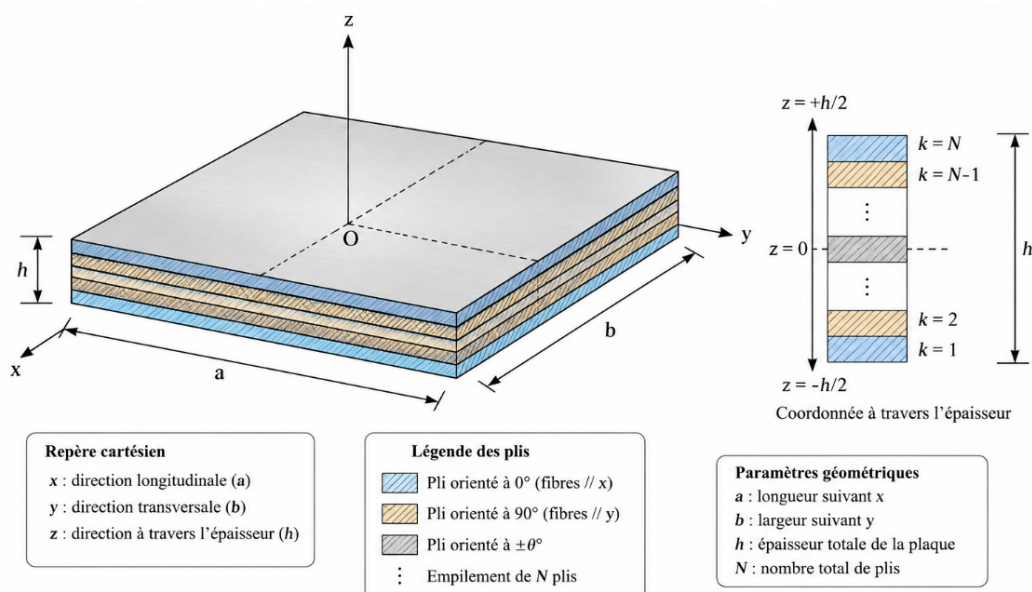


Figure 2.1 : Géométrie d'une plaque composite et système de coordonnées

2.2. Formulation mathématique

2.2.1 Champ des déplacements

La déformation de la plaque composite stratifiée rectangulaire (Figure 2.1), de longueurs a et b suivant les axes x et y , et d'épaisseur h suivant l'axe z , dont le plan moyen coïncide avec le plan x - y du système de coordonnées, est représentée par u , v et w respectivement selon les directions x , y et z .

Le déplacement en tout point (x, y, z) , selon la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), dans une plaque composite/sandwich ou une plaque FGM autour de la surface moyenne de la structure, est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

Où u_0 , v_0 , w_0 représentent les déplacements au plan moyen de la plaque en tout point (x, y) suivant respectivement les directions x , y et z . φ_x , φ_y sont les rotations d'ordre supérieur de la normale au plan moyen dues à la déformation de cisaillement autour des axes x et y , respectivement. En supposant que $\varphi_x = -\partial \varphi(x, y) / \partial x$ et $\varphi_y = -\partial \varphi(x, y) / \partial y$ [14], le champ de déplacement de la présente théorie peut être réécrit sous une forme plus simple comme suit

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

$f(z)$ est la fonction de déformation de cisaillement transverse, qui doit satisfaire les conditions d'absence de contraintes de cisaillement transverses sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. La fonction utilisée dans le présent travail est celle développée par Zaoui et al. [15].

$$f(z) = \frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} e^{(hz/\pi)} \left(\pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) - \frac{\pi h^3}{\pi^4 + h^4} \quad (3)$$

2.2.2 Relations déformation-déplacement

En considérant la théorie des petites déformations, les relations linéaires déformation-déplacement conformément au champ de déplacement considéré, pour la plaque s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + f(z) \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \varphi_x \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \varphi_y
 \end{aligned} \tag{4}$$

2.2.3 Équations constitutives

L'équation constitutive tridimensionnelle du matériau orthotrope peut être exprimée comme suit [16] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Où σ_{ij} et ε_{ij} représentent les composantes des vecteurs de contrainte et de déformation. Les C_{ij} sont constantes de rigidité du matériau, et tous ces paramètres sont définis dans les directions principales du matériau. Pour la modélisation d'une plaque composite autour du plan moyen selon les théories ESL, en considérant les conditions de contrainte plane dans la direction de l'épaisseur, l'équation constitutive réduite des stratifiés à plis orientés peut être exprimée, comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Où $\bar{Q}_{ij}$ sont les constantes réduites du matériau, lesquelles peuvent être exprimées en fonction des constantes C_{ij} dans l'équation (5).

Pour une plaque composite stratifiée, les coefficients $\bar{Q}_{ij}$ constituent une fonction discrète dépendant de l'orientation des fibres d'une couche à l'autre. En revanche, pour une plaque en

matériau à gradient fonctionnel (FGM), les coefficients $\bar{Q}_{ij}$ deviennent une fonction continue de la coordonnée à travers l'épaisseur.

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (7)$$

Dans la présente étude, la variation des propriétés matérielles $P(z)$ à travers l'épaisseur des plaques FGM est considérée, selon une loi de puissance en tenant compte de l'effet de la porosité, exprimée comme suit [17, 18] :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p - \frac{1}{2} (P_c + P_m) \xi \quad (8)$$

Où P_m et P_c sont les propriétés physiques telles que le module d'Young, la masse volumique aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque FGM, respectivement. p est l'indice de variation des propriétés pour la plaque FGM. La porosité est définie par le paramètre de porosité ξ [19].

2.2.4 Équations différentielles gouvernantes

Les équations différentielles gouvernantes de la plaque sont obtenues à partir du principe des déplacements virtuels. Sous forme mathématique, il s'exprime comme suit :

$$\delta U + \delta W = 0 \quad (9)$$

Où δU , δW sont les variations d'énergie de déformation et de travail effectué, respectivement. La première variation de l'énergie de déformation U de la plaque due aux contraintes internes est exprimée comme suit :

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \quad (10)$$

Où A est la surface du plan médian normale à la fonction de l'épaisseur. En substituant la variation des déformations de l'équation (4) et intégrant l'équation (10) par rapport à z , l'équation (10) peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A \left[N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{xx}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - M_{xx}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_{yy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - M_{yy}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial y^2} \right. \\ \left. + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x \partial y} + Q_x \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right] \delta A \end{aligned} \quad (11)$$

Les résultantes de contrainte N_{ij} , les résultantes de moment M_{ij} apparaissant dans l'équation (11) sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_{ij} \\ M_{ij} \\ M_{ij}^0 \end{Bmatrix} = \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} Q_{xz}^0 \\ M_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial f}{\partial z} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (12)$$

Où k est le numéro de la couche dans la plaque stratifiée et il est pris comme 1 pour les plaques FGM. La première variation du travail effectué sous l'action de la force mécanique est donnée comme suit :

$$\delta W = \int_A q \delta w_0 dA \quad (13)$$

Où q est la charge transversale. En substituant δU et δW des équations (11) et (13) dans l'équation (9), puis en effectuant l'intégration par parties pour transférer les dérivées des variables admissibles et en regroupant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \varphi$, Les cinq équations d'Euler-Lagrange s'expriment comme suit :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (14a)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (14b)$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yy}^b}{\partial y^2} + q = 0 \quad (14c)$$

$$\delta \varphi : \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yy}^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (14d)$$

En remplaçant l'équation constitutive (6) dans l'équation (12) et les résultats obtenus dans l'équation (14), les équations d'équilibre peuvent être décrites en fonction des déplacements comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\ - B_{11}^s \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\ - B_{22}^s \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + q = 0 \end{aligned} \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} \delta\varphi : B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - H_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (15d)$$

Où $A; B; D; B^s; D^s; H^s; A^s$ sont les rigidités de la plaque composite données par:

$$(A, B, D, B^s, D^s, H^s)_{ij} = \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} (1, z, z^2, f, zf, f^2) \bar{Q}_{ij}(z) dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (16a)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} g^2(z) \bar{Q}_{44}(z) dz = \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} g^2(z) \bar{Q}_{55}(z) dz \quad (16b)$$

2.3. Solutions de Navier

La précision des théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur proposées est étudiée en utilisant une solution analytique ou une solution de Navier pour les plaques composites stratifiées à plis croisés et les plaques sandwich soumises à des charges transversales et dans le plan avec des conditions aux limites simplement appuyées qui sont exprimés comme suit :

$$x = 0, a : v_0 = \omega_0 = \varphi = N_{xx} = M_{xx} = M_{xx}^0 = 0 \quad (17a)$$

$$y = 0, b : u_0 = \omega_0 = \varphi = N_{yy} = M_{yy} = M_{yy}^0 = 0 \quad (17b)$$

Les séries trigonométriques suivantes satisfont aux conditions aux limites d'appui simple :

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos \lambda x \sin \mu y \quad (18a)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin \lambda x \cos \mu y \quad (18b)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^0 \sin \lambda x \sin \mu y \quad (18c)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^0 \sin \lambda x \sin \mu y \quad (18d)$$

Où $\lambda = m\pi / a, \mu = n\pi / b$. La charge transversale q est également étendue dans la série des sinus de Fourier double comme:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y \quad (19)$$

Où $q_{mn} = q_0$ pour la charge répartie sinusoïdale.

Substitutions les équations (18a-d) et 19) dans l'équation (15a-d) et en recueillant les déplacements pour n'importe quelle valeur de m et n, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn}^0 \\ v_{mn}^0 \\ x_{mn}^0 \\ y_{mn}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Où : } k_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2, \quad k_{12} = (A_{12} + A_{66})\lambda\mu, \quad k_{13} = -B_{11}\lambda^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2, \\ k_{14} &= -B_{11}^s\lambda^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda\mu^2, \quad k_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2, \quad k_{23} = -B_{22}\mu^2 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2\mu, \\ k_{24} &= -B_{22}^s\mu^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2\mu, \quad k_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4, \\ k_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4, \\ k_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2, \end{aligned} \quad (21)$$

2.4. Conclusion

La théorie HSDT constitue une approche avancée permettant une modélisation précise du comportement des plaques, notamment en présence de matériaux composites et FGM. Elle offre une meilleure représentation des effets de cisaillement transversal et constitue un outil essentiel pour l'analyse des structures modernes.

Chapitre 3 : Résultats et discussion

3.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation et à l'analyse des résultats numériques obtenus à partir de la formulation développée au Chapitre 3. L'objectif est d'évaluer le comportement mécanique des plaques composites et en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) avec porosité, en utilisant la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). Une étude paramétrique est réalisée afin d'examiner l'influence des différents paramètres sur la réponse des structures.

3.2. Analyse de la flexion des plaques composites : Validation du modèle

La flexion d'une plaque carrée stratifiée symétrique simplement appuyée de type croisé ([0/90/90/0]), soumise à un chargement sinusoïdal (SSL), est étudiée à l'aide de la théorie HSDT proposée. Les propriétés matérielles suivantes sont considérées pour la plaque stratifiée :

$$E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2 \text{ et } \nu_{12} = 0.25.$$

La flèche centrale et les contraintes sont présentées sous forme adimensionnelle en utilisant les relations suivantes :

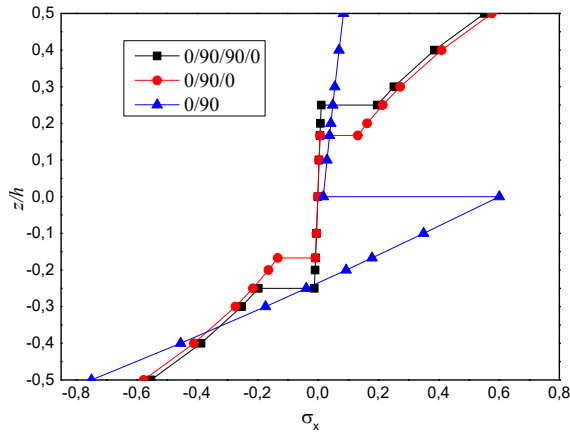
$$\begin{aligned} \bar{w}_0 = w_0 \left(\frac{100h^3 E_2}{b^4 q_0} \right), \quad \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{h^2}{b^4 q_0} \right), \quad \bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{h^2}{b^4 q_0} \right), \\ \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(\frac{h^2}{b^4 q_0} \right), \quad \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{h^2}{b^4 q_0} \right), \quad \bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(\frac{h^2}{b^4 q_0} \right), \end{aligned}$$

La flèche centrale adimensionnelle ainsi que les contraintes obtenues à l'aide de la HSDT proposée sont présentées dans le Tableau 1, en comparaison avec les solutions exactes obtenues par Pagano [20] et celui trouvés par Pathan et al. [21]. On peut observer, que la théorie proposée utilisant une nouvelle fonction et de déformation de cisaillement transversal permettent de prédire des résultats très proches de ceux obtenus par la solution d'élasticité présentée dans la Référence [21].

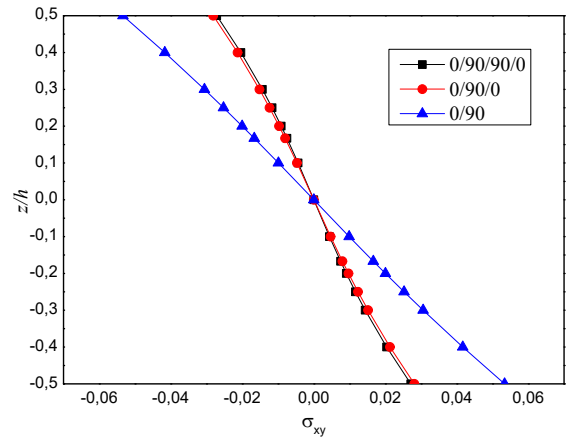
Pour des plaques modérément épaisses, la variation des contraintes adimensionnelles pour trois types de stratifiés est présentée dans la Figure 3.1.

Tableau 01 : Flèche centrale et contraintes adimensionnelles pour une plaque stratifiée carrée simplement appuyée de type [0/90/90/0] soumise à un chargement sinusoïdal (SSL).

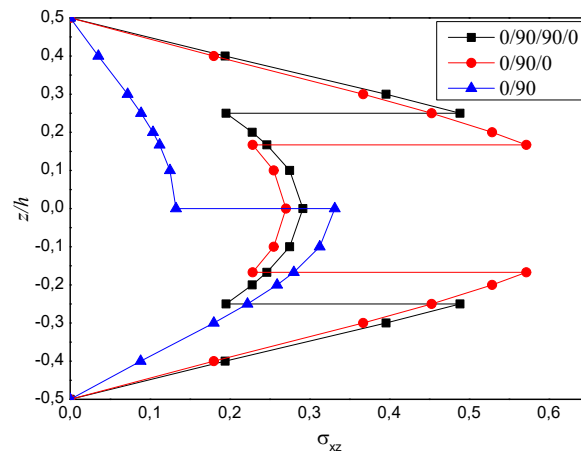
a/h	Source	$\bar{w}_0\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};0\right)$	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{h}{4}\right)$	$\bar{\sigma}_{xy}\left(0;0;\frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yz}\left(\frac{a}{2};0;0\right)$	$\bar{\sigma}_{xz}\left(0;\frac{b}{2};0\right)$
4	3D Exacte [20]	1.9540	0.7200	0.6630	0.0470	0.2910	0.2190
	HSDT [21]	1.9179	0.6988	0.6364	0.0458	0.2968	0.2248
	Présente	1.9179	0.6987	0.6987	0.0458	0.2519	0.2247
10	3D Exacte [20]	0.7430	0.5590	0.4010	0.0280	0.1960	0.3010
	HSDT [21]	0.7235	0.5522	0.3927	0.0271	0.1937	0.3049
	Présente	0.7234	0.5521	0.1969	0.0271	0.1625	0.2916
20	3D Exacte [20]	0.5170	0.5430	0.3080	0.0230	0.1560	0.3280
	HSDT [21]	0.5086	0.5410	0.3056	0.0299	0.1546	0.3293
	Présente	0.5086	0.5409	0.2492	0.0229	0.1303	0.3133
100	3D Exacte [20]	0.4390	0.5390	0.2760	0.0220	0.1410	0.3370
	HSDT [21]	0.4344	0.5388	0.2709	0.0213	0.1389	0.3389
	Présente	0.4344	0.5387	0.2685	0.0213	0.1175	0.3218



(a) Contrainte normale



(b) Contrainte axiale



(c) Contrainte de cisaillement transversale

Figure 3.1 : Distribution des contraintes normales et de cisaillement à travers l'épaisseur des plaques stratifiées ($a/h=10$).

La distribution de la contrainte normale (Figure 3.1a) à travers l'épaisseur présente un comportement non linéaire, caractéristique des plaques stratifiées. On observe une variation significative entre les différentes configurations d'orientation des plis ($[0/90/90/0]$), ($[90/0/0/90]$) et ($[0/90]$). Les discontinuités ou changements de pente dans les courbes correspondent aux interfaces entre les couches, ce qui reflète la variation des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre. Cela met en évidence l'effet de l'anisotropie du matériau composite.

Concernant la contrainte axiale (Figure 3.1b), elle varie de manière quasi linéaire à travers l'épaisseur, ce qui est conforme au comportement classique en flexion des plaques. On remarque que les contraintes sont en traction au-dessus du plan médian et elles deviennent compressives en dessous du plan médian. Cette répartition confirme que le plan médian correspond à la fibre neutre, où la contrainte axiale est nulle. Les différences entre les courbes sont liées à l'orientation des fibres, qui influence la rigidité en traction/compression.

La contrainte de cisaillement transversal (Figure 3.1c) présente une distribution parabolique à travers l'épaisseur. Elle est maximale au voisinage du plan médian et elle s'annule aux surfaces supérieure et inférieure, conformément aux conditions de surface libre. On observe également que les différentes théories ou fonctions de cisaillement donnent des résultats très proches, ce qui explique le chevauchement des courbes. Cela confirme la cohérence et la robustesse des modèles utilisés.

L'ensemble des résultats met en évidence l'influence significative de la séquence d'empilement sur la distribution des contraintes ; la capacité des théories utilisées à reproduire correctement la variation non linéaire des contraintes normales, la distribution linéaire des contraintes axiales, et la forme parabolique des contraintes de cisaillement. Ces observations confirment la pertinence de l'approche adoptée pour l'analyse des plaques stratifiées.

3.3. Analyse de l'effet de porosité sur la flexion des plaques FGM

Dans cette partie, on va étudier la flexion statique des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM), composée d'aluminium (Al) et d'oxyde d'aluminium (Al_2O_3), dont les propriétés matérielles varient à travers l'épaisseur selon la loi de puissance (*Power Law*), en utilisant la théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) proposée.

Le module d'Young de l'aluminium (métal), E_m et celui de l'oxyde d'aluminium (céramique), E_c , sont pris respectivement égaux à 70 GPa et 380 GPa , tandis que le coefficient de Poisson

des deux constituants est supposé égal à 0.3. Il faut également noter que le module d'Young et le module de cisaillement varient selon l'épaisseur de la plaque, tandis que le coefficient de Poisson reste constant sur toute l'épaisseur.

La flèche centrale et les contraintes sont calculées en utilisant les formes adimensionnelles suivantes :

$$\bar{w}_0 = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w_0(a/2, b/2), \quad \bar{u}_0 = \frac{100h^3 E_c}{a^4 q_0} u_0(0, a/2, z),$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{h}{aq_0} \sigma_{xx}(a/2, b/2, z), \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{h}{aq_0} \sigma_{xy}(0, 0, z), \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \sigma_{xz}(0, b/2, z)$$

Tableau 02 : Contraintes et déplacements adimensionnels d'une plaque FGM Al/Al_2O_3 soumise à un chargement sinusoïdal, pour différentes valeurs de l'indice de puissance p ($a/h=10$).

p	Source	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
1	Quasi-3D [22]	0.6436	0,5875	1,5062	0,6081	0,251
	HSDT [23]	0.6414	0,5890	1,4898	0,6111	0,2608
	HSDT 2D [21]	0.6407	0,5889	1,4891	0,6110	0,2636
	Présente	0.6407	0,5888	1,4891	0,6109	0,2626
2	Quasi-3D [69]	0,9012	0,757	1,4147	0,5421	0,2496
	HSDT [63]	0,8984	0,7573	1,396	0,5442	0,2737
	HSDT 2D [21]	0,8972	0,7571	1,3949	0,544	0,2772
	Présente	0,8972	0,7572	1,3949	0,5439	0,2778
4	Quasi-3D [22]	1,0541	0,8823	1,1985	0,5666	0,2362
	HSDT [23]	1,0502	0,8815	1,1794	0,5669	0,2537
	HSDT 2D [21]	1,0485	0,8817	1,1775	0,5666	0,2594
	Présente	1,0483	0,882	1,1774	0,5665	0,261
8	Quasi-3D [22]	1,083	0,9738	0,9687	0,5879	0,2262
	HSDT [23]	1,0763	0,9746	0,9477	0,5858	0,2088
	HSDT 2D [21]	1,0787	0,9811	0,9519	0,5881	0,2182
	Présente	1,0741	0,9751	0,9456	0,5854	0,2143

3.3.1 Exemple 1 : Dans cet exemple, la flèche centrale, le déplacement axial et les contraintes de flexion adimensionnelle d'une plaque carrée en matériau à gradient fonctionnel (FGM), soumise à une charge sinusoïdale avec des conditions aux limites simplement appuyées, obtenues pour différentes valeurs de l'indice de puissance , sont présentées dans le Tableau 2. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de deux formulations quasi-3D différentes proposées dans les Références [22, 23], ainsi qu'aux résultats des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) à cinq inconnues rapportés dans la Référence [21].

On observe que les résultats obtenus par la théorie proposée sont plus proches de ceux rapportés par les formulations quasi-3D des Références [21], comparativement aux résultats prédits à l'aide des autres fonctions de déformation de cisaillement.

Tableau 3: Contraintes et déplacements adimensionnels d'une plaque FGM Al/Al_2O_3 soumise à un chargement sinusoïdal, pour différentes valeurs de l'indice de gradient et du paramètre de porosité ($a/h=10$).

p	ξ	Source	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
1	0	HSDT 2D [21]	0,6402	0,5891	1,4889	0,6109	0,266
		Présente	0,6407	0,5888	1,4891	0,6109	0,2626
	0,05	HSDT 2D [21]	0,6994	0,6324	1,5022	0,6038	0,2687
		Présente	0,6999	0,632	1,5023	0,6038	0,2652
	0,1	HSDT 2D [21]	0,7706	0,6834	1,5178	0,5954	0,2716
		Présente	0,7711	0,683	1,518	0,5954	0,2681
	0,15	HSDT 2D [21]	0,8576	0,7445	1,5366	0,5853	0,2748
		Présente	0,8581	0,7441	1,5368	0,5852	0,2713
	0,2	HSDT 2D [21]	0,9664	0,8195	1,5598	0,5728	0,2785
		Présente					
2	0	HSDT 2D [21]	0,8964	0,7573	1,3944	0,5438	0,2795
		Présente	0,8972	0,7571	1,3949	0,5439	0,2778
	0,05	HSDT 2D [21]	1,0196	0,838	1,4009	0,5276	0,284
		Présente	1,0205	0,838	1,4014	0,5227	0,2825
	0,1	HSDT 2D [21]	1,8119	0,9418	1,4091	0,5069	0,2891
		Présente	1,1828	0,9418	1,4095	0,507	0,2879
	0,15	HSDT 2D [21]	1,4055	1,081	1,4196	0,4793	0,295
		Présente	1,4066	1,0812	1,4201	0,4794	0,2941
	0,2	HSDT 2D [21]	1,7327	1,2796	1,4342	0,44	0,3017
		Présente					
4	0	HSDT 2D [21]	1,0472	0,8818	1,1765	0,5664	0,262
		Présente	1,0483	0,882	1,1774	0,5665	0,261
	0,05	HSDT 2D [21]	1,2268	0,9961	1,1566	0,5538	0,2674
		Présente	1,2281	9964	1,1576	0,554	0,2667
	0,1	HSDT 2D [21]	1,4817	1,1526	1,1288	0,5376	0,2741
		Présente	1,4833	1,153	1,1299	0,5377	0,2737
	0,15	HSDT 2D [21]	1,8722	1,3832	1,0873	0,5151	0,2826
		Présente	1,8741	1,384	1,0885	0,5152	0,2828
	0,2	HSDT 2D [21]	2,5458	1,7656	1,0173	0,4801	0,2936
		Présente	2,5483	1,7669	1,0186	0,4802	0,2946
8	0	HSDT 2D [21]	1,0772	0,9815	0,9508	0,5879	0,2208
		Présente	1,0741	0,9751	0,9456	0,5854	0,2143
	0,05	HSDT 2D [21]	1,2728	1,1154	0,9126	0,5787	0,2222
		Présente	1,2685	1,1072	0,907	0,576	0,2149
	0,1	HSDT 2D [21]	1,5579	1,3015	0,8623	0,5678	0,2242
		Présente	1,5551	1,2906	0,8563	0,5647	0,216
	0,15	HSDT 2D [21]	2,013	1,5835	0,7907	0,5542	0,2274
		Présente	2,0026	1,5678	0,7841	0,5506	0,2177
	0,2	HSDT 2D [21]	2,8582	2,0778	0,674	0,5359	0,2329
		Présente	2,8384	2,0519	0,6668	0,5315	0,2206

3.3.2 Exemple 2 : Le problème de flexion statique des plaques FGM carrées sous l'effet de la porosité à travers l'épaisseur, soumise à un chargement sinusoïdal (SSL) et à des conditions aux limites simplement appuyées, est considéré dans cette section. La variation des propriétés matérielles ainsi que de la porosité à travers l'épaisseur est définie conformément à l'Équation (8). Le paramètre de porosité ξ varie de 0 à 0.2.

le Tableau 3 présente le déplacement axial, le déplacement transversal, ainsi que les contraintes de flexion et de cisaillement adimensionnelles qui sont calculés pour différentes valeurs du paramètre de porosité ξ et d'indice de puissance p . Les résultats trouvés sont comparés à ceux la HSDT donnés par [21] où une bonne corrélation est remarquée.

A partir de valeurs calculées en utilisant la théorie actuelle de la déformation de cisaillement, on observe que les valeurs des paramètres de porosité ξ et d'indice de matériel p ont un rôle important sur la flèche non dimensionnel car elle augmente avec l'augmentation de l'indice de porosité ξ et de l'indice de puissance, cela est dû à la diminution de la rigidité des plaques.

La variation à travers l'épaisseur du déplacement axial, de la flèche, des contraintes de flexion et des contraintes de cisaillement transversal, pour différentes valeurs du paramètre de porosité avec $p = 4$ et le rapport $a / h = 10$, est illustrée dans les Figures 3.2-3.5.

La Figure 3.2 présente la distribution du déplacement axial à travers l'épaisseur de la plaque FGM. Il ressort de cette figure que l'effet de la porosité exerce une influence directe significative, particulièrement au-dessous du plan médian de la plaque FGM, où il entraîne une augmentation du déplacement axial.

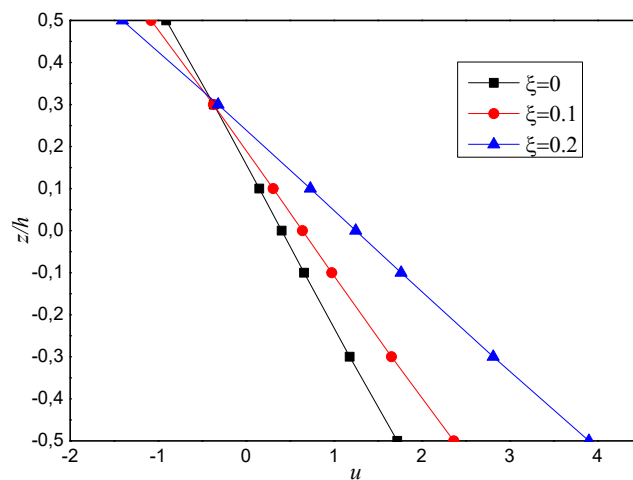


Figure 3.2: Variation du déplacement axial $\bar{u}$ à travers l'épaisseur (z/h) d'une plaque FGM carrée type (Al / Al_2O_3) pour différentes valeurs de porosité (ξ) ($p = 4, a / h = 10$)

Dans la Figure 3.3, la variation de la flèche centrale $\bar{w}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de porosité ξ est présentée. A partir de cette illustration, on trouve que la flèche augmente avec l'augmentation de la porosité ce qui signifie que la porosité engendre la diminution de la rigidité des plaques FGM.

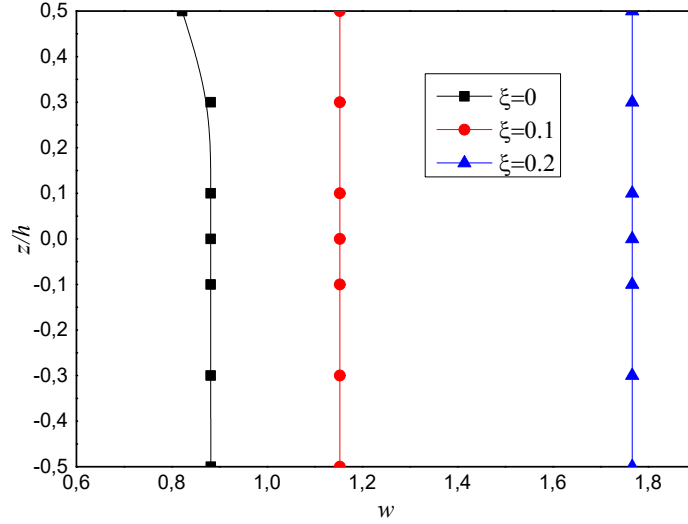


Figure 3.3. : Variation de la flèche $\bar{w}$ à travers l'épaisseur (z / h) d'une plaque FGM carrée type (Al / Al_2O_3) pour différentes valeurs de porosité (ξ) ($p = 4, a / h = 10$)

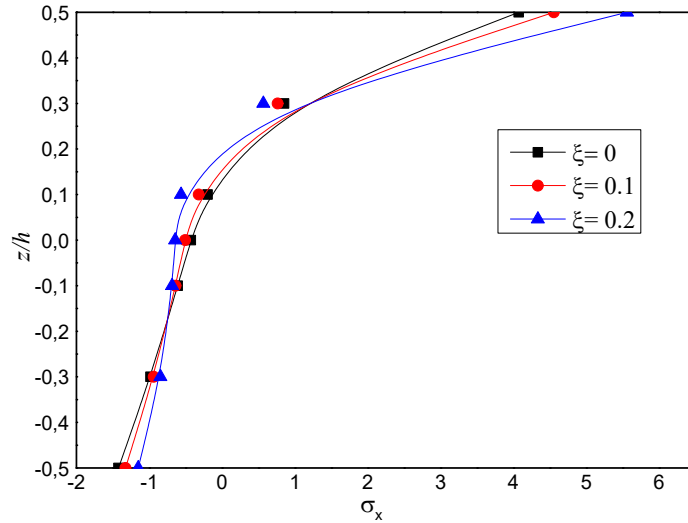


Figure 3.4 : Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur (z / h) d'une plaque FGM carrée type (Al / Al_2O_3) pour différentes valeurs de porosité (ξ) ($p = 4, a / h = 10$)

L'influence de l'indice de porosité ξ sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ de la plaque FG imparfaite est donnée dans la Figure 3.4. Il peut être observé que l'augmentation de l'indice de porosité

entraîne une augmentation des contraintes. Cela s'explique par le fait que la porosité réduit la rigidité de la plaque. On remarque aussi que les contraintes sont de nature traction au-dessus du plan médian et de nature compression en dessous du plan médian.

La Figure 3.5 montre l'effet du paramètre de porosité ξ sur la variation de la contrainte de cisaillement transversale non dimensionnelles $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur z d'une plaque FG carrée simplement appuyée sous une charge uniforme. D'après les courbes présentées, on remarque que la plaque FG imparfaite avec le paramètre de porosité $\xi = 0.2$ donne une contrainte de cisaillement transversale maximale $\bar{\sigma}_{xz}$.

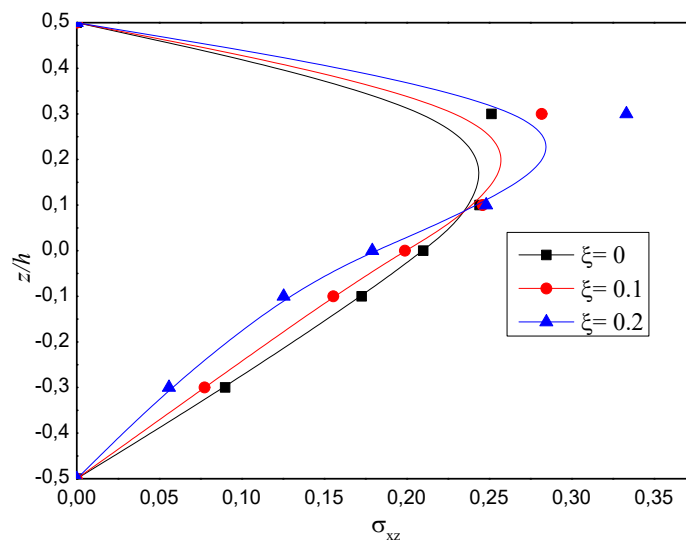


Figure 3.5. : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur (z / h) d'une plaque FGM type (Al / Al₂O₃) pour différentes valeurs de porosité (ξ) ($p = 4, a / h = 10$)

3.4. Conclusion

Ce chapitre a permis de valider la formulation proposée et d'analyser l'influence des principaux paramètres sur le comportement des plaques FGM avec porosité. Les résultats démontrent la pertinence de la théorie HSDT pour une modélisation précise et fiable.

Les conclusions obtenues serviront de base pour les perspectives de recherche et les améliorations futures présentées dans la conclusion générale.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail a été consacré à l'étude du comportement mécanique des plaques en matériaux composites et à gradient fonctionnel (FGM), en tenant compte de la présence de porosité, à travers une formulation basée sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

Dans un premier temps, une analyse générale des matériaux composites et des FGM a permis de mettre en évidence leurs avantages ainsi que leurs limites, notamment en termes de discontinuités interfaciales pour les composites stratifiés et de complexité de modélisation pour les FGM. L'introduction de la porosité, souvent inévitable lors des procédés de fabrication, a également été identifiée comme un facteur influençant significativement les propriétés mécaniques.

Par la suite, une formulation théorique rigoureuse a été développée en s'appuyant sur la HSDT, permettant une description précise du champ de déplacement et une meilleure représentation des effets de cisaillement transversal. L'intégration de la variation des propriétés matérielles ainsi que de la porosité dans le modèle a permis d'obtenir une approche plus réaliste du comportement des plaques étudiées.

Les résultats numériques obtenus ont montré une bonne concordance avec les solutions disponibles dans la littérature, validant ainsi la pertinence du modèle proposé. L'étude paramétrique a mis en évidence l'influence significative de l'indice de gradient, du coefficient de porosité et du rapport d'aspect sur la déflexion et la distribution des contraintes. Il a été démontré que l'augmentation de la porosité entraîne une diminution de la rigidité et une augmentation des déformations, tandis que la variation du gradient matériel modifie la distribution des contraintes à travers l'épaisseur.

Ainsi, ce travail confirme l'importance d'utiliser des modèles avancés tels que la HSDT pour l'analyse des structures en matériaux composites et FGM, en particulier lorsque des effets complexes tels que la porosité sont pris en compte.

Dans la continuité de ce travail, plusieurs perspectives de recherche peuvent être envisagées :

- L'extension de l'étude aux **comportements dynamiques** (vibrations libres et forcées) des plaques FGM avec porosité ;
- L'analyse de la **stabilité et du flambement** des structures sous différents types de chargements ;
- L'introduction de **modèles de porosité plus complexes** (porosité non uniforme, distribution aléatoire) ;
- L'étude des **effets thermomécaniques**, en particulier pour les applications à haute température ;
- L'extension du modèle à des **structures plus complexes** (coques, poutres, structures sandwich).

Ces perspectives ouvrent la voie à des travaux futurs visant à améliorer encore la précision et l'applicabilité des modèles développés pour les structures en matériaux avancés.

Références Bibliographiques

- [1] J. R. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, 1999.
- [2] R. M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., CRC Press, 1998.
- [3] D. Hull and T. W. Clyne, *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge University Press, 1996.
- [4] Manel, H. Etude numérique avec comparaison expérimentale des propriétés thermophysiques des matériaux composites à matrice polymère, Batna, 2011.
- [5] S. Suresh and A. Mortensen, *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, IOM Communications, 1998.
- [6] Suresh, S. (1998). Functionally graded materials: challenges and opportunities. *Materials Science and Engineering: A*, 238(2), 137-148.
- [7] Wang, X., & Niu, X. (2019). Microstructure Design and Characterization of Functionally Graded Materials. In *Functionally Graded Materials* (pp. 47-73). Springer, Singapore.
- [8] Miyamoto, Y. (2001). *Functionally graded materials: design, production, and applications*. Kluwer Academic Publishers.
- [9] R. Ebrahimi, M. Ataie, M. Miri, "A review on gradient chemical composition in functionally graded materials (FGMs)," *Journal of Materials Research and Technology*, vol. 9, no. 2, pp. 2681-2695. 2020.
- [10] L. Yang., "Design and fabrication of porous gradient biomaterials," *Materials Science and Engineering: C*, vol. 51, pp. 315-322, 2015.
- [11] Y., Rahmoun Z., Yagoubi, Effet de la température sur les matériaux FGM en utilisant la théorie de déformation non local, université de Mostaganem, Mémoire de Master (2019/2020)
- [12] P. Jaquinet, *Utilisation des matériaux composites*, Edition Hermès, paris, 1991.
- [13] M., Benadouda, Etude du comportement mécanique des structures épaisses en tenant compte de l'effet de la microstructure fonctionnellement graduée, Thèse de doctorat (2018/2019)
- [14] H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, T. P. Vo, J. Lee, Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory, *European Journal of Mechanics A/Solids* 45, 211-225, 2014.

- [15] Zaoui F.Z., Ouinas D., Tounsi A. New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Part B Eng.*, 159: 231-247, 2019.
- [16] Reddy, J.N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton (2003)
- [17] Mantari, J.L., Oktem, A.S., Soares, C.G. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *Int. J. Solids Struct.* **49**, 43–53, 2012.
- [18] Zaoui F.Z., Tounsi A., Ouinas D. Free vibration of functionally graded plates resting on elastic foundations based on quasi-3D hybrid-type higher order shear deformation theory. *Smart Struct Syst Int J*, 20(4): 509-524, 2017.
- [19] Merdaci, S., Belghoul, H. High-order shear theory for static analysis of functionally graded plates with porosities. *C. R. Méc.* **347**, 207–217, 2019.
- [20] Pagano, N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J. Compos. Mater.* 4, 20–34, 1970.
- [21] Pathan F., Singh S., Natarajan S., Watts G. An analytical solution for the static bending of smart laminated composite and functionally graded plates with and without porosity. *Archive of Applied Mechanics*, 92:903–931, 2022.
- [22] Carrera, E., Brischetto, S., Robaldo, A.: Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *AIAA J.* 46, 194–203, 2008.
- [23] Thai, H.T., Kim, S.E.: A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* **96**, 165–173, 2013.