MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique
Filière : Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : **Modélisation, Contrôle et Optimisation**

THEME :

Existence de Solutions pour une Classe d'EDFs

Etudiante : « ***FERRAOUN Soumia*** »

Président : Dr LATREUCH Zinelaabidine
Examinatrice : Dr TAF Sabrina
Encadrant : Phr DAHMANI Zoubir

Année Universitaire 2016/2017

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Seul Allah (sobhanaho wa taala) sait à quel point est si cher ce travail qui est enveloppé dans ces feuilles. Chaque mot, chaque symbole, étaient pris du fond de mon âme pour qu'ils puissent voir la lumière de ce monde.

Pour cela, je remercie Allah le plus miséricordieux, « al 3aziz » qui a permis à ce rêve de se réaliser.

Je remercie mes parents qui ont fait tout ce qu'ils pu faire et de donner de fond de leurs cœurs pour me voir comme tous les parents veulent voir leurs enfants : « happy & successful ».

Je remercie mon encadreur qui a eu beaucoup de patience avec moi et qui m'a appris beaucoup de choses que seul Allah peut le « yjazih » ainsi que tous mes autres enseignants et enseignantes.

Je remercie mes sœurs qui sont ma joie de vivre. Que Allah les protège.

Je remercie tous mes amis, les vieux et les nouveaux, qui sont loin ou proche.

Vous étiez tous un cadeau de la vie pour moi , des maitres et maitresses.

Merci à tous.

Dédicace :

Pour toute personne qui a choisi le chemin des mathématiques, ce travail est dédié à vous.

Je prie que ce modeste projet de fin d'étude soit à votre aide.

Table des matières

INTRODUCTION

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) sont le sujet du siècle. Ce sont des équations qui représentent mieux que les équations différentielles classiques plusieurs modèles et donnent des résultats meilleurs.

Tout a commencé en 1695 quand l'Hopital a demandé de Leibniz la signification de $\frac{d^n}{d^n x}$ pour $n = \frac{1}{2}$ et ce dernier a répondu :"Ceci apparait comme un paradoxe à partir duquel viendra des résultats utiles un jour" ("An apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn"). Apparemment, Leibniz avait raison car ce paradoxe a contribué dans la création d'une branche mathématique toute entière qui s'appelle "le Calcul Fractionnaire".

Le calcul fractionnaire est un outil puissant en mathématiques appliquées et il a un champ d'applications très vaste. Abel, en 1823, a l'utilisé pour la résolution du problème de tautochrone sous un potentiel gravitationnel. Beaucoup d'autre ont contribué dans l'évolution de cette théorie comme Liouville qui a publié trois mémoires sur le sujet, et Riemann qui durant ces études a l'enrichi avec plusieurs travaux. Sans oublier : Euler, Fourier, Caputo, Hadamard, ...etc.

Les problèmes aux limites des équations différentielles fractionnaires sont très efficaces et très utilisés dans l'étude des modèles de plusieurs phénomènes en physique, science de l'ingénierie, l'électro-chimie, théorie de contrôle, biophysiques, finance, hydrologie, ...etc. A cause de leurs importances, plusieurs mathématiciens ont développé des méthodes pour les résoudre (Banach, Schaefer, Schauder,...).

Dans ce projet de fin d'étude, on va étudier l'existence de solutions pour un problème aux limites avec des conditions non-locales, et cela en utilisant des différentes techniques du point fixe. Puis, on s'intéressera par la stabilité au sens d'Ulam-Hyers du problème donné .

Ce travail est organisé de la manière suivante :

‡. Dans le premier chapitre, on va présenter quelques notions fondamentales en calcul fractionnaire. Puis, on va introduire les différents théorèmes du point fixe et les notions qui ont une relation avec eux.

‡. Le deuxième chapitre est concerné par l'utilisation des théorèmes du point fixe pour résoudre le problème aux limites ciblé. On va premièrement étudier l'existence et l'unicité par le Principe de Contraction de Banach, puis, comme un deuxième résultat, on va voir si le problème admet une solution au moins.

‡. Troisièmement, le chapitre 3 est dédié à l'étude de stabilitéé au sens d'Ulam-Hyers du problème traité dans le chapitre 2.

On terminera par une conclusion qui rassemble tout ce qui était fait.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Notations Utilisées

Pour facilité la lecture, on commence par introduire les différentes notations utilisées tout au long de ce travail.

$\lozenge$. $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\lozenge$. $\mathbb{R}_+^*$: L'intervalle $]0;+\infty[$.

$\lozenge$. $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.

$\lozenge$. $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{N}-\{0\}$.

$\lozenge$. $\|.\|_\infty$: Norme infinie.

$\lozenge$. $\|.\|_K$: Norme de l'espace K.

$\lozenge$. $C([a,b],\mathbb{R})$: Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\lozenge$. J_a^α : Intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.

$\lozenge$. D^n (ou $\dfrac{d^n}{dt}$) : Dérivée d'ordre n.

$\lozenge$.$f^{(n)}$: Dérivée n-ième de f.

$\lozenge$. ${}_{RL}D_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.

$\lozenge$. ${}^cD_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.

Dans le cas où $a=0$, les opérateurs : J_a^α , ${}_{RL}D_a^\alpha$, ${}^cD_a^\alpha$ sont notés : J^α , ${}_{RL}D^\alpha$, ${}^cD^\alpha$.

1.2 Notions Préléminaires en Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, on introduit les notions nécessaires qu'on va utiliser dans ce travail.

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.2.1 *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

Quelque propriétés :

Pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- $\Gamma(n+1) = n!$, et $\Gamma(1) = 1$. Ceci est due à $\Gamma(.)$ est la généralisation de la factorielle.
- $\Gamma(x+n+1) = \prod_{i=0}^{n}(x+i)\Gamma(x)$.

Proposition 1.2.1 *Pour $x = -n$ où $n \in \mathbb{N}$. $\Gamma(x)$ admet des pôles simples.*
càd : $... = \dfrac{1}{\Gamma(-2)} = \dfrac{1}{\Gamma(-1)} = \dfrac{1}{\Gamma(0)} = 0.$

1.2.2 Fonction Beta d'Euler

Définition 1.2.2 *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction Beta d'Euler la fonction donnée par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du.$$

Quelque propriţés :

pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a :

-
$$\beta(x,y) = \beta(y,x) .$$

-
$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} . \tag{1.2.1}$$

1.3 Intégration fractionnaire

1.3.1 Intégration au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 *Pour toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, l'intégrale de Riemann-Liouville est définie par :*

$$J_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \quad , \alpha > 0$$

où : Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Définition 1.3.2 *Pour toute fonction continue $h : [0, b] \to \mathbb{R}$, l'intégrale de Riemann-Liouville est définie par :*

$$J^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds \quad , \alpha > 0 \ .$$

$\lozenge$. En fait, cette intégration est déduite à partir de la formule de Cauchy pour la primitive d'ordre n pour une fonction $g \in [0, b]$:

$$J^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} g(s)ds.$$

Quelque proprités :

- **Linéarité** :

  Soient f et g deux fonctions continues, définies sur $[0, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall \lambda, \rho \in \mathbb{R}, on\ a : \ J^\alpha(\lambda f(t) + \rho g(t)) = \lambda J^\alpha f(t) + \rho J^\alpha g(t) \quad , \quad \alpha > 0 \ .$$

- **Propriété de semi-groupe** : Soit $h : [0, b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$, on a :

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta h(t) &= J^{\alpha+\beta} h(t) \\ &= J^\beta J^\alpha h(t) \end{aligned}$$

- 1. $J^\alpha c = c\dfrac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ $(c \in \mathbb{R})$.

2. $J^\alpha x^\beta = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} x^{\alpha+\beta} \quad , \quad \alpha > 0,\ x > 0\ .$

3. $$\begin{aligned} J^1 x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} x^{1+\beta} \quad , \quad x > 0 \\ &= \frac{1}{\beta+1} x^{\beta+1}. \end{aligned}$$

4. $J^\alpha t^2 = \dfrac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \quad , \quad \alpha > 0,\ t > 0\ .$

En effet, pour 1 :

$$\begin{aligned} J^\alpha c &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} c ds \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u = t - s$.

$$\begin{aligned} J^\alpha c &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} du \\ &= \frac{c}{\alpha\Gamma(\alpha)} u^\alpha \\ &= c\frac{u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Pour 2,
$J^\alpha x^\beta = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} s^\beta ds$
On pose le changement de variable $u = \dfrac{s}{x}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} J^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - xu)^{\alpha-1} u^\beta x^\beta x du \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \beta+1) \end{aligned}$$

D'après la propriété (1.2.1) :

$$\begin{aligned} J^\alpha x^\beta &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Pour 3, il suffit de remplacer α par 1 dans (1.3.1) et pour obtenir 4, il suffit de remplacer β par 2 dans (1.3.1) aussi.

1.4 Dérivation fractionnaire

1.4.1 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4.1 *Pour une fonction $h : [0, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned} {}_{RL}D^{\alpha}h(t) &= \frac{d^n}{dt}(J^{n-\alpha}h(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt}\left(\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}h(s)ds\right) \end{aligned}$$

où : $n = [\alpha] + 1$ avec $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Exemple 1.4.1 *: Pour $0 < \alpha < 1$,*

- ${}_{RL}D^{\alpha}f(t) = \dfrac{d}{dt}(J^{1-\alpha}f(t))$
- ${}_{RL}D^{\alpha}(t^{\beta}) = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}t^{\beta-\alpha}.$

Quelques propriétés :

- ${}_{RL}D^{\alpha}J^{\alpha}f(t) = f(t).$
- $J^{\alpha}({}_{RL}D^{\alpha}f(t)) \neq f(t).$

Remarque 1.4.1 *Parmis les propriétés qui sont vérifiées pour les dérivées classiques et qui ne l'est pas pour ${}_{RL}D$ est :*

$${}_{RL}D^{\alpha}({}_{RL}D^{\beta}f(t)) \neq_{RL} D^{\alpha+\beta}f(t) \neq_{RL} D^{\beta}({}_{RL}D^{\alpha}f(t)$$

avec α et β des réels strictement positifs et quelconque.

1.4.2 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.4.2 *Pour une fonction $h \in C^n([0,T],\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha h(t) &= J^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt}(h(t)) \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}h^{(n)}(s)ds \end{aligned}$$

où : $n = [\alpha]+1$ avec $[\alpha]$ est la partie entière de α.

1.4.3 Lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville

Soient $n-1 < \alpha < n$, n$\in \mathbb{N}$ et $h \in C^n([0,T],\mathbb{R})$. Alors :

$${}^cD^\alpha h(t) = {}_{RL}D^\alpha\left(h(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}h^{(i)}(0)\right).$$

Quelques propriétés :

– ${}^cD^\alpha({}^cD^\beta f(t)) = {}^cD^{\alpha+\beta}f(t) = {}^cD^\beta({}^cD^\alpha f(t))$ où $f \in C^1([0;T];\mathbb{R})$, $0 < \alpha, \beta < 1$ et $0 < \alpha+\beta < 1$.

– ${}^cD^\alpha J^\alpha f(t) = f(t)$.

– ${}^cD^\alpha 1 = 0$.

– $J^\alpha({}^cD^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}f^{(i)}(0)$.

1.5 Lemmes auxiliaires :

Lemme 1.5.1 *Soit $h \in C^n([0,T],\mathbb{R})$. Pour $\alpha > 0$, l'équation : ${}^cD^\alpha h(t) = 0$ admet comme solution génerale :*

$$h(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$$

où : $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,...,n-1$ et $n = [\alpha]+1$.

Démonstration.

Soit $h \in C^n([0,T],\mathbb{R})$.

$$ {}^{c}D^{\alpha}h(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad J^{n-\alpha}D^{n}h(t) = 0 $$

En appliquant $D^{n-\alpha}$, on trouve :

$$ D^{n}h(t) = 0 $$

et donc :

$$ \begin{aligned} h(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{t^i}{i!} \\ &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}. \end{aligned} $$

■

Lemme 1.5.2 *Soit $h \in C^n([0,T],\mathbb{R})$. Pour tout $\alpha > 0$, on a :*

$$ J^{\alpha}(\ {}^{c}D^{\alpha}h(t)) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1} $$

où : $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, ..., n-1$ et $n = [\alpha] + 1$.

Démonstration :

Soit $h \in C^n([0,T],\mathbb{R})$.

$$ \begin{aligned} J^{\alpha}(\ {}^{c}D^{\alpha}h(t)) &= J^{\alpha}J^{n-\alpha}D^{n}h(t) \\ &= J^{\alpha+n-\alpha}D^{n}h(t) \\ &= J^{n}D^{n}h(t) \\ &= h(t) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{t^i}{i!} \\ &= h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}. \end{aligned} $$

■

Lemme 1.5.3 *Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec $\beta < \alpha$,on a:*

$$ {}^{c}D^{\beta}J^{\alpha}f(t) = J^{\alpha-\beta}f(t) \quad , \quad t \in [a,b]. $$

1.6 Théorèmes du Point Fixe

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme des équations différentielles non-linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équation. L'un des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe. En effet, ces théorèmes accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonctions donnée. Dans le cas des EDFs, on transforme un problème donné en un problème du point fixe et le point fixe déterminé est considéré soit comme une solution unique pour le problème, soit l'une de ses solutions.

1.7 Notions Nécessaires

Définition 1.7.1 *: [3]* ***"Continuité et Suites"*** *La fonction f est continue en a si et seulement si, quelle que soit la suite $\{x_n\}$ qui converge vers x, alors la suite image $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(a)$.*

Définition 1.7.2 *: Soit $\Omega \subset I \times E$ où $I = [0, T]$ et E un espace. On dit qu'une application f est lipschizienne par rapport à la 2-ième variable sur Ω si :*
il existe une constante $k > 0$ tel que : $\forall (t, x) \in \Omega$, $\forall (t, y) \in \Omega$

$$|f(t, x) - f(t, y)|_E \quad \leq \quad k\, |x - y|_E$$

$\Diamond$. Si $k < 1$, alors f est contractante.

1.7.1 Espace de Banach

Définition 1.7.3 *On dit qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans cet espace.*

Définition 1.7.4 *. [3] Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.*

1.7.2 Principe de Contraction de Banach

Théorème 1.7.1 *Soit (B,d) un espace métrique complet, et soit* $f : B \rightarrow B$ *une application qui, pour tout* $y, z \in B$*,vérifie :*

$$d(f(y) - f(z)) \leq kd(y - z) \quad avec \quad 0 < k \leq 1$$

Alors, f *admet un point fixe unique. (ie :* $\exists! x \in B$ *tq* $f(x) = x$ *).*

1.7.3 Théorème du Point Fixe de Schauder

Théorème 1.7.2 *Soit* C *une partie convexe et fermée d'un espace de Banach , et soit* $H : C \rightarrow C$ *un opérateur continu et compact. Alors,* H *possède au moins un point fixe.*

1.7.4 Théorème du Point Fixe de Schaefer :

Définition 1.7.5 *Soient* B_1 *et* B_2 *deux espaces de Banach. Un opérateur continu* $\mathcal{F} : B_1 \rightarrow B_2$ *est complètement continu s'il transforme tout borné de* B_1 *en une partie relativement compacte de* B_2*.*

Définition 1.7.6 *On dit que l'opérateur* $\mathcal{F}$ *est complètement continue si il est continue et compact.*

Théorème 1.7.3 *Soient* B *un espace de Banach et* $Z : B \rightarrow B$ *un opérateur complètement continu.*
Si l'esemble :

$$\Delta = \{x \in B : x = \xi Z(x), \xi \in [0; 1]\}$$

est borné, alors Z *possède au moin un point fixe.*

1.7.5 Théorème d'Arzela-Ascoli :

Définition 1.7.7 ***: "Equicontinuité"***

Soit $\{f_n\}$ *une suite de fonctions définies sur l'intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*.*

On dit que la suite $\{f_n\}$ *est équicontinue si :*

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ *tels que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall y \in I : \ |x - y| \leq \eta \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

Autrement dit, toutes les fonctions f_n sont continues sur I, et elles sont continues "de la même façon".

Théorème 1.7.4 *Soient (E,d) une espace métrique compacte, (F,δ) un espace métrique complet.*
Une partie A de $C(E,F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1. *A est équicontinue, ie :*

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \textit{ tels que : } \forall f \in A, \forall y \in E : \ d(x,y) \leq \eta \ \Rightarrow \ \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon \ .$$

2. *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.*

Chapitre 2

Résolution d'un Problème aux Limites avec des Conditions Non-locales

Dans le domaine de mathématiques appliquées, les problèmes aux limites avec des conditions non-locales ont une grand importance due à la diversité de leurs applications en physiques et même en biologie comme par exemple : conduction de la chaleur, l'écoulement de l'eau sous terre, thermoélasticité en mécanique des milieux continues,...etc.

Récemment, la résolution des problèmes aux limites des équations différentielles fractionnaires avec des techniques utilisées en analyse fonctionnelle pour des équations non-linéaires (comme : théorèmes du point fixe, théorie de Leray-Schauder, ... etc) a eu l'attention des chercheurs et c'est ça ce qu'on va présenter dans ce chapitre.

2.1 Problème Différentiel à Condition Non Locale

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) & = & f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t)) \quad 1 < \alpha < 2 \quad t \in [0, T] \\ x(0) & = & x_0 \qquad , \qquad (x_0 > 0) \\ x(T) & = & \int\limits_0^T g(s)x(s)ds \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0; T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue de classe C^2, x_0 est une constante positive, et $g : [0; T] \to \mathbb{R}$ est aussi une fonction continue de classe C^2

Dans ce chapitre, on présente une approche similaire de celle de Yan and al. [15] pour résoudre ce qui semble la même équation différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites mais la nouveauté c'est au lieu d'avoir $f(t, x(t))$ comme second membre, on a $f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t))$. On va étudier l'existence et l'unicité de la solution à l'aide de Principe de Contraction de Banach. Puis, en utilisant le théorème de Schaefer, on va aborder la question de l'existence d'une solution au moins.

2.2 Problème Intégral

2.2.1 Résultat 1

Lemme 2.2.1 *Soit* $1 < \alpha \leq 2$ *. La fonction* x *est la solution du problème au limite fractionnaire (2.1.1) si et seulement si* x *est la solution de l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\ &- \frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Preuve :

Soit l'équation :

$$^cD^\alpha x(t) = f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t))$$

alors :

$$J^\alpha(^cD^\alpha x(t)) = J^\alpha f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t))$$

Par lemme 1.5.2. ,

$$x(t) = -c_0 - c_1 t + J^\alpha f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t)) \ . \tag{2.2.2}$$

Maintenant, on cherche les constantes c_0 et c_1.

D'après les conditions sur (2.1.1) en $t = 0$,

$$x(0) = x_0. \tag{2.2.3}$$

et d'après (2.2.2),

$$x(0) = -c_0 .$$

d'où :

$$c_0 = -x_0$$

Alors (2.2.2) devient :

$$x(t) = x_0 - c_1 t + J^\alpha f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t)) . \tag{2.2.4}$$

D'aprés les conditions sur (2.1.1) en $t = T$,

$$x(T) = \int_0^T g(s)x(s)ds , \tag{2.2.5}$$

et d'aprés (2.2.4),

$$x(T) = x_0 - c_1 T + J^\alpha f(T, x(T), D^{\alpha-1}x(T)). \tag{2.2.6}$$

Donc :

$$c_1 = \frac{x_0}{T} + \frac{1}{T} J^\alpha f(T, x(T), D^{\alpha-1}x(T)) - \frac{1}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds$$

D'où, (2.2.4) devient :

$$\begin{aligned} x(t) = \quad & x_0 - x_0 \frac{t}{T} + J^\alpha f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t)) \\ & -\frac{t}{T} J^\alpha f(T, x(T), D^{\alpha-1}x(T)) + \frac{t}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-\frac{t}{T})x_0 + J^{\alpha}f(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t)) \\ &\quad -\frac{t}{T}J^{\alpha}f(T,x(T),D^{\alpha-1}x(T)) + \frac{t}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

En écrivant $J^{\alpha}f$ sous sa forme explicite :

$$\begin{aligned} (x)(t) &= (1-\frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \\ &\quad -\frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \end{aligned}$$

D'où le lemme. ■

2.3 Problème du Point fixe

Avant tout, on introduit l'espace de Banach K défini par :

$$K = \{x : x \in C^2([0;T],\mathbb{R}) \ et \ D^{\alpha-1}x \in C^1([0;T],\mathbb{R})\} \tag{2.3.1}$$

muni de la norme :

$$||x||_K = \max\{||x||_\infty, \ ||D^{\alpha-1}x||_\infty\}$$

où :

$$||x||_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|.$$

Soit H l'operateur défini par :

$$\begin{aligned} H : K &\rightarrow K \\ x &\longmapsto H(x) \end{aligned}$$

tel que, $\forall t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned} H(x)(t) &= (1-\frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}\int\limits_0^T g(s)x(s)ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \\ &-\frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \end{aligned}$$

2.3.1 Existence et Unicité

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses suivantes :*

♦.*(H1) : Il existe une constante* $k>0$ *telle que*

$$|f(s,x_1,w_1)-f(s,x_2,w_2)| \;\le\; k\max(|x_1-x_2|,|w_1-w_2|),$$

pour tout $t\in[0,T]$, *et* $x_1,x_2,w_1,w_2\in\mathbb{R}$.

♦.*(H2) : La fonction* g *est continue sur* $[0,T]$ *et* $|g(t)|\le M_g$.

♦.*(H3) :* $\max(M1,M2)<1$, *où :*
$M1 = M_gT+\dfrac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ *et* $M2=\dfrac{T^{2-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)}+kT+\dfrac{kT}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3-\alpha)}$.
alors, il existe une solution unique pour le problème (2.1.1).

Preuve :

Le théorème de contraction de Banach appuit sur le fait que si H est un opérateur contractant, alors il existe un unique point fixe pour H. De là vient l'idée de chercher l'existance d'une constante $M>0$ tel que $\|H(x)-H(w)\|_K < M\|x-w\|_K$ avec $M<1$.

On procède donc en deux étapes :

Etape 1 : On montre qu'il existe $M1$ tel que $\|H(x)-H(w)\|_\infty < M1\|x-w\|_\infty$

Etape 2 : On montre qu'il existe $M2$ tel que $\|D^{\alpha-1}H(x)-D^{\alpha-1}H(w)\|_\infty < M2\|x-w\|_\infty$

Puis on passe à la norme $\|.\|_K$ et on fait la conclusion.

***Etape* 1 :**

Soient $x,w\in K$. Alors :

$$\begin{aligned}|H(x)(t)-H(w)(t)| &= \Bigg|(1-\frac{t}{T})[x(0)-w(0)]+\frac{t}{T}\int_0^T g(s)[x(s)-w(s)]ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))-f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s))]ds\\ &-\frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}[f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))-f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s))]ds\Bigg|.\end{aligned}$$

Puisque $x(0)=w(0)=x_0,\ |1-\frac{t}{T}|\leq 1$, et $|\frac{t}{T}|\leq 1$, alors :

$$\begin{aligned}|H(x)(t)-H(w)(t)| &\leq \int_0^T |g(s)|\,|x(s)-w(s)|\,ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))-f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s))|ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))-f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s))|ds\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

En utilisant les hypothèses (H1) et (H2), on obtient :

$$\begin{aligned}|H(x)(t)-H(w)(t)| &\leq M_g\int_0^T |x(s)-w(s)|\,ds\\ &+\frac{2k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\max(|x(s)-w(s)|,|D^{\alpha-1}x(s)-D^{\alpha-1}w(s)|)ds\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

D'où,

$$\begin{aligned}|H(x)(t)-H(w)(t)| &\leq M_g\int_0^T \sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|ds+\frac{2k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\\ &\times\max(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|,\ \sup_{t\in[0,T]}|D^{\alpha-1}x(t)-D^{\alpha-1}w(t)|)ds\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Et alors,

$$\begin{aligned} |H(x)(t)-H(w)(t)| \leq & \quad M_g\int_0^T 1ds \sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|+\frac{2k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\ & \times \max(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|, \sup_{t\in[0,T]}|D^{\alpha-1}x(t)-D^{\alpha-1}w(t)|) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

En remplaçant $\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds$ par sa valeur , et en calculant l'integrale $\int_0^T 1\ ds$, on trouve que :

$$\begin{aligned} |H(x)(t)-H(w)(t)| \leq & \quad M_gT\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|+\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ & \times \max(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|, \sup_{t\in[0,T]}|D^{\alpha-1}x(t)-D^{\alpha-1}w(t)|). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

En passant à la norme, on trouve :

$$\begin{aligned} \|H(x)-H(w)\|_\infty \leq & \quad M_gT\,\|x-w\|_\infty \\ & +\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\max(\|x-w\|_\infty, \|D^{\alpha-1}x-D^{\alpha-1}w\|_\infty). \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Donc :

$$\|H(x)-H(w)\|_\infty \leq [M_gT+\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}]\,\|x-w\|_K .$$

D'où :

$$\|H(x)-H(w)\|_\infty \leq M1\,\|x-w\|_K , \tag{2.3.8}$$

tel que :

$$M1 = [M_gT+\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}] .$$

***Etape* 2 :**

On calcule $D^{\alpha-1}H(x)$.

$$\begin{aligned}D^{\alpha-1}H(x)(t) &= D^{\alpha-1}\Bigg((1-\frac{t}{T})x_0+\frac{t}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \\ &\quad -\frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds\Bigg)\end{aligned}$$

En revenant à la forme $J^\alpha f$ et par linéarité de $D^{\alpha-1}$, on a :

$$\begin{aligned}D^{\alpha-1}H(x)(t) &= x_0(D^{\alpha-1}1-D^{\alpha-1}\frac{t}{T})+\frac{1}{T}\int_0^T g(s)x(s)dsD^{\alpha-1}t \\ &\quad +D^{\alpha-1}J^\alpha f(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t))-\frac{1}{T}J^\alpha f(T,x(T),D^{\alpha-1}x(T))D^{\alpha-1}t\end{aligned}$$

En appliquant la définition de $D^{\alpha-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}D^{\alpha-1}H(x)(t) &= -\frac{x_0}{T}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}+\frac{1}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha} \\ &\quad +D^{\alpha-1}J^{\alpha-1+1}f(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t)) \\ &\quad -\frac{1}{T}J^\alpha f(T,x(T),D^{\alpha-1}x(T))\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}D^{\alpha-1}H(x)(t) &= -\frac{x_0}{T}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+J^1f(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t)) \\ &\quad +\frac{1}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\ &\quad -\frac{1}{T}J^\alpha f(T,x(T),D^{\alpha-1}x(T))\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\end{aligned}$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha-1}H(x)(t) &= -\frac{x_0}{T}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \int_0^t f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&+\frac{1}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
&-\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds
\end{aligned}
$$

Maintenant, soient x, $w \in K$. On a :

$$
\begin{aligned}
|D^{\alpha-1}H(x)(t) - D^{\alpha-1}H(w)(t)| &= \Bigg|-(x_0-x_0)\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} + \frac{1}{T}\int_0^T g(s)[x(s)-w(s)]ds\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
&+\int_0^t f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s)) - f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s))ds \\
&-\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\
&\times\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}(f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s)) - f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s)))ds.\Bigg|
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
|D^{\alpha-1}H(x)(t) - D^{\alpha-1}H(w)(t)| &\leq \frac{1}{T}\int_0^T |g(s)|\,|x(s)-w(s)|\,ds\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
&+\int_0^t |f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s)) - f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s))|ds \\
&+\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\
&\times\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s)) - f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s))|ds.
\end{aligned}
$$

Majoration de t par T implique

$$\begin{aligned}|D^{\alpha-1}H(x)(t)-D^{\alpha-1}H(w)(t)| \;\leq\; & \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\int_0^T |g(s)|\,|x(s)-w(s)|\,ds \\ & +\int_0^T |f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))-f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s))|ds \\ & +\frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\ & \times\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))-f(s,w(s),D^{\alpha-1}w(s))|ds\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses (H1) et (H2), on trouve :

$$\begin{aligned}|D^{\alpha-1}H(x)(t)-D^{\alpha-1}H(w)(t)| \;\leq\; & \frac{T^{2-\alpha}M_g}{T\Gamma(3-\alpha)}\int_0^T |x(s)-w(s)|\,ds \\ & +k\int_0^T \max(|x(s)-w(s)|,|D^{\alpha-1}x(s)-D^{\alpha-1}w(s)|)ds \\ & +\frac{T^{2-\alpha}k}{T\Gamma(\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\ & \times\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\max(|x(s)-w(s)|,|D^{\alpha-1}x(s)-D^{\alpha-1}w(s)|)ds.\end{aligned}$$

Et donc, on a :

$$\begin{aligned}|D^{\alpha-1}H(x)(t)-D^{\alpha-1}H(w)(t)| \;\leq\; & \frac{T^{2-\alpha}M_g}{T\Gamma(3-\alpha)}\int_0^T 1ds\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)| \\ & +k\int_0^T 1ds\max(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|,\sup_{t\in[0,T]}|D^{\alpha-1}x(t)-D^{\alpha-1}w(t)|) \\ & +\frac{T^{2-\alpha}k}{T\Gamma(\alpha)\Gamma(3-\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\ & \times\max(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|,\sup_{t\in[0,T]}|D^{\alpha-1}x(t)-D^{\alpha-1}w(t)|)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha-1}H(x)(t)-D^{\alpha-1}H(w)(t)| &\leq \frac{T^{2-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)}\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)| \\
&+kT\max(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|,\ \sup_{t\in[0,T]}|D^{\alpha-1}x(t)-D^{\alpha-1}w(t)|) \\
&+\frac{kT^{1-\alpha}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3-\alpha)} \\
&\times\max(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-w(t)|,\ \sup_{t\in[0,T]}|D^{\alpha-1}x(t)-D^{\alpha-1}w(t)|)
\end{aligned}$$

En passant à la norme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|D^{\alpha-1}H(x)-D^{\alpha-1}H(x)\|_\infty &\leq \frac{T^{2-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)}\|x-w\|_\infty \\
&+kT\max(\|x-w\|_\infty, \|D^{\alpha-1}x-D^{\alpha-1}w\|_\infty) \\
&+\frac{kT}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3-\alpha)}\max(\|x-w\|_\infty, \|D^{\alpha-1}x-D^{\alpha-1}w\|_\infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|D^{\alpha-1}H(x)-D^{\alpha-1}H(x)\|_\infty &\leq \Bigg[\frac{T^{2-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)}+kT \\
&+\frac{kT}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3-\alpha)}\Bigg]\|x-w\|_K.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\|D^{\alpha-1}H(x)-D^{\alpha-1}H(x)\|_\infty \leq M2\|x-w\|_K, \tag{2.3.9}$$

tel que :

$$\begin{aligned}
M2 &= \Bigg[\frac{T^{2-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)}+kT \\
&+\frac{kT}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3-\alpha)}\Bigg]
\end{aligned}$$

Alors, d'aprés (2.3.8) et (2.3.9), on peut écrire :

$$\max(\|H(x)-H(w)\|_\infty, \|D^{\alpha-1}H(x)-D^{\alpha-1}H(x)\|_\infty) \leq \max(M1,M2)\|x-w\|_K.$$

Ce qui implique que :

$$\|H(x)-H(w)\|_K \leq M\|x-w\|_K,$$

avec $M = \max(M1, M2)$.

D'où le résultat.■

2.3.2 Existence d'une Solution au moins

Théorème 2.3.2 *Sous les hypothèses :*

♦.$(H4)$: *Il existe une constante $M_f > 0$ telle que : $|f(t,v,z)| \leq M_f$ pour tout $t \in [0,T]$ et $v, z \in \mathbb{R}$.*

♦.$(H5)$: $0 < g(t) < M_g$ *pour tout $t \in [0,T]$.*

alors, le problème admet au moins une solution.

Preuve :

Principalement, on va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer l'existence d'une solution pour le problème, et pour cela, on passera par 4 étapes :

***Etape*1 :** Montrons que H est continue.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ une suite telle que : $x_n \longrightarrow x$ dans K. Alors pour tout $t \in [0,T]$,on a :

$$\begin{aligned}
|H(x_n)(t) - H(x)(t)| \;=\; & \Bigg|(1 - \frac{t}{T})[x_n(0) - x_0] + \frac{t}{T}\int_0^T g(s)[x_n(s) - x(s)]ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[f(s, x_n(s), D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))]ds \\
& - \frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}[f(s, x_n(s), D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))]ds\Bigg| .
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
|H(x_n)(t) - H(x)(t)| \;\leq\; & |x_n(0) - x_0| + \int_0^T |g(s)||x_n(s) - x(s)|ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s, x_n(s), D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))|ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s, x_n(s), D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))|ds.
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |H(x_n)(t) - H(x)(t)| &\leq |x_n(0) - x_0| + \int_0^T |g(s)||x_n(s) - x(s)|ds \\ &+ \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, x_n(s), D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))|ds. \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

En utilisant (H5), on aboutit à :

$$\begin{aligned} |H(x_n)(t) - H(x)(t)| &\leq |x_n(0) - x_0| + M_g \int_0^T |x_n(s) - x(s)|ds \\ &+ \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, x_n(s), D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))|ds. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Comme f est une fonction continue, alors :

$$\|H(x_n) - H(x)\|_\infty \ \rightarrow \ 0 \quad quand \quad n \ \rightarrow \ \infty \ . \tag{2.3.13}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} |D^{\alpha-1}H(x_n)(t) - D^{\alpha-1}H(x)(t)| = &\left| -\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}(x_n(0) - x_0) + \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} \int_0^T g(s)[x_n(s) - x(s)]ds \right. \\ &+ \int_0^t f(s, x_n(s), D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\ &- \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\ &\left. \times \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}(f(s, x_n(s), D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s)))ds \right|. \end{aligned}$$

Et donc,

$$
\begin{aligned}
|D^{\alpha-1}H(x_n)(t) - D^{\alpha-1}H(x)(t)| \leq \quad & \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}|x_n(0)-x_0| + \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\int_0^T |g(s)||x_n(s)-x(s)|ds \\
& + \int_0^T |f(s,x_n(s),D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))|ds \\
& + \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\
& \times \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x_n(s),D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))|ds
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse (H5), on trouve :

$$
\begin{aligned}
|D^{\alpha-1}H(x_n)(t) - D^{\alpha-1}H(x)(t)| \quad \leq \quad & \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}|x_n(0)-x_0| + \frac{T^{2-\alpha}M_g}{T\Gamma(3-\alpha)}\int_0^T |x_n(s)-x(s)|ds \\
& + \int_0^T |f(s,x_n(s),D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))|ds \\
& + \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \times \\
& \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x_n(s),D^{\alpha-1}x_n(s)) - f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))|ds.
\end{aligned}
$$

Comme f est continue sur K, alors :

$$
\left\| D^{\alpha-1}H(x_n) - D^{\alpha-1}H(x) \right\|_\infty \quad \to \quad 0 \quad quand \quad n \quad \to \quad \infty \ . \tag{2.3.14}
$$

De (2.3.13)et (2.3.14), on obtient :

$$
\left\| H(x_n) - H(x) \right\|_K \quad \to \quad 0 \quad quand \quad n \quad \to \quad \infty \ .
$$

D'où, H est continue sur K.

***Etape 2* :** Montrons que H transforme un ensemble borné en un ensemble borné dans K.

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $\varrho > 0$, il existe une constante positive L tel que pour tout $x \in B_\varrho$ avec $B_\varrho \ = \ \{x \in K : \|x\|_K \leq \varrho\}$, on a : $\|H(x)\|_K \leq L$.

a- Pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}|H(x)(t)| &= \Bigg|(1-\frac{t}{T})x_0 + \tfrac{t}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \\ &-\frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds\Bigg|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|H(x)(t)| &\leq \left|1-\frac{t}{T}\right||x_0| + \int_0^T |g(s)|\,|x(s)|\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right|ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right|ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|H(x)(t)| &\leq |x_0| + \int_0^T |g(s)|\,|x(s)|\,ds \\ &+\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right|ds\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

En appliquant les hypothèses $(H4)$ et $(H5)$, on a :

$$|H(x)(t)| \leq \sup_{t\in[0,T]}|x(t)| + M_g\int_0^T \sup_{t\in[0,T]}|x(t)|\,ds + \frac{2M_f}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \tag{2.3.16}$$

$$|H(x)(t)| \leq \sup_{t\in[0,T]}|x(t)| + M_gT\sup_{t\in[0,T]}|x(t)| + \frac{2M_fT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{2.3.17}$$

$$\|H(x)\|_\infty \leq \varrho + M_gT\varrho + \frac{2M_fT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\ . \tag{2.3.18}$$

$$\|H(x)\|_\infty \leq Ma \tag{2.3.19}$$

tel que :

$$Ma = \varrho + M_g T \varrho + \frac{2M_f T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} .$$

b- Pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|D^{\alpha-1}H(x)(t)\right| &= \Bigg| -\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} x_0 ds \\
&\quad + \int_0^t f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds + \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} \int_0^T g(s)x(s)ds \\
&\quad - \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \Bigg|
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\left|D^{\alpha-1}H(x)(t)\right| &\le \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} |x_0|\, ds \\
&\quad + \int_0^t \left|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right| ds + \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} \int_0^T |g(s)|\,|x(s)|\, ds \\
&\quad + \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right| ds \\
\left|D^{\alpha-1}H(x)(t)\right| &\le \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} |x_0| \\
&\quad + \int_0^T \left|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right| ds + \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} \int_0^T |g(s)|\,|x(s)|\, ds \\
&\quad + \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right| ds.
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H4)$ et $(H5)$, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\left|D^{\alpha-1}H(x)(t)\right| &\le \frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)} \sup_{t\in[0,T]} |x(t)| \\
&\quad + M_f \int_0^T ds + \frac{T^{1-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)} \int_0^T \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|\, ds \\
&\quad + \frac{T^{1-\alpha}M_f}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}|D^{\alpha-1}H(x)(t)| &\leq \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\sup_{t\in[0,T]}|x(t)| \\ &+M_fT+\frac{T^{2-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)}\sup_{t\in[0,T]}|x(t)| \\ &+\frac{T^{1-\alpha}M_f}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \|D^{\alpha-1}H(x)(t)\|_\infty &\leq \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\varrho+M_fT+\frac{T^{2-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)}\varrho \\ &+\frac{TM_f}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3-\alpha)}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\|D^{\alpha-1}H(x)\|_\infty \leq Mb \ , \tag{2.3.20}$$

tel que :

$$\begin{aligned}Mb &= \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\varrho+M_fT+\frac{T^{2-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)}\varrho \\ &+\frac{TM_f}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3-\alpha)}.\end{aligned}$$

De (2.3.19) et (2.3.20) , on a :

$$\|H(x)\|_K \leq L \ ,$$

avec $L=\max(Ma,Mb)$.

D'où : H est borné.

***Etape* 3 :** Montrons que H transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinue.

Soit $x\in B_\varrho$ avec $B_\varrho = \{x\in K : \|x\|_K\leq\varrho\}$.

Pour tout $t_1,t_2\in[0,T]$, $t_1<t_2$:

$$\begin{aligned}
|H(x)(t_2) - H(x)(t_1)| &= \Bigg| \frac{t_2 - t_1}{T} x_0 + \frac{t_2 - t_1}{T} \int_0^T g(s)x(s)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&- \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \Bigg|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|H(x)(t_2) - H(x)(t_1)| &= \Bigg| \frac{t_2 - t_1}{T} x_0 + \frac{t_2 - t_1}{T} \int_0^T g(s)x(s)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&- \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \Bigg|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|H(x)(t_2) - H(x)(t_1)| &= \Bigg| \frac{t_2 - t_1}{T} x_0 + \frac{t_2 - t_1}{T} \int_0^T g(s)x(s)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}\right) f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&- \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \Bigg|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|H(x)(t_2) - H(x)(t_1)| \;\; \leq \;\; & \frac{t_2 - t_1}{T} |x_0| + \frac{t_2 - t_1}{T} \int\limits_0^T |g(s)| \, |x(s)| \, ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{t_1} \left((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right) \left| f(s, x(s), D^{\alpha-1} x(s)) \right| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} \left| f(s, x(s), D^{\alpha-1} x(s)) \right| ds \\
& + \frac{|t_2 - t_1|}{T\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^T (T - s)^{\alpha-1} \left| f(s, x(s), D^{\alpha-1} x(s)) \right| ds
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H4)$ et $(H5)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|H(x)(t_2) - H(x)(t_1)| \;\; \leq \;\; & \frac{t_2 - t_1}{T} \varrho + \frac{t_2 - t_1}{T} (M_g T \varrho) \\
& + \frac{M_f}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{t_1} \left((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right) ds \\
& + \frac{M_f}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds + \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} M_f \int\limits_0^T (T - s)^{\alpha-1} ds
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

▼. On calcule l'intégrale $I \;\; = \;\; \int\limits_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds$

Par un changement de variable $v = t_2 - s$, et $t_1 < s < t_2 \Rightarrow 0 < v < t_2 - t_1$

on obtient : $I \;\; = \;\; \dfrac{1}{\alpha}(t_2 - t_1)^{\alpha}$.

▼. Pour l'intégrale : $II \;\; = \;\; \int\limits_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds$, on prend le même changement de variable et pour les bornes $0 < s < t_1 \Rightarrow t_2 - t_1 < u < t_2$.

Alors : $II \;\; = \;\; \dfrac{t_2^{\alpha}}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}(t_2 - t_1)^{\alpha}$.

Donc, (2.3.21) devient :

$$\begin{aligned}
|H(x)(t_2) - H(x)(t_1)| \;\; \leq \;\; & \frac{t_2 - t_1}{T} \varrho + \frac{t_2 - t_1}{T} (M_g T \varrho) \\
& + \frac{M_f}{\alpha\Gamma(\alpha)} (t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha}) - \frac{M_f}{\alpha\Gamma(\alpha)} (t_2 - t_1)^{\alpha} \\
& + \frac{M_f}{\alpha\Gamma(\alpha)} (t_2 - t_1)^{\alpha} + \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha + 1)} M_f T^{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|H(x)(t_2)-H(x)(t_1)| &\le \frac{t_2-t_1}{T}\varrho+\frac{t_2-t_1}{T}(M_gT\varrho)\\ &+\frac{M_f}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2^\alpha-t_1^\alpha)-\frac{M_f}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha\\ &+\frac{M_f}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha+\frac{t_2-t_1}{\Gamma(\alpha+1)}M_fT^{\alpha-1}\end{aligned}$$

En passant à la norme $\|\|_\infty$, on trouve :

$$\begin{aligned}\|H(x)(t_2)-H(x)(t_1)\|_\infty &\le \frac{t_2-t_1}{T}\varrho+\frac{t_2-t_1}{T}(M_gT\varrho)\\ &+\frac{M_f}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2^\alpha-t_1^\alpha)-\frac{M_f}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha\\ &+\frac{M_f}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha+\frac{t_2-t_1}{\Gamma(\alpha+1)}M_fT^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

alors pour $t_1 \rightarrow t_2$, on va avoir :

$$\|H(x)(t_2)-H(x)(t_1)\|_\infty \rightarrow 0. \tag{2.3.22}$$

D'autre part, et pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$:

$$\begin{aligned}|D^{\alpha-1}H(x)(t_2)-D^{\alpha-1}H(x)(t_1)| &= \Bigg|-\frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}x_0\\ &+\int_0^{t_2} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s)))ds-\int_0^{t_1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s)))ds\\ &+\frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\Bigg[\int_0^T g(s)x(s)ds\\ &-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds\Bigg]\Bigg|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|D^{\alpha-1}H(x)(t_2)-D^{\alpha-1}H(x)(t_1)\right| &\leq \frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\left|x_0\right| \\ &+\int_{t_1}^{t_2}\left|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right|ds \\ &+\frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\left[\left|A(x)\right|\right. \\ &\left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right|ds\right]\end{aligned}$$

Par hypothèses $(H4)$ et $(H5)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|D^{\alpha-1}H(x)(t_2)-D^{\alpha-1}H(x)(t_1)\right| &\leq \frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\varrho+M_f\int_{t_1}^{t_2}1ds \\ &+\frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\left[M_g\varrho\int_0^T 1ds\right. \\ &\left.+\frac{M_f}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds\right]\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\left|D^{\alpha-1}H(x)(t_2)-D^{\alpha-1}H(x)(t_1)\right| &\leq \frac{1}{T\Gamma(2-\alpha)}\varrho({t_2}^{2-\alpha}-t_1^{2-\alpha}) \\ &+M_f(t_2-t_1)+\frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}M_g\varrho T \\ &+\frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{M_fT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned}$$

En passant à la norme $\|\ .\|_\infty$, l'inégalité devient :

$$\begin{aligned}\left\|D^{\alpha-1}H(x)(t_2)-D^{\alpha-1}H(x)(t_1)\right\|_\infty &\leq \frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\varrho \\ &+M_f(t_2-t_1)+\frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}M_g\varrho T \\ &+\frac{(t_2)^{2-\alpha}-(t_1)^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{M_fT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Alors pour $t_1 \ \rightarrow \ t_2$,

$$\left\|D^{\alpha-1}H(x)(t_2)-D^{\alpha-1}H(x)(t_1)\right\|_\infty \ \rightarrow \ 0. \tag{2.3.23}$$

Par (2.3.22) et (2.3.23), on obtient :

$$\|H(x)(t_2) - H(x)(t_1)\|_K \;\; \rightarrow \;\; 0.$$

D'où le résultat.

D'après les étapes : 1-2-3 et le théorème Arzela-Ascoli, H est complètement continue.

***Etape* 4 :** Montrons que l'ensemble $E \;=\; \{x \in K : x = \lambda H(x), 0 < \lambda < 1\}$ esr borné.

Soit $x \in E$. Alors $x = \lambda H(x), 0 < \lambda < 1$, et pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lambda H(x) \\
&= \lambda(1 - \tfrac{t}{T})x_0 + \frac{\lambda t}{T}\int_0^T g(s)x(s)ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&\quad - \frac{\lambda t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D^{\alpha-1}x(t) &= \lambda D^{\alpha-1}H(x)(t) \\
&= -\lambda\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}x_0 \\
&\quad + \lambda\int_0^t f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds + \lambda\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\int_0^T g(s)x(s)ds \\
&\quad - \lambda\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds
\end{aligned}$$

Ce qui implique par (2.3.19) et (2.3.20) que:

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &\leq \varrho + M_g T\varrho + \frac{2M_f T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq Ma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|D^{\alpha-1}x\|_\infty &\leq \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\varrho + M_f T + \frac{T^{2-\alpha}M_g}{\Gamma(3-\alpha)}\varrho \\
&\quad + \frac{TM_f}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3-\alpha)} \\
&\leq Mb
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\|x\|_K \quad \leq \quad \max(Ma, Mb)$$

D'où, E est un ensemble borné.

Grâces aux étapes 1, 2, 3, et 4 , et d'après théorème du point fixe de Shaefer, on déduit que H admet un point fixe qui est solution du problème (2.1.1) .

Chapitre 3

Stabilité au Sens de Ulam-Hyers

La stabilité des équations a toujours attiré l'attention des mathématiciens et ils ont obtenu des résultats qui ne s'arrêtent pas d'améliorer. Parmis ces travaux, c'est la stabilité au sens d'Ulam qu'on va esseyer d'éclairer dans ce chapitre.
En 1940, S.M. Ulam a posé dans son livre "Une Collection des Problèmes Mathématiques" (en anglais : " A Collection of Mathématical Problems"), la question suivante concernat la stabilité des homomorphismes :
" Soit G_1 un groupe et soit G_2 un groupe métrique muni de la distance $d(.,.)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, ,existe-t-il un $\delta > 0$ tel que si une fonction$h : G_1 \longrightarrow G_2$
satisfait l'inégalité $d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$ pour tout $x, y \in G_1$ alors il existe un homomorphise $H : G_1 \longrightarrow G_2$ tel que $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in G_1$?"

D. H. Hyers était le premier volontaire qui à proposer une solution pour ce problème en 1941. Ses résultats étaient considérés comme les premières fondations concernant la stabilité des équations fonctionnelle. Effectivement, et en esseyant de trouver une solution pour la question d'Ulam, il a obtenu un théorème celèbre qui traite la stabilité de l'équation fonctionnelle additive.
Après la publication de théorème de Hyers, autre chercheurs s'y sont intéressés comme Th. M. Rassias qui a généralisé les résultats de Hyers et celà été en 1978 [12].
Les travaux sur ce sujet ne s'arrêtent de s'étendre. Pour plus de détail voir : Jung [9] et [10] , Stabilité d'une EDF dans le disque unité par Ibrahim [8], sur la stabilité des équations fonctionnelles par Rassias [11], et le travail de Benchohra et Lazreg en 2015 [1].

3.1 Stabilité d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions non locales

On concidère le même problème traité dans le chapitre 2 :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) &=& f(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t)) \quad 1<\alpha<2 \quad t\in]0,T[\\ x(0) &=& x_0 \quad , \quad (x_0>0) \\ x(T) &=& \int\limits_0^T g(s)x(s)ds \end{cases} \tag{3.1.1}$$

telle que la solution x de (3.1.1) est dans l'espace K cité en (2.3.1).

3.1.1 Stabilité au sens de Ulam-Hyers

Définition 3.1.1 *On dit que l'équation (3.1.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers s'il existe une constante positive $C>0$ ($C\in\mathbb{R}_*^+$) tel que quelque soit $\varepsilon>0$ et pour toute solution $v\in K$ qui satisfait :*

$$|{}^cD^\alpha v(t)-f(t,v(t),D^{\alpha-1}v(t))| \;\leq\; \varepsilon \quad , \quad t\in]0,T[, 1<\alpha<2 \tag{3.1.2}$$

il existe une solution $x\in K$ qui satisfait :

$${}^cD^\alpha x(t)-f(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t)) \;=\; 0, \quad 0<t<T$$

$$x(0)=x_0 \quad , \quad x(T)=\int\limits_0^T g(s)x(s)ds$$

telle que

$$\|v(t)-x(t)\|_K \;\leq\; C\varepsilon \quad , \quad t\in]0,T[, 1<\alpha<2\ . \tag{3.1.3}$$

3.1.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisé

Définition 3.1.2 *On dit que l'équation (3.1.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisé s'il existe une fonction $\psi\in C(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$ tel que quelque soit $\varepsilon>0$ et pour toute solution $v\in K$ qui satisfait :*

$$|{}^cD^\alpha v(t)-f(t,v(t),D^{\alpha-1}v(t))| \;\leq\; \varepsilon \quad , \quad t\in]0,T[, 1<\alpha<2 \tag{3.1.4}$$

il existe une solution $x \in K$ qui satisfait :

$$^{c}D^{\alpha}x(t) - f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t)) \quad = \quad 0, \quad 0 < t < T$$

$$x(0) = x_0 \quad , \quad x(T) = \int_0^T g(s)x(s)ds$$

telle que

$$\|v(t) - x(t)\|_K \quad \leq \quad \psi(\varepsilon) \quad , \quad t \in I, \alpha > 0 \tag{3.1.5}$$

Remarque 3.1.1 *Une fonction $v \in K$ est une solution de l'inégalité (3.1.2) si et seulement si il existe une fonction $R \in C([0,T];\mathbb{R})$ telle que :*
(a) $|R(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [0,T]$.
(b) $^{c}D^{\alpha}v(t) = f(t, v(t), D^{\alpha-1}v(t)) + R(t)$.

Remarque 3.1.2 *Il est clair que :*
Définition 3.1.1.$\Rightarrow$ Définition 3.1.2. .

3.1.3 Etude de la stabilité

Théorème 3.1.1 *Supposons que les hypothèses :*
$\Diamond - (H1)$:*Il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$|f(s, x_1, w_1) - f(s, x_2, w_2)| \leq k \max(|x_1 - x_2|, |w_1 - w_2|),$$

pour tout $t \in [0,T]$, et $x_1, x_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.
$\Diamond - (H2) : \max(\dfrac{2kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}; (Tk + \dfrac{kT}{\Gamma(3-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}) < 1.$
sont vérifies, alors (3.1.1) est stable au sens de Ulam-Hyers

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $v \in K$ qui satisfait l'inégalité :

$$|^{c}D^{\alpha}v(t) - f(t, v(t), D^{\alpha-1}v(t))| \quad \leq \quad \varepsilon \quad , \quad \textit{pour tout } t \in [0,T] \tag{3.1.6}$$

Notons par $x \in K$ la solution qui satisfait le problème (3.1.1) et elle est aussi la solution unique le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) &=& f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t)) \quad 1 < \alpha < 2 \quad t \in]0, T[\\ x(0) &=& v(0) \\ x(T) &=& v(T) \end{cases} \tag{3.1.7}$$

D'après (2.2.1),

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - \frac{t}{T})x(0) + \frac{t}{T}x(T) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\ &- \frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds. \end{aligned}$$

Par $x(0) = v(0)$ et $x(t) = v(T)$, on trouve:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - \frac{t}{T})v(0) + \frac{t}{T}v(T) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \\ &- \frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds. \end{aligned}$$

Par intégration de (3.1.6), on obtient :

$$\left| \begin{array}{c} v(t) - (1 - \frac{t}{T})v(0) - \frac{t}{T}v(T) \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds + \\ \frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))ds \end{array} \right| \leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon \tag{3.1.8}$$

$$\left| \begin{array}{c} v(t)-(1-\frac{t}{T})v(0)-\frac{t}{T}v(T) \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds+ \\ \frac{t}{T}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \end{array} \right| \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon \tag{3.1.9}$$

D'autre part, et pour tout $t \in [0;T]$:

$$\begin{aligned} |v(t)-x(t)| &= \Big| v((t)-(1-\frac{t}{T})v(0)-\frac{t}{T}v(T) \\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \\ &\quad +\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \Big| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v(t)-x(t)| &\leq \Big| v((t)-(1-\frac{t}{T})v(0)-\frac{t}{T}v(T) \\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))ds \\ &\quad +\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))ds \Big| \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))-f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right|ds \\ &\quad +(\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left|f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))-f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right|ds \end{aligned}$$

Par hypothèse $(H1)$ et (3.1.9)

$$\begin{aligned} |v(t)-x(t)| &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon+\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad \times \max(\sup_{t\in[0;T]}|v(t)-x(t)|, \sup_{t\in[0;T]}|D^{\alpha-1}v(s)-D^{\alpha-1}x(s)|) \end{aligned}$$

et donc :

$$\|v-x\|_\infty \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon+\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|v-x\|_K . \tag{3.1.10}$$

On a besoin maintenant de $D^{\alpha-1}x(t)$.

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha-1}x(t) &= -\frac{x(0)}{T}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \int_0^t f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&\quad + \frac{1}{T}x(T)\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
&\quad - \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds.
\end{aligned}
$$

Par les conditions : $x(0)=v(0)$ et $x(t)=v(T)$, on trouve:

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha-1}x(t) &= -\frac{v(0)}{T}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \int_0^t f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \\
&\quad + \frac{1}{T}v(T)\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
&\quad - \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds
\end{aligned}
$$

L'inégalité (3.1.8) devient :

$$
\left| \begin{array}{c} D^{\alpha-1}v(t) + \frac{v(0)}{T}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{1}{T}v(T)\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \int_0^t f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))ds \\ + \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))ds \end{array} \right| \leq T\varepsilon \tag{3.1.11}
$$

Pour tout $t \in [0;T]$:

$$
\begin{aligned}
|D^{\alpha-1}v(t) - D^{\alpha-1}x(t)| \leq \quad & \Big| D^{\alpha-1}v(t) + \frac{v(0)}{T}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{1}{T}v(T)\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
& - \int_0^t f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \\
& + \frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))ds \Big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|D^{\alpha-1}v(t)-D^{\alpha-1}x(t)\right| \leq & \left| D^{\alpha-1}v(t)+\frac{v(0)}{T}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}-\frac{1}{T}v(T)\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right. \\
& -\int_0^t f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))ds \\
& \left. +\frac{t^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))ds \right| \\
& \int_0^T \left|f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))ds - f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right| ds \\
& +\frac{T^{2-\alpha}}{T\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left|f(s,v(s),D^{\alpha-1}v(s))ds - f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right| ds
\end{aligned}
$$

Par hypothèse $(H1)$ et (3.1.11) :

$$
\begin{aligned}
\left|D^{\alpha-1}v(t)-D^{\alpha-1}x(t)\right| \leq & \; T\varepsilon \\
& +kT\max\left(\sup_{t\in[0;T]}|v(t)-x(t)|,\ \sup_{t\in[0;T]}|D^{\alpha-1}v(s)-D^{\alpha-1}x(s)|\right) \\
& +\frac{kT}{\Gamma(3-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \\
& \times\max\left(\sup_{t\in[0;T]}|v(t)-x(t)|,\ \sup_{t\in[0;T]}|D^{\alpha-1}v(s)-D^{\alpha-1}x(s)|\right)
\end{aligned}
$$

Ce qui implique :

$$
\left\|D^{\alpha-1}v(t)-D^{\alpha-1}x(t)\right\|_\infty \leq T\varepsilon+(Tk+\frac{kT}{\Gamma(3-\alpha)\Gamma(\alpha+1)})\left\|v-x\right\|_K \qquad (3.1.12)
$$

De (3.1.10) et (3.1.12) :

$$
\begin{aligned}
\left\|v-x\right\|_K \leq & \max(\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)};T)\varepsilon \\
& +\max(\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)};(Tk+\frac{kT}{\Gamma(3-\alpha)\Gamma(\alpha+1)})\left\|v-x\right\|_K
\end{aligned}
$$

et donc :

$$
\left\|v-x\right\|_K \leq C\varepsilon
$$

tel que :

$$C := \frac{\max(\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}; T)}{1-\max(\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}; (Tk + \frac{kT}{\Gamma(3-\alpha)\Gamma(\alpha+1)})}$$

La constante C est bien définie et positive si

$$\max(\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}; (Tk + \frac{kT}{\Gamma(3-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}) < 1.$$

D'après le théorème de Ulam-Hyers, (3.1.1) est stable. ■

Résulat 2.

Si on pose $\psi(\varepsilon) = C\varepsilon$, alors on peut dire que (3.1.1) est stable au sens de Ulam-Hyers généralisé.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a essayé d'éclairer une fraction du monde de calcul fractionnaire. On a étudié la résolution de certain type d'équations différentielles fractionnaires en utilisant des théorèmes qui ont leurs poids dans l'analyse fonctionnelle. On a aussi présenté un exemple sur l'étude de stabilité des EDFs au sens d'Ulam-Hyers. Quelle est la différence entre trouver une unique solution et l'assurance de l'existence d'une solution au moins ? Dans quels cas elle sont utiles ? Quelle est la signification de ces résultats ? Ses questions m'ont accompagnées jusqu'au dernier point dans ce manuscrit. Ce qui précède ouvre des nouveaux domaines pour rechercher, apprendre plus, et plonger au fond dans ce monde plein de mystères en espérant qu'on tombe sur des réponses un jour. Qu'est ce qui cache derrière les voiles de calcul fractionnaire ? Un jour, peut être, on saura.

Bibliographie

[1] M. Benchohra, J.E. Lazreg : On Stability for Non Linear Implicit Fractional Differential Equations. LE MATEMATICHE, (2015).

[2] M. Benchohra, S. Hamani, S. K. Ntouyas : Bundary Value Problems For Differential Equations With Fractional Order. Surveys in Mathematics.

[3] F. Cottet-Emard : Calcul Différentiel et Intégral : Rappels De Cours Et Exercices Corrigés. Editions De Boeck Université, Bruxelles, (2007).

[4] M. Cuesta : Analyse Fonctionnelle Non Linéaire Et Applications En Equations Différentielles. Cours (2009-2010). Applications,(2008).

[5] Z. Cui, P. Yu, Z. Mao : Existence of Solutions for Nonlocal Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations. PLA University of Science and Technology, Institute of Science, Volume 7, Number 1, pp. 31–40 (2012).

[6] M. Houas, Z. Dahmani : New Results for a Caputo Boundary Value Problem. American Journal of Computational and Applied Mathematics, (2013).

[7] R.W. Ibrahim : Approximate Solutions for Fractional Differential Equation in the Unit Disk. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 64 (2011) 1–11.

[8] R.W. Ibrahim : Ulam Stability of Boundary Value Problem. Kragujevac Journal of Mathematics, Volume 37(2), Pages 287–297, (2013).

[9] S.M. Jung : Hyers–Ulam–Rassias Stability of Functional Equations in Mathematical Analysis. Palm Harbor : Hadronic Press, (2001).

[10] S.M. Jung : Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order. Appl Math Lett, (2004).

[11] Th.M. Rassias : On the Stability of Functional Equations and a Problem of Ulam. Kluwer Academic Publishers, (2000).

[12] Th.M. Rassias : On the stability of linear mappings in Banach spaces. Proc Amer Math Soc, (1978).

[13] A. Taïeb : Étude Analitique des Équations Différentielles Fractionnaires et Applications. Thèse de Doctorat LMD, UABM, FSEI, (2016).

[14] J.R. Wang, L. Lv, Y. Zhou : New Concepts and Results in Stability of Fractional Differential Equations. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 17, (2012).

[15] R.Yan, Sh.Sun, Y.San, and Z.Han : Boundary Value Problems For Fractional Differential with Nonlocal Boundary Conditions. Springer Open Journal, (2013).