

Table des matières

Remerciements	2
Résumé	3
Introduction	4
1 Rappels et définitions	7
1.1 Les opérateurs linéaires	7
1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires	8
1.2.1 semi-groupes fortement continu	8
1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe	9
1.2.3 Semi-groupe analytique	9
1.2.4 semi-groupe analytique	9
1.3 Les espaces d'interpolation	10
1.4 Formule de Cauchy	11
1.5 Intégrale de Dunford	11
1.6 Les espaces de Hölder	11
2 Position du problème	12
2.1 Introduction	12
2.2 Lemmes techniques	14
3 Représentation de la solution et la régularité	16
3.1 Régularité du second membre $G_{Q_\omega(x)}(d_0, u_1, f)$	21
3.2 Régularité de P_ω	28
4 Exemple	34
Bibliographie	36

Université Abd elhamid Ibn Badis

Faculté des Sciences et sciences exactes

Mémoire de Licence en Mathématiques

Présenté à

L'Université de Mostaganem

Présenté

Par

Abdallaoui Kheira

Zoubir Naima

Devant le jury :

Medeghri Ahmed

Encadreur : Haoua Rabah, Professeur, Université de Mostaganem.

Examineur : Menad Abdallah, Professeur, Université de Mostaganem.

, Maître de Conférences, Université de Mostaganem.

Remerciements

Nos premiers remerciements vont à notre l'encadreur, le professeur Rabah Hauoa, pour sa confiance se disponibilité et son aide précieuse dans la réalisation de ce mémoire, ce travail de recherche à ses côtés a pour nous été un réel plaisir : rigueur mathématique, encouragements incessants et conseils, tout était réuni pour mener à bien ce travail, qu'il trouve dans ces mots notre sincère reconnaissance

Le professeur Ahmed Medegri nous fait un grand honneur en acceptant de présider ce jury Nous n'oublions pas les nombreuses séances de travail, sa relecture attentive ses corrections et ses conseils forts utiles de ce thème. Nous tenons lui exprimer toute notre gratitude.

Nous remercions profondément le professeur Menad d'avoir bien voulu examiner ce travail.

Un grand merci à tous les étudiants de l'analyse fonctionnelle avec qui nous avons pris réel plaisir à partager des discussions scientifiques.

Une pensu toute particulière à notre famille et à nos amis qui ont su apporter leur soutien. Merci à tous d'avoir été présents en ce jour si important de la soutenance

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou loin à la réalisation de ce thème est vivement remerciée.

Résumé

Dans ce mémoire on donne de nouveaux résultats sur une équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique à coefficients opérateurs variables avec des conditions aux limites générales de type de Robin, nous supposons que la famille des coefficients variables vérifie l'hypothèse de Labbas-Terreni.

On utilise l'intégrale de Dunford, les espaces d'interpolation et les semi groupes pour obtenir l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de faire une synthèse sur le travail de Rabah Haoua et Ahmed Medeghri, concernant l'étude d'une équations différentielles abstaite du second ordre de type elliptique à coefficients d'opérateur variable et les conditions aux limites générales du type de Robin. Nous supposons que la famille des coefficients variables vérifier hypothèse de Labbas-Terreni.

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$u''(x) + A(x)u(x) - \omega u(x) = f(x), x \in]0, 1[, \quad (1)$$

avec les conditions aux limites générales du type de Robin

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(0) = u_1 \end{cases} \quad (2)$$

où $(A(x))_{x \in [0,1]}$ est une famille d'opérateur lineaire fermés de domaine $D(A(x))$ non nécessairement dense dans E (un espace de banach), H est un opérateur linéaire fermés $D(H) \subset E$, et $f \in C^\theta([0, 1]; E)$, $0 < \theta < 1$,

ω est un nombre réel positif, d_0 et u_1 est donné les éléments de E

Le but est l'étude de l'existence, l'unicité et régularite de la solution, la méthode utilisée est basé sur une construction de la solution sous la forme d'une intégrale de Dunford, semi groupe les espace de Hölder

Dans ce travail nous considérons le cas elliptique exprimé par

$$\exists \omega_0 > 0, \exists M > 0, \forall z \geq 0$$

$$\|(A_{\omega_0}(x) - zI)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{1+z}, \quad (3)$$

cette estimation reste vraie dans certains secteurs

$$\Pi_{\theta_0, r_0} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \theta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_0\},$$

ou θ_0 et r_0 sont deux nombres positifs

Il existe autre secteur qui utilise dans notre travail

$$\Pi_{\theta_1 + \frac{\pi}{2}, r_1} = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_1\},$$

ou θ_1 et r_1 sont deux nombres positifs

Aperçu historique

L'équation différentielle (1) et (2) a été traitée par de nombreux auteurs parmi lesquelles, on cite :

1. Cas A constant et $\omega = 0$.

Le célèbre travail de S. G. Krein fait en 1967 (voir [11] p. 249), où l'auteur a traité cette équation différentielle, en se basant sur la méthode de réduction de l'ordre et les propriétés des semi-groupes et de la racine carrée $(-A)^{\frac{1}{2}}$ (avec $D(A)$ dense dans E). Cette équation a été étudiée aussi, dans le cadre des sommes d'opérateurs par G. Da Prato et P. Grisvard en 1975 (voir [6]). Ici, les auteurs ont utilisé principalement le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation et ils ont imposé la restriction $f(0) = f(1) = 0$. On signale aussi d'autres travaux liés à cette équation, Sobolevskii [18], Kuyazyuk [12], etc...

Le cas A constant avec des conditions aux limites de Robin généralisées (i.e. à coefficients opérateurs) a été traité par M. Cheggag voir [5].

2. Cas A variable (A dépend de x).

En 1975, l'équation différentielle (1) avec des conditions aux limites homogènes a été largement traitée par G. Da Prato et P. Grisvard (voir [6]), dans un cadre plus général des sommes d'opérateurs. Ils ont supposé que, pour chaque $x \in [0, 1]$, $(-A(x))$ vérifie l'hypothèse d'ellipticité dite de Krein (voir [11], (2.2), p. 249) et des hypothèses de différentiabilité sur les résolvantes de la forme

$$(D.G) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha \in]0, \frac{1}{2}] , \exists \eta \in]0, 1[\text{ et } \exists N > 0 \text{ tels que} \\ \left\| \frac{\partial}{\partial x} (A(x) - \omega I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{N}{\omega^{\alpha + \frac{1}{2}}} \\ \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A(x) - \omega I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{N}{\omega^{\alpha}} \\ \left\| \frac{\partial}{\partial x} (A(x) - \omega I)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s} (A(s) - \omega I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{N |x - s|^{\eta}}{\omega^{\alpha + \frac{1}{2}}} \\ \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A(x) - \omega I)^{-1} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} (A(s) - \omega I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{N |x - s|^{\eta}}{\omega^{\alpha}}. \end{array} \right.$$

En 1985, R. Labbas et B. Terreni (voir [15]) ont étudié l'équation différentielle (1) avec les conditions aux limites du type Sturm-Liouville

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 u(0) - b_0 u'(0) = 0, \\ a_1 u(1) - b_1 u'(1) = 0, \end{array} \right.$$

où $a_i, b_i \geq 0$ et $a_i + b_i > 0$; $i = 0, 1$. Ceci, en imposant aussi la restriction $f(0) = f(1) = 0$ et en utilisant l'hypothèse

$$(L.T) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha, \rho, K > 0 \text{ tels que} \\ \|A(x) (A(x) - zI)^{-1} [(A(x))^{-1} - (A(s))^{-1}]\|_{L(E)} \leq \frac{K |x - s|^{\alpha}}{|z|^{\rho}}, \end{array} \right.$$

où $\alpha + 2\rho - 2 > 0$.

En 1987, l'équation différentielle (1) avec des conditions aux limites non homogènes a été traitée par R. Labbas (voir [13]) ceci en utilisant successivement l'hypothèse du type

$(L.T)$ et les hypothèses du type $(D.G)$. Ici, il n'a pas imposé que $f(0) = f(1) = 0$. En utilisant les techniques de calculs de Sinestrari [17], il a obtenu des conditions nécessaires de compatibilité entre les donnés et le second membre f , sous la forme

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\varphi \in \overline{D(A(0))}, \text{ où } \varphi = u(0), \\ f(1) - A(1)\psi \in \overline{D(A(1))}, \text{ où } \psi = u(1), \end{cases}$$

pour obtenir une solution stricte du problème (1)-(2).

Dans ce travail la famille d'opérateurs $(A(x))_{x \in [0,1]}$ vérifie une hypothèse de non différentiabilité de la résolvante du type Labbas-Terreni. Notre résultat essentiel est résumé par le théorème 4.4.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, technique un peu préliminaire les résultats sont prouvés.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle des notions de base quelques définitions sur les opérateurs linéaires, les semi groupes d'opérateurs lineaires, l' espace d'interpolation, la formule de Cauchy, l'intégrale de Dunford et les espaces de Hölder.

Au deuxième chapitre, on donne quelques lemmes principaux et les hypothèses.

est consacré à la construction de la solution stricte du problème aux limites. On suppose l'existence de cette solution et à l'aide d'un raisonnement heuristique on obtient une équation intégrale équivalente à notre problème.

Dans le chapitre 3 on montre le résultat de la régularité maximale de la solution stricte. La méthode utilisée s'inspire des travaux de Labbas [13], Bouziani [4].

Au chapitre 3, on justifie la représentation trouvée dans le premier chapitre par l'étude du problème approché associé.

Finalement, au chapitre 4, on donne des exemples concrets variés liés aux équations aux dérivées partielles.

Le résultat principal obtenu dans cette partie est le suivant :

Théorème 0.1 Soit $f \in C^\theta([0, 1]; E)$ où $\theta \in]0, \alpha + \mu - 2]$

et soit $(Q_\omega(0) - H)^{-1}d_0 \in D_{Q_\omega(0)} \cap D(H)$, $u_1 \in D_{A(1)}$. On suppose de plus que les hypothèses $(??) \sim (??)$ sont vérifiées et que :

$$\begin{cases} Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - H)^{-1}[d_0 - Q_\omega(0)^{-1}f(0)] \in D(Q_\omega(0)) \\ Q_\omega(0)^2(Q_\omega(0) - H)^{-1}[d_0 - Q_\omega(0)^{-1}f(0)] + f(0) \in D_{A(0)}\left(\frac{\theta}{2}, +\infty\right) \\ A_\omega(1)u_1 - f(1) \in D_{A(1)}\left(\frac{\theta}{2}, +\infty\right), \end{cases}$$

alors il existe $\omega^* > 0$ tel que $\forall \omega \geq \omega^*$ l'équation (1) admet une unique solution

$w(\cdot) = Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot)$ vérifiant :

1. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in C([0, 1]; E)$
2. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in C^\theta([0, 1]; E)$
3. $u'' \in C^\theta([0, 1]; E)$
4. $u'' \in C([0, 1]; E) \cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\frac{\theta}{2}, +\infty\right)\right).$

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Les opérateurs linéaires

Définition 1.1 *Un opérateur linéaire A sur X , est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$, appelé domaine de l'opérateur A , à valeur dans X .*

Définition 1.2 (Opérateur linéaire borné) *On dit qu'un opérateur linéaire $A : X \rightarrow X$ est borné si pour tout $x_0 \in X$,*

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} \|x - x_0\|_X = 0) \Rightarrow (\lim_{x \rightarrow x_0} \|Ax - Ax_0\|_X = 0),$$

ce qui équivalent à

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|Ax\|_X = Ax_0.$$

On note $L(X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans X . Cet espace muni de la norme suivante

$$\|A\|_{L(X)} := \sup \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \|Ax\|_X,$$

est un espace de Banach.

Définition 1.3 (Opérateur linéaire fermé) *Un opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ est fermé si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \in X \\ Ax_n \rightarrow y \in Y \end{cases},$$

on a

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y.$$

Définition 1.4 (Opérateur linéaire fermable)

Un opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ est fermable si pour tout suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de

$D(A)$ telle que

$$\begin{cases} \varphi_n \rightarrow 0 \\ A\varphi_n \rightarrow \Psi \end{cases} \implies \Psi = 0$$

Définition 1.5 Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire.

On appelle ensemble résolvant de l'opérateur A , l'ensemble ouvert $\rho(A)$ défini par

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} / A - \lambda I : D(A) \rightarrow X \text{ est bijectif et } (A - \lambda I)^{-1} \in L(X) \}$$

Si l'opérateur A est fermé, alors

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} / A - \lambda I : D(A) \rightarrow X \text{ est bijectif} \}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante $R_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}.$$

Le spectre de A , notée $\sigma(A)$, est défini par

$$\sigma(A) = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 semi-groupes fortement continu

On considère $(T(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés définis sur X , $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et le secteur

$$\sum_\alpha := \{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg z| < \alpha\}.$$

Définition 1.6 La famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est appelée semi-groupe si on a :

1. $T(0) = I$, où I désigne l'opérateur identité
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, T(s+t) = T(s)T(t)$.

Si de plus, pour chaque $x \in X$, l'application $t \rightarrow T(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X est continue c'est à dire

$$\forall x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0,$$

alors la famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit semi-groupe fortement continu ou C_0 semi-groupe.

Si la famille $(T(t))$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et satisfait les conditions 1) et 2) alors $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est dit groupe.

1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.7 On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur linéaire A , défini par

$$\begin{cases} D(A) = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X\} \\ \forall x \in D(A), Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \end{cases}.$$

On dit aussi que l'opérateur A génère le C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

1.2.3 Semi-groupe analytique

Définition 1.8 Une famille $(T(z))_{z \in \sum_\alpha}$ d'éléments de $L(X)$ forme un semi-groupe analytique de type α dans X si elle vérifie les conditions :

1. $T(0) = I$
2. $\forall z_1, z_2 \in \sum_\alpha$ tels que $z_1 + z_2 \in \sum_\alpha, T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$
3. $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \lim_{z \rightarrow 0, x \in \sum_{\alpha-\varepsilon}} \|T(x) - x\|_X = 0$
4. La fonction $z \rightarrow T(z)$ est analytique dans $\sum_\alpha$.

Proposition 1.1 On définit une famille d'opérateurs linéaires $(T(t))_{t \geq 0}$, notée $(\exp(tA))_{t \geq 0}$ par :

1. $T(0) = I$
2. $\forall t > 0, \forall x \in X, T(t)x = (\exp(tA))x = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \exp(\lambda t)(A - \lambda I)^{-1} x d\lambda,$
où $\gamma \subset \rho(A)$ est un contour non borné dans $\sum_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ allant de $\infty \exp(-(\alpha + \frac{\pi}{2}))$ à $\infty \exp((\alpha + \frac{\pi}{2}))$.

Alors $(\exp(tA))_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe de générateur infinitésimal A .

L'opérateurs $(\exp(tA))_{t \geq 0}$ se prolonge analytiquement en un semi-groupe analytique de type α noté $(\exp(tA))_{z \in \sum_\alpha}$ et l'opérateur $(-A)^{\frac{1}{2}}$ est bien défini. De plus il existe un secteur $\sum_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ avec $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$ telque $\sum_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \subset \rho(-(-A)^{\frac{1}{2}})$ et $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique.

1.2.4 semi-groupe analytique

Définition 1.9 Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est semi-groupe analytique généralisé d'angle α dans X si :

1. $T(\cdot)$ est la restriction d'une fonction holomorphe $T : \sum_\alpha \rightarrow L(X)$.
2. $\forall z_1, z_2 \in \sum_\alpha$ tels que $z_1 + z_2 \in \sum_\alpha, T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$

1.3 Les espaces d'interpolation

Soient $(X_0; \|\cdot\|_0)$, $(X_1; \|\cdot\|_1)$ deux espaces de banach complexes.

On munit les espaces de banach $X_0 \cap X_1$, $X_0 + X_1$ des normes suivantes :

$$\begin{cases} \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}, & \text{si } x \in X_0 \cap X_1 \\ \|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{\substack{x \in X_0, x \in X_1 \\ x = x_0 + x_1}} (\|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}), & \text{si } x \in X_0 + X_1 \end{cases}.$$

Définition 1.10 Soit $p \in [1, +\infty]$, On note $L_*^p(\mathbb{R}^+; X)$ l'espace de banach des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ telle que :

$$\begin{cases} \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty & \text{si } p \in]1, +\infty[\\ \|f\|_{L_*^\infty(\mathbb{R}^+; X)} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|f(t)\|_X < \infty \end{cases}.$$

On définit l'espace d'interpolation entre X_0 et X_1 notée $(X_0 : X_1)_{\theta, p}$ par

$$x \in (X_0 : X_1)_{\theta, p} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t > 0, \exists u_i(t) \in X_i : x = u_0(t) + u_1(t), i = 0, 1 \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_0), t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_1). \end{cases}$$

:Où d'une manière équivalente

$$x \in (X_0 : X_1)_{\theta, p} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t > 0, \exists u(t) \in X_0 \cap X_1 : x = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t} \\ t^{-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_0), t^{1-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_1) \end{cases}.$$

Les espaces d'interpolation sont caractérisés par la propriété suivante :

Proposition 1.2 Soient $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$.

1. Si on suppose que

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ \subset \rho(A) \text{ et} \\ \exists C > 0, \forall \lambda > 0, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{C}{\lambda}, \end{cases}$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X, t^\theta A(A - \lambda I)^{-1}x \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X)\}.$$

2. Si A génère un semi-groupe analytique borné X , alors $D_A(\theta, p) = \{x \in X, t^{1-\theta} A \exp(tA)x \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X)\}$

3. Si A génère un semi-groupe fortement continu borné dans X , alors

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X, t^{-\theta} \exp(tA - I)x \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X)\}.$$

Dans notre cas

$$D_A(\theta, +\infty) = \{x \in X, \|t^\theta A(A - \lambda I)^{-1}x\| \leq C < +\infty\}.$$

sachant que

$$\|x\|_{D_A(\theta, +\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t > 0} \|t^\theta A(A - \lambda I)^{-1}x\|_X$$

Les espaces d'interpolation sont des espaces de Banach.

1.4 Formule de Cauchy

U ouvert de $\mathbb{C}$, $H(U)$ est un espace des fonction holomorphes de $U \rightarrow \mathbb{C}$, $g \in H(U)$ et K (un compact à bord) de U et $z_0 \in K$,

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{z - z_0} dz,$$

Γ est le bord positivement orienté de K .

1.5 Intégrale de Dunford

Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U

Définition 1.11 (*Intégrale de dunford-Riesz*) Soient $A \in L(U)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contenant $\sigma(A)$ (spectre de A) et γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A). Soit $f \in H(U)$, alors

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(A - zI)^{-1} dz.$$

1.6 Les espaces de Hölder

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, telque $a < b$, $\theta \in]0, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions holdériennes d'exposant θ de $[a, b]$ dans X noté $C^\theta([a, b], X)$ est défini par

$$C^\theta([a, b], X) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow X, \sup_{\substack{x, s \in [a, b] \\ x-s \neq 0}} \frac{\|f(x) - f(s)\|_X}{|x - s|^\theta} < \infty \right\}.$$

Cet espace muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta([a, b]; X)} = \|f\|_{C'([a, b]; X)} + \sup_{\substack{x, s \in [a, b] \\ x-s \neq 0}} \frac{\|f(x) - f(s)\|_X}{|x - s|^\theta},$$

est un espace de Banach.

De plus

$$C^\theta([a, b]; X) \subset C([a, b]; X).$$

Chapitre 2

Position du problème

2.1 Introduction

Dans un espace de Banach complexe E , on considère l'équation différentielle du second ordre

$$u''(x) + A(x)u(x) - \omega u(x) = f(x), x \in]0, 1[, \quad (2.1)$$

ainsi que

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1 \quad (2.2)$$

Ici, ω est un nombre réel positif, $f \in C^\theta([0, 1]; X)$, $0 < \theta < 1$, d_0 et u_1 est donné les éléments de E , $(A(x))_{x \in [0, 1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés dont $D(A(x))$ domaines ne sont pas nécessairement dense dans E et H est un opérateur linéaire fermé avec $D(H)$. Posons pour $x \in [0, 1]$

$$A_\omega(x) = A(x) - \omega I, \quad \omega > 0$$

Pour $f \in C^\theta([0, 1]; E)$, on cherchons une solution u stricte du problème (2.1), (2.2); ce qui est.

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1] \quad u(x) \in D(A(x)), \\ u \in C^2([0, 1]; E). \\ x \rightarrow A(x)u(x) \in C([0, 1]; E), \\ u(0) \in D(H). \end{cases}$$

Tout au long de ce travail, nous supposons que la famille $(A(x))_{x \in [0, 1]}$ satisfait les hypothèses suivantes :

(H1) Il existe $\omega_0 > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ et $\forall z > 0$, $(A_{\omega_0}(x) - zI)^{-1} \in L(E)$ et

$$\|(A_{\omega_0}(x) - zI)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + z}, \quad (2.3)$$

cette estimation reste vraie dans certains secteurs

$$\Pi_{\theta_0, r_0} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \theta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_0\},$$

où θ_0 et r_0 sont des petits nombres positifs.

Remarque 2.1 *Il est bien connu que l'hypothèse (2.3) implique les mêmes propriétés*

pour un $A_\omega(x), \omega \geq \omega_0$.

D'autre part, il est bien connu que les racines carrées

$$Q_\omega(x) = -(-A_\omega(x))^{\frac{1}{2}}, \quad x \in [0, 1], \quad \omega \geq \omega_0,$$

sont bien définies et génèrent des semigroupes analytiques pas fortement continus en zéro ,
(Voir Balakrishnan [2] pour les domaines denses et Martinez-Sanz [16] pour les domaines non denses).et on suppose que l'opérateur $Q_\omega(x)$ vérifié l'hypothèse Labbas-Terreni

(H2) Il existe $C, \alpha, \mu \geq 0$ tel que pour tout $x, \tau \in [0, 1]$ et tout $\omega \geq \omega_0$:

$$\|Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1})\|_{L(E)} \leq C \frac{|x - \tau|^\alpha}{|z + \omega|^\mu} \quad (2.4)$$

avec $\alpha + \mu - 2 > 0$.

Remarque 2.2 *De (2.4) on peut prouver qu'il existe $C, \alpha, u > 0$ tel que pour*

tout $x, \tau \in [0, 1]$ et tout $\omega \geq \omega_0$,

$$\|Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}(Q_\omega(x)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2})\|_{L(E)} \leq C \frac{|x - \tau|^\alpha}{|z + \omega|^\mu},$$

avec $\alpha + \mu - 2 > 0$.

(H3) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $\omega \geq \omega_0$: $Q_\omega(x) - H$ est fermable,
($\overline{Q_\omega(x) - H}$) est inversible et bornée

$$\left\| \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq C(1 + \sqrt{\omega}), \quad (2.5)$$

(H4) Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $\omega \geq \omega_0$

$$\begin{aligned} & \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} ((D(Q_\omega(x)), E)_{1-\theta, \infty}) \subset D(Q_\omega(x)) \cap D(H), \\ & Q_\omega(x) \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} ((D(Q_\omega(x)), E)_{1-\theta, \infty}) \subset (D(Q_\omega(x)), E)_{1-\theta, \infty}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Rappelons que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} D_{Q_\omega(x)}(\theta, +\infty) &= \{ \varphi \in E : \sup_{r>0} \|r^\theta Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\varphi\|_E < +\infty \} \\ &: = (D(Q_\omega(x)), E)_{1-\theta, \infty}. \end{aligned}$$

Voir Grisvard [9].

(H5) Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $\omega \geq \omega_0$,

$$Q_\omega(x)^{-1} \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} = \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} Q_\omega(x)^{-1}. \quad (2.7)$$

(H6) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x, \tau \in [0, 1]$ et tout $\omega \geq \omega_0$,

$$\left\| \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} - \left(Q_\omega(x) - H \right)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq C |x - \tau|^{\alpha+\mu}, \quad (2.8)$$

On notera que, à partir de Remarque 1.1 il existe un autre secteur

$$\Pi_{\theta_1 + \frac{\pi}{2}, r_1} = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \theta_1 + \frac{\pi}{2} \right\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_1\},$$

avec une petite $\theta_1 > 0$ et $r_1 > 0$ tel que l'ensemble des résolvante $-(-A_\omega(x))^{\frac{1}{2}}$ satisfait

$$\rho(-(-A_\omega(x))^{\frac{1}{2}}) \supset \Pi_{\theta_1 + \frac{\pi}{2}, r_1},$$

pour tout $x \in [0, 1]$.

$$\Gamma = \{z = \rho e^{\pm i(\theta_1 + \frac{\pi}{2})} : \rho \geq r_1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1, |\arg(z)| \geq \theta_1 + \frac{\pi}{2}\},$$

orienté de $\infty e^{-i\theta_1}$ à $\infty e^{i\theta_1}$.

2.2 Lemmes techniques

Lemme 2.1 *Supposons (2.3). Il existe une constant $C > 0$, telque pour tout $\omega \geq \omega_0, z \in \Gamma$ et $x \in [0, 1]$,*

$$\|(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{\sqrt{\omega} + |z|}.$$

Lemme 2.2 *Supposons (2.3), $\forall \omega \geq \omega_0$ et $x \in [0, 1]$, l'opérateur $I - e^{2Q_\omega(x)}$ a une inverse bornée et*

$$(I - e^{2Q_\omega(x)})^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{2x}}{1 - e^{2z}} (zI - Q_\omega(x))^{-1} dz + I.$$

Voir Lunardi[15].

Proposition 2.1 *Supposons (2.3), (2.5) et (2.7) Il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ et $x \in [0, 1]$, $\Pi_\omega(x)$ est inversible bornée.*

Lemme 2.3 *Supposons (2.3) et (2.5) $\sim$ (2.8), pour tout $x \in [0, 1]$ et $\omega \geq \omega_0$, l'opérateur linéaire*

$$\Lambda_\omega(x) = Q_\omega(x) - H + e^{2Q_\omega(x)}(Q_\omega(x) + H), \quad x \in [0, 1],$$

de domaine $D(\Lambda_\omega(x)) = D(Q_\omega(x)) \cap D(H)$ est fermable, sa fermeture est inversible avec

$$(\overline{\Lambda_\omega(x)})^{-1} = (\overline{Q_\omega(x) + H})^{-1} (\Pi_\omega(x))^{-1} (I - e^{2Q_\omega(x)})^{-1}, \quad (2.9)$$

$$(\overline{\Lambda_\omega(x)})^{-1} = (\overline{Q_\omega(x) + H})^{-1} + (\overline{Q_\omega(x) + H})^{-1} W(x), \quad (2.10)$$

où

$$\begin{cases} W(x) \in L(x), (\overline{Q_\omega(x) - H})^{-1} W(x) = W(x) (\overline{Q_\omega(x) - H})^{-1}, \\ W(x)(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q_\omega(x)^k). \end{cases}$$

Preuve. Soit $\Lambda_\omega(x) = (I - e^{2Q_\omega(x)}) (Q_\omega(x) - H) + 2Q_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)}$, avec $\Lambda_\omega(x)$ est fermé (voir kato [12]) et

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda_\omega(x)} &= (I - e^{2Q_\omega(x)}) (\overline{Q_\omega(x) - H}) + 2e^{2Q_\omega(x)} \\ &= (I - e^{2Q_\omega(x)}) \Pi_\omega(x) (\overline{Q_\omega(x) - H}) \end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus avec (2.6) et la proposition (2.4) donne $0 \in \rho(\overline{\Lambda_\omega(x)})$ et (2.9). Par (2.9), nous avons

$$(\overline{\Lambda_\omega(x)})^{-1} = (\overline{Q_\omega(x) - H})^{-1} (I + M(x))^{-1} (I + N(x))^{-1},$$

avec

$$\begin{aligned} M(x) &= 2 (I - e^{2Q_\omega(x)}) Q_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)} (\overline{Q_\omega(x) - H})^{-1} \in L(E), \\ N(x) &= -2e^{2Q_\omega(x)} \in L(E), \quad [M(x)](E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q_\omega(x)^k), \\ [N(x)](E) &\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q_\omega(x)^k). \end{aligned}$$

Soit $U(x) = -M(x)(I + M(x))^{-1} \in L(E)$ et $V(x) = -N(x)(I + N(x))^{-1} \in L(E)$.

Alors

$$(\overline{\Lambda_\omega(x)})^{-1} = (\overline{Q_\omega(x) - H})^{-1} (I + U(x))(I + V(x))^{-1},$$

avec

$$\begin{aligned} (\overline{Q_\omega(x) - H})^{-1} U(x) &= U(x) (\overline{Q_\omega(x) - H})^{-1}, \\ (\overline{Q_\omega(x) - H})^{-1} V(x) &= V(x) (\overline{Q_\omega(x) - H})^{-1}, \\ [U(x)](E), [V(x)](E) &\supset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q_\omega(x)^k). \end{aligned}$$

$W(x) = U(x) + V(x) + U(x)V(x)$ on deduire le resultat. ■

Lemme 2.4 Il existe $K > 0$ tel que pour $\forall z \in \Gamma$ et $r > 0$, on a

$$\begin{aligned} |z + r| &\geq K |z|, |z + r| \geq K |r|, \\ |z - r| &\geq K |z|, |z - r| \geq K |z|, \end{aligned}$$

il existe $K > 0$ ne depend que de Γ telle que pour tout $\lambda > 0$ et $\nu \in [0, 1]$,

$$\int_{\Gamma} \frac{|dz|}{|z \pm \lambda| |z|^\nu} \leq \frac{K}{\lambda^\nu}.$$

Chapitre 3

Représentation de la solution et la régularité

On considère $A_\omega = A$ un opérateur lineaire constant, alors le problème suivant

$$\begin{cases} v''(x) + A_\omega v(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ v'(0) - H v(0) = d_0 \\ v(1) = u_1, \end{cases}$$

admet une solution qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} v(x) = & e^{xQ_\omega} \left[(\overline{\Lambda_\omega})^{-1} d_0 + (Q_\omega + H) (\overline{\Lambda_\omega})^{-1} e^{Q_\omega} u_1 \right] \\ & + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega} (Q_\omega + H) (\overline{\Lambda_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} \int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s) ds \\ & - \frac{1}{2} e^{xQ_\omega} (Q_\omega + H) (\overline{\Lambda_\omega})^{-1} e^{Q_\omega} Q_\omega^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega} f(s) ds \\ & + e^{(1-x)Q_\omega} \left[\left(I - (Q_\omega + H) (\overline{\Lambda_\omega})^{-1} e^{2Q_\omega} \right) u_1 - (\overline{\Lambda_\omega})^{-1} e^{Q_\omega} d_0 \right] \\ & - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega} (Q_\omega + H) (\overline{\Lambda_\omega})^{-1} e^{Q_\omega} Q_\omega^{-1} \int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s) ds \\ & - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega} \left[I - (Q_\omega + H) (\overline{\Lambda_\omega})^{-1} e^{2Q_\omega} \right] Q_\omega^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega} f(s) ds \\ & + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega} f(s) ds + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega} f(s) ds. \end{aligned}$$

Voir le travail de M. Cheggag [5].

Posons pour chaque $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
L_{Q_\omega(x)}(x, f) &= \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} (Q_\omega(x) + H) \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} f(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} (Q_\omega(x) + H) \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} e^{Q_\omega(x)} Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} f(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} (Q_\omega(x) + H) \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} e^{Q_\omega(x)} Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} f(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left[I - (Q_\omega(x) + H) \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} e^{2Q_\omega(x)} \right] Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} f(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left[I - (Q_\omega(x) + H) \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} e^{2Q_\omega(x)} \right] Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} f(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega} f(s) ds + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega} f(s) ds.
\end{aligned}$$

on remplace $f(x)$ par $u''(x) - Q_\omega^2(x)u(x)$, on trouve

$$\begin{aligned}
L_{Q_\omega(x)}(x, f(x)) &= \frac{1}{2} Q_\omega^{-1}(x) \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)} (u''(s) - Q_\omega^2(s)u(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} (u''(s) - Q_\omega^2(s)u(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1}(x) \int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega(x)} (u''(s) - Q_\omega^2(s)u(s)) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} (u''(s) - Q_\omega^2(s)u(s)) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} e^{Q_\omega(x)} Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} (u''(s) - Q_\omega^2(s)u(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} e^{2Q_\omega(x)} T_\omega(x) Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} (u''(s) - Q_\omega^2(s)u(s)) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} e^{Q_\omega(x)} T_\omega(x) Q_\omega^{-1}(x) \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} (u''(s) - Q_\omega^2(s)u(s)) ds \\
&= \sum_{i=1}^7 I_i.
\end{aligned}$$

En faisant une double intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
&u(x) + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) Q_\omega^2(s) u(s) ds \\
&- \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} e^{Q_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) Q_\omega^2(s) u(s) ds \\
&- \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} e^{Q_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) Q_\omega^2(s) u(s) ds \\
&- \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} (I - T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)}) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) Q_\omega^2(s) u(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega(x) e^{(x-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) Q_\omega^2(s) u(s) ds \\
& + \frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega(x) e^{(s-x)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) Q_\omega^2(s) u(x) ds \\
= & L_{Q_\omega(x)}(x, f) + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} \left((-I + T_\omega(x) + e^{2Q_\omega(x)} T_\omega(x)) Q_\omega^{-1}(x) u'(0) \right) \\
& - \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} \left((-I + T_\omega(x) + e^{2Q_\omega(x)} T_\omega(x)) u(0) \right) \\
& + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} u_1 + \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} (I + T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)}) u_1 \\
& - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left(\left((-I + T_\omega(x) + e^{2Q_\omega(x)} T_\omega(x)) Q_\omega^{-1}(x) u'(0) \right) e^{xQ_\omega(x)} \right) \\
& + \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left((-I + T_\omega(x) + e^{2Q_\omega(x)} T_\omega(x)) u(0) \right) e^{xQ_\omega(x)} \\
= & L_{Q_\omega(x)}(x, f) + e^{xQ_\omega(x)} \left[\overline{(\Lambda(x))}^{-1} d_0 + T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} u_1 \right] \\
& + e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left[(I - T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)}) u_1 - \overline{(\Lambda_\omega(x))}^{-1} e^{xQ_\omega(x)} d_0 \right],
\end{aligned}$$

où

$$T_\omega(x) = (Q_\omega(x) + H) \left(\overline{(\Lambda_\omega(x))} \right)^{-1}.$$

On applique $Q_\omega(x)^2$, et en posant :

$$w(\cdot) = Q_\omega^2(\cdot) u(\cdot),$$

, On obtient l'équation intégrale suivante :

$$w + P_\omega w = G_{Q_\omega(x)}(d_0, u_1, f),$$

tels que

$$\begin{aligned}
(P_\omega w)(x) = & \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
& - \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
& - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
& + \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
& - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega^3(x) e^{(x-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
& + \frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega^3(x) e^{(s-x)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^7 I_i(x),$$

et

$$\begin{aligned} & G_{Q_\omega(x)}(d, u_1, f)(x) \\ &= Q_\omega(x)^2 L_{Q_\omega(x)}(x, f) + Q_\omega^2(x) e^{xQ_\omega(x)} \left[\left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} d_0 + T_\omega(x) e^{xQ_\omega(x)} u_1 \right] \\ & \quad + Q_\omega^2(x) e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left[(I - T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)}) u_1 - \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} e^{Q_\omega(x)} d_0 \right]. \end{aligned}$$

Proposition 3.1 *Sous les hypothèses (2.3) ~ (2.8), il existe $\omega^* > 0$, tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$,*

$$\|P_\omega\|_{L(C[0,1];E)} \leq \frac{1}{2}.$$

Preuve. On traite par exemples.

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{1}{2} T_\omega(x) e^{xQ_\omega(x)} \int_0^x Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) Q_\omega^2(s) u(s) ds \\ & \quad + \frac{1}{2} T_\omega(x) e^{xQ_\omega(x)} \int_x^1 Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) Q_\omega^2(s) u(s) ds \\ &= -\frac{1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_0^x \int_\Gamma z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - z)^{-1} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) \omega(s) ds \\ & \quad - \frac{1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_x^1 \int_\Gamma z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - z)^{-1} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) \omega(s) ds \\ &= a + b, \end{aligned}$$

Pour a , on a :

$$\begin{aligned} \|a\|_E &\leq C \int_\Gamma \int_0^x |z|^2 e^{-(x+s)|z|} \frac{|s-x|^\alpha}{|z+\omega|^\mu} d|z| ds \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\ &\leq C \int_\Gamma \left(\sup_{x \in [0,1]} \int_0^x e^{-(x+s)|z|} (x-s)^\alpha ds \right) \frac{|z|^2}{|z+\omega|^\mu} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\ &\leq C \int_\Gamma \left(\sup_{x \in [0,1]} \left[\left(\int_0^x e^{-(x+s)|z|} ds \right)^{1-\alpha} \left(\int_0^x e^{-(x+s)|z|} (x-s) ds \right)^\alpha \right] \right) \frac{|z|^2}{|z+\omega|^\mu} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\ &\leq C \int_\Gamma \frac{|z|^2}{|z|^{1+\alpha} |z+\omega|^\mu} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\ &\leq C \int_\Gamma \frac{1}{|z|^{\alpha-1} |z+\omega|^\mu} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \end{aligned}$$

D'après le lemme de Labbas-Terreni

$$\begin{aligned}
\|a\|_E &\leq C \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|^{\alpha-1} |z+\omega|^{\mu} |z+\omega|^{\mu-1}} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|^{\alpha-1} |z+\omega| |z|^{\mu-1}} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq \int_{\Gamma} \frac{C}{|z|^{\alpha+\mu-2} |z+\omega|} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq \frac{C}{\omega^{\alpha+\mu-2}} \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|b\|_E &\leq C \int_{\Gamma} \int_x^1 |z|^2 e^{-(x+s)|z|} \frac{|s-x|^{\alpha}}{|z+\omega|^{\mu}} d|z| ds \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\Gamma} \left(\sup_{x \in [0,1]} \int_x^1 e^{-(x+s)|z|} (x-s)^{\alpha} ds \right) \frac{|z|^2}{|z+\omega|^{\mu}} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\Gamma} \left(\sup_{x \in [0,1]} \left[\left(\int_x^1 e^{-(x+s)|z|} ds \right)^{1-\alpha} \left(\int_0^x e^{-(x+s)|z|} (x-s) ds \right)^{\alpha} \right] \right) \frac{|z|^2}{|z+\omega|^{\mu}} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\Gamma} \frac{|z|^2}{|z|^{1+\alpha} |z+\omega|^{\mu}} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|^{\alpha-2} |z+\omega|^{\mu}} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)}
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Labbas-Terreni

$$\begin{aligned}
\|b\|_E &\leq C \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|^{\alpha-1} |z+\omega| |z+\omega|^{\mu-1}} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|^{\alpha-1} |z+\omega| |z|^{\mu-1}} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq \int_{\Gamma} \frac{C}{|z|^{\alpha+\mu-2} |z+\omega|} d|z| \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq \frac{C}{\omega^{\alpha+\mu-2}} \|\omega(s)\|_{C([0,1];E)}.
\end{aligned}$$

Donc, il existe $\omega^* > 0$, telle que pour tout $\omega \geq \omega^*$, $\|P_{\omega}\|_{L(C[0,1];E)} \leq \frac{1}{2}$. Alors l'équation admet une unique solution $\omega(\cdot) = Q_{\omega}^2(\cdot)u(\cdot)$ et donc

$$u(\cdot) = Q_{\omega}(\cdot)^{-2} (I + P_{\omega})^{-1} G_{Q_{\omega}(\cdot)}(d_0, u_1, f).$$

■

Pour montrer la régularité de la solution $u(\cdot)$, on doit étudier la régularité du second membre G et la régularité de $(I - P_{\omega})^{-1}$.

3.1 Régularité du second membre $G_{Q_\omega(x)}(d_0, u_1, f)$.

Dans cette section, on utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.1 . On fixe $x \in [0, 1]$ et $\theta \in]0, 1[$. tels que

1. $s \rightarrow e^{sQ_\omega(x)}\varphi \in C([0, 1]; E)$ ssi $\varphi \in \overline{D(Q_\omega(x))}$.
2. $s \rightarrow e^{sQ_\omega(x)}\varphi \in C^\theta([0, 1]; E)$ ssi $\varphi \in D_{Q_\omega(x)}(\theta, +\infty)$.

Lemme 3.2 Soit $f \in C^\theta([0, 1]; E)$. tels que $\theta \in]0; \alpha + \mu - 2]$

$$Q_\omega(0) \int_0^1 e^{sQ_\omega(0)} (f(s) - f(0)) ds \in (D(Q_\omega(0)); E)_{1-\theta, \infty}.$$

Proposition 3.2 Sous les hypothèses (2.3) $\sim$ (2.8) et soit $f \in C^\theta([0, 1]; E)$ avec $\theta \in]0, \alpha + \mu - 2]$ et $u_1 \in D(Q_\omega(1)^2)$, $\left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} d_0 \in D(Q_\omega(0)) \cap D(H)$, alors

1. $G_{Q_\omega(x)}(d_0, u_1, f) \in C([0, 1]; E)$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) \in D(Q_\omega(0)), \\ Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \in \overline{D(Q_\omega(0))}, \\ Q_\omega(1)^2 u_1 + f(1) \in \overline{D(Q_\omega(1))}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

2. $G_{Q_\omega(x)}(d_0, u_1, f) \in C^\theta([0, 1]; E)$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) \in D(Q_\omega(0)), \\ Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \in D(Q_\omega(0), E)_{1-\theta, \infty}, \\ Q_\omega(1)^2 u_1 + f(1) \in D(Q_\omega(1); E)_{1-\theta, \infty}. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} & G_{Q_\omega(x)}(d_0, u_1, f)(x) \\ &= Q_\omega^2(x) e^{xQ_\omega(x)} \left[\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 + T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} u_1 \right] \\ &+ Q_\omega^2(x) e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left[(I - T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)}) u_1 - \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} e^{xQ_\omega(x)} d_0 \right] \\ &+ \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{sQ_\omega(x)} f(s) ds \\ &- \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{(2-s)Q_\omega(x)} f(s) ds \\ &- \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{(1+s)Q_\omega(x)} f(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1Q_\omega(x)e^{(1+s)Q_\omega(x)}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1Q_\omega(x)e^{(3-s)Q_\omega(x)}f(s)ds \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\int_0^1Q_\omega(x)e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}\int_0^xQ_\omega(x)e^{(x-s)Q_\omega(x)}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}\int_x^1Q_\omega(x)e^{(s-x)Q_\omega(x)}f(s)ds \\
= & Q_\omega^2(x)e^{xQ_\omega(x)}\left[\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}d_0+T_\omega(x)e^{Q_\omega(x)}u_1\right] \\
& +Q_\omega^2(x)e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left[(I-T_\omega(x)e^{2Q_\omega(x)})u_1-\overline{(\Lambda_\omega(x))}^{-1}e^{xQ_\omega(x)}d_0\right] \\
& +\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1Q_\omega(x)e^{sQ_\omega(x)}(f(s)-f(0))ds \\
& -\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1Q_\omega(x)e^{(2-s)Q_\omega(x)}f(0)ds \\
& -\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1Q_\omega(x)e^{(2-s)Q_\omega(x)}f(s)ds \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1Q_\omega(x)e^{(1+s)Q_\omega(x)}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1Q_\omega(x)e^{(3-s)Q_\omega(x)}f(s)ds \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\int_0^1Q_\omega(x)e^{(1-s)Q_\omega(x)}(f(s)-f(1))ds \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\int_0^1Q_\omega(x)e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(1)ds \\
& +\frac{1}{2}\int_0^xQ_\omega(x)e^{(x-s)Q_\omega(x)}(f(s)-f(0))ds \\
& +\frac{1}{2}\int_0^xQ_\omega(x)e^{(x-s)Q_\omega(x)}f(0)ds \\
& +\frac{1}{2}\int_x^1Q_\omega(x)e^{(s-x)Q_\omega(x)}(f(s)-f(1))ds \\
& +\frac{1}{2}\int_x^1Q_\omega(x)e^{(s-x)Q_\omega(x)}f(1)ds \\
= & -e^{xQ_\omega(x)}H\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}f(0)+Q_\omega^2(x)e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}d_0 \\
& +e^{(1-x)Q_\omega(x)}f(1)+Q_\omega^2(x)e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1 \\
& +\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1Q_\omega(x)e^{sQ_\omega(x)}(f(s)-f(0))ds \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\int_0^1Q_\omega(x)e^{(1-s)Q_\omega(x)}(f(s)-f(1))ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega(x) e^{(x-s)Q_\omega(x)} (f(s) - f(0)) ds - \frac{1}{2} f(0) \\
& + \frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega(x) e^{(s-x)Q_\omega(x)} (f(s) - f(1)) ds - \frac{1}{2} f(1) \\
& + Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} e^{Q_\omega(x)} T_\omega(x) \left[u_1 - \frac{1}{2} Q_\omega(x)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} f(s) ds + \frac{1}{2} (I + e^{Q_\omega(x)}) \cdot \right. \\
& \left. Q_\omega(x)^{-2} f(0) \right] - Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} e^{2Q_\omega(x)} T_\omega(x) \left[u_1 - \frac{1}{2} Q_\omega(x)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} f(s) ds \right] \\
& - Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} e^{Q_\omega(x)} \left[\left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} d_0 + \frac{1}{2} T_\omega(x) Q_\omega(x)^{-1} \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} f(s) ds \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} Q_\omega(x)^{-2} f(1) \right] \\
= & \left[-e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} f(0) + Q_\omega^2(x) e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} d_0 \right] + \left[e^{(1-x)Q_\omega(x)} f(1) \right. \\
& + Q_\omega^2(x) e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 \left. \right] + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{sQ_\omega(x)} (f(s) - f(0)) ds \\
& - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (f(s) - f(1)) ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega(x) e^{(x-s)Q_\omega(x)} (f(s) - f(0)) ds - \frac{1}{2} f(0) \\
& + \frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega(x) e^{(s-x)Q_\omega(x)} (f(s) - f(1)) ds - \frac{1}{2} f(1) \\
& + A_\omega(x) R(x, f, d_0, u_1) \\
& \sum_{k=1}^4 I_k(x) + \left[-e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} f(0) + Q_\omega^2(x) e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} d_0 \right] \\
& + \left[e^{(1-x)Q_\omega(x)} f(1) + Q_\omega^2(x) e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 \right] + A_\omega(x) R(x, f, d_0, u_1),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
& R(x, f, d_0, u_1) \\
= & -e^{xQ_\omega(x)} e^{Q_\omega(x)} T_\omega(x) \left[u_1 - \frac{1}{2} Q_\omega(x)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} f(s) ds + \frac{1}{2} (I + e^{Q_\omega(x)}) Q_\omega(x)^{-2} f(0) \right] \\
& + e^{(1-x)Q_\omega(x)} e^{2Q_\omega(x)} T_\omega(x) \left[u_1 - \frac{1}{2} Q_\omega(x)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} f(s) ds \right] \\
& + e^{(1-x)Q_\omega(x)} e^{Q_\omega(x)} \left[\left(\overline{\Lambda_\omega(x)} \right)^{-1} d_0 + \frac{1}{2} T_\omega(x) Q_\omega(x)^{-1} \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} f(s) ds + \frac{1}{2} Q_\omega(x)^{-2} f(1) \right].
\end{aligned}$$

Chaque terme $R(x, f, d_0, u_1)$ contient $e^{Q_\omega(x)}$ et $e^{Q_\omega(x)} \in L(E, D(Q_\omega(x)^m))$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors

$$R(\cdot, f, d_0, u_1) \in C^\infty([0, 1]; E),$$

et

$$A_\omega(x) R(x, f, d_0, u_1) \in C^\infty([0, 1]; E).$$

Pour I_1 , on écrit

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x) e^{sQ_\omega(x)} (f(s) - f(0)) ds \\
&= \frac{1}{2} [Q_\omega(x) e^{xQ_\omega(x)} - Q_\omega(0) e^{xQ_\omega(0)}] \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} (f(s) - f(0)) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} Q_\omega(0) e^{xQ_\omega(0)} \int_0^1 [e^{sQ_\omega(x)} - e^{sQ_\omega(0)}] (f(s) - f(0)) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} Q_\omega(0) e^{xQ_\omega(0)} \int_0^1 e^{sQ_\omega(0)} (f(s) - f(0)) ds \\
&= a_1 + a_2 + a_3,
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\|Q_\omega(x) e^{xQ_\omega(x)} - Q_\omega(0) e^{xQ_\omega(0)}\|_E &= \left\| \int_\Gamma [Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - z)^{-1} - Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - z)^{-1}] e^{sz} dz \right\|_E \\
&\leq \int_\Gamma \|ze^{sz} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - z)^{-1} [Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}] Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - z)^{-1}\|_E dz \\
&\leq K \int_\Gamma e^{-s|z|} |z| \frac{x^\alpha}{|z|^\mu} d|z| \\
&\leq K \int_\Gamma e^{-\sigma} \frac{x^{\alpha-1}}{(\frac{\sigma}{x})^{\mu-1}} d\sigma \\
&\leq K x^{\alpha+\mu-2},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} (f(s) - f(0)) ds \right\|_E &= \left\| -\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \int_\Gamma e^{sz} (Q_\omega(x) - z)^{-1} (f(s) - f(0)) dz ds \right\|_E \\
&\leq K \int_0^1 \int_\Gamma e^{-s|z|} \frac{1}{|z|} s^\theta \|f\|_{C^\theta([0,1],E)} d|z| ds \\
&\leq K \int_0^1 \int_\Gamma e^{-s|z|} \frac{1}{\left|\frac{\sigma}{s}\right|} s^\theta \frac{d\sigma}{s} ds \|f\|_{C^\theta([0,1],E)} \\
&\leq K \|f\|_{C^\theta([0,1],E)},
\end{aligned}$$

alors

$$\|a_1\|_E \leq K x^{\alpha+\mu-2} \|f\|_{C^\theta([0,1],E)},$$

de même pour a_2 .

D'après le lemme 3.2, on obtient

$$Q_\omega(0) \int_0^1 e^{sQ_\omega(0)} (f(s) - f(0)) ds \in (D(Q_\omega(0)), E)_{1-\theta, \infty},$$

à partir de laquelle on déduit que

$$a_3 = \frac{1}{2} Q_\omega(0) e^{xQ_\omega(0)} \int_0^1 e^{sQ_\omega(0)} (f(s) - f(0)) ds \in C^\theta([0,1]; E).$$

On fait de même pour les autres termes.

Et de plus on a :

$$\begin{aligned}
& [e^{(1-x)Q_\omega(x)} f(1) + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1] \\
= & [e^{(1-x)Q_\omega(x)} f(1) - e^{(1-x)Q_\omega(1)} f(1)] + [Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 - Q_\omega(1)^2 e^{(1-x)Q_\omega(1)} u_1] \\
& + e^{(1-x)Q_\omega(1)} [f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1]. \\
= & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{(1-x)z} ((Q_\omega(x) - zI)^{-1} - (Q_\omega(1) - zI)^{-1}) f(1) dz \\
& -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z e^{(1-x)z} (Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(1)(Q_\omega(1) - zI)^{-1}) u_1 dz \\
& + e^{(1-x)Q_\omega(1)} [f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1] \\
= & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{(1-x)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} [Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(1)^{-1}] Q_\omega(1)(Q_\omega(1) - zI)^{-1} f(1) dz \\
& -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^2 e^{(1-x)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} [Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(1)^{-1}] Q_\omega(1)(Q_\omega(1) - zI)^{-1} u_1 dz \\
& + e^{(1-x)Q_\omega(1)} [f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1] \\
= & b_1 + b_2 + b_3.
\end{aligned}$$

Pour b_1 , on a

$$\begin{aligned}
\|b_1\|_E & \leq K \int_{\Gamma} |z| e^{-(1-x)|z|} \frac{(1-x)^\alpha}{|z|^\mu} |dz| \|f(1)\|_E \\
& \leq K \int_{\Gamma} e^{-\sigma} \frac{(1-x)^\alpha}{\left(\frac{\sigma}{1-x}\right)^\mu} \frac{(1-x)}{(1-x)^2} d\sigma \|f(1)\|_E \\
& \leq K (1-x)^{\alpha+\mu-2} \|f(1)\|_E \\
& \leq K \|f(1)\|_E,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|b_2\|_E & \leq K \int_{\Gamma} |z|^2 e^{-(1-x)|z|} \frac{(x-1)^\alpha}{|z|^\mu} |dz| \|Q_\omega(1)u_1\|_E \\
& \leq K \int_{\Gamma} e^{-(1-x)|z|} \frac{(x-1)^\alpha}{|z|^{\mu-2}} \|Q_\omega(1)u_1\|_E d|z| \\
& \leq K \int_{\Gamma} e^{-\sigma} \frac{(x-1)^{\alpha+\mu-1}}{|\sigma|^{\mu-2}} d\sigma \|Q_\omega(1)u_1\|_E \\
& \leq K (x-1)^{\alpha+\mu-1} \|Q_\omega(1)u_1\|_E.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
& Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} f(0) \\
= & Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left[\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} + \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} W(x) \right] d_0 \\
& - e^{xQ_\omega(x)} H \left[\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} + \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} W(x) \right] f(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} d_0 - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} f(0) \\
&\quad + Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} W(x) d_0 \\
&\quad - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} W(x) f(0) \\
&= Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} d_0 + e^{xQ_\omega(x)} (Q_\omega(x) - H) \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} f(0) \\
&\quad - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} f(0) \\
&\quad + Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} W(x) d_0 - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} W(x) f(0) \\
&= Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} d_0 + e^{xQ_\omega(x)} f(0) - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} f(0) \\
&\quad + Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} W(x) d_0 - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} W(x) f(0),
\end{aligned}$$

avec $W(x) \in L(E)$ et $R(W(x)) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q_\omega(x)^k)$. Alors :

$$\begin{aligned}
&Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 + e^{xQ_\omega(x)} f(0) - e^{xQ_\omega(x)} Q_\omega(x) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} f(0) \\
&= \left[Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 - Q_\omega(0)^2 e^{xQ_\omega(0)} \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 \right] \\
&\quad + \left[Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 - Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 \right] \\
&\quad + \left[-e^{xQ_\omega(x)} Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} f(0) + e^{xQ_\omega(0)} Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} f(0) \right] \\
&\quad + \left[-e^{xQ_\omega(x)} Q_\omega(x) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} f(0) + e^{xQ_\omega(x)} Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} f(0) \right] \\
&\quad + [e^{xQ_\omega(x)} f(0) - e^{xQ_\omega(0)} f(0)] \\
&\quad + e^{xQ_\omega(0)} \left[Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 - Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} f(0) + f(0) \right],
\end{aligned}$$

Utilisant l'identité algébrique

$$\begin{aligned}
&Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - z)^{-1} - Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - z)^{-1} \\
&= zQ_\omega(x)(Q_\omega(x) - z)^{-1} [Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}] Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - z)^{-1},
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
&Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 + e^{xQ_\omega(x)} f(0) - e^{xQ_\omega(x)} Q_\omega(x) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} f(0) \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^2 e^{xz} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} [Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}] \cdot \\
&\quad Q_\omega(0) (Q_\omega(0) - zI)^{-1} \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z e^{xz} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} [Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}] \cdot \\
& Q_\omega(0) (Q_\omega(0) - zI)^{-1} \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} f(0) dz \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^2 e^{xz} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} [Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}] \cdot \\
& Q_\omega(0) (Q_\omega(0) - zI)^{-1} \left[\left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} \right] d_0 dz \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z e^{xz} Q_\omega(0) (Q_\omega(0) - zI)^{-1} \left[\left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} \right] d_0 dz \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{xz} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left[\left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} \right] f(0) dz \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{xz} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} [Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}] \cdot \\
& Q_\omega(0) (Q_\omega(0) - zI)^{-1} f(0) dz \\
& + e^{xQ_\omega(0)} \left[Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 - Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} f(0) + f(0) \right] \\
& = \sum_{i=1}^7 a_i.
\end{aligned}$$

Pour a_1 on a

$$\begin{aligned}
\|a_1\|_E & \leq K \int_{\Gamma} |z| e^{-x|z|} \frac{x^\alpha}{|z|^\mu} d|z| \left\| Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 \right\|_E \\
& \leq K \int_{\Gamma} e^{-\sigma} \frac{x^\alpha}{\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu-1}} \frac{d\sigma}{x} \left\| Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 \right\|_E \\
& \leq K \int_{\Gamma} e^{-\sigma} \frac{x^{\alpha+\mu-2}}{\sigma^{\mu-1}} d\sigma \left\| Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 \right\|_E \\
& \leq K x^{\alpha+\mu-2} \left\| Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 \right\|_E \\
& \leq k \left\| Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} d_0 \right\|_E,
\end{aligned}$$

De même pour les autres termes.

Finalement on a $G(d_0, u_1, f) \in C([0, 1]; E)$ si et seulement si

$$\begin{cases} e^{xQ_\omega(0)} \left[Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \right] \in C([0, 1]; E), \\ e^{(1-x)Q_\omega(1)} [A_\omega(1) u_1 - f(1)] \in C([0, 1]; E), \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \in \overline{D(Q_\omega(0))}, \\ A_\omega(1) u_1 - f(1) \in \overline{D(Q_\omega(1))} \end{cases}$$

et puisque pour tout $\alpha \in]0, 1[$ on a

$$\begin{cases} \overline{D(A_\omega^\alpha)} \subset D(A_\omega) \\ D(A_\omega) \subset D(A_\omega^\alpha), \end{cases}$$

et donc

$$\overline{D(A_\omega)} = \overline{D(A_\omega^\alpha)},$$

alors

$$\begin{cases} \overline{D(Q_\omega(0))} = \overline{D(A(0))} \\ \overline{D(Q_\omega(1))} = \overline{D(A(1))}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \in \overline{D(A(0))} \\ A_\omega(1) u_1 - f(1) \in \overline{D(A(1))}. \end{cases}$$

Et de plus $G(d_0, u_1, f) \in C^\theta([0, 1]; E)$ si et seulement si

$$\begin{cases} e^{xQ_\omega(0)} \left[Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \right] \in C^\theta([0, 1]; E) \\ e^{(1-x)Q_\omega(1)} [A_\omega(1) u_1 - f(1)] \in C^\theta([0, 1]; E), \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \in (D_{Q_\omega(0)}, E)_{1-\theta, \infty} \\ A_\omega(1) u_1 - f(1) \in (D_{Q_\omega(1)}, E)_{1-\theta, \infty}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H} \right)^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \in (D_{A(0)}, E)_{1-\frac{\theta}{2}, \infty} \\ A_\omega(1) u_1 - f(1) \in (D_{A(1)}, E)_{1-\frac{\theta}{2}, \infty}. \end{cases}$$

■

3.2 Régularité de P_ω

Proposition 3.3 *Sous l'hypothèses (2.3) $\sim$ (2.8), on a :*

1. $P_\omega \in L(C(E), C^{\alpha+\mu-2}(E))$
2. $P_\omega \in L(C(E), C(E) \cap B(D_{A(\cdot)}(\frac{\theta}{2}, +\infty)))$, avec $\theta \in]0, \alpha + \mu - 2]$.

Preuve. On montre la régularité de P_ω si $0 \leq \tau \leq x \leq 1$ et $w \in C([0, 1]; E)$, on a :

$$\begin{aligned}
& (P_\omega w)(x) - (P_\omega w)(\tau) \\
&= \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) \int_0^1 Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{(1-\tau)Q_\omega(\tau)} \int_0^1 Q_\omega^3(\tau) e^{(1-s)Q_\omega(\tau)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(\tau)) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega^3(x) e^{(x-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^\tau Q_\omega^3(\tau) e^{(\tau-s)Q_\omega(\tau)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(\tau)) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega^3(x) e^{(s-x)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_\tau^1 Q_\omega^3(\tau) e^{(s-\tau)Q_\omega(\tau)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(\tau)) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) e^{Q_\omega(\tau)} \int_0^1 Q_\omega^3(\tau) e^{(1-s)Q_\omega(\tau)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(\tau)) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{(1-\tau)Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) e^{Q_\omega(\tau)} \int_0^1 Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(\tau)) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(x)) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{(1-\tau)Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) e^{2Q_\omega(\tau)} \int_0^1 Q_\omega^3(\tau) e^{(1-s)Q_\omega(\tau)} (Q_\omega^{-2}(s) - Q_\omega^{-2}(\tau)) w(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^{14} I_i
\end{aligned}$$

On a $I_9 + I_{10}, I_{11} + I_{12}$ et $I_{13} + I_{14}$ dans $0(|x - \tau|^\theta)$ avec $0 < \theta \leq \alpha + \mu - 2$.

On a :

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) \int_0^1 Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^x Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_x^1 Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) \int_0^\tau Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) \int_\tau^1 Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds \\
&= \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^x Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) \int_0^\tau Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_x^1 Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) \int_\tau^1 Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds \\
&= a + b + c + d,
\end{aligned}$$

pour $a + b$, on a :

$$\begin{aligned}
a + b &= \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^x Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) \int_0^\tau Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds \\
&= \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^\tau Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_\tau^x Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) \int_0^\tau Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds \\
&= \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^\tau Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^\tau Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(\tau)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_\tau^x Q_\omega^3(x) e^{sQ_\omega(x)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\tau Q_\omega(\tau)} T_\omega(\tau) \int_0^\tau Q_\omega^3(\tau) e^{sQ_\omega(\tau)} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds \\
&= -\frac{1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_\Gamma \int_0^\tau z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_\Gamma \int_0^\tau z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} (Q_\omega(\tau)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_\Gamma \int_\tau^x z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds dz \\
& + \frac{1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_\Gamma \int_0^\tau z^2 e^{(\tau+s)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds dz \\
& = \sum_{i=1}^4 A_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|A_1\|_E &= \left\| -\frac{1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_\Gamma \int_0^\tau z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} (Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}) w(s) ds dz \right\|_E \\
&\leq K \int_\Gamma \int_0^\tau |z|^2 e^{(x+s)|z|} \frac{(\tau-s)^\alpha}{|z|^\mu} ds d|z| \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K \int_\Gamma \int_0^\tau e^{-(x-s)|z|} \frac{(\tau-s)^\alpha}{|z|^{\mu-2}} ds d|z| \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K \int_\Gamma \int_0^\tau e^{-\sigma} \frac{(\tau-s)^\alpha}{\left| \frac{\sigma}{x-s} \right|^{\mu-2}} \frac{d\sigma}{x-s} ds \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K \int_0^\tau (\tau-s)^\alpha (x-s)^{\mu-3} ds \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K \int_0^\tau (x-s)^\alpha (x-s)^{\mu-3} ds \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K \int_0^\tau (x-s)^{\alpha+\mu-3} ds \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq \frac{-K}{\alpha+\mu-2} [(x-s)^{\alpha+\mu-2}]_0^\tau \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq -K [(x-\tau)^{\alpha+\mu-2} - x^{\alpha+\mu-2}] \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2} \|w\|_{C([0,1];E)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|A_2\|_E &= \left\| -\frac{1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_\Gamma \int_0^\tau z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} (Q_\omega(\tau)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}) w(s) ds dz \right\|_E \\
&\leq K \int_\Gamma \int_0^\tau e^{-(x+s)|z|} \frac{(x-\tau)^\alpha}{|z|^{\mu-2}} ds d|z| \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K \int_\Gamma \int_0^\tau e^{-(x-s)|z|} \frac{(x-\tau)^\alpha}{|z|^{\mu-2}} ds d|z| \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K \int_\Gamma \int_0^\tau e^{-\sigma} \frac{(x-\tau)^\alpha}{\left| \frac{\sigma}{x-s} \right|^{\mu-2}} \frac{d\sigma}{x-s} ds \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K \int_0^\tau (x-\tau)^\alpha (x-s)^{\mu-3} ds \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq K(x-\tau)^{\alpha+\mu-4} \|w\|_{C([0,1];E)}.
\end{aligned}$$

On fait de même pour les autres termes.

Finalement on déduit que

$$\|(P_\omega w)(x) - (P_\omega w)(\tau)\|_E \leq K(x - \tau)^{\alpha + \mu - 2} \|w\|_{C([0,1];E)},$$

d'où $P_\omega \in L(C([0,1];E), C^{\alpha + \mu - 2}([0,1];E))$.

Problème approché :

Je rappelle qu'on a supposé l'existence de la solution et on a obtenu une représentation. Maintenant on va montrer l'existence, pour cela on considère les problèmes approchés suivants :

$$\begin{cases} u_n''(x) + A_n(x)u_n(x) - \omega u_n(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u_n'(0) - H u_n(0) = d_0 \\ u_n(1) = u_1, \end{cases}$$

On pose, pour $x \in [0, 1]$,

$$A_{\omega,n}(x) = A_n(x) - \omega I \quad \text{et} \quad Q_{\omega,n}(x) = -(-A_{\omega,n}(x))^{1/2},$$

et on considère la famille des approchants de Yosida de $(Q_\omega(x))_{x \in [0,1]}$ définie par : ■

$$Q_{\omega,n}(x) = -n Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - nI)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Par un calcul classique on a

$$(Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} = \frac{-1}{n + z} (Q_\omega(x) - nI) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n + z} I \right)^{-1}.$$

Par passage à la limite on a $G_n(d_0, u_1, f) \longrightarrow G(d, u_1, f)$ et $P_{\omega,n}(x) \longrightarrow P_\omega(x)$.

Théorème 3.1 Soit $f \in C^\theta([0, 1]; E)$ où $\theta \in]0, \alpha + \mu - 2]$

et soit $(\overline{Q_\omega(0) - H})^{-1}d_0 \in D_{Q_\omega(0)} \cap D(H)$, $u_1 \in D_{A(1)}$. On suppose de plus que les hypothèses (2.3)~(2.8) sont vérifiées et :

$$\begin{cases} Q_\omega(0)(\overline{Q_\omega(0) - H})^{-1}[d_0 - Q_\omega(0)^{-1}f(0)] \in D(Q_\omega(0)) \\ Q_\omega(0)^2(\overline{Q_\omega(0) - H})^{-1}[d_0 - Q_\omega(0)^{-1}f(0)] + f(0) \in D_{A(0)}\left(\frac{\theta}{2}, +\infty\right) \\ A_\omega(1)u_1 - f(1) \in D_{A(1)}\left(\frac{\theta}{2}, +\infty\right), \end{cases}$$

alors il existe $\omega^* > 0$ tel que $\forall \omega \geq \omega^*$, alors la solution $w(\cdot) = Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot)$ de l'équation (1) vérifie :

1. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in C([0, 1]; E)$
2. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in C^\theta([0, 1]; E)$
3. $u'' \in C^\theta([0, 1]; E)$
4. $u'' \in C([0, 1]; E) \cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\frac{\theta}{2}, +\infty\right)\right).$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
 u''(.) &= f(.) + Q_\omega(.)^2 u(.) \\
 &= f(.) + [G_{Q_\omega(x)}(d_0, u_1, f)(.) - (P_\omega w)(.)] \\
 &= [f(.) + G_{Q_\omega(x)}(d_0, u_1, f)(.)] - (P_\omega w)(.).
 \end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Exemple

Considérons l'espace de Banach $E = L^q]0, 1[$, ($1 < q < +\infty$) muni de sa norme naturelle. On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $Q(x) = -\sqrt{-A(x)}$ pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$\begin{cases} D(Q(x)) = \{\varphi \in W^{2,q}]0, 1[: \varphi(0) - b(x) \varphi'(0) = 0, \varphi(1) = 0\} \\ [(Q(x))\varphi](y) = \varphi''(y), \quad y \in]0, 1[, \end{cases}$$

où $b(x)$ est une fonction vérifiant :

$$\begin{cases} b(x) \geq b_0 \\ |b(x) - b(s)| \leq K |x - s|^{1+\varepsilon} \\ \varepsilon > \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} D(A(x)) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in W^{4,p}]0, 1[: \varphi(0) - b(x) \varphi'(0) = 0, \varphi(1) = 0 \\ \varphi''(0) - b(x) \varphi'''(0) = 0, \quad \varphi''(1) = 0 \end{array} \right\} \\ (A(x)\varphi)(y) = -\varphi^{(4)}(y), \quad y \in]0, 1[. \end{cases} \quad (4.1)$$

On définit l'opérateur H par $H = aI$, avec $a > 0$.

Remarque 4.1 Comme $Q(x)$ est fermé pour tout $x \in [0, 1]$ et aI est borné, alors

Exemple 4.1 *Remarque 4.2* **Preuve.**

$$\overline{Q(x) - aI} = Q(x) - aI.$$

Voir [10], p. 190, Theorem 1.1. ■

Alors les hypothèses (2.3)~(2.8) sont vérifiées.

Finalement tous les résultats obtenus s'appliquent au problème concret quasi-elliptique suivant où ($\omega > 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) - \omega u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) - au(0, y) = d_0(y), \quad u(1, y) = u_1(y), \quad y \in [0, 1] \\ u(x, 0) - b(x) \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, 1) = u(x, 1) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, 0) - b(x) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, 0) = 0. \end{array} \right.$$

Bibliographie

- [1] P. Acquistapace and B. Terreni. : *Some existence and regularity results for abstract non-autonomous parabolic equations*. J. Math. Anal. Appl. 99(1), 9-64(1984).
- [2] A. V. Balakrishnan. : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by them*. Pacif. J. Math. 10 (1960), 419-437.
- [3] F. Boutaous, R. Labbas and B-K. Sadallah. : *Fractional-power approach for solving complete elliptic abstract differential equations with variable-operator coefficients*, Journal of Differential Equations.Vol.2012 (2012), No.05, pp.1-33.
- [4] F. Bouziani, A. Favini, R. Labbas and A. Medeghri. : *Study of boundary value and transmission problems governed by a class of variable operators verifying the Labbas-Terreni non commutativity assumption*, Rev Mat Complut. (2012), 24, pp. 131-168.
- [5] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri. : *Abstract differential equations of elliptic type with general Robin boundary conditions in Hölder spaces*, Applicable Analysis, Vol, 91, No. 8, August 2012, 1453-1475.
- [6] G. Da Prato et P. Grisvard. : *Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. IX Ser.54 (1975), 305-387.
- [7] G. Dore and S. Yakubov. : *Semigroup Estimates and Noncoercive Boundary Value Problems*, Semigroup Forum, 60 (2000), 93-121.
- [8] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi. : *Necessary and Sufficient Conditions in the Study of Maximal Regularity of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 22 (2008), 973-987.
- [9] M. Haase. : *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 169*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.
- [10] T. Kato. : *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1980.
- [11] S. G. Krein. : *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscou, 1967.
- [12] A. V. Kuyazyuk. : *The Dirichlet problem for second order differential equations with operator coefficient* (Russian) Ukrain Math, Zh, 37 (1985), n. 2, 256-273.
- [13] R. Labbas. : *Problèmes aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.
- [14] A. Lunardi. : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [15] R. Labbas et B. Terreni. : *Sommes d'opérateurs linéaires du type parabolique et elliptique*, C. R. Acad. Sci. Paris, 301, Série 1, n. 5 (1985).

- [16] C. Martinez and M. Sanz. : *The Theory of Fractional Powers of Operators*, North Holland, Mathematics studies 187, 2001.
- [17] E. Senestrari. : *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions*, J. Math. Anal. App. 66, (1985), pp. 16-66.
- [18] P. E. Sobolevskii. : *Equations of parabolic type in Banach spaces*, Trudy Mouscou. Math. Obsc. 10 (1961), 297-350 (Russian) ; English Transl. Amer Math. Soc. Transl. 49 (1965), 1-62.