RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

FFACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Magister en Mathématiques

Par

Mohamed MELLAH

sujet du magister

SUR LA RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Composition du jury de soutenance

Pr	**Berrabah**	**BENDOUKHA**	**Président**	**U. MOSTAGANEM**
Pr	**Amina**	**LAHMAR-BENBERNOU**	**Examinatrice**	**U. MOSTAGANEM**
Pr	**Mohamed**	**BEKKAR**	**Examinateur**	**U.ORAN ES-SANIA**
M.C	**Sadek**	**GALA**	**Encadreur**	**U. MOSTAGANEM**

Année Universitaire : 2009 - 2010

Dédicace

Je dédie ce travail à mes trés chers parents qui m'ont, par leurs sacrifices matériels, à arriver là où je suis aujourd'hui.

Remerciments

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à MM les professeurs B.Bendoukha et S.Gala, pour leurs constants encouragements et les précieuses remarques qui m'aidaient tantôt à m'orienter, tantôt à surmenter des difficultés, ou encore à élaborer ce mémoire. Toute ma gratitude va également à Mme Amina LAHMAR-BENBERNOU, professeur à l'université de Mostaganem, qui a bien volu s'intéresser à ce travail et accepter d'en être examinatrice, je remercie enfin Mr. Mohamed BEKKAR, professeur à l'université d'Oran Es -Sania, qui a bien volu s'intéresser à ce travail et me fait l'honneur de participer au jury.

INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques se modélisent par des équations aux dérivées partielles non linéaires. L'objectif de ce travail est d'introduire des thechniques d'analyse permettant d'étudier la régularité de telles équations. Afin de mettre en application ces techniques sur un système issu de la physique, nous avons choisi d'étudier la régularité des équations de Navier-Stokes incompressibles. Ces équations s'écrivent

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u + (u.\nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, \\ \nabla.u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}^2$, $u.\nabla = \sum_{j=1}^{3} u_j \partial_{x_j}$ et $\nabla.u = \sum_{j=1}^{3} \partial_{xj} u_j$.
On doit interpréter $u = (u_1, u_2, u_3)$ comme le champ des vitesses et p comme la pression. Pour la majorité des fluides, il est raisonnable de supposer l'incompressiblité du fluide, ce qui donne $div\ u = 0$. Le système (1.1) est une équation d'évolution, c'est-à-dire qu'une variable (à savoir t le temps) y joue un rôle particulier. Pour espérer résourdre ce système, il faut de plus se donner un champ de vitesses initiales u_0 et l'on se limitera à la recherche des solutions u de (1.1) telles que $u(x,0) = u_0(x)$. Dans son article fondateur de 1934, Jean-Leray [6] construit, pour une donnée initiale dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, des solutions globales faibles pour les équations de Navier-Stokes qui vérifiant l'inégalité d'énergie

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau \leq \|u_0\|_{L^2}^2 .$$

La méthode de construction utilisée est trés générale et est utilisée pour de nombreuses équations d'évolution conservant une ou plusieurs formes fonctionnelles au cours du temps. Désormais, beaucoup d'efforts ont été consacrés pour établir l'existence global et l'unicité de la solution régulière, pour l'equation de Navier-Stokes. Des différents critères de la regularité des solutions faibles ont été proposés. Les conditions de Prodi-Serrin (voir Serrin [8], Prodi

[4], et Struwe [12]) affirmaient qu'une solution faible de Leray-Hopf appartenant à la classe $L^{\alpha}\left((0,T);L^{q}(\mathbb{R}^{3})\right)$ avec $\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{q}\leq 1,\ 2<\alpha<\infty\ ,\ 3<q<\infty$ est réguilière sur $(0,T)\times\mathbb{R}^{3}$, alors que le cas de la limite $q=3$ était découvert plus tard par Escauriaza, Serëgin et Sverak [11]. En 1995, Beirão da Veiga [5] établissait un critère de régularité du type de Serrin sur le gradient du champ de vitesse : $\nabla u\in L^{\alpha}\left((0,T);L^{q}(\mathbb{R}^{3})\right)$ avec $\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{q}\leq 2$. Pour d'autres sortes de critères de régularité, on fait réference aux exposés [9, 18, 17, 24, 26]. Récemment, Montgomery-Smith [14] introduisait le critère suivant (voir aussi [1] pour ce type de critère) :

$$\int_0^T \frac{\|u(t)\|_{L^q}^{\alpha}}{1+\ln\left(e+\|u(t)\|_{L^q}\right)}dt<\infty,\ \text{pour étudier le probleme de régularité de la solution.}$$

Notez que l'amélioration log est seulement en fonction du temps. Cela peut être vu comme l'extention naturelle du type Gronwall des conditions de Prodi-Serrin. On peut alors se poser la même question, à partir d'une donnée initiale $u_0\in L^2(\mathbb{R}^3)$, peut-on étendre ce critère à d'autres espaces fonctionnelles. Le point de départ du mon travail est l'étude de la régularité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes dans les espaces des multiplicateurs singuliers dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Un des buts de ce mémoire est de généraliser ce résultat dans les espaces de Morrey-Campanato et de caractériser les espaces de Banach $\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ de Morrey-Campanato quand $0<r\leq 1$.

Dans le cas des espaces de multiplicateurs singuliers, Zhou-Gala ont données une reponse affirrmative à cette question (voir [25]) ;

Théorème 0.0.1 *Soit u une solution régulière de (1.1) avec une donnée initiale $u_0\in H^2(\mathbb{R}^3)$. Si*

$$\int_0^T \frac{\|u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u(t,.)\|_{\infty})}dt<\infty \qquad \textit{pour tout } r \textit{ avec } 0\leq r<1,$$

alors la solution peut être prolongée au delà de $t=T$. En d'autres termes, si la solution explose à $t=T$, alors

$$\int_0^T \frac{\|u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u(t,.)\|_{\infty})}dt=\infty \qquad 0\leq r<1.$$

Notre second théorème est sur le gradient du champ de vitesse.

Théorème 0.0.2 *soit u une solution régulière de $(1,1)$ avec une donnée initiale $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Si*

$$\int_0^T \frac{\|\nabla u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\|u(t,.)\|_\infty)} dt < \infty \quad \text{pour tout } r \text{ avec } 0 \leq r \leq 1,$$

alors la solution peut être prolongée au delà de $t = T$.

Il est intéressant de remarquer que

$$X_r(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$$

et que la norme de $\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ est conservée par l'équation de Navier-Stokes.

Chapitre 1

Espaces de Sobolev

1.1 Introduction

Dans ce mémoire, nous limiterons aux espaces de Sobolev modelés sur L^2. Ces espaces jouent un rôle absolument crucial dans l'étude des équations aux dériveés partielles, quelles soient linéaires ou non.

1.2 Définitions des espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^3$

Définition 1.2.1 *Soit $s \in \mathbb{R}$. On dit qu'une distribution tempérée u appartient à l'espace de Sobolev d'indice s, noté $H^s(\mathbb{R}^3)$, si et seulement si*

$$\hat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \quad et \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty,$$

et l'on note

$$\| \mathrm{u}\|^2_{H^s} \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi,$$

où $\quad \hat{u}(\xi) = \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x)e^{-ix.\xi}d\xi$ est la transformée de Fourier de u.

On rappelle que H^s muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{H^s} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(1+|\xi|^2\right)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}d\xi$$

est un espace de Hilbert.

Retenons qu'on a toujours les injections continues :
si $s \leq r$,

$$H^r(\mathbb{R}^3) \subset H^s(\mathbb{R}).$$

1.2.1 Résultat de densité

Une méthode classique pour démontrer des résultats dans les espaces de Sobolev consiste à considérer d'abord des fonctions régulières, puis en faisant un raisonnement par densité, à étendre les resultats obtenus à l'espace tout entier. Dans cette partie, nous allons étudier comment les fonctions des espaces de Sobolev peuvent être approchées par des fonctions régulières.

Lemme 1.2.1 *L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^3)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Preuve. On rappelle les injections continues suivantes :

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^3).$$

L'injection $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ étant de plus dense. Il suffit de montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^3)$. On utilise la transformée de Fourier. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$. Alors

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ étant dense dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, alors il existe alors une suite de fonctions $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \ \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3).$$

Par définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $\psi_n = \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{-s}{2}} \varphi_n$ est encore dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.
La transformée de Fourier étant une bijection bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ dans lui-même, on peut donc considérer la suite $(u_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\hat{u}_n = \psi_n$. On a alors

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} &\leq c\left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} (\hat{u}_n - \hat{u}\ )\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= \left\|\varphi_n - \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\ )\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers zéro quand $n \to +\infty$. $\square$

1.3 Inclusion de Sobolev

Le but de ce paragraphe est d'etudier les propriétés d'inclusion des espaces $H^s(\mathbb{R}^3)$ dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^3)$. On a le résultat suivant.

Théorème 1.3.1 *Si s est strictement supérieur à $\frac{3}{2}$, alors l'espace H^s est continûment inclus dans l'espace des fonctions nulles à l'infini. Si s est un réel positif strictement inférieur à $\frac{3}{2}$, alors l'espace H^s est continûment inclus dans $L^{\frac{6}{3-2s}}(\mathbb{R}^3)$ et l'on a*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq c\,\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)}$$

avec

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \overset{\text{déf}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Le premier point du théorème est trés facile à démontrer. On utilise le fait que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|\hat{u}\|_{L^1}.$$

En effet, si $s > \frac{3}{2}$, on peut alors écrire, pour toute fonction régulière u,

$$|\hat{u}(\zeta)| = \left(1+\left|\zeta^2\right|\right)^{-\frac{s}{2}} \left(1+\left|\zeta^2\right|\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(\zeta)|$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}(\zeta)|\, d\zeta \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left(1+\left|\zeta^2\right|\right)^{-s} d\zeta\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left(1+\left|\zeta^2\right|\right)^{s} |\hat{u}(\zeta)|^2\, d\zeta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u\|_{H^s} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left(1+\left|\zeta^2\right|\right)^{-s} d\zeta\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \left(1+\left|\zeta^2\right|\right)^{-\frac{s}{2}} d\zeta &= \omega_3 \int_0^{+\infty} \frac{R\, dR}{\left(1+R^2\right)^s} \\
&\leq \omega_3 \int_0^{+\infty} \frac{\left(1+R^2\right)\, dR}{\left(1+R^2\right)^s} \\
&\leq \omega_3 \int_0^{+\infty} \frac{dR}{\left(1+R^2\right)^{s-1}}
\end{aligned}$$

où ω_3 est la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$. Le fait que $s > \frac{3}{2}$ implique que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dR}{\left(1+R^2\right)^{s-1}} < +\infty.$$

Donc, on a

$$\|\hat{u}\|_{L^1} \leq c\, \|u\|_{H^s}\,.$$

Finalement,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq c\, \|u\|_{H^s}\,.$$

La démonstration du second point est plus délicate. Pour plus de détails voir [25]. □

Remarque 1.3.1 *L'indice $p = \frac{6}{3-2s}$ peut être dérivé grâce à un argument d'homogénité.*

1.4 Présentation du système de Navier-Stokes.

Ce paragraphe est une brève présentation des équations de Navier-Stokes. Pour plus de détails, voir les livres de mécanique des milieux continus et de mécanique des fluides. Les équations de Navier-Stokes incompréssibles décrivant l'évolution temporelle d'un fluide incompressible dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Ce fluide peut être de l'eau, ou de l'air (si la vitesse de l'écoulement reste petite devient la vitesse du son). Divers varientes de ces équations se trouvent en métrologie, océamographie, magnétohydrodynamique. Décrivons maintenant ces équations. La vitesse de l'écoulement est donnée par le champ de victeur $u(x,t)$ qui dépent du temp et de l'espace, et qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^3$. La divergence du champ de vitesse est nulle, ce traduit par

$$div\ u = \nabla.u = 0.$$

D'autre part, une particule de fluide subit

* une force de frottement due à la viscosité du fluide modélisé par

$$\mu\Delta u,$$

où $\mu = 1$ dans notre cas qui est la viscosité du fluide considérée

* une force de pression, qui s'écrit

$$-\nabla p$$

où $p(x,t)$ est la pression règne dans le fluide. L'accélération de la particule de fluide considéreé est alors

$$\frac{Du}{Dt} = \Delta u - \nabla p,$$

où $\frac{Du}{Dt}$ est la dérivée particulaire, ce qui donne

$$\partial_t u + (u.\nabla)\ u - \Delta u + \nabla p = 0.$$

Ces équations doivent être complétées par une donnée initiale : valeur de u à $t = 0$.

Malgré la simplicité apparente de ces équations, leur étude mathématique est loin d'être totalement achevée. Si on dimension 2 on dispose une bonne théorie d'existence et d'unicité des solutions régulières, le cas de la dimension 3 reste essentiellement ouvert, et de nombreuses chose restent à comprendre ! !

Chapitre 2

Régularité des solutions dans les espaces de multiplicateurs

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous cherchons à établir des résultats de régularité pour les équations de Navier-Stokes. Pour cela, nous allons commencer par définir ce que nous entendons par solution faible du problème de Navier-Stokes.
Nous employons les espaces fonctionnels suivants :

$$C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^3) = \left\{\varphi \in (C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)) : div\ \varphi = 0\right\} \subseteq (C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3))\ ,$$

$$L_{\sigma}^2(\mathbb{R}^3) \quad = \quad \overline{C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^3)}^{\ \|\cdot\|_{L^2}} = \left\{u \in L^2\ (\mathbb{R}^3)\ : div\ u = 0\right\},$$

H_{σ}^r est la fermeture de $C_{0,\sigma}^{\infty}$ dans $H^r(\mathbb{R}^3)$.

Nous étudions dans $\mathbb{R}^3$ le problème de Cauchy pour l'équation de Navier-Stokes dépendant du temps :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u.\nabla)u - \Delta u + \nabla p = f \qquad \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (O, T), \\ \qquad\qquad div\ u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

où $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)$ est un vecteur réel tridimentionnel inconu, $p(x,t)$ une fonction scalaire inconnue ; $(u.\nabla)u$ désigne le vecteur dont le j-ème composant est égal à

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \partial_i u_j \qquad\qquad (j = 1, 2, 3).$$

Finalement, f est le vecteur de force extérieure donnée. Si en particulier, on suppose que f est inclue dans P, nous avons le résultat suivant voir [13] :

Lemme 2.1.1 *Une distribution vectorielle f vérifie*

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \qquad \textit{pour tout } \varphi \in C^{\infty}_{0,\sigma}(\mathbb{R}^3),$$

si et seulement s'il existe une distribution scalaire q telle que $f = \nabla q$.

Définition 2.1.1 *Soit $u_0 \in L^2_\sigma\,(\mathbb{R}^3)$. Une fonction mesurable u dans $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ est dite une solution faible de (1.1) sur $(0,T)$ si u vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $u \in L^\infty\left((0,T); L^2_\sigma\ \right) \cap L^2\left((0,T); H^1_\sigma\right)$, pour tout $T > 0$;

(2) $u(t)$ est continue en temps au sens de la topologie faible de L^2_σ avec $\langle u(t), \phi \rangle \to \langle u_0, \phi \rangle$ quand $t \to 0^+$ pour tout $\phi \in L^2_\sigma$;

(3) pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, u vérifie l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_s^T \left\{- \langle u, \partial_\tau \phi \rangle + \langle u.\nabla u, \phi \rangle + \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \right\} d\tau \\ = \quad & - \langle u(t), \phi(t) \rangle + \langle u(s), \phi(s) \rangle \,, \end{aligned}$$

pour tout $\phi \in H^1\left((s,t); H^1_\sigma\right)$.

Enonçons le théorème de Leray.

Théorème 2.1.1 *Soit $u_0 \in L^2_\sigma\,(\mathbb{R}^3)$. Il existe une solution u du système* (1.1) *au sens de la définition (2.1.1). De plus, cette solution satisfait l'inégalité d'énergie*

$$\|u(.,t)\|^2_{L^2} + 2 \int_0^t \|\nabla u(.,\tau)\|^2_{L^2}\, d\tau \leq \|u_0\|^2_{L^2}\,, \ \textit{pour tout } t \in (0,T).$$

2.2 Les espaces de multiplicateurs singuliers X_r

Nous allons présenter maintenant des espaces de multiplicateurs singuliers sur les espaces de Sobolev. Nous commençons par donner la définition suivante.

Définition 2.2.1 *Pour tout $r \geq 0$, on définit*

$$X_r \overset{def}{=} \mathcal{M}\left(H^r \to L^2\right) = \left\{f \in L^2_{loc} : \forall g \in H^r,\ fg \in L^2\right\}.$$

Il s'agit des espaces de Banach normé par :

$$\|f\|_{X_r} = \sup_{\|g\|_{H^r} \leq 1} \|fg\|_{L^2}.$$

De plus, on a pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\|f(.+x_0)\|_{X_r} &= \|f\|_{X_r}\\ \|f(\lambda.)\|_{X_r} &= \frac{1}{\lambda^r}\|f\|_{X_r}, 0 < \lambda \leq 1.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer un résultat d'inclusion entre les espaces de Sobolev et les espaces de multiplicateurs

Lemme 2.2.1 *Soit $0 \leq r < \frac{3}{2}$. Alors*

$$H^{\frac{3}{2}-r}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \subset\ X_r(\mathbb{R}^3).$$

Preuve. Soit $f \in L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$. Le théorème d'immersions de Sobolev nous assure que si $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{r}{3}$, on a

$$(*) \qquad\qquad H^r(\mathbb{R}^3) \subset L^q(\mathbb{R}^3) \qquad\qquad \text{avec injection continue.}$$

Alors étant donnée $(*)$, l'inégalité de Hölder nous donne

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L^2} &\leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}}\|g\|_{L^q}\\ &\leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}}\|g\|_{H^r}.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\|f\|_{X_r} = \sup_{\|g\|_{H^r} \leq 1} \|fg\|_{L^2} \leq c\,\|f\|_{L^{\frac{3}{r}}}.$$

□

Exemple 2.2.1 *D'après l'inégalité de Hardy,*

$$\left\|\frac{g}{|x|}\right\|_{L^2} \leq 2\,\|\nabla g\|_{L^2},$$

on remarque que

$$f(x) = |x|^{-1} \in X_1(\mathbb{R}^3)\ .$$

Pour vérifier cet exemple, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.2 *Soit $1 \leq p < \infty$. Alors pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |(x.\nabla)f|^p\, dx \geq (\frac{3}{p})^p \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p\, dx. \qquad (*)$$

Preuve. *Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable. On a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (divg)\, |f|^p\, dx &= -p\,\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^3} (g.\nabla f)\, |f|^{p-2}\, f dx\right) \\ &\leq p\left(\int_{\mathbb{R}^3} |(g.\nabla)f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p\, dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^3} |(g.\nabla)f|^p\, dx + (p-1)\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}} \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p\, dx \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. choisissons $g(x) = x$ afin d'avoir

$$\int_{\mathbb{R}^3} |(x.\nabla)f|^p\, dx \geq K(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p\, dx$$

où

$$K(\varepsilon) = \varepsilon^{-p}\left(3 - (p-1)\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}}\right).$$

Or

$$\max_{\varepsilon>0} K(\varepsilon) = \left(\frac{3}{p}\right)^p \text{ avec } \varepsilon^{-\frac{p}{p-1}} = \frac{p}{3}\ .$$

Le lemme est démontré. □

Remarque 2.2.1 *l'inégalité $(*)$ implique en particulier pour $p = 2$,*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(x)|^2\, dx \geq C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} dx.$$

En effet, on a

$$\nabla(|x|\, f) = \frac{x}{|x|} f + |x|\, \nabla f.$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(|x|\,f\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\geq \left\||x|\,|\nabla f|\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\geq \|(x.\nabla)f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\geq (\frac{3}{2}-1)\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2}\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

Posons $|x|\,f = h$, *on trouve*

$$\|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq \frac{1}{2}\left\|\frac{h}{|x|}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

c-à-d.,

$$\left\|\frac{h}{|x|}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2\,\|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

D'ou,

$$|x|^{-1} \in X_1(\mathbb{R}^3)\ .$$

2.2.1 Régularité des solutions dans les espaces de multiplicateurs

les problemes fondamentantx sont :

a) Existance, unicité, dépendence continue des données ;

b) Régularité de la solution faible ;

c) Exitence des solutions trés faibles et leurs Régularité.

En ce qui concerne la question (a), la partie concernant l'existance est resolue d'une manière satisfaisante par J.Leary [6].

Pour la question (b), dont nous nous occuperons, on peut la considérer comme une question classique, formulée par D.Hilbert comme son 19 è problème est étroitement liée avec la position du problème et par là avec la question (a).

La méthode utilisée par Montgomery-Smith dans son travail [14] est basée sur l'estimation suivante : si

$$\int_0^T \frac{\|u(.,t)\|_{L^q}^{\alpha}}{1+\lg^+\left(\|u(.,t)\|_{L^q}\right)}dt < \infty,$$

alors sous les hypothèses du travail en question,

Théorème 2.2.1 *Soit u une solution régulière de $(1,1)$ avec une donnée initiale $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Si*

$$\int_0^T \frac{\|u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u(t,.)\|_\infty)} dt < \infty \qquad \textit{pour tout } r \textit{ avec } 0 \le r < 1.$$

alors la solution peut être prolongée au delà du temps T. En d'autres terms, si la solution explose à l'instant $t = T$, alors

$$\int_0^T \frac{\|u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u(t,.)\|_\infty)} dt = \infty \ , \ \textit{pour} \quad 0 \le r < 1.$$

Notre second théorème est sur le gradient du champ de vitesse.

Théorème 2.2.2 *Soit u une solution régulière de $(1,1)$ avec une donnée initiale $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Si*

$$\int_0^T \frac{\|\nabla u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\|u(t,.)\|_\infty)} dt < \infty \quad \textit{pour tout } r \textit{ avec } 0 \le r \le 1$$

alors la solution peut être étendue au delà de $t = T$.

Nous allons utiliser la théorie des espaces de multiplicateurs pour donner une démonstration simple de la régularité des solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes.

Preuve. Soit u une solution régulière de (1.1) sur $[0,T[$. Appliquons ∇^3 sur la première équation dans (1.1), on trouve

$$\partial_t \nabla^3 u + \nabla^3(u.\nabla u) - \nabla^3 \Delta u + \nabla^3 \nabla p = 0. \qquad (2)$$

En prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ entre (2) et ∇u, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 = \left\langle u.\nabla^2 u, \nabla^3 u\right\rangle \qquad (1)$$

L'inégalité de Hölder impliquent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\le \left\|u.\nabla^2 u\right\|_{L^2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2} \\ &\le C\|u\|_{X_r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{H^r}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Dû à l'inégalité suivante :

$$\|w\|_{H^r} \le \|w\|_{L^2}^{1-r}\|\nabla w\|_{L^2}^r,$$

il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq C\left\|u\right\|_{X_r}\ \left\|\nabla^2 u\right\|_{H^r}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}\\ &\leq C\left\|u\right\|_{X_r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1-r}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^{1+r}\\ &\leq C\ \left(\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\left(\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\right)^{1-\frac{1-r}{2}}.\end{aligned}$$

Alors compte tenu de l'inégalité de Young $(a^{\alpha}b^{1-\alpha}\leq \alpha a+(1-\alpha)b\leq a+b\ )$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1-r}{2}C\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\frac{1-r}{2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\\ &\leq C\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq C\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\ &\leq C\frac{\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty})}\left(1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty}\right)\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1-r}{2}C\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\frac{1-r}{2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\\ &\leq C\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq C\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\ &\leq C\frac{\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty})}\left(1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty}\right)\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Puisqu'il est bien connu que l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ ceci entraîne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq C\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\ &\leq C\frac{\left\|u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty})}\left(1+\ln(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2\ )\right)\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2\ .\end{aligned}$$

Posons

$$F(t) = 1 + \ln\left(e + \|u(t,.)\|_{H^2}^2\right).$$

Alors, on obtient,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{d}{dt}\|u(t,.)\|_{H^2}^2}{\|u(t,.)\|_{H^2}^2} &\leq C\frac{\|u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)}F(t) \\
&\Rightarrow \frac{\frac{d}{dt}\|u(t,.)\|_{H^2}^2}{e+\|u(t,.)\|_{H^2}^2} \leq \frac{\frac{d}{dt}\|u(t,.)\|_{H^2}^2}{\|u(t,.)\|_{H^2}^2} \leq C\frac{\|u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)}F(t) \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\ln\left(e+\|u(t,.)\|_{H^2}^2\right)+1\right] \leq C\frac{\|u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)}F(t) \\
&\Rightarrow \frac{dF(t)}{dt} \leq C\frac{\|u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)}F(t). \\
&.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on trouve

$$F(t) \leq F(0)\exp\left(c\int_0^T \frac{\|u\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)}dt\right)$$

et par conséquant

$$1+\ln(e+\|u(t,.)\|_{H^2}^2\ ) \leq \left[1+\ln(e+\|a\|_{H^2}^2\ )\right]\exp\left(c\int_0^T \frac{\|u\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)}dt\right).$$

Comme

$$\int_0^T \frac{\|u\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)}dt) < +\infty \quad \text{ et } \quad \|a\|_{H^2} < +\infty,$$

on obtient :

$$1+\ln(e+\|u(t,.)\|_{H^2}^2) \leq C \Rightarrow \|u(t,.)\|_{H^2}^2 \leq C.$$

Ce qui implique la bornitude de $\|u(t,.)\|_{H^2}^2$. Le théorème (2.2.1) fut ainsi démontré

Pour démontrer le théorème (2.2.2), on part de (1),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &= \left\langle u.\nabla^2 u, \nabla^3 u\right\rangle \\
&= -\left\langle div\ (u.\nabla^2 u), \nabla^2 u\right\rangle \\
&\leq \left|\left\langle \nabla u.\nabla^2 u, \nabla^2 u\right\rangle\right|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on remarque que

$$\left|\left\langle \nabla u.\nabla^2 u, \nabla^2 u\right\rangle\right| \leq \left\|u.\nabla^2 u\right\|_{L^2} \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq \left\|u.\nabla^2 u\right\|_{L^2}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2} \\
&\leq C\left\|\nabla u\right\|_{X_r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{H^r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2} \\
&\leq C\left\|\nabla u\right\|_{X_r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{2-r}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^{r} \\
&\leq C\left(\left\|\nabla u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)^{1-\frac{r}{2}}\left(\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{r}{2}}.
\end{aligned}$$

C désigne désormais une constante positive reprise si nécessaire d'une ligne à l'autre

L'inégalité de Young nous donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2 \ + C\left\|\nabla u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2,$$

et il vient,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq C\left\|\nabla u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq C\frac{\left\|\nabla u\right\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty})}(1+\ln(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2)\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2
\end{aligned}$$

Posons

$$F(t) = 1 + \ln\left(e + \left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2\right).$$

Alors, il vient que

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{d}{dt}\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2}{\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2} &\leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty})}F(t) \\
&\Rightarrow \frac{\frac{d}{dt}\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2}{e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2} \leq \frac{\frac{d}{dt}\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2}{\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2} \leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty})}F(t) \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\ln\left(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2\right)+1\right] \leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty})}F(t) \\
&\Rightarrow \frac{dF(t)}{dt} \leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty})}F(t)
\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall donne

$$F(t) \leq F(0) \exp\left(c \int_0^T \frac{\|\nabla u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)} dt \right)$$

et par suite

$$1+\ln(e+\|u(t,.)\|_{H^2}^2) \leq \left[1+\ln(e+\|a\|_{H^2}^2)\right] \exp\left(c \int_0^T \frac{\|\nabla u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)} dt \right).$$

Comme

$$\int_0^T \frac{\|\nabla u(t,.)\|_{X_r}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)} dt) < +\infty \quad \text{et} \quad \|a\|_{H^2} < +\infty,$$

on obtient :

$$1+\ln(e+\|u(t,.)\|_{H^2}^2) \leq C \Rightarrow \|u(t,.)\|_{H^2}^2 \leq C.$$

Ceci entraîne la bornitude de $\|u(t,.)\|_{H^2}^2$. □

Remarque 2.2.2 *Le théorème(2.2.1) reste vrai si on a* $\|u\|_{L^\infty(0,T;X_1)} << \epsilon$.

Remarque 2.2.3 *Le théorème (2.2.2) reste vrai si on remplace* ∇u *par* $\omega = curl\ u$ *(la vorticité du fluide), dû à*

$$\|\nabla u\|_{X_r} \leq \|\omega\|_{X_r}.$$

Chapitre 3

Généralisation au cas des espaces de Morrey-Campanato $\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$.

Notre objectif dans ce chapitre est de généraliser les critères de régularité logarithmiquement sur le champ de vitesse ou sur son gradient au cas des espaces de Morrey-Campanato $\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$. Ces espaces jouent un role important dans l'études des régularités des solutions aux EDP.

3.1 Espace des fonctions à oscillation moyenne bornée : $BMO(\mathbb{R}^3)$

Dans de nombreux problèmes d'analyse harmonique, des propriétés sont fausses pour L^∞ mais deviennent vraies à condition de considérer l'espace (légèrment plus grand) $BMO(\mathbb{R}^3)$. *qui* est défini de la façon suivante.

Définition 3.1.1 *Une fonction $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ appartient à $BMO(\mathbb{R}^3)$ s'il existe $A > 0$ telle que :*

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \int\limits_{y \in B(x,R)} |g(y) - a|\, dy \leq A < \infty$$

où $B = B(x,R)$ est une boule de $\mathbb{R}^3$ et $a = \frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{y\in B(x,R)} g(y)dy$ est la valeur moyenne de g sur la boule $B(x,R)$.

Si on note $\|g\|_{BMO} = \inf\ A$, il s'ensuit que pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, on a $\|C\|_{BMO} = 0$. Il est évident que $L^\infty \subset BMO$ et $\|g\|_{BMO} \leq 2\|g\|_{L^\infty}$, mais les deux espaces ne se coïncident pas car la fonction $g(x) = \ln|x|$ qui appartient à BMO en est un exemple.

Définition 3.1.2 *Pour $1 < p \leq q \leq +\infty$, l'espace de Morrey-Campanato $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}^3)$ est définit par*

$$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3) \ : \|f\|_{\mathcal{M}_{p,q}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{0<R\leq 1} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^P(B(x,R))} < \infty \right\},$$

où $B(x,R)$ est la boule fermé de $\mathbb{R}^3$.

On vérifie aisement que

$$\|f(\lambda.)\|_{\mathcal{M}_{p,q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,q}}, \ \textit{pour tout } \lambda > 0.$$

De plus, Pour $2 < p \leq \frac{3}{r}$ et $0 < r < \frac{3}{2}$, on a les injections suivantes :

$$L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{3}{r},\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{M}_{p,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow X_r(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3),$$

où $L^{\frac{3}{r},\infty}(\mathbb{R}^3)$ est l'espace de Lorentz. pour plus de details, voir [19] .

La relation

$$L^{\frac{3}{r},\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{M}_{p,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$$

est démontrée comme suit.

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\frac{3}{r}}} &\leq \sup_E |E|^{\frac{r}{3}-\frac{1}{2}} \left(\int_E |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \left(f \in L^{\frac{3}{r},\infty}(\mathbb{R}^3) \right) \\
&= \sup_E |E|^{\frac{pr}{3}-1} \left(\int_E |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\cong \left(\sup_{R>0} R \left| \{ x \in \mathbb{R}^3 : |f(y)|^p > R \ \} \right|^{\frac{pr}{3}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{R>0} R \left| \{ x \in \mathbb{R}^p : |f(y)| > R \ \} \right|^{\frac{r}{3}} \\
&\cong \|f\|_{L^{\frac{3}{r},\infty}} .
\end{aligned}$$

En outre, pour $2 < p \leq \frac{3}{r}$ et $0 \leq r < \frac{3}{2}$, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{M}_{p,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow X_r(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3).$$

La relation

$$X_r(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$$

est démontrée comme suit. Soient $f \in X_r(\mathbb{R}^3),\ 0 < r \leq 1,\ x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),\ \phi \equiv 1$ sur $B(\frac{x_0}{R}, 1)$. On a

$$\begin{aligned}
R^{r-\frac{3}{2}} \left(\int\limits_{|x-x_0|\leq R} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} &= R^r \left(\int\limits_{\left|y-\frac{x_0}{R}\right|\leq 1} |f(Ry)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq R^r \left(\int\limits_{y\in\mathbb{R}^3} |f(Ry)\phi(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq R^r \|f(R.)\|_{X_r} \|\phi\|_{H^r} \\
&\leq \|f\|_{X_r} \|\phi\|_{H^r} \\
&\leq C \|f\|_{X_r}.
\end{aligned}$$

Nous donnons une définition des espaces de Besov par la théorie de Littlwood-Paley. Comme dans [7], il existe une partition de l'unité dyadique, c'est-à-dire deux fonctions χ et φ telles que

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^3,\ \chi(\zeta) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\zeta) = 1,$$

avec

$$\chi \in C_0^\infty\left(B(0, \frac{4}{3}) \right),\ \varphi \in C_0^\infty\left(C_0 \right),$$

où

$$C_0 = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{3}{4} \leq |\zeta| \leq \frac{4}{3} \right\}.$$

On définit alors l'opérateur

$$\Delta_j u = \varphi(2^{-j}D)u = \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi(2^{-j}\zeta)\widehat{u}(\zeta) \right).$$

Définition 3.1.3 *Pour $s \in \mathbb{R},\ p,\ q \in [1,\ +\infty]$, on définit l'espace de Besov $B^s_{p,q}$ par :*

$$B^s_{p,q} = \left\{ u \in \mathcal{S}' :\ \|\Delta_j u\|_{L^p} \leq c_j.2^{-js},\ (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^q \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{B^s_{p,q}} = \left\| \left(2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{l^q}.$$

Remarque 3.1.1 *On a* $B^s_{2,2} = H^s$ *, l'espace de Sobolev d'indice s.*

On a le résultat essentiel suivant :

Lemme 3.1.1 *Pour* $0 < r < 1$*, on a*

$$\|f\|_{B^r_{2,1}} \le C \|f\|^{1-r}_{L^2} \|\nabla f\|^r_{L^2}.$$

La démonstration de ce lemme utilise le fait que que Pour $0 < r < 1$*, on a*

$$L^2 \cap H^1 \subset \overset{r}{B}_{2,1} \subset H^r.$$

Nous renvoyons à [24] *pour de plus amples détails.*

Ainsi on peut remplacer l'espace X_r par l'espace $\mathcal{M}(\overset{r}{B}_{2,1} \to L^2)$. Alors on a la définition suivante :

Définition 3.1.4 *Pour* $0 \le r < \frac{3}{2}$*, l'espace* $Z_r(\mathbb{R}^3)$ *est définit comme l'espace des distributions tempérées* $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *telles que :*

$$\|f\|_{Z_r} = \sup_{\|g\|_{B^r_{2,1}} \le 1} \|fg\|_{L^2} < \infty$$

Alors $f \in \mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ si seulement si $f \in Z_r(\mathbb{R}^3)$ de norme équivalente.

Remarque 3.1.2 *Le cas* $r = 1$ *les espaces* $\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$ *sont reduites a*
$\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{M}(B^{1,1}_2 \to L^2)$*, où* $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}^3)$ *est l'espace de Morrey-Campanato*

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{2,3}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{0<R\le 1} R^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{|x-y|\le R} |f(y)|^2 \, d(y) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

une proposition due à Gala joue un rôle essentiel dans la démonstration (voir [15] *)*

Proposition 3.1.1 *si* $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *et* $\nabla f \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}^3)$*, alors* $f \in BMO(\mathbb{R}^3)$ *.*

Preuve. Par l'inégalité classique de Poincaré, on a

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(x,R)} \left|f(y) - m_{B(x,R)}f(y)\right|^2 dy &\leq CR^2 \int\limits_{B(x,R)} |\nabla f(y)|^2 dy \\ &\leq CR^3 \|\nabla f\|^2_{\mathcal{M}_{2,3}},\end{aligned}$$

pour toute boule $B(x,R)$. En suite,

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{BMO} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{0<R\leq 1} \frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{B(x,R)} \left|f(y) - m_{B(x,R)}f(y)\right|^2 dy \\ &\leq C \|\nabla f\|^2_{\mathcal{M}_{2,3}}.\end{aligned}$$

La proposition est démontée. □

3.2 Régularité des solutions dans les espaces de Morrey-Campanato $\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$.

Nous allons utiliser la théorie des espaces de Morrey-Campanato pour redémontrer le résultat de régularité C^∞ avec certaines modifications.

Théorème 3.2.1 *Soit u une solution régulière de $(1,1)$ avec une donnée initiale $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Si*

$$\int\limits_0^T \frac{\|u(t,.)\|^{\frac{2}{1-r}}_{\dot{\mathcal{M}}_{2,\frac{3}{r}}}}{1+\ln(e+\|u(t,.)\|_\infty)} dt < \infty \qquad \textit{pour tout } r \textit{ avec } 0<r<1,$$

alors la solution peut être étendue au delà de $t = T$. En d'autres termes, si la solution explose à l'instant $t = T$, alors

$$\int\limits_0^T \frac{\|u(t,.)\|^{\frac{2}{1-r}}_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}}{1+\ln(e+\|u(t,.)\|_\infty)} dt = \infty \qquad 0<r<1.$$

Notre second théorème est sur le gradient du champ de vitesse.

Théorème 3.2.2 *soit u une solution régulière de $(1,1)$ avec une donnée initiale $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Si*

$$\int\limits_0^T \frac{\|\nabla u(t,.)\|^{\frac{2}{2-r}}_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}}{1+\ln(e+\|u(t,.)\|_\infty)} dt < \infty \quad \textit{pour tout } r \textit{ avec } 0<r\leq 1,$$

alors la solution peut être étendue au delà de $t = T$.

Preuve. On raisonne maintenant comme la démonstration du théorème (2.2.1).

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 \leq C\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}\left\|u\nabla^2 u\right\|_{L^2}$$

D'où, ona

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq C\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}\left\|u\nabla^2 u\right\|_{L^2}\\
&\leq C\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}\quad\|u\|_{Z_r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{B^r_{2,1}}\\
&\leq C\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}\quad\|u\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1-r}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^{r}\\
&\leq C\,\|u\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{1-r}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^{1+r}\\
&\leq C(\|u\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2)^{\frac{1-r}{2}}(\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2)^{1-\frac{1-r}{2}}.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young $a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b \leq a+b$ pour $a,\ b \geq 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1-r}{2}C\,\|u\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + \frac{1-r}{2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\\
&\leq C\,\|u\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Compte tenu du théorème (1.2.1), nous avons $H^2(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3)$

et par conséquant,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\,\|u(t,.)\|_{H^2}\ ,$$

où C est une constante additive arbitraire. Alors il résulte de $(*)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq C\,\|u(t,.)\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\
&\leq C\frac{\|u(t,.)\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\|u\|_\infty)}\left(1+\ln(e+\|u(t,.)\|_{H^2}^2)\right)\|u(t,.)\|_{H^2}^2\ .
\end{aligned}$$

Posons

$$F(t) = 1+\ln\left(e+\|u(t,.)\|_{H^2}^2\right),$$

donc, il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{d}{dt}\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2}{\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2} &\leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}F(t) \\
\frac{\frac{d}{dt}\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2}{e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2} &\leq \frac{\frac{d}{dt}\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2}{\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2} \leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}F(t) \\
\frac{d}{dt}\left[\ln\left(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2\right)+1\right] &\leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}F(t) \\
\frac{dF}{dt} &\leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}F(t) \qquad (**)
\end{aligned}$$

Maintenant en vertu du lemme de Gronwall, on obtient de $(**)$

$$F(t) \leq F(0)\exp\left(c\int_0^T \frac{\left\|u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}dt\right)$$

i,e.,

$$1+\ln(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2) \leq \left[1+\ln(e+\left\|a\right\|_{H^2}^2)\right]\exp\left(c\int_0^T \frac{\left\|u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}dt\right).$$

Comme

$$\int_0^T \frac{\left\|u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}dt) < +\infty \quad \text{ et } \quad \left\|a\right\|_{H^2} < +\infty,$$

alors

$$1+\ln(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2) \leq C \Rightarrow \left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2 \leq C$$

Ce qui implique la bornitude de $\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2$.

(Théorème 3.1.2). On part de (1). On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq C\left\|\nabla u\right\|_{L^2}\left\|\nabla u\nabla^2 u\right\|_{L^2}\\
&\leq C\left\|\nabla u\right\|_{Z_r}\left\|\nabla^2 u\right\|_{B^r_{2,1}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}\\
&\leq C\left\|\nabla u\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^{2-r}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^{r}\\
&\leq C\left(\left\|\nabla u\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)^{1-\frac{r}{2}}\left(\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{r}{2}}\\
&\leq \frac{r}{2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2+C(1-\frac{r}{2})\left(\left\|\nabla u\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2+C\left\|\nabla u\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Puisque il est bien connu que l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3)$ i,e.,

$$\begin{aligned}
\left\|u\right\|_{L^\infty} &\leq C\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}\\
&\leq C\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2
\end{aligned}$$

Il vient,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u(t,.)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u(t,.)\right\|_{L^2}^2 &\leq C\left\|\nabla u\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\
&\leq C\frac{\left\|\nabla u\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_{\infty})}(1+\ln(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2)\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2
\end{aligned}$$

Posons

$$F(t)=1+\ln(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2.$$

Alors, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{d}{dt}\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2}{\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2} &\leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}F(t) \\
&\Rightarrow \frac{\frac{d}{dt}\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2}{e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2} \leq \frac{\frac{d}{dt}\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2}{\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2} \\
&\leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}F(t) \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\ln\left(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2\right)+1\right] \leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}F(t) \\
&\Rightarrow \frac{dF}{dt} \leq C\frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}F(t).
\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall donne

$$F(t) \leq F(0)\exp\left(c\int_0^T \frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}dt\right)$$

et par conséquant,

$$1+\ln(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2) \leq \left[1+\ln(e+\left\|a\right\|_{H^2}^2)\right]\exp\left(c\int_0^T \frac{\left\|\nabla u(t,.)\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}}}{1+\ln(e+\left\|u\right\|_\infty)}dt\right).$$

alors

$$1+\ln(e+\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2) \leq C \Rightarrow \left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2 \leq C$$

ceci entraîne la bornitude de $\left\|u(t,.)\right\|_{H^2}^2$.

Le théorème (3.2.1) est finalelement démontré. □

Remarque 3.2.1 *Le théorème(3.1.1) reste vrai si on a* $\left\|u\right\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}^3))} << \epsilon$.

Remarque 3.2.2 *Le théorème (3.1.2) reste vrai si on remplace* ∇u *par* $\omega = \nabla \times u$ *dû à*

$$(\left\|\nabla u\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}} \leq \left\|\omega\right\|_{\mathcal{M}_{2,\frac{3}{r}}}).$$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous donnons ici quelques perspectives de recherche et prolongements envisageables de ce travail :

Nous avons, en collaboration avec Y. Du, un travail en cours la régularité pour le système de Navier-Stokes tridimentionnel.

Bibliographie

[1] C.H. Chan, A. Vasseur, Log improvement of the Prodi-serrin creteria for Navier- Stokes equations, Methodes Appl. Anal. 14 (2007) 197-212.

[2] Claude Zuily., Elements de distributions et d'équations aux dérivées partielles.

[3] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr. 4 (1951) 213-231.

[4] G. Prodi, Un teorema di unicità per le equazioni di Navier- Stokes equations, Ann. Mat. Pura Appl. 48 (1959) 173-182.

[5] H. Beieão da veiga, a new regularity class for the Navier- Stokes equations in $\mathbb{R}^n$, chinese Ann. Math. 16 (1995) 407-412.

[6] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63 (1934) 183-248.

[7] J. M. Bony, calcul symbollique et propagation des singularités pour les aux dérivées partielles non linéaires, Ann. École Norm. Sup. 14 (1981), 209-246.

[8] J. Serrin, The initial value problem for the Navier- Stokes equations in : Nonlinear Problems, Proc. Sympos., Madison, Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1963, pp. 69-98.

[9] J.T. Beale,T. Kato, A. Majda, remarks on the breakdown of smoth solutions for the 3-D Euler equations, comm. Math. phys. 94 (1984) 61-66.

[10] Lemarié-Rieusset,P.G.,and Gala.S.,Multipliers between Sobolev spaces and fractionnal differentiation,J.Maths.Anal.Appl.,322(2006),1030-1054.

[11] L. Escauriaza, G.A. Serëgin, V. Sverak, $L_{3,\infty}-$ solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness, Uspekhi Math. Nauk 58 (2003) 3-44.

[12] M. Strwe, on partial regularity results for the Navier-Stokes equations, comm. Pure APPL.Math. 41 (1988) 437-458.

[13] R. Temam, Navier- Stokes equations , 2ᵉ éd North-Holland, 1971.

[14] S. Montgomery-Smith, conditions impying regularity of the three dimensional Navier-Stokes equation, Appl. Math. 50 (2005) 451-464.

[15] S. Gala, a remark on the regularity for the 3D Navier- Stokes equations in terms of the two components of the velocity, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2009(2009), No. 148, pp. 1–6.

[16] S. Gala, Multipliers spaces, Muckenhoupt Weights and pseudo-differential operators, J. Math. Anal. Appl. 324 (2006) 1262-1273.

[17] S. Gala, regularity criterion on Weak solutions to the Navier- Stokes equations, J. Korean Math. Soc. 45 (2008) 537-558.

[18] S. Gala, The Banach space of local measures and regularity criterion to the Navier-Stokes equations, New Zeland J. Math. 36 (2007) 63-83.

[19] Stein,E.M.,Singular integrals and differentiability properties of functions,princeton Univ.Press,princeton,NJ,1970.

[20] Thèse du doctorat Gala. S. département de mathématiques, Université d'evry val d'essonne france.

[21] Y. Zhou, A new regularity criterion for the Navier-Stokes equations in terms of the direction of vorticity, Monatsh. Math. 144 (2005) 251-257.

[22] Y. Zhou, A new regularity criterion of weak solutions to the Navier-Stokes equations, J. Math. pures Appl. 84 (2005) .1496-1514.

[23] Y.Zhou, on a regularity criterion in terms of the gradient of pressure for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ Z. Angew. Math. Phys. 57 (2006) 384-392.

[24] Y. Zhou, regularity creteria in terms of pressure for the 3-D MHD Navier- Stokes equations in a generic domain, Math. Ann. 328 (2004) 173-192.

[25] Y. Zhou, S. Gala, Logarithmically improved Serrin's criterion to the Navier-Stokes equations in multiplier spaces. Perprint, 2008.

[26] Y. Zhou, S. Gala, regularity criteria for the solutions to the 3-D MHD equations in the multiplier space, submited for publication, 2008.

Table des matières