

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master
Spécialité :MATEMATIQUE

Thème
Problème aux limites pour les inclusions différentielles fractionnaires

Présenté par
ZBALAH TAWFIK

Soutenu le 29/06/2016.

Devant le jury

Président	Mme K. Aziz Hamani	M.C.A	U. MOSTAGANEM.
Examineur	Mme A. Hammou	M.C.A	U. MOSTAGANEM.
Encadreur	Mme S. Belarbi Hamani	M.C.A	U. MOSTAGANEM.

Table des matières

Introduction	1
1 Espaces fonctionnels	2
1.1 Quelques notions d'analyse multivoque	3
1.2 Quelques théorème de point fixe :	5
1.2.1 Théorème du point fixe de Leray-Schauder	5
1.2.2 Théorème de point fixe du Covitz et Nadler	5
1.3 Le calcul fractionnaire	5
1.3.1 Intégrales fractionnaires	5
1.3.2 La fonction Delta	6
1.3.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville	6
1.4 Dérivées fractionnaires :	7
1.4.1 Opérateur de dérivée $n^{ème}$	7
1.4.2 Dérivée au sens de Riemann -Liouville	8
1.4.3 Dérivée au sens de Caputo	9
2 Existence des solutions	10
2.1 Le premier resultat	12
2.2 Le deuxième resultat	17
CONCLUSION	19

Bibliographi**20**

INTRODUCTION

Les équations et les inclusions différentielles fractionnaires sont devenues importantes, ces dernières années dans différentes branches mathématiques appliquées telle que les phénomènes physiques, la technologie, l'énergie et la biologie ...etc.

Ce mémoire consiste à étudier un problème aux limites concernant les inclusions différentielles fractionnaires pour $\alpha \in]1, 2]$. Notre approche est basée sur la théorie du point fixe (l'alternative non-linéaire de Leray-Schauder et le théorème du Covitz et Nadler pour les contractions multivoques.)

Ce mémoire est composé de deux chapitres :

Le premier chapitre est consacré à des notions préliminaires concernant les espaces fonctionnelle, l'analyse multivoque, le calcul fractionnaire et quelques théorèmes du point fixe.

Le deuxième chapitre est consacré à l'existence des solutions pour les inclusions différentielles fractionnaires où l'ordre $\alpha \in]1, 2]$. Notre approche est basée sur l'alternative non-linéaire de Leray-Schauder et le théorème du Covitz et Nadler pour les contractions multivoques.

Espaces fonctionnels

Définition 1.0.1 Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, on désigne par $L^1([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonction continues sur $[a, b]$ muni de la norme:

$$\|x\|_{L^1} = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Définition 1.0.2 On désigne par $L^1([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables muni de la norme sur $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|x\|_{L^1} = \int_a^b |x(t)| dt.$$

Définition 1.0.3 $AC^1(J, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $y : J \rightarrow \mathbb{R}$, qui sont absolument continue, et la première dérivée est absolument continue.

Théorème 1.0.1 (D'ascoli Arzela) Soit X espace compact et $C(X)$ un espace de Banach des fonctions continues sur X à valeurs complexe, muni de la norme du sup, Alors, un sous ensemble H de $C(X)$ est relativement compact si et seulement si,

1. H est équicontinue.
2. H est borné dans $C(X)$.

1.1 Quelques notions d'analyse multivoque

Définition 1.1.1 [a] Soient X et Y deux ensembles non vides. Un opérateur multivoque de X de Y est une correspondance qui associe un sous-ensemble $G(x)$ de Y à chaque élément convexe x de X .

On note l'opérateur multivoque par : $G(X) : X \rightarrow P(X)$.

Définition 1.1.2 On dit que l'opérateur multivoque $G : X \rightarrow P(X)$ est à valeurs convexes(fermées) si $G(x)$ est convexe(fermé) pour chaque $x \in X$.

Définition 1.1.3 On dit que l'opérateur multivoque $G : X \rightarrow P(X)$ est bornée si $G(B)$ est bornée dans X pour chaque ensemble borné B dans X i.e

$$\sup_{x \in B} \{ \sup \{ \|y\| : y \in G(x) \} \} < \infty.$$

Définition 1.1.4 [c] On dit que l'opérateur multivoque $G : X \rightarrow P(X)$ est complètement continue si $G(B)$ est relativement compact pour chaque sous-ensemble borné $B \subseteq X$.

Définition 1.1.5 On dit que l'opérateur multivoque $G : X \rightarrow P(X)$ est semi-continue supérieurement(s.c.s) dans X si pour chaque $x_0 \in X$ l'ensemble $G(x_0)$ est non vide fermé de X et pour chaque ouvert N de X tel que $N \subseteq G(x_0)$, il existe un voisinage ouvert M de x_0 tel que $G(M) \subseteq N$.

Remarque 1.1.1 Si $G : X \rightarrow P(X)$ est complètement continue et à valeur non vide compact, alors G est s.c.s si et seulement si G a un graphe fermé i.e

$$\begin{aligned} x_n &\rightarrow x_*, y_n \rightarrow y_*, \\ y_n &\in G(x_n) \Rightarrow y_* \in G(x_*). \end{aligned}$$

Définition 1.1.6 On dit que l'opérateur multivoque $G : X \rightarrow P(X)$ admet un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in G(x)$.

-Soit $P_{cp,c}(\mathbb{R})$ l'ensemble de tous les sous-ensemble non vides compacts et convexes de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.7 [a] On dit que l'opérateur multivoque $G : X \rightarrow P_{cp,c}(\mathbb{R})$ est mesurable si pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $Y : J \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par:

$$Y(t) = d(x, G(t)) = \inf \{|x - z| : z \in G(t)\}$$

. est mesurable.

Où d est la distance réduite par l'espace de Banach X .

Définition 1.1.8 On dit que l'opérateur multivoque $F : [a, b] \times X \rightarrow P(X)$ est L^1 -Carathéodory si

- i $t \rightarrow F(t, u)$ est mesurable pour chaque $u \in X$.
- ii $u \rightarrow F(t, u)$ est semi-continu supérieur $\forall t \in [a, b]$.
- iii pour chaque $q > 0$, il existe $\Phi_q \in L^1([a, b], \mathbb{R}_+)$ tel que :

$$\|F(t, u)\| = \sup \{|v| : v \in F(t, u)\} \leq \Phi_q(t)$$

pour tout $\|v\| \leq q$ et pour chaque $t \in [a, b]$.

Définition 1.1.9 [d] Pour tout $y \in \mathbb{C}([a, b], X)$, on définit l'ensemble des sélection de F par :

$$S_{F,y} = \{v \in L^1([a, b], X) : v(t) \in F(t, y(t)) \forall t \in [a, b]\}.$$

Lemme 1.1.1 Soit (X, d) espace métrique complet.

Si $N : X \rightarrow P_{cl}(X)$ est une contraction, alors $FIX N \neq \emptyset$.

Définition 1.1.10 Soit X un espace de Banach et $[a, b]$ un intervalle réel compact.

Soit $F : [a, b] \times X \rightarrow P_{b,cl,c}(X)$ un opérateur multivoque L^1 -Carathéodory et soit Γ une application continue de $L^1(J, X)$ en $\mathbb{C}(J, X)$, alors l'opérateur

$$\Gamma \circ S_F : \mathbb{C}(J, X) \rightarrow p_{cp,c}(\mathbb{C}(J, X)), y \rightarrow (\Gamma \circ S_F)(y) := \Gamma(S_{F,y})$$

est un opérateur à graphe fermé dans $\mathbb{C}(J, X) \times \mathbb{C}(J, X)$.

1.2 Quelques théorème de point fixe :

1.2.1 Théorème du point fixe de Leray-Schauder

Théorème 1.2.1 *L'alternative non linéaire de Leray-Schauder*

Soient B un espace de Banach et C un sous-ensemble convexe de B .

On suppose que U est un sous-ensemble ouvert de C avec $u_0 \in U$ et $T : U \rightarrow C$ un opérateur continu et compact alors l'un des énoncés suivants a lieu.

1. T admet un point fixe.
2. Il existe $u \in \partial U$ et $\lambda \in [0, 1]$ avec $u = \lambda T(u)$.

1.2.2 Théorème de point fixe du Covitz et Nadler

Théorème 1.2.2 *Soit (X, d) un espace métrique complet.*

Si $N : X \rightarrow P_{cl}(X)$ est une contraction, alors N admet au moins un point fixe.

1.3 Le calcul fractionnaire

1.3.1 Intégrales fractionnaires

La fonction Gamma

Définition 1.3.1 *La fonction Gamma est simplement la généralisation de la fonction de la factorielle cette fonction est l'un des outils de base du calcul fractionnaire.*

Définition 1.3.2 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t)t^{z-1}dt, \quad z > 0$$

où

$$t^{z-1} = \exp((z-1)\ln(t)).$$

Proposition 1.3.1 *Pour tout $z \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :*

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
- $\Gamma(z+n) = z(z+1)\dots(z+n-1)\Gamma(z)$.
- $\Gamma(n+1) = n!$.

1.3.2 La fonction Delta

Définition 1.3.3 [b] La fonction Delta est définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Remarque 1.3.1 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0).$$

1.3.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par :

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} h(s) ds, t > a \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

En généralisant cette formule à l'ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura définition suivante :

Définition 1.3.4 [a] Soit $h \in L^1([a, b], \mathbb{R}_+)$. On définit l'intégrale fractionnaire (arbitraire) d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ par la formule:

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

1) Si $a = 0$, on écrit

$$I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

telle que

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

et $\varphi_a \rightarrow \delta(t)$ quand $\alpha \rightarrow 0$.

2) Si $\alpha = 0$, on écrit :

$$I^0 h(t) = h(t).$$

3) Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour tout $h(t) \in L^1[a, b]$, on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta h(t) = I_a^{\alpha+\beta} h(t) = I_a^\beta I_a^\alpha h(t)$$

pour presque tout $t \in [a, b]$.

4) Si $h \in L^1[a, b]$ avec a fini, alors $I_a^\alpha h(t)$ existe pour presque tout $t \in [a, b]$ et on a $I_a^\alpha \in L^1[a, b]$.

1.4 Dérivées fractionnaires :

Plusieurs approches ont été développées pour donner un sens à $\frac{d^n f}{dt^n}$ lorsque $n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la présente sous-section on se limite à la présentation de deux approches de dérivation fractionnaire à savoir l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

1.4.1 Opérateur de dérivée $n^{\text{ème}}$

Définition 1.4.1 L'opérateur de la dérivée d'ordre n , $n \in \mathbb{N}^*$ est noté par D^n ;

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

$$D^n I^n f = f; \quad I^n D^n f \neq f, \quad f \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R}_+)$$

$$I^n D^n f = f(x) - \sum_{K=0}^{n-1} f^{(K)}(0) \frac{t^K}{K!}, \quad t > 0.$$

1.4.2 Dérivée au sens de Riemann -Liouville

Définition 1.4.2 Soit $h \in \mathbb{C}^1([a, b])$. On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $(0 < \alpha < 1)$ au sens de Riemann -Liouville par :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= D^1 I_a^{1-\alpha} h(t). \end{aligned}$$

Définition 1.4.3 Soit $h \in \mathbb{C}^n([a, b])$. On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $(0 < n-1 < \alpha < n)$ au sens de Riemann-Liouville par :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h(s) ds \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} h(t). \end{aligned}$$

cas particulier :

Si $(1 < \alpha < 2)$

$$\begin{aligned} D_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} h(s) ds \\ &= D^2 I_a^{2-\alpha} h(t) \end{aligned}$$

telle que $n = [\alpha] + 1$.

Remarque 1.4.1

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = \dots = \frac{1}{\Gamma(-1)} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0.$$

Proposition 1.4.1 Soient α, β deux paramètres réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors on a :

1. $D^\alpha I^\alpha f(x) = f(x), \alpha > 0.$
2. $D^\beta I^\alpha f(x) = I^{\alpha-\beta} f(x), \beta < 0, \alpha > 0.$
3. $D^n I^\alpha f(x) = D^{n+\alpha} f(x), n \in \mathbb{N}, \alpha > 0.$
4. $I^\alpha D^\alpha f(x) \neq f(x).$
5. $D^\alpha D^\beta f(x) \neq D^\beta D^\alpha f(x).$
6. $D^\beta D^\alpha f(x) \neq D^{\alpha+\beta} f(x).$

1.4.3 Dérivée au sens de Caputo

Définition 1.4.4 Soit $h \in \mathbb{C}^n([a, b])$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction h par :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s) ds \\ &= I_a^{n-\alpha} D^\alpha h(t) \end{aligned}$$

telle que $n = [\alpha] + 1.$

cas particuliers

Si $1 < \alpha < 2 :$

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} h''(s) ds \\ &= I_a^{2-\alpha} D^2 h(t). \end{aligned}$$

1. ${}^c D_a^\alpha c = 0, c$ est une constante.
2. ${}^c D_a^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} & \text{si } \beta > \alpha - 1 \\ 0 & \text{si } \beta \leq \alpha - 1 \end{cases}.$

Existence des solutions

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude existence des solutions du problèmes aux limites concernant les inclusions différentielles fractionnaires.

Soit α un réel positive tel que $1 < \alpha \leq 2$

On considéré le problèmes aux limites des inclusions fractionnaires suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) \in F(t, y), \text{ pour tout } t \in J = [0, T], 1 < \alpha \leq 2, & (1.1) \\ y(0) = y_0, y(T) = y_T. & (1.2) \end{cases} \quad (PR)$$

.

Ou ${}^C D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens du Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$ est un opérateur multivoque $P(\mathbb{R})$ est la famille de tout les sous-ensemble non vides de $\mathbb{R}$, y_0, y_T sont réels constantes.

Définition 2.0.5 Une fonction $y \in AC^1(J, \mathbb{R})$ est dit être un solution de (PR) , s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$, avec

$v(t) \in F(t, y(t))$, pour a.e $t \in J$, telle que :

$${}^C D^\alpha y(t) = v(t), t \in J, 1 < \alpha < 2.$$

et la fonction y satisfait condition (1, 2).

Pour l'existence des solutions du problème précédent, nous avons besoin des lemmes auxiliaires suivantes :

Lemme 2.0.1 Soit $\alpha > 0$ l'équation différentielle ${}^c D^\alpha h(t) = 0$, admet la solution

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots c_n t^{n-1}$$

avec $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0 \dots n$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 2.0.2 Soit $\alpha > 0$

Alors on a

$$I^{\alpha c} D^\alpha h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots c_n t^{n-1} + h(t).$$

Pour certain $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0 \dots n$, $n = [\alpha] + 1$.

On conséquence de lemme 3.2 et 3.3, on a le résultat suivant :

Lemme 2.0.3 Soient $1 < \alpha \leq 2$ et $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue, Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \quad (3.1)$$

si et seulement si, y est une solution de BVP

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = h(t), t \in J \\ y(0) = y_0, y(T) = y_T \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.2) \\ (3.3) \end{matrix} \quad .$$

Preuve. On suppose que y satisfait (3.1) alors □

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

de (3.3), un simple calcul donne

$$c_0 = -y_0$$

et

$$c_1 = \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{T} y_0 - \frac{1}{T} y_T$$

donc nous obtenons l'équation y satisfait (3.1),

Inversement, il est clair que l'équation y satisfait (3.2), (3.3).

2.1 Le premier resultat

Théorème 2.1.1 *On suppose que:*

H_1 - $F : J \times \mathbb{R} \rightarrow P_{cp,c}(\mathbb{R})$ est un opérateur multivoque cathéodory.

H_2 - il existe $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$ est $\Psi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ continue et non décroissante tel que :

$$\|F(t, u)\|_P \leq p(t)\Psi(|u|) \text{ pour } t \in J \text{ est chaque } u \in \mathbb{R}.$$

H_3 - il existe $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$, avec $I^\alpha l < \infty$ tel que

$$H_d(F(t, u), F(t, \bar{u})) \leq l(t) |u - \bar{u}| \quad \forall u, \bar{u} \in \mathbb{R}$$

et

$$d(0, F(t, 0)) \leq l(t), a.e \quad t \in J.$$

H_4 - Il existe un certain nombre $M > 0$, telle que :

$$\frac{M}{\Psi(M) \|I^\alpha p\|_\infty + \Psi(M)(I^\alpha p)(T) + |y_0| + |y_T|} > 1 \quad (3.4)$$

alors le BVP admet au moins une solution sur J .

Preuve.

□

On considère l'opérateur multivoque suivant :

$$N(y) = \left\{ h \in C(J, \mathbb{R}) : y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right)y_0 + \frac{t}{T}y_T \right\}$$

tel que $v \in S_{F,y}$.

Remarque 2.1.1 *Clairement, du lemme 2.1.3, les points fixe de N sont des solutions du PR .*

On va montrer que N satisfait les hypothèses de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, la preuve sera donnée en plusieurs étapes :

Étape 1 : $N(y)$ est convexe

Pour tout $y \in C(J, \mathbb{R})$, en effet :

Si

$$h_1, h_2 \in N(y)$$

alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,y}$ de telle sorte que pour tout $t \in J$ nous avons :

$$h_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_i(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_i(s) ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T,$$

Pour $i = 1, 2$ soit $0 \leq d \leq 1$, alors $\forall t \in J$ nous avons :

$$\begin{aligned} (dh_1 + (1-d)h_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [dv_1(s) + (1-d)v_2(s)] ds \\ &\quad - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} [dv_1(s) + (1-d)v_2(s)] ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T \end{aligned}$$

de puis $S_{F,y}$ est convexe (parceque F convexe), nous avons

$$dh_1 + (1-d)h_2 \in N(y).$$

Etape 2 : N transforme un ensemble borné à un ensemble borné dans $C(J, \mathbb{R})$.

Soit

$$B_{\eta^*} = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : \|y\|_{\infty} \leq \eta^*\}$$

est bornée dans $C(J, \mathbb{R})$ et $y \in B_{\eta^*}$,

Ensuite pour chaque $h \in N(y)$, il existe $v \in S_{F,y}$ tel que :

$$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T,$$

D'après H_2 nous avons, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v(s)| ds + |y_0| + |y_T| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) \Psi(|y(s)|) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s) \Psi(|y(s)|) + |y_0| + |y_T| \\ &\leq \Psi(\eta^*) I^{\alpha}(p)(t) + \Psi(\eta^*) I^{\alpha}(p)(T) + |y_0| + |y_T| \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|h\|_\infty \leq \Psi(\eta^*) \|I^\alpha(p)\|_\infty + \Psi(\eta^*) I^\alpha(p)(T) + |y_0| + |y_T| = l.$$

Etape 3 : N transforme un ensemble borné à un ensembles équicontinues de $C(J, \mathbb{R})$

Soit $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$, B_{η^*} un ensemble bornée de $C(J, \mathbb{R})$ dans l'étape 2,

Soit $y \in B_{\eta^*}$ et $h \in N(y)$, puis :

$$\begin{aligned} |h(t_2) - h(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] v(s) ds + \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s) ds \right| \\ &\quad + \frac{(t_2 - t_1)}{T} |y_0| + \frac{(t_2 - t_1)}{T} |y_T| \\ &\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] ds + \\ &\quad \frac{(t_2 - t_1) \|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds + \frac{(t_2 - t_1)}{T} |y_0| + \frac{(t_2 - t_1)}{T} |y_T| \\ &\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] + \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1) \\ &\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{(t_2 - t_1) \|p\|_\infty \Psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1 - t_2)^\alpha \\ &\quad + \frac{(t_2 - t_1)}{T} |y_0| + \frac{(t_2 - t_1)}{T} |y_T| \end{aligned}$$

Comme $t_1 \rightarrow t_2$, alors le coté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, à la suite d'étape 1 à 3, avec le théoreme de Arzela-Ascoli, on conclut que :

$$N : C(J, \mathbb{R}) \rightarrow P(C(J, \mathbb{R}))$$

est complètement continue.

Etape 4 : N et un graphe fermé,

Soit $y_n \rightarrow y_*$, $h_n \in N(y_n)$ et $h_n \rightarrow h_*$, on va montrer que

$$h_* \in N(y_*)$$

signifie qu'il existe $v_n \in S_{F,y}$ tel que, $\forall t \in J$,

$$h_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

nous avons montrer qu'il existe $v_* \in S_{F,y}$, tel que

$\forall t \in J$

$$h_*(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_*(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_*(s) ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

puisque $F(t, \cdot)$ est semi continue, alors pour $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \geq 0$ tel que

$\forall n \geq n_0$, on a :

$$v_n(t) \in F(t, y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + \varepsilon B(0, 1) \text{ a.e } t \in J$$

Puisque $F(t, \cdot)$ est une compact, alors $\exists$ une suite $v_{nm}(\cdot)$ telle que

$$v_{nm}(\cdot) \rightarrow v_*(\cdot) \text{ quand } m \rightarrow \infty$$

et

$$v_*(t) \in F(t, y_*(t)) \quad \forall t \in J,$$

pour tout $w \in F(t, y_*(t))$, nous avons :

$$|v_{nm}(t) - v_*(t)| \leq |v_{nm}(t) - w| + |w - v_*(t)|$$

Alors

$$|v_{nm}(t) - v_*(t)| \leq d(v_{nm}(t), F(t, y_*(t))).$$

Par une relation similaire obtenu en inverssant du roles de v_{nm} et v_* , en résultat

$$\begin{aligned} |v_{nm}(t) - v_*(t)| &\leq H_d(F(t, y_n(t)), F(t, y_*(t))) \\ &\leq l(t) \|y_n - y_*\|_\infty \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |h_n(t) - h_*(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v_{nm}(s) - v_*(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v_{nm}(s) - v_*(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) ds \|y_{nm} - y_*\|_\infty \end{aligned}$$

donc

$$|h_{nm}(t) - h_*(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds \|y_{nm} - y_*\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) ds \|y_{nm} - y_*\|_\infty \rightarrow 0$$

quand $m \rightarrow \infty$.

Etape 5 : Les limites a priori .

Soit y tel que $y \in \lambda N(y)$ avec $\lambda \in [0, 1]$,

alors $\exists v \in S_{F,y}$ tel que, pour tout $t \in J$,

$$y(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{\lambda t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \lambda \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{\lambda t}{T} y_T$$

cela implique que par H_2 , pour $\forall t \in J$ nous avons

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v(s)| ds + |y_0| + |y_T| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) \Psi(|y(s)|) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s) \Psi(|y(s)|) ds + |y_0| + |y_T| \\ &\leq \frac{\Psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds + \frac{\Psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s) ds + |y_0| + |y_T| \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{M}{\Psi(\|y\|_\infty) \|I^\alpha p\|_\infty + \Psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(T) + |y_0| + |y_T|} < 1.$$

Par condition (3.4), $\exists M > 0$ tel que

$$\|y\|_\infty \neq M.$$

Soit

$$U = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : \|y\|_\infty < M\}$$

L'opérateur $N : \bar{u} \rightarrow P(C(J, \mathbb{R}))$ est semi-continue superieure et complètement continue.

Du choix de U , il n'y pas $y \in \partial U$ tel $y \in \lambda N(y)$ pour certains $\lambda \in [0, 1]$,

En conséquence de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, on deduit que N admet un point fixe y dans $\bar{u}$ qui est une solution du PR .

2.2 Le deuxième resultat

On presente maintenant un resultat pour le problème PR avec un second membre à valeur non convexe.

Nous considérations est basée sur le théorème de point fixe pour les contractions multivoques donne par Covitz et Nadler.

Remarque 2.2.1 $\forall y \in C(J, \mathbb{R})$, l'ensemble $S_{F,y}$ est non vide puis, F a une selection mesurable.

Preuve. □

Etape 1 : $N(y) \in P_{cl}(C(J, \mathbb{R})) \forall y \in C(J, \mathbb{R})$.

En effet, Soit $(y_n)_{n \geq 0} \in N(y)$, tel que $y_n \rightarrow \bar{y}$ dans $C(J, \mathbb{R})$, puis, $\bar{y} \in C(J, \mathbb{R})$ et il existe $v_n \in S_{F,y}$ tel que, $\forall t \in [0, T]$,

$$y_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

En utilisant ce que F des valeurs compactes et de H_3 , nous pouvons passer à une suite, nécessaire pour obtenir que v_n converge vers $v \in L_w^1(J, \mathbb{R})$, (l'espace muni de la topologie faible).

Une application du théorème de Mazur's implique que v_n converge fortement vers v et par conséquent $v \in S_{F,y}$.

Donc $\forall t \in J$

$$y_n \rightarrow \tilde{y}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

Alors, $\tilde{y} \in N(y)$.

Etape 2

il existe $\gamma < 1$ tel que

$$H_d(N(y), N(\bar{y})) \leq \gamma \|y - \bar{y}\|_\infty \quad \forall y, \bar{y} \in C(J, \mathbb{R})$$

Soit $y, \bar{y} \in C(J, \mathbb{R})$ et $H_1 \in N(y)$, et il existe $v_1(t) \in F(t, y(t))$

tel que $\forall t \in J$

$$h_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T$$

De (H_3) il en resulte que

$$H_d(F(t, y(t), F(t, \bar{y}(t))) \leq l(t) |y(t) - \bar{y}(t)|.$$

Par conséquent, il existe $w \in F(t, \bar{y}(t))$ tel que

$$|v_1(t) - w| \leq l(t) |y(t) - \bar{y}(t)|, \quad \forall t \in J.$$

On considère $U : J \rightarrow P(\mathbb{R})$ donné par

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R} : |v_1(t) - w| \leq l(t) |y(t) - \bar{y}(t)|\}$$

Etant donnée que l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, \bar{y}(t))$ est mesurable, il existe une fonction $v_2(t)$ qui est une sélection mesurable pour V . Alors, $v_2(t) \in F(t, \bar{y}(t))$, et pour chaque $t \in J$,

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t) |y(t) - \bar{y}(t)|$$

Laissez-nous définir pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned} |h_1(t) - h_2(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v_1(s) - v_2(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v_1(s) - v_2(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) |y(s) - \bar{y}(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) |y(s) - \bar{y}(s)| ds \end{aligned}$$

A partir d'une relation analogue, obtenu en inversant les rôles de y et $\bar{y}$ il en resulte que

$$H_d(N(y), N(\bar{y})) \leq 2(I^\alpha l)(T) \|y - \bar{y}\|_\infty.$$

Alors, N est contraction et ainsi, d'après lemme 1.1.1, N admet un point fixe y qui est une solution pour (PR) .

CONCLUSION

Notre but principal but dans ce mémoire, est de présenter plusieurs résultats d'existence pour les inclusions différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Ces résultats ont été obtenus par l'approche du point fixe dans le cas multivoque. Dans le future, on peut considérer le problème aux limites pour les inclusions différentielles fractionnaires avec la dérivée de Riemman-Liouville et la dérivée d'Hadamart.

Bibliographi

- a M.Benchohra and S.Hamani, Nonlinear boundary value problems for differential inclusions with Caputo fractional derivative, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center Volume 32, 2008, 115-130.
- b M.Benchohra, S.Hamani and S.K.Ntouyas, Boundary value problems for differential equation with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Analysis, V(71), (2009) 2391-2396.
- c J.P.Aubin and A.cellini Differential, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1984.
- d J.P.Aubin and H.Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhauser, Boston, 1990.
- e M.Benchohra, S.Hamani and S.K.Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order , Surv.Appl.3 (2008), 1-12.
- f H.Covitz and S.B.Nadler Jr, Multivalued contraction mapping in generalized metric spaces, Israel J.Math.8 (1972), 5-11.
- g K.Deimling, Multivalued Differential Equations, Walter De Gruyter, Berlin-New York, 1992.
- h A.A.Kilbas, Hari M.Srivastava, and Juan J.Trujillo, Theory and Applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V, Amsterdam, 2006.