Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Nour El Houda Rahou

Solvabilité et positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

soutenu publiquement le 03 *juillet* 2022 *devant le jury composé de :*

Président :	Mohand Ould Ali	Professeur	UMAB
Examinateur :	Sabrina Taf	MCB	UMAB
Encadreur :	Zineb Kaisserli	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

Remerciements

En premier lieu, je remercie **ALLAH** le tout-puissant de m'avoir donné le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

Je voudrais adresser toute ma reconnaissance et mes remerciements les plus sincères à mon encadreur Madame **Zineb KAISSERLI**, pour sa patience, ses efforts constants, sa disponibilité, et son encouragements.

Je tiens à remercier Monsieur **Mohand OULD ALI** de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance, ainsi que Madame **Sabrina TAF** pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant d'examiner mon travail.

Mes remerciement vont également à tous les enseignants que j'ai rencontré durant mon cursus universitaire sans oublier tout le personnel administratif.

J'adresse un grand merci à tous mes collègues et mes amies en particulier à Nabila BENYOUCEF et Touatia MOUMENE.

En dernier, mes plus vifs remerciements et reconnaissances vont aux membres de ma famille tout particulièrement à mes parents, qui ont toujours été là pour moi. Je remercie mes frères et ma sœur pour leurs encouragements.

Table des matières

Index des notations

$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Corps des nombres réels non négatifs.
$\mathbb{C}$	:	Corps des nombres complexes.
$\mathbb{C}^*$	:	Corps des nombres complexes non nuls.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace des vecteurs à n entrées réelles.
$\mathbb{R}^n_+$	:	Espace des vecteurs à n entrées réelles non négatives.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	:	Espace des matrices réelles de dimensions $n \times m$.
$\mathrm{I}_{n\times n}$	:	Matrice identité de dimension $n \times n$.
$\mathscr{C}^n$	:	Espace des fonctions n fois continument différentiable.
t	:	Variable temporelle.
i	:	Entier relatif positif.
s, z	:	Variables complexes.
$\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i$	:	Nombres réels positifs, $i = 1, 2$.
$\mathbf{D}^\alpha$	:	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α par rapport à une variable réelle d'une fonction unidimensionnelle.
$\mathbf{D}^{\alpha_i}_{t_i}$	:	Dérivée partielle fractionnaire d'ordre α_i par rapport à la variable t_i, $i = 1, 2$ d'une fonction bidimensionnelle.
$\varDelta^\beta$	:	Différence fractionnaire d'ordre β d'une fonction unidimensionnelle discrète.
$\varDelta^{\beta_1}_h$	:	Différence fractionnaire horizontale d'ordre β_1 d'une fonction bidimonsionnelle.
$\varDelta^{\beta_2}_v$	:	Différence fractionnaire verticale d'ordre β_2 d'une fonction bidimonsionnelle.
$\varDelta^{\beta_1,\beta_2}$	:	Différence fractionnaire d'ordre β_1 et β_2 d'une fonction bidimonsionnelle.
$\mathscr{L}$	:	Transformée de Laplace directe.
$\mathscr{Z}$	:	Transformée en $\mathscr{Z}$ directe.
$\mathscr{L}^{-1}$	:	Transformée de Laplace inverse.
$\mathscr{Z}^{-1}$	:	Transformée en $\mathscr{Z}$ inverse.
x^h, x^v, x	:	Vecteur d'état horizontale, vecteur d'état verticale, vecteur d'état, respectivement.
X	:	Transformée de Laplace et en $\mathscr{Z}$ de la fonction $x(t, i)$.
u	:	Vecteur d'entrée.
U	:	Transformée de Laplace et en $\mathscr{Z}$ de la fonction $u(t, i)$.
y	:	Vecteur de sortie.
$\varGamma$	:	Fonction Gamma d'Euler.

E_{α}	:	Fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.
$E_{\alpha,\beta}$	:	Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
δ	:	Impulsion de Dirac.
$\det G$	:	Déterminant d'une matrice G de taille $n \times n$.
G^{-1}	:	Inverse d'une matrice G de taille $n \times n$.
$T_{p,q}$	:	Matrice de transition.
$\star$	:	Produit de convolution.

Introduction

Au cours des dernières décennies, les ingénieurs ont prêté une grande attention aux systèmes dynamiques bidimensionnels vus leur utilisation dans différents domaines scientifiques.

Un système dynamique est un système qui évolue dans le temps de manière précise, il décrit l'évolution de phénomènes en physique, chimie, biologie et dans plusieurs autres domaines par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles ou encore par des équations aux dérivées fractionnaires.

Une classe importante de systèmes dynamiques bidimensionnels d'ordre fractionnaire est représentée par les modèles hybrides, ou encore les modèles à temps continu-discret, i.e., un couplage entre dynamique continue et dynamique discrète. On les trouve dans de nombreuses applications, par exemple les systèmes mécaniques, l'électronique, la robotique, $\cdots$ [4].

Il existe plusieurs types de systèmes dynamiques bidimensionnels hybrides, toutefois, ils peuvent être regroupés dans un modèle général décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} \Delta^{\beta} x(t, i+1) &= \mathrm{A}_0\, x(t,i) + \mathbf{D}^{\alpha}\, \mathrm{A}_1\, x(t,i) + \mathrm{A}_2\, \Delta^{\beta}\, x(t,i+1) \\ &\quad + \mathrm{B}_0\, u(t,i) + \mathbf{D}^{\alpha}\, \mathrm{B}_1\, u(t,i) + \mathrm{B}_2\, \Delta^{\beta}\, u(t,i+1), \\ y(t,i) &= \mathrm{C}\, x(t,i) + \mathrm{D}\, u(t,i), \end{aligned}$$

où $\mathbf{D}^{\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$ et Δ^{β}, avec $0 < \beta < 1$, est la différence fractionnaire de la fonction x par rapport à la variable $i \in \mathbb{N}$. $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A_j, B_j, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées avec $j = \overline{0, 2}$.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude de la solvabilité et de la positivité du modèle précédent sous les conditions initiales

$$\begin{aligned} x(t_0, i) &= x(0, i), \quad i \in \mathbb{N}, \\ x(t, i_0) &= x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{D}^{\alpha}\, x(t, i_0) &= \tilde{x}(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

La solvabilité sera établie en utilisant les transformations de Laplace et en $\mathcal{Z}$. En effet, notre choix porte sur les transformées de Laplace et en $\mathcal{Z}$ compte tenu de leurs nombreuses applications en pratique.

Tandis que pour la positivité, des conditions nécessaires et suffisantes seront établies.

Le manuscrit est organisé comme suit :

- Le premier chapitre regroupe les différentes notions préalables pour la réalisation de ce document. Nous commencerons par donner quelques définitions et propriétés de la théorie du calcul fractionnaire, suivie par les différents modèles de systèmes dynamiques bidimensionnels.

- Dans le deuxième chapitre, nous traitons la solvabilité du système dynamique fractionnaire hybride décrit par la forme générale en utilisant les transformées de Laplace et en $\mathscr{Z}$. Les différentes définitions et propriétés des deux transformations seront étayées. De plus, l'expression de la matrice de transition, qui permettra de trouver l'expression de la trajectoire, sera déterminée.

- Dans le dernier chapitre, nous présenterons quelques notions et résultats sur la positivité des systèmes dynamiques, puis nous établissons des conditions nécessaires et suffisante de positivité pour notre système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride.

Le manuscrit est clôturé par une conclusion générale laquelle regroupe nos contributions et quelques perspectives pour nos futurs travaux, suivie par les différents ouvrages et articles utilisés pour la réalisation de ce travail.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les outils de base utilisés pour la réalisation de ce travail. Nous commencerons par rappeler les définitions de quelques fonctions spéciales. Puis, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que la différence fractionnaire seront présentées. La dernière section sera dédiée aux modèles de systèmes dynamiques bidimensionnels.

2 Fonctions spéciales

Quelques fonctions spéciales ainsi que leurs propriétés seront présentées dans cette section.

2.1 Fonction Gamma d'Euler

Les définitions existantes de la fonction Gamma d'Euler en plus de ces propriétés seront rappelées dans cette partie.

Définition 1.1 [8, 10] *La fonction donnée par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{1.1}$$

est appelée fonction Gamma d'Euler.

Définition 1.2 [8, 10] *La fonction Gamma d'Euler peut être, aussi, définie par*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$

où les nombres complexes z ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

Proposition 1.1 [8, 10] *La fonction Gamma d'Euler satisfait les relations de récurrence suivantes*

1. $\forall z \in \mathbb{C}_+^* : \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;
2. $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n+1) = n!$.

Preuve.

1. Pour démontrer la première propriété, il suffit de passer par une intégration par partie. En effet,

$$\begin{aligned} \forall z>0 : \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z dt, \\ &= \left[-e^{-t}t^z\right]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}, \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. En remplaçant z par n dans la propriété précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n), \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1), \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2), \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1), \\ &= n!, \end{aligned}$$

vu que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$.

■

Exemple 1.1 *Montrons que*

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En posant $t = u^2$ dans l'équation (1.1)*, nous obtenons*

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-1} du.$$

Ainsi,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^2 du,$$

par des intégrations par parties, nous obtenons

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

car $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2.2 Fonction de Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle crucial dans la résolution des équations différentielles fractionnaires, c'est une généralisation de la fonction exponentielle.

Définition 1.3 [8, 10] *La fonction de la variable complexe z définie par*

$$\mathrm{E}_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)}, \tag{1.2}$$

est appelée la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.

Exemple 1.2 *Pour* $\alpha = 1$, *la fonction exponentielle classique est obtenue, i.e.,*

$$\mathrm{E}_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Définition 1.4 [8, 10] *La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres de la variable complexe z est définie par*

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1.3}$$

Exemple 1.3 *Pour* $\alpha = 1, \beta = 2$, *nous aurons*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)}, \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!}, \\ &= z^{-1}(e^z - 1). \end{aligned}$$

2.3 Fonction continue par morceaux

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque si et seulement si elle l'est sur tout segment de cet intervalle.

Définition 1.5 [1] *Une fonction* f *est continue par morceaux sur* $[a, b]$ *si et seulement s'il existe une subdivision* $a = a_1 < \cdots < a_{N+1} = b$ *telle que sa restriction à tout intervalle ouvert* $]a_k, a_{k+1}[$ *coïncide avec une fonction* g_i *continue sur* $[a_k, a_{k+1}]$, $k = \overline{1, N}$.

Exemple 1.4 *La fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} -9 & \text{pour} \quad -9 < x \le -5, \\ \ \ 6 & \text{pour} \quad -5 < x \le -1, \\ -7 & \text{pour} \quad -1 < x \le 9, \end{cases}$$

est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $]-9, 9]$.

2.4 Fonction d'ordre exponentiel

La définition d'une fonction réelle d'ordre exponentiel fera l'objet de cette partie.

Définition 1.6 [1] *On dit que la fonction* f *est d'ordre exponentiel, s'il existe* $\mathrm{M} > 0$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$|f(t)| \le \mathrm{M}e^{at}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.4}$$

Exemple 1.5 *La fonction* $f(t) = e^{t^2}$ *n'est pas d'ordre exponentiel.*

2.5 Impulsion de Dirac

Le Dirac est une distribution, il joue le rôle d'une fonction indicatrice lorsqu'elle intervient dans une intégration.

Définition 1.7 [8] *On appelle impulsion de Dirac la fonction* δ *définie par*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \neq 0, \\ \infty & si \quad t = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

elle satisfait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

Définition 1.8 [8] *Dans un cas discret, l'impulsion de Dirac est donnée par la formule suivante*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j, \\ 1 & si \quad i = j. \end{cases} \tag{1.6}$$

3 Dérivées et différences fractionnaires

Dans cette section, nous présenterons les définitions de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et la différence fractionnaire pour les fonctions unidimensionnelles et bidimensionnelles.

3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo, introduite en 1967 par *Michele Caputo*, est l'une des dérivées fractionnaires les plus utilisées en raison de ses nombreux avantages.

Définition 1.9 [8, 10] *La fonction définie par*

$$\mathbf{D}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}\, d\tau, \tag{1.7}$$

est appelé la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, où $n-1 < \alpha < n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$, *de la fonction* f *par rapport à la variable* t *et* $f^{(n)}$ *est la dérivée d'ordre* n *de la fonction* $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+)$ *par rapport à la variable* τ.

Proposition 1.2 [8, 10] *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est linéaire, i.e., pour tous* $f, g \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, *nous avons*

$$\mathbf{D}^{\alpha}\big(\lambda_1 f + \lambda_2 g\big)(t) = \lambda_1 \mathbf{D}^{\alpha} f(t) + \lambda_2 \mathbf{D}^{\alpha} g(t),$$

où $n-1 < \alpha < n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 1.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante* $f(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$, *est nulle, i.e.,*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}\, d\tau, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 1.6 *Considérons la fonction*

$$\begin{aligned} f:[0,1] &\rightarrow [0,1], \\ t &\mapsto f(t)=t. \end{aligned}$$

Pour tout $0<\alpha<1$, *nous avons*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\alpha}}\, d\tau, \\ &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \end{aligned}$$

Si $\alpha=\frac{1}{2}$, *la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction* f *devient*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} f(t) &= \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\, t, \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}\sqrt{t}. \end{aligned}$$

3.2 Dérivée partielle d'ordre fractionnaire d'une fonction bidimensionnelle

La dérivée partielle d'ordre fractionnaire d'une fonction bidimensionnelle continue de deux variables réelles indépendantes $t_1,\, t_2>0$ sera définie dans cette partie.

Définition 1.10 [8] *La fonction définie par*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i} f(t_1, t_2) &= \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial t_i^{\alpha_i}} f(t_1, t_2), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathrm{N}_i-\alpha_i)} \int_0^{t_i} \frac{f_{t_i}^{(\mathrm{N}_i)}(\tau)}{(t_i-\tau)^{\alpha_i+1-\mathrm{N}_i}}\, d\tau, \end{aligned} \tag{1.8}$$

est appelée la dérivée partielle fractionnaire d'ordre $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, *où* $\mathrm{N}_{i-1} \leq \alpha_i < \mathrm{N}_i$ *avec* $\mathrm{N}_i \in \mathbb{N}^*$, *d'une fonction bidimensionnelle continue par rapport à la variable* $t_i \in \mathbb{R}_+$, *pour* $i=1,2$. Γ *représente la fonction Gamma d'Euler (formule* (1.1)) *et* $f_{t_i}^{(\mathrm{N}_i)}$ *est la dérivée partielle d'ordre* N_i *de la fonction* f *par rapport à la variable* t_i, *elle est donnée par*

$$f_{t_i}^{(\mathrm{N}_i)}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\partial^{\mathrm{N}_1} f(\tau, t_2)}{\partial \tau^{\mathrm{N}_1}} & \text{pour} \quad i=1, \\[2ex] \dfrac{\partial^{\mathrm{N}_2} f(t_1, \tau)}{\partial \tau^{\mathrm{N}_2}} & \text{pour} \quad i=2. \end{cases}$$

3.3 Différence fractionnaire d'une fonction d'une seule variable

La différence fractionnaire d'une fonction discrète est définie dans cette partie.

Définition 1.11 [10] *La fonction discrète*

$$\Delta^{\beta} x_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{\beta}{k} x_{i-k}, \tag{1.9}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$ *et*

$$\binom{\beta}{k} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = 0, \\ \dfrac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!} & \text{pour} \quad k = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

est appelée la différence fractionnaire d'ordre β *de la fonction unidimensionnelle discrète* x_i, $i \in \mathbb{N}$.

3.4 Différence fractionnaire d'une fonction bidimensionnelle discrète

Dans ce qui suit, différentes définitions d'une différence fractionnaire pour une fonction bidimensionnelle discrète seront présentées.

3.4.1 Différence fractionnaire d'ordre β

Définition 1.12 [10] *La fonction discrète*

$$\Delta^{\beta} x_{i,j} = \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j-k} c_{\beta}(k, l)\, x_{i-k, j-l}, \quad 0 < \beta < 1, \tag{1.10}$$

représente la différence fractionnaire d'ordre β *de la fonction bidimensionnelle discrète* $x_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}$, *où*

$$c_{\beta}(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = l = 0, \quad k, l \in \mathbb{N}, \\ (-1)^{k+l} \dfrac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k-l+1)}{k!\, l!} & \text{pour} \quad k + l > 0. \end{cases}$$

3.4.2 Différence fractionnaire horizontale d'ordre β

Définition 1.13 [10] *La fonction discrète*

$$\Delta_h^{\beta} x_{i,j} = \sum_{k=0}^{i} c_{\beta}(k) x_{i-k,j}, \tag{1.11}$$

est appelée la différence fractionnaire horizontale d'ordre $\beta \in \mathbb{R}_+$ *de la fonction discrète* $x_{i,j}$ *par rapport à la variable* $i \in \mathbb{N}$, *où* $n-1 < \beta < n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et*

$$c_{\beta}(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = 0, \\ (-1)^{k} \dfrac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!} & \text{pour} \quad k > 0. \end{cases}$$

3.4.3 Différence fractionnaire verticale d'ordre β

Définition 1.14 [10] *La différence fractionnaire verticale d'ordre* $\beta \in \mathbb{R}_+$ *de la fonction bidimensionnelle discrète* $x_{i,j}$ *par rapport à la variable* $j \in \mathbb{N}$ *est définie par*

$$\Delta_v^{\beta} x_{i,j} = \sum_{l=0}^{j} c_{\beta}(l) x_{i,j-l}, \tag{1.12}$$

où $n-1 < \beta < n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et*

$$c_{\beta}(l) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad l = 0, \\ (-1)^{l} \dfrac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-l+1)}{l!} & \text{pour} \quad l > 0. \end{cases}$$

3.4.4 Différence fractionnaire d'ordre β_1 et β_2

Définition 1.15 [10] *La différence fractionnaire d'ordre* $\beta_1 \in \mathbb{R}_+$ *et* $\beta_2 \in \mathbb{R}_+$ *de la fonction bidimensionnelle discrète* $x_{i,j}$ *est donnée par*

$$\Delta^{\beta_1,\beta_2} x_{i+1,j+1} = \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} c_{\beta_1,\beta_2}(k,l)\, x_{i+1-k,j+1-l}, \tag{1.13}$$

où $N_1 - 1 < \beta_1 < N_1$, $N_2 - 1 < \beta_2 < N_2$, *avec* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, *et*

$$c_{\beta_1,\beta_2}(k,l) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = l = 0, \\ (-1)^k \dfrac{\beta_1(\beta_1-1)\cdots(\beta_1-k+1)}{k!} = c_{\beta_1}(k) & \text{pour} \quad k > 0,\ l = 0, \\ (-1)^l \dfrac{\beta_2(\beta_2-1)\cdots(\beta_2-l+1)}{l!} = c_{\beta_2}(l) & \text{pour} \quad k = 0,\ l > 0, \\ c_{\beta_1}(k)\, c_{\beta_2}(l) & \text{pour} \quad k > 0,\ l > 0. \end{cases}$$

4 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels

Un système dynamique est un ensemble d'équations différentielles qui modélisent et décrivent l'évolution temporelle d'un phénomène réel, quelques types de systèmes dynamiques bidimensionnels seront présentés dans cette section. Il est à noter que les deux variables sont indépendantes.

4.1 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps discret

Il existe plusieurs types de systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps discret, parmi lesquels nous trouvons

4.1.1 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps discret du type Rosser

Un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps discret du type Rosser est décrit par le modèle suivant [6]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + B\, u_{i,j}, \\ y_{i,j} &= C \begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + D\, u_{i,j}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

où $x^h \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état horizontal, d'état vertical, de la commande et de la sortie, avec $i, j \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système (1.14) sont

$$\begin{cases} x^h_{0,j} \in \mathbb{R}^{n_1} & \text{pour} \quad j \in \mathbb{N}, \\ x^v_{i,0} \in \mathbb{R}^{n_2} & \text{pour} \quad i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4.1.2 Système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel à temps discret du type Rosser

La forme générale d'un système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel à temps discret du type Rosser [10] est donnée par

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta_h^{\beta_1} x_{i+1,j}^h \\ \Delta_v^{\beta_2} x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} &= \mathrm{A} \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} + \mathrm{B}\, u_{i,j}, \\ y_{i,j} &= \mathrm{C} \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} + \mathrm{D}\, u_{i,j}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

où $\Delta_h^{\beta_1}$, $\Delta_v^{\beta_2}$ sont, respectivement, les différences fractionnaire horizontale et verticale (formules (1.11) et (1.12)) de la fonction $x_{i,j}$ par rapport aux variables i, j. x^h, x^v sont les vecteurs d'état horizontale et verticale, et u et y sont les vecteurs d'entrée et sortie. A, B, C, et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

4.1.3 Système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel à temps discret d'ordre β_1 et β_2

La forme générale d'un système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel d'ordre β_1 et β_2 ($\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+$) à temps discret est décrite par les équations [10]

$$\begin{aligned} \Delta^{\beta_1,\beta_2} x_{i+1,j+1} &= \mathrm{A}_0\, x_{i,j} + \mathrm{A}_1\, \Delta^{\beta_1} x_{i+1,j} + \mathrm{A}_2\, \Delta^{\beta_2} x_{i,j+1} + \mathrm{B}\, u_{i,j}, \\ y_{i,j} &= \mathrm{C}\, x_{i,j} + \mathrm{D}\, u_{i,j}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

où Δ^{β_1,β_2} est la différence fractionnaire d'ordre β_1 et β_2 de la fonction bidimensionnelle discrète $x_{i,j}$ (formule (1.13)). $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. $\mathrm{A}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ avec $k = \overline{0, 2}$.

Les conditions initiales associées au système (1.16) sont

$$\begin{cases} x_{0,j} & \text{pour} \quad j \in \mathbb{N}, \\ x_{i,0} & \text{pour} \quad i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4.2 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps continu

Cette partie vise à présenter les différents types de systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels en temps continu. Dans ce type de système dynamique, les variables sont représentées par $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$.

4.2.1 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu

Le modèle décrit par les équations suivantes [8]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^h}{\partial t_1}(t_1, t_2) \\ \dfrac{\partial x^v}{\partial t_2}(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= \mathrm{A} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \mathrm{B}\, u(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) &= \mathrm{C} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \mathrm{D}\, u(t_1, t_2), \end{aligned} \tag{1.17}$$

représente un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu. $x^h \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1+n_2=n$, sont les états horizontale et verticale. $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'entrée et de sortie respectivement. A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Les conditions initiales associées au système (1.17) sont

$$\begin{cases} x^h(0,\, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1} & \text{pour} \quad t_2 \in \mathbb{R}_+, \\ x^v(t_1,0) \in \mathbb{R}^{n_2} & \text{pour} \quad t_1 \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

4.2.2 Système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel à temps continu de type Roesser

Le modèle [8]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1,\, t_2) \\ \mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_1,\, t_2) \end{bmatrix} &= \mathrm{A} \begin{bmatrix} x^h(t_1,\, t_2) \\ x^v(t_1,\, t_2) \end{bmatrix} + \mathrm{B}\, u(t_1,\, t_2), \\ y(t_1, t_2) &= \mathrm{C} \begin{bmatrix} x^h(t_1,\, t_2) \\ x^v(t_1,\, t_2) \end{bmatrix} + \mathrm{D}\, u(t_1,\, t_2), \end{aligned} \tag{1.18}$$

représente la version fractionnaire d'un système linéaire bidimensionnel à temps continu de type Roesser, où $\mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i}$ est la dérivée partielle fractionnaire d'une fonction bidimensionnelle continue par rapport à la variable t_i $\big($formule (1.8)$\big)$, d'ordre α_i avec $\mathrm{N}_i - 1 < \alpha_i < \mathrm{N}_i$, $\mathrm{N}_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1,2$; $x^h \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1+n_2=n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état horizontal, d'état vertical, de la commande et de la sortie. $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système (1.18) sont

$$x^{h(k_1)}(0,\, t_2) = \left.\frac{\partial^{k_1} x^h}{\partial t_1^{k_1}}(t_1,\, t_2)\right|_{t_1=0},$$

où $k_1 = 0, 1, \cdots, \mathrm{N}_1 - 1$; $t_2 > 0$,

$$x^{v(k_2)}(t_1, 0) = \left.\frac{\partial^{k_2} x^v}{\partial t_2^{k_2}}(t_1,\, t_2)\right|_{t_2=0},$$

où $k_2 = 0, 1, \cdots, \mathrm{N}_2 - 1$; $t_1 > 0$.

4.2.3 Système dynamique linéaire bidimensionnel fractionnaire à temps continu

Le modèle décrit par les équations [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{t_1,t_2}^{\alpha_1,\alpha_2} x(t_1,\, t_2) &= \mathrm{A}_0\, x(t_1,\, t_2) + \mathrm{A}_1 \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} x(t_1,\, t_2) + \mathrm{A}_2 \mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} x(t_1,\, t_2) \\ &\quad + \mathrm{B}_0\, u(t_1,\, t_2) + \mathrm{B}_1 \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} u(t_1,\, t_2) + \mathrm{B}_2 \mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} u(t_1,\, t_2), \\ y(t_1,\, t_2) &= \mathrm{C}\, x(t_1,\, t_2) + \mathrm{D}\, u(t_1,\, t_2), \end{aligned} \tag{1.19}$$

est un système dynamique bidimensionnel fractionnaire. $\mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i}$ est la dérivée partielle fractionnaire d'une fonction bidimensionnelle continue par rapport à la variable t_i $\big($formule (1.8)$\big)$, d'ordre α_i avec $\mathrm{N}_i - 1 < \alpha_i < \mathrm{N}_i$, $\mathrm{N}_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1,2$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, de la commande et de la sortie. $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

4.3 Systèmes dynamiques linéaires bidimensionnels à temps continu-discret

Dans certains modèles de systèmes dynamiques bidimensionnels, l'une des variables peut être continue, par exemple $t \in \mathbb{R}_+$, et l'autre discrète, par exemple $i \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, le modèle est dit système dynamique à temps continu-discret ou encore système dynamique hybride. Dans ce qui suit, nous présenterons quelques types de ces modèles.

4.3.1 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu-discret de type Roesser

Un système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu-discret de type Roesser est défini par le modèle suivant [8]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^h}{\partial t}(t,i) \\ x^v(t,i+1) \end{bmatrix} &= \mathrm{A} \begin{bmatrix} x^h(t,i) \\ x^v(t,i) \end{bmatrix} + \mathrm{B}\, u(t,i), \\ y(t,i) &= \mathrm{C}\, x(t,i) + \mathrm{D}\, u(t,i), \end{aligned} \tag{1.20}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{N}$. $x^h \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état horizontal, d'état vertical, de la commande et de la sortie. $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Les conditions initiales associées au système (1.20) sont

$$\begin{cases} x^h(0,i) \in \mathbb{R}^{n_1} & \text{pour} \quad i \in \mathbb{N}, \\ x^v(t,0) \in \mathbb{R}^{n_2} & \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

4.3.2 Système dynamique linéaire bidimensionnel à temps continu-discret généralisé

La forme générale d'un système dynamique bidimensionnel hybride est décrite par les équations suivantes [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} x(t,i+1) &= \mathrm{A}_0\, x(t,i) + \mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial t} x(t,i) + \mathrm{A}_2\, x(t,i+1) \\ &\quad + \mathrm{B}_0\, u(t,i) + \mathrm{B}_1 \frac{\partial}{\partial t} u(t,i) + \mathrm{B}_2\, u(t,i+1), \\ y(t,i) &= \mathrm{C}\, x(t,i) + \mathrm{D}\, u(t,i), \end{aligned} \tag{1.21}$$

où $t \in \mathbb{R}_+$ et $i \in \mathbb{N}$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie . $\mathrm{A}_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B}_j \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ avec $j = \overline{0,2}$.

Les conditions initiales associées au système (1.21) sont

$$\begin{aligned} x(t_0,i) &= x(0,i), \quad i \in \mathbb{N}, \\ x(t,i_0) &= x(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial}{\partial t} x(t,i_0) &= \dot{x}(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

4.3.3 Système dynamique linéaire bidimensionnel fractionnaire à temps continu-discret d'ordre α et β

Le système dynamique décrit par les équations suivantes [7]

$$\mathbf{D}^{\alpha} x_1(t,i) = \mathrm{A}_{11}\, x_1(t,i) + \mathrm{A}_{12}\, x_2(t,i) + \mathrm{B}_1\, u(t,i), \tag{1.22}$$

$$\Delta^{\beta} x_2(t,i+1) = \mathrm{A}_{21}\, x_1(t,i) + \mathrm{A}_{22}\, x_2(t,i) + \mathrm{B}_2\, u(t,i), \tag{1.23}$$

$$y(t,i) = \mathrm{C}\, x(t,i) + \mathrm{D}\, u(t,i),$$

est un système dynamique fractionnaire hybride d'ordre α et β, où $\mathbf{D}^{\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x_1 par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$ $\big($formule (1.7)$\big)$. Δ^{β}, avec $0 < \beta < 1$, est la différence fractionnaire de la fonction x_2 par rapport à la variable $i \in \mathbb{N}$ $\big($formule (1.9)$\big)$. $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $(\mathbb{R}^{n_1} + \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n})$, $u \in \mathbb{R}^{m}$, $y \in \mathbb{R}^{p}$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. $\mathrm{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \mathrm{A}_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, \mathrm{A}_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}, \mathrm{A}_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $\mathrm{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $\mathrm{B}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

La condition initiale associée à l'équation (1.22) est

$$x_1(t_0, i) = x_1(0, i), \quad i \in \mathbb{N},$$

et la condition initiale associée à l'équation (1.23) est

$$x_2(t, i_0) = x_2(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

4.3.4 Système dynamique linéaire bidimensionnel fractionnaire à temps continu-discret d'ordre α et β généralisé

Le système dynamique décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} \Delta^{\beta} x(t, i+1) &= \mathrm{A}_0\, x(t,i) + \mathbf{D}^{\alpha} \mathrm{A}_1\, x(t,i) + \mathrm{A}_2\, \Delta^{\beta} x(t, i+1) \\ &\quad + \mathrm{B}_0\, u(t,i) + \mathbf{D}^{\alpha} \mathrm{B}_1\, u(t,i) + \mathrm{B}_2\, \Delta^{\beta} u(t, i+1), \qquad (1.24) \\ y(t,i) &= \mathrm{C}\, x(t,i) + \mathrm{D}\, u(t,i), \end{aligned}$$

représente la forme générale d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride, où $\mathbf{D}^{\alpha}$, avec $0 < \alpha \leq 1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$ (formule(1.7)). Δ^{β}, avec $0 < \beta < 1$, est la différence fractionnaire de la fonction x par rapport à la variable $i \in \mathbb{N}$ (formule (1.9)). $x \in \mathbb{R}^{n}$, $u \in \mathbb{R}^{m}$ et $y \in \mathbb{R}^{p}$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie . $\mathrm{A}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathrm{B}_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ avec $j = \overline{0, 2}$.

Les conditions initiales associées au système (1.24) sont

$$\begin{aligned} x(t_0, i) &= x(0, i), \quad i \in \mathbb{N}, \\ x(t, i_0) &= x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{D}^{\alpha} x(t, i_0) &= \tilde{x}(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques définitions sur les fonctions spéciales, les dérivées et les différences fractionnaires pour les fonctions unidimensionnelles et bidimensionnelles. En dernier, les différents modèles de système dynamique bidimensionnel ont été exposés. Cependant, dans les chapitres qui suivent, nous nous intéressons à l'étude de la solvabilité et de la positivité du système dynamique linéaire bidimensionnel fractionnaire à temps continu-discret d'ordre α et β $\big($système (1.24)$\big)$.

Chapitre 2

Solvabilité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude de la solvabilité d'un système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel décrit par la forme générale par le biais des transformations de Laplace et en $\mathcal{Z}$, vu leurs nombreux avantages. Des notions, résultats préliminaires et conditions seront, également, présentés et étayés.

2 Transformation de Laplace

Les définitions et les différentes propriétés de la transformée de Laplace directe et inverse dans le cas ordinaire et fractionnaire sont présentées dans cette section.

2.1 Transformation de Laplace directe

Définition 2.1 [1, 8, 10] *La transformée de Laplace d'une fonction f, lorsqu'elle existe, est la fonction* F *de la variable complexe s définie par*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f(t)\right](s) &= \mathrm{F}(s), \\ &= \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Théorème 2.1 [1, 8] *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction*

- *continue par morceaux ;*
- *d'ordre exponentiel ;*
- $\exists \beta \in]0, 1[$, *tel que,* $\lim\limits_{t\to 0} t^{\beta} |f(t)| = 0.$

Alors, f admet la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

Exemple 2.1 *Considérons la fonction*

$$f(t) = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) &= \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt,\\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt,\\ &= \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.\end{aligned}$$

Proposition 2.1 [1, 8, 10] *Pour toutes fonctions f et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ admettant des transformées de Laplace avec $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+)$, nous avons les propriétés suivantes*

1. **Linéarité :**
$$\mathscr{L}\left[f(t)+g(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s) + \mathscr{L}\left[g(t)\right](s),$$
et
$$\mathscr{L}\left[k f(t)\right](s) = k\mathscr{L}\left[f(t)\right](s), \quad k \in \mathbb{R}.$$
2. **Dérivation :**
$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n \mathscr{L}\left[f(t)\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(t_0)\Big|_{t_0=0}.$$
En particulier, si $n = 1$, nous aurons
$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right](s) = s\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) - f(0).$$
3. **Convolution :**
$$\mathscr{L}\left[(f\star g)(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)\, \mathscr{L}\left[g(t)\right](s),$$
où
$$\left(f\star g\right)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Proposition 2.2 [8, 10] *Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit δ l'impulsion de Dirac. Alors,*

1. $\mathscr{L}\left[\dfrac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\right](s) = s^{-a}$, *pour tout $a > 0$.*
2. $\mathscr{L}[\delta(t)](s) = 1$.

2.2 Transformation de Laplace inverse

Définition 2.2 [1, 8, 10] *La transformée de Laplace inverse de l'image F de la variable complexe s est la fonction f de la variable réelle t est définie par*

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{F}(s)\right](t),\\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \mathrm{F}(s) e^{st}\, ds.\end{aligned}$$

Exemple 2.2 *Considérons la fonction $\mathrm{F}(s)$ définie par*

$$\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)](t), \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \mathrm{F}(s)e^{st}ds, \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \frac{1}{s^2}e^{st}ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$f(t) = t.$$

2.3 Transformation de Laplace fractionnaire

Définition 2.3 [8, 10] *La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+)$ qui satisfait les conditions du théorème 2.1, est donnée par*

$$\mathscr{L}\left[\mathbf{D}^{\alpha} f(t)\right](s) = s^{\alpha}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}, \tag{2.1}$$

où $n-1 < \alpha < Sn$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $f^{(k)}(t)\big|_{t=0}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction f par rapport à la variable t au point $t = 0$.

3 Transformation en $\mathcal{Z}$

Nous présentons dans cette section la définition de la transformée en $\mathcal{Z}$ directe et inverse ainsi ses propriétés.

3.1 Transformation en $\mathcal{Z}$ directe

Définition 2.4 [11] *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle transformée en $\mathcal{Z}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction, notée $\mathcal{Z}[x_n]$, de la variable complexe z définie, lorsqu'il y a convergence, par*

$$\begin{aligned} \mathrm{X}(z) &= \mathcal{Z}[x_n](z), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}. \end{aligned}$$

Exemple 2.3 *Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n, $x_n = 2^n$. Alors,*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x_n](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}, \\ &= \frac{z}{z-2}. \end{aligned}$$

Remarque 2.1 [11] *Vu les résultats sur le rayon de convergence d'une série entière, trois cas peuvent se présenter*

- *Soit la transformée en $\mathcal{Z}$ est définie quel que soit le nombre complexe z, non nul.*
- *Soit il existe un nombre réel positif ou nul R tel que pour $z : |z| > \mathrm{R}$ la transformée en $\mathcal{Z}$ est définie, et pour z tel que $|z| < \mathrm{R}$ la transformée en $\mathcal{Z}$ n'est pas définie.*
- *Soit la transformée en $\mathcal{Z}$ n'est pas définie pour aucun nombre complexe z.*

Proposition 2.3 [11] *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant des transformées en $\mathcal{Z}$ et soient a et b deux réels. Ainsi, nous avons les propriétés suivantes*

1. **Linéarité :**
$$\mathcal{Z}\,[a\,u_n + b\,v_n]\,(z) = a\mathcal{Z}\,[u_n]\,(z) + b\mathcal{Z}\,[v_n]\,(z); \tag{2.2}$$
2. **Retard :**
$$\mathcal{Z}\,[u_{n-k}]\,(z) = z^{-k}\mathcal{Z}\,[u_n]\,(z), \quad k\in\mathbb{N} \quad et \quad n<k. \tag{2.3}$$
3. **Avance :**
$$\mathcal{Z}\,[u_{n+k}]\,(z) = z^k\mathcal{Z}\,[u_n]\,(z) - u_0\,z^k - u_1\,z^{k-1} - \cdots - u_{k-1}\,z, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.4}$$
4. **Convolution :**
$$\mathcal{Z}\,[(u\star v)_n]\,(z) = \mathcal{Z}\,[u_n]\,(z)\,\mathcal{Z}\,[v_n]\,(z), \tag{2.5}$$
où
$$(u\star v)_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_{n-k}\,v_k. \tag{2.6}$$

Proposition 2.4 [11] *La transformée en $\mathcal{Z}$ de la suite de Dirac retardée de k, $k\in\mathbb{N}$, définie par*

$$\delta_{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n\neq k, \\ 1 & \text{si} \quad n=k, \end{cases} \tag{2.7}$$

est donnée par
$$\mathcal{Z}\,[\delta_{n-k}]\,(z) = z^{-k}. \tag{2.8}$$

3.2 Transformation en $\mathcal{Z}$ inverse

Définition 2.5 [11] *La transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de la fonction X de la variable complexe z est la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la formule*

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\,[\mathrm{X}(z)]\,(n), \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathrm{C}} \mathrm{X}(z)\,z^{n-1}\,dz, \end{aligned} \tag{2.9}$$

où C est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement au domaine de convergence.

Exemple 2.4 *Considérons la fonction*

$$\mathrm{X}(z) = \frac{z}{z-1},$$

ainsi, la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de X est définie par

$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N} : x_n &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathrm{C}} \mathrm{X}(z)\,z^{n-1}\,dz, \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}} \frac{z^n}{z-1}\,dz, \end{aligned}$$

En utilisant l'intégrale de Dunford [12], il résulte

$$x_n = 1, \quad n\in\mathbb{N}.$$

4 Solvabilité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

La résolution du système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par la forme générale est traitée dans cette section. Afin de trouver l'expression de la trajectoire du système dynamique en question, nous allons utiliser les transformations de Laplace et en $\mathcal{Z}$.

4.1 Préliminaires

Soit le système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha} \Delta^{\beta} x(t, i+1) &= A_0 x(t, i) + A_1 \mathbf{D}^{\alpha} x(t, i) + A_2 \Delta^{\beta} x(t, i+1) \\ &\quad + B_0 u(t, i) + B_1 \mathbf{D}^{\alpha} u(t, i) + B_2 \Delta^{\beta} u(t, i+1), \qquad (2.10) \\ y(t, i) &= C x(t, i) + D u(t, i), \qquad (2.11) \end{aligned}$$

où $\mathbf{D}^{\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$ (formule (1.7)) et Δ^{β}, avec $0 < \beta < 1$, est la différence fractionnaire de la fonction x par rapport à la variable $i \in \mathbb{N}$ (formule (1.9)). $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A_j, B_j, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées avec $j = \overline{0, 2}$.

Les conditions initiales associées au système (2.10) sont

$$\begin{aligned} x(t_0, i) &= x(0, i), \quad i \in \mathbb{N}, \\ x(t, i_0) &= x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{D}^{\alpha} x(t, i_0) &= \tilde{x}(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Définition 2.6 *Le système décrit par l'équation (2.10) est dit régulier, si et seulement si,*

$$\det\left[I_{n\times n} + c_k z^{-k} I_{n\times n} - s^{-\alpha} z^{-1} A_0 - z^{-1} A_1 - s^{-\alpha} A_2 - c_k s^{-\alpha} z^{-k} A_2\right] \neq 0, \qquad (2.12)$$

pour certains $s, z \in \mathbb{C}$ où $c_k = \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^k \binom{\beta}{k}$.

Proposition 2.5 *Soit G une matrice définie par*

$$G(s, z) = I_{n\times n} + c_k z^{-k} I_{n\times n} - s^{-\alpha} z^{-1} A_0 - z^{-1} A_1 - s^{-\alpha} A_2 - c_k s^{-\alpha} z^{-k} A_2, \qquad (2.13)$$

où $c_k = \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^k \binom{\beta}{k}$. Si $\det G(s, z) \neq 0$, alors,

$$G^{-1}(s, z) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q} s^{-\alpha p} z^{-q}, \qquad (2.14)$$

où $T_{p,q}$, dite matrice de transition, est donnée par

$$T_{p,q} = \begin{cases} I_{n\times n} & \text{pour} \quad p = q = 0, \\ T_{p-1,q-1} A_0 + T_{p,q-1} A_1 + T_{p-1,q} A_2 \\ \quad - c_k T_{p,q-k} + c_k T_{p-1,q-k} A_2 & \text{pour} \quad p, q \in \mathbb{Z}_+, \text{ avec } p+q > 0 \text{ et } k < q, \\ 0 & \text{pour} \quad p < 0 \text{ ou } q < 0. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Preuve. Considérons la matrice G définie par

$$\mathrm{G}(s,z)=\mathrm{I}_{n\times n}+c_k z^{-k}\mathrm{I}_{n\times n}-s^{-\alpha}z^{-1}\mathrm{A}_0-z^{-1}\mathrm{A}_1-s^{-\alpha}\mathrm{A}_2-c_k s^{-\alpha}z^{-k}\mathrm{A}_2.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, nous avons

$$\begin{aligned}\det \mathrm{G}(s,z) &= \sum_{k=0}^{n_1}\sum_{k=0}^{n_2} a_{n_1-k,\,n_2-l}\, s^{-\alpha k} z^{-l}, &(2.16)\\ &\neq 0 &(2.17)\end{aligned}$$

pour certains $s, z\in\mathbb{C}$. Ainsi,

$$\mathrm{G}^{-1}(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}s^{-\alpha p}z^{-q}.$$

Il reste à déterminer l'expression de la matrice $\mathrm{T}_{p,q}$ pour tout $p,\, q\in\mathbb{N}$.
En effet, il est évident que

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n\times n} &= \mathrm{G}(s,z)\,\mathrm{G}^{-1}(s,z),\\ &= \left(\mathrm{I}_{n\times n}+c_k z^{-k}\mathrm{I}_{n\times n}-s^{-\alpha}z^{-1}\mathrm{A}_0-z^{-1}\mathrm{A}_1-s^{-\alpha}\mathrm{A}_2-c_k s^{-\alpha}z^{-k}\mathrm{A}_2\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}s^{-\alpha p}z^{-q}\right),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\Big(s^{-\alpha p}z^{-q}+c_k s^{-\alpha p}z^{-q-k}-s^{-\alpha p-\alpha}z^{-q-1}\mathrm{A}_0-s^{-\alpha p}z^{-q-1}\mathrm{A}_1-s^{-\alpha p-\alpha}z^{-q}\mathrm{A}_2\\ &\quad -c_k s^{-\alpha p-\alpha}z^{-q-k}\mathrm{A}_2\Big)\mathrm{T}_{p,q},\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\Big(\mathrm{T}_{p,q}+c_k\mathrm{T}_{p,q-k}-\mathrm{A}_0\mathrm{T}_{p-1,q-1}-\mathrm{A}_1\mathrm{T}_{p,q-1}\\ &\qquad -\mathrm{A}_2\mathrm{T}_{p-1,q}-c_k\mathrm{A}_2\mathrm{T}_{p-1,q-k}\Big)s^{-\alpha p}z^{-q}, \qquad (2.18)\end{aligned}$$

d'une part. Et d'autre part

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n\times n} &= \mathrm{G}^{-1}(s,z)\,\mathrm{G}(s,z),\\ &= \left(\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}s^{-\alpha p}z^{-q}\right)\Big(\mathrm{I}_{n\times n}+c_k z^{-k}\mathrm{I}_{n\times n}-s^{-\alpha}z^{-1}\mathrm{A}_0-z^{-1}\mathrm{A}_1-s^{-\alpha}\mathrm{A}_2\\ &\quad -c_k s^{-\alpha}z^{-k}\mathrm{A}_2\Big),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\Big(s^{-\alpha p}z^{-q}+c_k s^{-\alpha p}z^{-q-k}-s^{-\alpha p-\alpha}z^{-q-1}\mathrm{A}_0-s^{-\alpha p}z^{-q-1}\mathrm{A}_1-s^{-\alpha p-\alpha}z^{-q}\mathrm{A}_2\\ &\quad -c_k s^{-\alpha p-\alpha}z^{-q-k}\mathrm{A}_2\Big),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\Big(\mathrm{T}_{p,q}+c_k\mathrm{T}_{p,q-k}-\mathrm{T}_{p-1,q-1}\mathrm{A}_0-\mathrm{T}_{p,q-1}\mathrm{A}_1-\mathrm{T}_{p-1,q}\mathrm{A}_2\\ &\qquad -c_k\mathrm{T}_{p-1,q-k}\mathrm{A}_2\Big)s^{-\alpha p}z^{-q}. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

En comparant les coefficients du même degré en s et z des équations (2.18) et (2.19), la matrice de transition $\mathrm{T}_{p,q}$ est obtenue selon trois cas possibles

- Si $p<0$ où $q<0$, alors,

$$\mathrm{T}_{p,q}=0,$$

- Si $p = q = 0$, alors,
$$T_{p,q} = I_{n\times n},$$
- Si $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ avec $p+q>0$ et $k<q$, alors,
$$T_{p,q} = T_{p-1,q-1}A_0 + T_{p,q-1}A_1 + T_{p-1,q}A_2 -, c_k T_{p,q-k} +, c_k T_{p-1,q-k}A_2.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.5. ∎

4.2 Résultats

Considérons le système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par la forme générale

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha}\Delta^{\beta}x(t,i+1) &= A_0\,x(t,i) + A_1\,\mathbf{D}^{\alpha}x(t,i) + A_2\,\Delta^{\beta}x(t,i+1) \\ &\quad + B_0\,u(t,i) + B_1\,\mathbf{D}^{\alpha}u(t,i) + B_2\,\Delta^{\beta}u(t,i+1), \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$y(t,i) = C\,x(t,i) + D\,u(t,i), \tag{2.21}$$

où $\mathbf{D}^{\alpha}$, avec $0<\alpha<1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable continue $t \in \mathbb{R}_+$. Δ^{β}, avec $0<\beta<1$, est la différence fractionnaire de la fonction x par rapport à la variable discrète $i \in \mathbb{N}$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie . $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_j \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ avec $j = \overline{0,2}$.

Les conditions initiales associées au système (2.20) sont

$$\begin{aligned} x(t_0,i) &= x(0,i), \quad i \in \mathbb{N}, \\ x(t,i_0) &= x(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{D}^{\alpha}x(t,i_0) &= \tilde{x}(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Supposons que le système dynamique décrit pas les deux équations (2.20) et (2.21) est régulier, i.e.,

$$\det\left[I_{n\times n} + c_k z^{-k} I_{n\times n} - s^{-\alpha}z^{-1}A_0 - A_1 z^{-1} - A_2 s^{-\alpha} - A_2 c_k s^{-\alpha} z^{-k}\right] \neq 0, \tag{2.22}$$

pour certains $s, z \in \mathbb{C}$ où $c_k = \sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}$. Ainsi, la trajectoire x du système dynamique (2.20) est décrite par le théorème suivant.

Théorème 2.2 *Le système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par l'équation* (2.20) *admet comme trajectoire*

$$\begin{aligned} x(t,i) = &\sum_{p=0}^{\infty} T_{p,i}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha p-1}x(\tau,0)d\tau - \frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}x(0,0)\right. \\ &\left. - \frac{A_2}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}x(\tau,0)d\tau - \frac{B_2}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}u(\tau,0)d\tau\right] \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i} T_{p,i-q}\left[\frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}x(0,q) + \frac{B_2}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}u(\tau,q)d\tau\right] \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-k} T_{p,i-k-q}\left[\frac{C_k}{\Gamma(\alpha p+1)}t^{\alpha p}x(0,q) + \frac{B_2 C_k}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}u(\tau,q)d\tau\right] \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1} T_{p,i-1-q}\left[-\frac{A_1}{\Gamma(\alpha p+1)}t^{\alpha p}x(0,q) + \frac{B_0}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}u(\tau,q)d\tau\right. \\ &\left. + \frac{B_1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha p-1}u(\tau,q)d\tau - \frac{B_1}{\Gamma(\alpha p+1)}t^{\alpha p}u(0,q)\right], \end{aligned}$$

où Γ représente la fonction Gamma d'Euler et $\mathrm{T}_{p,q}$ *est la matrice de transition définie par l'expression* (2.15).

Preuve. Considérons le système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par l'équation suivante

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{\alpha}\,\Delta^{\beta}\,x(t,\,i+1) =&\mathrm{A}_0\,x(t,i)+\mathrm{A}_1\,\mathbf{D}^{\alpha}\,x(t,i)+\mathrm{A}_2\,\Delta^{\beta}\,x(t,i+1)\\ &+\mathrm{B}_0\,u(t,i)+\mathrm{B}_1\,\mathbf{D}^{\alpha}\,u(t,i)+\mathrm{B}_2\,\Delta^{\beta}\,u(t,i+1).\end{aligned}\tag{2.23}$$

D'après la définition de la différence fractionnaire $\big($formule (1.9)$\big)$, l'équation (2.23) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{\alpha}\sum_{k=0}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}x(t,\,i+1-k) &= \mathrm{A}_0\,x(t,i)+\mathbf{D}^{\alpha}\mathrm{A}_1\,x(t,\,i)+\mathrm{A}_2\sum_{k=0}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}x(t,\,i+1-k)\\ &\quad+\mathrm{B}_0\,u(t,i)+\mathbf{D}^{\alpha}\mathrm{B}_1\,u(t,i)+\mathrm{B}_2\sum_{k=0}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}u(t,\,i+1-k),\end{aligned}$$

où encore,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{\alpha}\,x(t,i+1)+\mathbf{D}^{\alpha}c_k\,x(t,i+1-k) =&\mathrm{A}_0\,x(t,i)+\mathbf{D}^{\alpha}\,\mathrm{A}_1\,x(t,i)\\ &+\mathrm{A}_2\,x(t,i+1)+\mathrm{A}_2c_k\,x(t,i+1-k)\\ &+\mathrm{B}_0\,u(t,i)+\mathbf{D}^{\alpha}\,\mathrm{B}_1\,u(t,i)\\ &+\mathrm{B}_2\,u(t,i+1)+\mathrm{B}_2c_k\,u(t,i+1-k),\end{aligned}\tag{2.24}$$

où $c_k=\sum_{k=1}^{i+1}(-1)^k\binom{\beta}{k}$.

Supposons que les fonctions X et U sont, respectivement, les transformées de Laplace et en $\mathcal{Z}$ des fonctions x et u. Ainsi, l'application de la transformation de Laplace et en $\mathcal{Z}$ $\big($formules (2.1), (2.3) et (2.4)$\big)$ à l'équation (2.24) donne

$$\begin{aligned}&s^{\alpha}\,z\mathrm{X}(s,z)-s^{\alpha}\,z\mathrm{X}(s,0)-s^{\alpha-1}\,z\mathrm{X}(0,z)+s^{\alpha-1}\,z\,x(0,0)+c_k\,s^{\alpha}\,z^{-k+1}\mathrm{X}(s,z)\\ &\quad-c_k\,s^{\alpha-1}\,z^{-k+1}\mathrm{X}(0,z)\;=\;\mathrm{A}_0\mathrm{X}(s,z)+\mathrm{A}_1\,s^{\alpha}\mathrm{X}(s,z)-\mathrm{A}_1\,s^{\alpha-1}\mathrm{X}(0,z)\\ &\quad+\mathrm{A}_2\,z\mathrm{X}(s,z)-\mathrm{A}_2\,z\mathrm{X}(s,0)+\mathrm{A}_2\,c_k\,z^{-k+1}\mathrm{X}(s,z)+\mathrm{B}_0\,\mathrm{U}(s,z)+\mathrm{B}_1\,s^{\alpha}\,\mathrm{U}(s,z)\\ &\quad-\mathrm{B}_1\,s^{\alpha-1}\,\mathrm{U}(0,z)+\mathrm{B}_2\,z\mathrm{U}(s,z)-\mathrm{B}_2\,z\mathrm{U}(s,0)+\mathrm{B}_2\,c_k\,z^{-k+1}\,\mathrm{U}(s,z),\end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned}&\Big[\mathrm{I}_{n\times n}+c_k\,z^{-k}\,\mathrm{I}_{n\times n}-s^{-\alpha}\,z^{-1}\,\mathrm{A}_0-z^{-1}\,\mathrm{A}_1-s^{-\alpha}\,\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_2\,c_k\,s^{-\alpha}\,z^{-k}\Big]\mathrm{X}(s,z)=\mathrm{X}(s,0)\\ &\quad+s^{-1}\mathrm{X}(0,z)-s^{-1}\,x(0,0)+c_k\,s^{-1}\,z^{-k}\mathrm{X}(0,z)-\mathrm{A}_1\,s^{-1}\,z^{-1}\mathrm{X}(0,z)\\ &\quad-\mathrm{A}_2\,s^{-\alpha}\mathrm{X}(s,0)+\mathrm{B}_0\,s^{-\alpha}\,z^{-1}\,\mathrm{U}(s,z)+\mathrm{B}_1\,z^{-1}\,\mathrm{U}(s,z)-\mathrm{B}_1\,s^{-1}\,z^{-1}\,\mathrm{U}(0,z)\\ &\quad+\mathrm{B}_2\,s^{-\alpha}\,\mathrm{U}(s,z)-\mathrm{B}_2\,s^{-\alpha}\,\mathrm{U}(s,0)+\mathrm{B}_2\,c_k\,s^{-\alpha}\,z^{-k}\,\mathrm{U}(s,z).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Comme le système décrit par l'équation (2.23) est régulier $\big($formule (2.22)$\big)$, alors, l'expression (2.25) devient

$$\begin{aligned}\mathrm{X}(s,z) \;=\; &\mathrm{G}^{-1}(s,z)\Big[\mathrm{X}(s,0)+s^{-1}\mathrm{X}(0,z)-s^{-1}\,x(0,0)+c_k\,s^{-1}\,z^{-k}\mathrm{X}(0,z)-\mathrm{A}_1\,s^{-1}\,z^{-1}\mathrm{X}(0,z)\\ &-\mathrm{A}_2\,s^{-\alpha}\mathrm{X}(s,0)+\mathrm{B}_0\,s^{-\alpha}\,z^{-1}\,\mathrm{U}(s,z)+\mathrm{B}_1\,z^{-1}\,\mathrm{U}(s,z)-\mathrm{B}_1\,s^{-1}\,z^{-1}\,\mathrm{U}(0,z)\\ &+\mathrm{B}_2\,s^{-\alpha}\,\mathrm{U}(s,z)-\mathrm{B}_2\,s^{-\alpha}\,\mathrm{U}(s,0)+\mathrm{B}_2\,c_k\,s^{-\alpha}\,z^{-k}\,\mathrm{U}(s,z)\Big],\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
G^{-1}(s,z) &= \left(I_{n\times n} + c_k z^{-k} I_{n\times n} - s^{-\alpha} z^{-1} A_0 - z^{-1} A_1 - s^{-\alpha} A_2 - A_2 c_k s^{-\alpha} z^{-k}\right)^{-1}, \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{pq} s^{-\alpha p} z^{-q},
\end{aligned}$$

avec,

$$T_{p,q} = \begin{cases} I_{n\times n} & \text{pour} \quad p=q=0, \\ T_{p-1,q-1} A_0 + T_{p,q-1} A_1 + T_{p-1,q} A_2 & \\ \quad - T_{p,q-k} c_k + T_{p-1,q-k} A_2 c_k & \text{pour} \quad p,\, q \in \mathbb{N}, \text{ avec } p+q>0 \text{ et } k<q, \\ 0 & \text{pour} \quad p<0 \text{ ou } q<0. \end{cases}$$

Ainsi, en remplaçant $G^{-1}(s,z)$ par son écriture matricielle, nous obtenons

$$\begin{aligned}
X(s,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q} s^{-\alpha p} z^{-q} \Big[& X(s,0) + s^{-1} X(0,z) - s^{-1} x(0,0) + c_k s^{-1} z^{-k} X(0,z) \\
& - A_1 s^{-1} z^{-1} X(0,z) - A_2 s^{-\alpha} X(s,0) + B_0 s^{-\alpha} z^{-1} U(s,z) + B_1 z^{-1} U(s,z) \\
& - B_1 s^{-1} z^{-1} U(0,z) + B_2 s^{-\alpha} U(s,z) - B_2 s^{-\alpha} U(s,0) + B_2 c_k s^{-\alpha} z^{-k} U(s,z) \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q} \Big[& s^{-\alpha p} z^{-q} X(s,0) + s^{-(\alpha p+1)} z^{-q} X(0,z) - s^{-(\alpha p+1)} z^{-q} x(0,0) \\
& + c_k s^{-(\alpha p+1)} z^{-(k+q)} X(0,z) - A_1 s^{-(\alpha p+1)} z^{-(1+q)} X(0,z) - A_2 s^{-\alpha(1+p)} z^{-q} X(s,0) \\
& + B_0 s^{-\alpha(1+p)} z^{-(1+q)} U(s,z) + B_1 s^{-\alpha p} z^{-(1+q)} U(s,z) - B_1 s^{-(\alpha p+1)} z^{-(1+q)} U(0,z) \\
& + B_2 s^{-\alpha(p+1)} z^{-q} U(s,z) - B_2 s^{-\alpha(p+1)} z^{-q} U(s,0) + B_2 c_k s^{-\alpha(p+1)} z^{-(k+q)} U(s,z) \Big].
\end{aligned}$$

A fin de déterminer l'expression de la trajectoire x, il suffit d'appliquer les transformations de Laplace et en $\mathcal{Z}$ inverses. Pour ce faire, nous nous basons sur les propriétés des transformations de Laplace et en $\mathcal{Z}$ (propositions 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4).

En effet,

- Posons

$$I_1(s,\, z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q} s^{-\alpha p} z^{-q} X(s,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\big[I_1(s,\, z)\big](s,\, i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q} s^{-\alpha p} X(s,0) \mathcal{Z}^{-1}\big[z^{-q}\big](s,\, i), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q} s^{-\alpha p} X(s,0) \delta_{i-q}, \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} T_{p,i} s^{-\alpha p} X(s,0).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big[\mathcal{Z}^{-1}\big[I_1(s,\, z)\big]\Big](t,\, i) &= \sum_{p=0}^{\infty} T_{p,i} \mathcal{L}^{-1}\Big[s^{-\alpha p} X(s,0)\Big](t,\, i), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{T_{p,i}}{\Gamma(\alpha p)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha p-1} x(\tau,0)\, d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons
$$\mathrm{I}_2(s,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{T}_{p,q}\, s^{-(\alpha p+1)} z^{-q} \mathrm{X}(0,z).$$

  Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_2(s,z)\big](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{T}_{p,q}\, z^{-q}\mathrm{X}(0,z)\mathscr{L}^{-1}\big[s^{-(\alpha p+1)}\big](t,z),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathrm{T}_{p,q}}{\Gamma(\alpha p+1)}\, t^{\alpha p} z^{-q}\mathrm{X}(0,z).\end{aligned}$$

  Et
$$\begin{aligned}\mathscr{Z}^{-1}\Big[\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_2(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathrm{T}_{p,q}}{\Gamma(\alpha p+1)}\, t^{\alpha p}\, \mathscr{Z}^{-1}\Big[z^{-q}\mathrm{X}(0,z)\Big](t,i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathrm{T}_{p,q}}{\Gamma(\alpha p+1)}\, t^{\alpha p} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta_{i-q-j}\, x(0,j),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i} \frac{\mathrm{T}_{p,q}}{\Gamma(\alpha p+1)}\, t^{\alpha p}\, x(0,i-q),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i} \frac{\mathrm{T}_{p,i-q}}{\Gamma(\alpha p+1)}\, t^{\alpha p}\, x(0,q).\end{aligned}$$

- Posons
$$\mathrm{I}_3(s,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{T}_{p,q}\, s^{-(\alpha p+1)} z^{-q}\, x(0,0).$$

  Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathscr{Z}^{-1}\big[\mathrm{I}_3(s,z)\big](s,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{T}_{p,q}\, s^{-(\alpha p+1)} x(0,0)\mathscr{Z}^{-1}\big[z^{-q}\big](s,i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{T}_{p,i}\, s^{-(\alpha p+1)} x(0,0).\end{aligned}$$

  Et
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\Big[\mathscr{Z}^{-1}\big[\mathrm{I}_3(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{T}_{p,i}\, x(0,0)\,\mathscr{L}^{-1}\Big[s^{-(\alpha p+1)}\Big](t,i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathrm{T}_{p,i}}{\Gamma(\alpha p+1)}\, t^{\alpha p}\, x(0,0).\end{aligned}$$

- Posons
$$\mathrm{I}_4(s,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{T}_{p,q}\, c_k\, s^{-(\alpha p+1)} z^{-(k+q)} \mathrm{X}(0,z).$$

  Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_4(s,z)\big](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{T}_{p,q}\, c_k\, z^{-(k+q)}\mathrm{X}(0,z)\,\mathscr{L}^{-1}\big[s^{-(\alpha p+1)}\big](t,z),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathrm{T}_{p,q}\, c_k}{\Gamma(\alpha p+1)}\, t^{\alpha p} z^{-(k+q)}\mathrm{X}(0,z).\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\Big[\mathcal{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_4(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,c_k}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\,\mathcal{Z}^{-1}\Big[z^{-(k+q)}\mathrm{X}(0,z)\Big](t,i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,c_k}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta_{i-k-q-j}\,x(0,j),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-k}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,c_k}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\,x(0,i-k-q),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-k}\frac{\mathrm{T}_{p,i-k-q}\,c_k}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\,x(0,q).
\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_5(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{A}_1\,s^{-(\alpha p+1)}\,z^{-(1+q)}\,\mathrm{X}(0,z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_5(s,z)\big](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{A}_1\,z^{-(1+q)}\,\mathrm{X}(0,z)\,\mathcal{L}^{-1}\big[s^{-(\alpha p+1)}\big](t,z),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{A}_1}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\,z^{-(1+q)}\,\mathrm{X}(0,z).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\Big[\mathcal{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_5(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{A}_1}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\,\mathcal{Z}^{-1}\Big[z^{-(1+q)}\mathrm{X}(0,z)\Big](t,i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{A}_1}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta_{i-1-q-j}\,x(0,j),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{A}_1}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\,x(0,i-1-q),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-1-q}\,\mathrm{A}_1}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\,x(0,q).
\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_6(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{A}_2\,s^{-\alpha(1+p)}\,z^{-q}\,\mathrm{X}(s,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\big[\mathrm{I}_6(s,z)\big](s,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{A}_2\,s^{-\alpha(1+p)}\,\mathrm{X}(s,0)\,\mathcal{Z}^{-1}\big[z^{-q}\big](s,i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,i}\,\mathrm{A}_2\,s^{-\alpha(1+p)}\,\mathrm{X}(s,0).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big[\mathcal{Z}^{-1}\big[\mathrm{I}_6(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,i}\,\mathrm{A}_2\,\mathcal{L}^{-1}\Big[s^{-\alpha(1+p)}\mathrm{X}(s,0)\Big](t,i),\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,i}\,\mathrm{A}_2}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}x(\tau,0)\,d\tau.
\end{aligned}$$

- Posons
$$\mathrm{I}_7(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_0\,s^{-\alpha(1+p)}\,z^{-(1+q)}\,\mathrm{U}(s,z).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_7(s,z)\big](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_0\,z^{-(1+q)}\,\mathscr{L}^{-1}\big[s^{-\alpha(1+p)}\mathrm{U}(s,z)\big](t,z),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_0}{\Gamma(\alpha(1+p))}\,z^{-(1+q)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\,u(\tau,z)\,d\tau.\end{aligned}$$
Et
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\Big[\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_7(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_0}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\\ &\quad\times\mathcal{Z}^{-1}\Big[z^{-(1+q)}\,u(\tau,z)\Big](t,i)\,d\tau,\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_0}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\\ &\quad\times\Big(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta_{i-1-q-j}\,u(\tau,j)\Big)d\tau,\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-1-q}\,\mathrm{B}_0}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\,u(\tau,q)\,d\tau.\end{aligned}$$

- Posons
$$\mathrm{I}_8(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1\,s^{-\alpha p}\,z^{-(1+q)}\,\mathrm{U}(s,z).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_8(s,z)\big](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1\,z^{-(1+q)}\,\mathscr{L}^{-1}\big[s^{-\alpha p}\mathrm{U}(s,z)\big](t,z),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1}{\Gamma(\alpha p)}\,z^{-(1+q)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha p-1}\,u(\tau,z)\,d\tau.\end{aligned}$$
Et
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\Big[\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_8(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha p-1}\,\mathcal{Z}^{-1}\Big[z^{-(1+q)}\,u(\tau,z)\Big](t,i)\,d\tau,\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha p-1}\Big(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta_{i-1-q-j}\,u(\tau,j)\Big)d\tau,\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-1-q}\,\mathrm{B}_1}{\Gamma(\alpha p)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha p-1}\,u(\tau,q)\,d\tau.\end{aligned}$$

- Posons
$$\mathrm{I}_9(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1\,s^{-(1+\alpha p)}\,z^{-(1+q)}\,\mathrm{U}(0,z).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_9(s,z)\big](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1\,z^{-(1+q)}\,\mathrm{U}(0,z)\,\mathscr{L}^{-1}\big[s^{-(1+\alpha p)}\big](t,z),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\,z^{-(1+q)}\,\mathrm{U}(0,z).\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\Big[\mathcal{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_9(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\mathcal{Z}^{-1}\Big[z^{-(1+q)}\mathrm{U}(0,z)\Big](t,i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_1}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta_{i-1-q-j}\,u(o,j)\Big),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\frac{\mathrm{T}_{p,i-1-q}\,\mathrm{B}_1}{\Gamma(\alpha p+1)}\,t^{\alpha p}\,u(0,q).\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_{10}(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_2\,s^{-\alpha(1+p)}z^{-q}\mathrm{U}(s,z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_{10}(s,z)\big](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_2\,z^{-q}\,\mathcal{L}^{-1}\big[s^{-\alpha(1+p)}\mathrm{U}(s,z)\big](t,z),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_2}{\Gamma(\alpha(1+p))}\,z^{-q}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\,u(\tau,z)d\tau.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\Big[\mathcal{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_{10}(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_2}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\\ &\quad\times\mathcal{Z}^{-1}\Big[z^{-q}u(\tau,z)\Big](t,i)d\tau,\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_2}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\Big(\sum_{j=\infty}^{\infty}\delta_{i-q-j}u(\tau,j)\Big)d\tau,\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\frac{\mathrm{T}_{p,i-q}\,\mathrm{B}_2}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\,u(\tau,q)d\tau.\end{aligned}$$

- Posons

$$\mathrm{I}_{11}(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_2\,s^{-\alpha(1+p)}\,z^{-q}\,\mathrm{U}(s,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\big[\mathrm{I}_{11}(s,z)\big](s,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\,\mathrm{B}_2\,s^{-\alpha(1+p)}\mathrm{U}(s,0)\,\mathcal{Z}^{-1}\big[z^{-q}\big](s,i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,i}\,\mathrm{B}_2\,s^{-\alpha(1+p)}\,\mathrm{U}(s,0).\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\Big[\mathcal{Z}^{-1}\big[\mathrm{I}_{11}(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,i}\,\mathrm{B}_2\,\mathcal{L}^{-1}\Big[s^{-\alpha(1+p)}\mathrm{U}(s,0)\Big](t,i),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,i}\,\mathrm{B}_2}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}u(\tau,0)d\tau.\end{aligned}$$

- Posons
$$\mathrm{I}_{12}(s,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\mathrm{B}_2\,c_k\,s^{-\alpha(1+p)}\,z^{-(k+q)}\,\mathrm{U}(s,z).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_{12}(s,z)\big](t,z) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,q}\mathrm{B}_2\,c_k\,z^{-(k+q)}\,\mathscr{L}^{-1}\big[s^{-\alpha(1+p)}\,\mathrm{U}(s,z)\big](t,z),\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\mathrm{B}_2\,c_k}{\Gamma(\alpha(1+p))}\,z^{-(k+q)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\,u(\tau,z)d\tau.\end{aligned}$$
Et
$$\begin{aligned}\mathscr{Z}^{-1}\Big[\mathscr{L}^{-1}\big[\mathrm{I}_{12}(s,z)\big]\Big](t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\mathrm{B}_2\,c_k}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\\ &\quad\times\mathscr{Z}^{-1}\Big[z^{-(k+q)}\,u(\tau,z)\Big](t,i)d\tau,\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_{p,q}\mathrm{B}_2\,c_k}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\\ &\quad\times\Big(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta_{i-k-q-j}\,u(\tau,j)\Big)d\tau,\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-k}\frac{\mathrm{T}_{p,i-k-q}\mathrm{B}_2\,c_k}{\Gamma(\alpha(1+p))}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha(1+p)-1}\,u(\tau,q)d\tau.\end{aligned}$$

En dernier, 'expression de la solution x du système dynamique fractionnaire décrit par l'équation (2.23) est obtenue. ■

Corollaire 2.1 *Pour $\alpha=\beta=1$, la trajectoire du système dynamique décrit par les équations*
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}x(t,i+1) &= \mathrm{A}_0\,x(t,i)+\mathrm{A}_1\frac{\partial}{\partial t}x(t,i)+\mathrm{A}_2\,x(t,i+1)+\mathrm{B}_0\,u(t,i)+\mathrm{B}_1\frac{\partial}{\partial t}u(t,i)+\mathrm{B}_2\,u(t,i+1),\\ y(t,i) &= \mathrm{C}\,x(t,i)+\mathrm{D}\,u(t,i),\end{aligned}$$
est
$$\begin{aligned}x(t,i) &= \sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{T}_{p,i}\Big[\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1}x(\tau,0)d\tau-\frac{t^p}{\Gamma(p+1)}\,x(0,0)\\ &\quad-\frac{\mathrm{A}_2}{\Gamma(1+p)}\int_0^t (t-\tau)^p x(\tau,0)d\tau-\frac{\mathrm{B}_2}{\Gamma(1+p)}\int_0^t (t-\tau)^p u(\tau,0)d\tau\Big]\\ &\quad+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i}\mathrm{T}_{p,i-q}\Big[\frac{t^p}{\Gamma(p+1)}\,x(0,q)+\frac{\mathrm{B}_2}{\Gamma(1+p)}\int_0^t (t-\tau)^p\,u(\tau,q)d\tau\Big]\\ &\quad+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{i-1}\mathrm{T}_{p,i-1-q}\Big[-\frac{\mathrm{A}_1}{\Gamma(p+1)}\,t^p\,x(0,q)+\frac{\mathrm{B}_0}{\Gamma(1+p)}\int_0^t (t-\tau)^p\,u(\tau,q)d\tau\\ &\quad+\frac{\mathrm{B}_1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1}\,u(\tau,q)d\tau-\frac{\mathrm{B}_1}{\Gamma(p+1)}\,t^p\,u(0,q)\Big],\end{aligned}$$
où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler et $\mathrm{T}_{p,q}$ est la matrice de transition définie par
$$\mathrm{T}_{p,q}=\begin{cases}\mathrm{I}_{n\times n} & \text{pour}\quad p=q=0,\\ \mathrm{T}_{p-1,q-1}\mathrm{A}_0+\mathrm{T}_{p,q-1}\mathrm{A}_1+\mathrm{T}_{p-1,q}\mathrm{A}_2 & \text{pour}\quad p+q>0,\ \text{où}\ p,q\in\mathbb{N},\\ 0 & \text{pour}\quad p<0\ \text{ou}\ q<0.\end{cases}$$

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions des transformées de Laplace et en $\mathscr{Z}$, ainsi que leurs propriétés. Celles-ci ont été utilisées pour déterminer l'expression de la trajectoire du système dynamique bidimensionnel fractionnaire hybride décrit par la forme générale. L'étude de la positivité fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traiterons de la positivité d'un système dynamique fractionnaire hybride bidimensionnel décrit par la forme générale. Nous commencerons par introduire quelques notions sur les matrices, puis nous établirons des conditions nécessaires et suffisantes assurant la positivité du système dynamique en question. Il est à noter que la solvabilité et la positivité du système dynamique considéré n'ont pas été traitées auparavant.

2 Préliminaires

Dans cette section, nous allons rappeler quelques définitions des matrices particulières. Il s'agit des matrices non-négatives, strictement positives et la matrice de Metzler. Un lemme auxiliaire sur les conditions de positivité sera, ensuite, présenté.

2.1 Matrices particulières

Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})$ une matrice à entrées réelles avec $i = \overline{1, n}$ et $j = \overline{1, m}$.

2.1.1 Matrice non-négative

Définition 3.1 [2] A *est une matrice non-négative si*

$$\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m} : a_{ij} \geq 0,$$

i.e., toutes ses entrées sont non-négatives. Elle est notée par $\mathrm{A} \geq 0$ *ou encore par* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

Exemple 3.1 *La matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

est une matrice non-négative.

2.1.2 Matrice strictement positive

Définition 3.2 [2] A *est une matrice strictement positive si*

$$\exists i = \overline{1,\, n}, \exists j = \overline{1,\, m} \,:\, a_{ij} > 0,$$

i.e., toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée strictement positive. Elle est notée par A > 0.

Exemple 3.2 *La matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},$$

est une matrice positive.

2.1.3 Matrice de Metzler

Définition 3.3 [2] A *est une matrice de Metzler si*

$$\forall i = \overline{1,\, n}, \forall j = \overline{1,\, m},\, i \neq j \,:\, a_{ij} \geq 0,$$

i.e., toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives. L'ensemble des matrices de Metzler de dimension n × n est notée $\mathcal{M}_n$.

Exemple 3.3 *La matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & -4 & 3 \\ 9 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

est une matrice de Metzler.

2.2 Lemme auxiliaire

Lemme 3.1 [7] *Si* $0 < \beta < 1$. *Alors,*

$$c_k = c_k(\beta) > 0 \quad pour \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{3.1}$$

où

$$c_k(\beta) = (-1)^{k-1}\binom{\beta}{k}, \tag{3.2}$$

avec

$$\binom{\beta}{k} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!} \tag{3.3}$$

Preuve. Pour démontrer l'inégalité (3.1), nous utiliserons une démonstration par récurrence.

En effet, l'inégalité (3.1) est vérifiée pour $k = 1$, vu qu'à partir des formules (3.2) et (3.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} c_1 &= \binom{\beta}{1}, \\ &= \beta > 0. \end{aligned}$$

Supposons que l'hypothèse (3.1) est vraie jusqu'à l'ordre k, et démontrons qu'elle reste vraie pour l'ordre $k+1$.

De (3.2) et (3.3), il découle,

$$\begin{aligned} c_{k+1}(\beta) &= (-1)^k \binom{\beta}{k+1}, \\ &= (-1)^k \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)(k-\beta)}{k!(k+1)}, \\ &= (-1)^{k-1} \binom{\beta}{k} \frac{k-\beta}{k+1}, \\ &= c_k \frac{k-\beta}{k+1} > 0, \end{aligned}$$

puisque $c_k > 0$ pour $k \geq 1$ et $0 < \beta < 1$. Et donc

$$c_k = c_k(\beta) > 0,$$

pour tout $0 < \beta < 1$ et pour tout $k = 1, 2, \cdots$. ■

3 Positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

Soit le système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha \Delta^\beta x(t, i+1) &= A_0 x(t,i) + A_1 \mathbf{D}^\alpha x(t,i) + A_2 \Delta^\beta x(t, i+1) \\ &\quad + B_0 u(t,i) + B_1 \mathbf{D}^\alpha u(t,i) + B_2 \Delta^\beta u(t, i+1), \qquad (3.4) \\ y(t,i) &= C x(t,i) + D u(t,i), \qquad (3.5) \end{aligned}$$

où $\mathbf{D}^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$, est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}_+$. Δ^β, avec $0 < \beta < 1$, est la différence fractionnaire de la fonction x par rapport $i \in \mathbb{N}$. $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie . $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_j \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ avec $j = \overline{0, 2}$.

Les conditions initiales associées au système (3.4) sont

$$\begin{aligned} x(t_0, i) &= x(0, i), \quad i \in \mathbb{N}, \\ x(t, i_0) &= x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{D}^\alpha x(t, i_0) &= \tilde{x}(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Définition 3.4 [5, 7] *Le système dynamique fractionnaire hybride décrit par la forme générale (équations (3.4) et (3.5)) est dit positif si la trajectoire x et la sortie y sont positives, i.e., $x \in \mathbb{R}^n_+$ et $y \in \mathbb{R}^p_+$, pour toutes les conditions initiales positives $x(0,i) \in \mathbb{R}_+$, $x(t,0) \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{x}(t,0) \in \mathbb{R}_+$, et l'entrée $u(t, i) \in \mathbb{R}_+$ et $\mathbf{D}^\alpha u(t, i) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $i \in \mathbb{N}$.*

Lemme 3.2 [6] *La matrice de transition $T_{p,q}$ associée au système dynamique positif décrit par les équations (3.4) et (3.5) est une matrice positive i.e., $T_{p,q} \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.*

Lemme 3.3 [9] *Soient* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $0 < \alpha < 1$. *Alors,*

$$\mathrm{E}_0(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^p t^{p\alpha}}{\Gamma\left(p\alpha + 1\right)} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \tag{3.6}$$

et

$$\mathrm{E}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^p t^{(p+1)\alpha-1}}{\Gamma\left((p+1)\alpha\right)} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \tag{3.7}$$

si et seulement si, A *est une matrice de Metzler.*

Théorème 3.1 *Le système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par les équations* (3.4) *et* (3.5) *est positif, si et seulement si,*

$$\mathrm{A}_2 \in \mathscr{M}_n,$$

$$\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1 \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \in \mathbb{R}_+^{n\times n},$$
$$\mathrm{B}_j \in \mathbb{R}_+^{n\times m},\ j = \overline{0,2},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n} \ \textit{et}\ \mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m},$$

où $\mathscr{M}_n$ *est l'ensemble des matrices de Metzler de taille* $n \times n$.

Preuve.

La positivité du système dynamique décrit par les équations (3.4) et (3.5) sera démontrée en deux étapes. La première consiste à déterminer les conditions nécessaires, tandis que la deuxième porte sur les conditions suffisantes.

Condition nécessaire :

- De (3.4) pour $i = 0$ et $\mathrm{B}_j = 0$, $j = \overline{0,2}$, nous aurons

$$\mathbf{D}^{\alpha} \Delta^{\beta} x(t,1) = \mathrm{A}_0 x(t,0) + \mathrm{A}_1 \mathbf{D}^{\alpha} x(t,0) + \mathrm{A}_2 \Delta^{\beta} x(t,1), \tag{3.8}$$

avec $t \in \mathbb{R}_+$. Comme

$$\Delta^{\beta} x(t, i+1) = \sum_{k=0}^{i+1} \binom{\beta}{k} x(t, i+1-k),$$

alors, l'équation (3.8) devient

$$\mathbf{D}^{\alpha} \sum_{k=0}^{1} \binom{\beta}{k} x(t, 1-k) = \mathrm{A}_0 x(t,0) + \mathrm{A}_1 \mathbf{D}^{\alpha} x(t,0) + \mathrm{A}_2 \sum_{k=0}^{1} \binom{\beta}{k} x(t, 1-k),$$

où encore

$$\mathbf{D}^{\alpha} x(t,1) - \mathbf{D}^{\alpha} \beta x(t,0) = \mathrm{A}_0 x(t,0) + \mathrm{A}_1 \mathbf{D}^{\alpha} x(t,0) + \mathrm{A}_2 \left[x(t,1) - \beta x(t,0)\right]. \tag{3.9}$$

Supposons que les conditions initiales sont

$$\begin{aligned} x(0,i) &= x_i, \quad i \in \mathbb{N}, \\ x(t,0) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{D}^{\alpha} x(t,0) &= \tilde{x}(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (3.9) devient

$$\mathbf{D}^{\alpha} x(t,1) = \mathrm{A}_2 x(t,1), \tag{3.10}$$

ce qui donne

$$x(t,1)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A_2^p t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}x(0,1).$$

Du lemme 3.3, $x(t,1)\in\mathbb{R}_+^n$ pour $t\in\mathbb{R}_+$, si et seulement si, $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A_2^p t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}=E_0(t)\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$, autrement dit, A_2 est une matrice de Metzler.

- De (3.4) pour $i=1$ et $B_j=0$, $j=\overline{0,2}$, nous aurons

$$\mathbf{D}^\alpha\sum_{k=0}^{2}\binom{\beta}{k}x(t,2-k)=A_0\,x(t,1)+A_1\,\mathbf{D}^\alpha\,x(t,1)+A_2\sum_{k=0}^{2}\binom{\beta}{k}x(t,2-k),$$

ou encore

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^\alpha x(t,2)-\mathbf{D}^\alpha\beta x(t,1)+\mathbf{D}^\alpha\binom{\beta}{2}x(t,0)&=A_0\,x(t,1)+A_1\,\mathbf{D}^\alpha\,x(t,1)\\&\quad+A_2x(t,2)-A_2\beta x(t,1)+A_2\binom{\beta}{2}x(t,0),\end{aligned}\tag{3.11}$$

La substitution de (3.10) dans (3.11) donne

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^\alpha x(t,2)&=A_0\,x(t,1)+A_1\,A_2\,x(t,1)+A_2x(t,2),\\ x(t,2)&=A_0\sum_{p=0}^{\infty}A_2^p\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha(p+1)-1}}{\Gamma(\alpha(p+1))}x(\tau,1)d\tau\\&\quad+A_1\sum_{p=0}^{\infty}A_2^{p+1}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha(p+1)-1}}{\Gamma(\alpha(p+1))}x(\tau,1)d\tau+\sum_{p=0}^{\infty}A_2^p\frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)}x(0,2).\end{aligned}$$

La trajectoire $x(t,2)$ est positive, si et seulement si, A_2 est une matrice de Metzler (lemme 3.3), $A_0,A_1\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $A_0+A_1A_2\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$.

En répétant le même procédé pour tout $i\in\mathbb{N}$, on conclut que les conditions nécessaires pour que le système dynamique décrit par les équations (3.4) et (3.5) soit positif sont

$$A_2\in\mathcal{M}_n,$$

$$A_0,A_1\in\mathbb{R}_+^{n\times n}\quad\text{et}\quad A_0+A_1A_2\in\mathbb{R}_+^{n\times n}.$$

Condition suffisante :

De (3.4) pour $i=0$ et $B_j\neq0$, $j=\overline{0,2}$, nous aurons

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^\alpha\Delta^\beta x(t,1)=&A_0\,x(t,0)+A_1\,\mathbf{D}^\alpha\,x(t,0)+A_2\,\Delta^\beta\,x(t,1)\\&+B_0\,u(t,0)+B_1\,\mathbf{D}^\alpha\,u(t,0)+B_2\,\Delta^\beta\,u(t,1).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Comme

$$\Delta^\beta x(t,i+1)=\sum_{k=0}^{i+1}\binom{\beta}{k}x(t,i+1-k),\quad t\in\mathbb{R}_+,\ i\in\mathbb{N},$$

alors, l'équation (3.12) devient

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^\alpha\sum_{k=0}^{1}\binom{\beta}{k}x(t,1-k)&=A_0\,x(t,0)+A_1\,\mathbf{D}^\alpha\,x(t,0)+A_2\sum_{k=0}^{1}\binom{\beta}{k}x(t,1-k)\\&\quad+B_0\,u(t,0)+B_1\,\mathbf{D}^\alpha\,u(t,0)+B_2\sum_{k=0}^{1}\binom{\beta}{k}u(t,1-k),\end{aligned}$$

où encore,

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\alpha} x(t,1) &= A_2\, x(t,1) + A_0\, x(t,0) + A_1\, \mathbf{D}^{\alpha} x(t,0) + \mathbf{D}^{\alpha} \beta\, x(t,0) \\
&\quad - A_2 \beta x(t,0) + B_0\, u(t,0) + B_1\, \mathbf{D}^{\alpha} u(t,0) + B_2\, u(t,1) \\
&\quad - B_2 \beta\, u(t,0).
\end{aligned}$$

Ainsi, la trajectoire devient

$$\begin{aligned}
x(t,1) &= \sum_{p=0}^{\infty} A_2^p \frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)} x(0,1) + \sum_{p=0}^{\infty} A_2^p \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha p-1}}{\Gamma(\alpha p)} \big[\beta\, x(\tau,0) + A_1\, x(\tau,0) \\
&\quad + u(\tau,0)\big] d\tau + \sum_{p=0}^{\infty} A_2^p \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha(p+1)-1}}{\Gamma(\alpha(p+1))} \big[A_0\, x(\tau,0) - A_2 \beta\, x(\tau,0) + B_0 u(\tau,0) \\
&\quad + B_2\, u(\tau,1) - \beta B_2\, u(\tau,0)\big] d\tau + \sum_{p=0}^{\infty} A_2^p \frac{t^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha p+1)} \big[-\beta\, x(0,0) - A_1\, x(0,0) \\
&\quad - B_1\, u(0,0)\big],
\end{aligned}$$

cette dernière est positive si les conditions initiales sont positives, $A_2 \in \mathscr{M}_n$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $u(t,i)\mathbb{R}_+^m$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.
En reproduisant les mêmes étapes pour tout $i \in \mathbb{N}$, on conclut que les conditions nécessaires pour que le système dynamique décrit par les équations (3.4) et (3.5) soit positif sont

$$B_j \in \mathbb{R}_+^{n\times m},\ j = \overline{0,2},\ C \in \mathbb{R}_+^{p\times n} \text{ et } D \in \mathbb{R}_+^{p\times m},$$

ce qui achève la preuve du théorème 3.1.

■

4 Conclusion

Les conditions nécessaires et suffisantes assurant la positivité du système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par la forme générale ont été établies dans ce chapitre.

Conclusion

Ce travail porte sur l'étude de la solvabilité et de la positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par la forme générale.

Tout d'abord, nous avons rappelé quelques notions et outils sur les fonctions spéciales, les dérivées et les différences fractionnaires pour des fonctions unidimensionnelles et bidimensionnelles. Différents types de systèmes dynamiques bidimensionnels ont été, aussi, présentés.

Ensuite, la solvabilité d'un système dynamique fractionnaire hybride décrit par la forme générale a été traitée en utilisant les transformations de Laplace et en $\mathcal{Z}$. Des résultats sur la régularité du système dynamique en question et sur les matrices de transition ont été établis.

En dernier, les conditions nécessaires et suffisantes qui assurent la positivité du système dynamique fractionnaire hybride généralisé ont été développées.

Dans un futur proche, nous espérons d'étudier la solvabilité du système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par la forme générale par l'utilisation des transformées de Laplace continue [8] et discrète [3]. L'étude de la positivité interne et externe sera aussi envisagée.

Bibliographie

[1] **Debnath, L. and Bhatta, D.** (2007), *Integral Transforms and their Applications*, Chapman and Hall/CRC. 5, 14, 15

[2] **Gantmacher, F. R.** (2000), *The Theory of Matrices*, American Mathematical Society Chelsea Publishing, Rhode Island. 29, 30

[3] **Holm, M. T.** (2011), *The Laplace transform in discrete fractional calculus*, Computer and Mathematics with Applications, **62**, 1591–1601. 35

[4] **Johansson, E. and Rantzer, A.** (2003), *Nonlinear and Hybrid systems in Automative control*, springer. 1

[5] **Kaczorek, T.** (2010), *Standard and Positive Hybrid Linear SystemsDescribed by the General Model*, Acta Mechanica et Automatica, **5**, 112-116. 12, 31

[6] **Kaczorek, T.** (2002), *Positive 1D and 2D systems*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag London Ltd. 9, 31

[7] **Kaczorek, T.** (2008), *Positive fractional 2D hybrid linear systems*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, **56(3)**, 273–277. 12, 30, 31

[8] **Kaczorek, T. and Rogowski, K.** (2015), *Fractional linear systems and electrical circuits*, Studies in Systems, Decision and Control, 13, Springer International Publishing, Switzerland. 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 35

[9] **Kaczorek, T.** (2008), *Fractional Positive Continuous-Time Linear Systems And Their Reachability*, International Jornal of Applied Mathematics and Computer Science, **18(2)**, 223–228. 32

[10] **Kaczorek, T.** (2011), *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16

[11] **Lathi, B. P.** (2004), *Linear Systems and Signals*, Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, Oxford University Press, USA. 16, 17

[12] **Yosida, K.**, (1980), *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 17

Solvabilité et positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride

Résumé : Ce travail porte sur l'étude de la solvabilité et de la positivité d'un système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par la forme générale.

La solvabilité du système dynamique en question est obtenue en utilisant les transformations de Laplace et en $\mathcal{Z}$ où des résultats sur la régularité du système dynamique et sur les matrices de transition ont été établis.

Des conditions nécessaires et suffisantes qui assurent la positivité du système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par la forme générale ont été développées.

Dans un futur proche, nous souhaitons étudier la solvabilité du système dynamique fractionnaire bidimensionnel hybride décrit par la forme générale par le biais des transformées de Laplace continue et discrète, et de traiter sa positivité intérieure et extérieure.

Mots-Clés. Dérivée fractionnaire, différence fractionnaire, système dynamique fractionnaire hybride, solvabilité, positivité, transformée de Laplace, transformée en $\mathcal{Z}$.

Solvability and positivity of a hybrid two-dimensional fractional dynamical system

Abstract : This work deals with the study of the solvability and the positivity of a two-dimensional hybrid fractional dynamical system described by the general form.

The solvability of the considered dynamical system is obtained by using the Laplace and the $\mathcal{Z}$ transforms. Some results on the regularity of the dynamical system and on the transition matrices have been established.

Necessary and sufficient conditions that ensure the positivity of the generalized hybrid fractional dynamical system have been developed.

Necessary and sufficient conditions that ensure the positivity of the two-dimensional hybrid fractional dynamical system described by the general form have been developed.

In the near future, we plan to study the solvability of the two-dimensional hybrid fractional dynamical system described by the general form by the use of the continuous and the discrete Laplace transforms, and to deal with the interior and exterior positivity.

Key Words. Fractional derivative, fractional difference, hybrid fractional dynamical system, solvability, positivity, Laplace transform, $\mathcal{Z}$ transform.