RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Thèse

Présentée par

Mr HAOUA Rabah

Pour l'obtention du titre de

Doctorat Es-Sciences

Spécialité :Mathématiques

Option :Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Etude d'une équation différentielle abstraite avec conditions de Robin généralisées gouvernée par une classe d'opérateurs variables vérifiant l'hypothèse de Labbas-Terreni

Soutenue : le 18-04-2016

Devant le jury :

Président	**Benharrat BELAIDI, Pr. Université de Mostaganem**
Examinateurs	**Boubaker Khaled SADALLAH, Pr. ENS de Kouba**
	Mustapha CHEGGAG, Pr. ENP d'Oran
Directeurs de thèse	**Ahmed MEDEGHRI, Pr. Université de Mostaganem**
	Rabah LABBAS, Pr. Université du Havre

Table des matières

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire de Mathématiques pures et appliquées à l'université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis (LMPAM) en collaboration avec le laboratoire de mathématiques appliquées du Havre (LMAH).

Tout d'abord et en premier lieu je remercie vivement mon directeur de thèse en Algérie, le Professeur Ahmed Medeghri pour m'avoir intégré dans son équipe, d'avoir dirigé ce travail, pour son aide constante, ses encouragements, sa disponibilité et les moyens mis à ma disposition durant ces années de thèse.
J'exprime toute ma gratitude à mon directeur de thèse en France le Professeur Rabah Labbas. Ses qualités scientifiques et humaines, son expérience, ses grandes compétences, sa finesse, ses nombreux conseils et ses précieuses remarques ont permis l'accomplissement et l'aboutissement de ce travail. J'ai eu un grand plaisir à apprendre et à travailler à ses cotés et je l'aurai toujours. Qu'il trouve ici les marques de ma reconnaissance et de mon profond respect.
J'ai le plaisir de remercier infiniment Monsieur Belaidi Benharrat Professeur à l'université de Mostaganem et directeur du laboratoire LMPAM qui a bien voulu présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier beaucoup Monsieur Boubaker-Khaled Sadallah Professeur à L'ENS de Kouba , Alger, d'avoir accepté d'examiner cette thèse.
Mes grands remerciements vont aussi à Monsieur Mustapha Cheggag Professeur à l'ENP d'Oran, d'avoir accepté de faire partie du jury.
Je remercie également l'ensemble de mes collègues et particulièrement les membres de l'équipe de recherche Equations Différentielles Abstraites (EDA).

Je voudrai aussi exprimer ma grande affection à toute ma famille, en particulier, mes parents, ma femme, mes enfants Douaa-Bouchra et Tasnim-Ikhlass, mes soeurs et mon frère, pour leur présence continue et leur soutien indéfectible.

Enfin, je remercie infiniment toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et qui m'ont soutenu.

Introduction

L'objectif de ce travail est l'étude d'une famille de problèmes aux limites régis par des équations différentielles opérationnelles d'ordre 2 avec conditions de Robin généralisées gouvernées par une classe d'opérateurs variables vérifiant l'hypothèse de Labbas-Terreni dans le cadre des espaces de Hölder et des espaces L^p.
Ces équations sont de type :

$$u''(x) + A(x)u(x) - \omega u(x) = f(x), \qquad x \in]0,1[, \tag{0.0.1}$$

avec les conditions opérationnelles de Robin suivantes :

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

où $(A(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A(x))$ non nécessairement denses dans un espace de Banach complexe E. H est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(H)$, d_0, u_1 sont des éléments donnés dans l'espace E et $f \in C([0,1];E)$ (ou dans $L^p(0,1;E)$).
Ici ω est un paramètre spectral strictement positif. Dans tout ce travail, on notera

$$A_\omega(x) = A(x) - \omega I,$$

et on fera les hypothèses suivantes dans le cadre Höldérien :
On considère le problème (0.0.1)-(0.0.2) dans le cadre elliptique. Cela signifie, au sens de Krein, que la famille d'opérateurs linéaires fermés $(A_\omega(x))_{x\in[0,1]}$ à domaines $D(A_\omega(x))$ vérifie la condition d'ellipticité uniforme suivante :

1. $\exists \omega_0 > 0$, $\exists C > 0 : \forall x \in [0,1]$, $\forall z \geqslant 0$, $(A_{\omega_0}(x) - zI)^{-1} \in L(E)$ et

$$\left\|(A_{\omega_0}(x) - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C}{1+z}; \tag{0.0.3}$$

cette hypothèse permet de définir les puissances fractionnaires des opérateurs $(-A_\omega(x))$. En particulier, pour chaque $x \in [0,1]$ et $\omega > 0$, les racines carrées $-(-A_\omega(x))^{1/2}$ sont bien définies et génèrent des semi-groupes analytiques

$$\left(e^{-\sqrt{(-A_\omega(x))}y}\right)_{y>0},$$

non nécessairement fortement continus en zéro (voir A. V. Balakrishnan [3] dans le cas des domaines denses et Martinez-Sanz [26] dans le cas des domaines non denses).
Posons

$$Q_\omega(x) = -(-A_\omega(x))^{1/2}.$$

Il existe donc un secteur de la forme

$$\Pi_{\theta_1+\frac{\pi}{2},r_1} = \left\{z \in \mathbb{C}^* : \ |\arg(z)| \leqslant \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_1\},$$

avec $\theta_1 > 0$ petit et $r_1 > 0$ tels que pour chaque $x \in [0,1]$, on ait

$$\rho\left(Q_\omega\left(x\right)\right) \supset \Pi_{\theta_1+\frac{\pi}{2},r_1}.$$

Notre hyopthèse fondamentale sur les opérateurs variables $\left(Q_\omega\left(x\right)\right)_{x\in[0,1]}$ repose essentiellement sur celle de Labbas-Terreni [22] et celle de Labbas [18]. Elle est de la forme :

2. $\exists C, \alpha, \mu > 0 : \forall x, \tau \in [0,1], \forall z \geqslant \omega_0$

$$\begin{cases} \left\| Q_\omega\left(x\right)\left(Q_\omega\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega\left(x\right)^{-1}-Q_\omega\left(\tau\right)^{-1}\right)\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C\left|x-\tau\right|^\alpha}{\left|z+\omega\right|^\mu} \\ \alpha+\mu-2>0. \end{cases} \tag{0.0.4}$$

De plus les conditions de Robin (0.0.2) sont généralisées car le coefficient H est un opérateur linéaire fermé (voir cas autonome [7] et [6]) on fera donc les hypothèses suivantes sur $Q_\omega(.)$ et H

3. $\exists C > 0 : \forall x \in [0,1]$, $\forall \omega \geqslant \omega_0$

$$\begin{cases} Q_\omega\left(x\right)-H \text{ est fermable, } 0 \in \left(\overline{Q_\omega\left(x\right)-H}\right) \text{ et} \\ \left\| \left(\overline{Q_\omega\left(x\right)-H}\right)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant C\left(1+\sqrt{\omega}\right). \end{cases} \tag{0.0.5}$$

4. $\forall x \in [0,1]$, $\forall \omega \geqslant \omega_0$

$$\begin{cases} \left(\overline{Q_\omega\left(x\right)-H}\right)^{-1}\left(\left(D\left(Q_\omega\left(x\right)\right),E\right)_{1-\theta,\infty}\right) \subset D\left(Q_\omega\left(x\right)\right)\cap D\left(H\right) \\ Q_\omega\left(x\right)\left(\overline{Q_\omega\left(x\right)-H}\right)^{-1}\left(\left(D\left(Q_\omega\left(x\right)\right),E\right)_{1-\theta,\infty}\right) \subset \left(\left(D\left(Q_\omega\left(x\right)\right),E\right)_{1-\theta,\infty}\right). \end{cases} \tag{0.0.6}$$

5. $\forall x \in [0,1]$, $\forall \omega \geqslant \omega_0$

$$Q_\omega\left(x\right)^{-1}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} = \left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}Q_\omega\left(x\right)^{-1}, \quad x \in [0,1]. \tag{0.0.7}$$

6. $\exists C > 0 : \forall x,\ \tau \in [0,1]$, $\forall \omega \geqslant \omega_0$ et $\forall \zeta \in E$

$$\left\| \left[\left(\overline{Q_\omega\left(x\right)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega\left(\tau\right)-H}\right)^{-1}\right]\zeta\right\|_{L(E)} \leqslant C\left|x-\tau\right|^{\alpha+\mu}\left\|\zeta\right\|_E. \tag{0.0.8}$$

L'objectif principal de ce travail est l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte u du problème (0.0.1) et (0.0.2). Pour le cas höldèrien, une solution stricte est définie par une fonction u telle que

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1] \quad u\left(x\right) \in D\left(A\left(x\right)\right), \quad u \in C^2\left([0,1];E\right) \\ x \longmapsto A\left(x\right)u\left(x\right) \in C\left([0,1];E\right) \text{ et } \quad u\left(0\right) \in D\left(H\right), \end{cases}$$

et u satisfait le problème (0.0.1) et (0.0.2).
Pour le cas L^P, en plus des hypothèses (0.0.3) et (0.0.4), on suppose :

1.
$$E \text{ est un espace } UMD. \tag{0.0.9}$$

2. $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall \omega \geqslant \omega_0$, $(-A_{\omega_0}(x))^{is} \in L(E)$ et $\exists C > 1$, $\exists \theta_0 \in]0,\pi[$:
$$\left\| (-A_{\omega_0}(x))^{is} \right\|_{L(E)} \leqslant C e^{\theta_0 |s|}. \tag{0.0.10}$$

3. $\exists C > 0 : \forall x \in [0,1]$, $\forall \omega \geqslant \omega_0$
$$\left\{ \begin{array}{l} Q_\omega(x) - H \text{ est fermé, } 0 \in (Q_\omega(x) - H) \text{ et} \\ \left\| (Q_\omega(x) - H)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant C\left(1 + \sqrt{\omega}\right). \end{array} \right. \tag{0.0.11}$$

4. $\exists k > 0 : \forall x, \tau \in [0,1]$, $\forall \omega \geqslant \omega_0$ et $\forall \zeta \in E$
$$\left\| \left[(Q_\omega(x) - H)^{-1} - (Q_\omega(\tau) - H)^{-1} \right] \zeta \right\|_E \leqslant k\, |x - \tau|^{\alpha+\mu} \left\| \zeta \right\|_E .$$

Ici, une solution stricte est définie par une fonction u telle que
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{p.p.} x \in [0,1], \quad u(x) \in D(A(x)) \text{ et} \\ x \longmapsto A(x)\, u(x) \in L^p(0,1;E) \\ u \in W^{2,p}(0,1;E) \\ u(0) \in D(H), \end{array} \right.$$
et u satisfait le problème (0.0.1) et (0.0.2).

0.1 Aperçu historique

L'équation différentielle (0.0.1) et (0.0.2) a été traitée par de nombreux auteurs parmi lesquelles, on cite :

1. Cas A constant et $\omega = 0$.
   Le célèbre travail de S. G. Krein fait en 1967 (voir [16] p. 249), où l'auteur a traité cette équation différentielle, en se basant sur la méthode de réduction de l'ordre et les propriétés des semi-groupes et de la racine carrée $(-A)^{\frac{1}{2}}$ (avec $D(A)$ dense dans E). Cette équation a été étudiée aussi, dans le cadre des sommes d'opérateurs par G. Da Prato et P. Grisvard en 1975 (voir [9]). Ici, les auteurs ont utilisé principalement le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation et ils ont imposé la restriction $f(0) = f(1) = 0$. On signale aussi d'autres travaux liés à cette équation, Sobolevskii [31], Kuyazyuk [15], etc...
   Le cas A constant avec des conditions aux limites de Robin généralisées (i.e. à coefficients opérateurs) a été traité par M. Cheggag voir [7], [6] et [8].

2. Cas A variable (A dépend de x).

   En 1975, l'équation différentielle (0.0.1) avec des conditions aux limites homogènes a été largement traitée par G. Da Prato et P. Grisvard (voir [9]), dans un cadre plus général des sommes d'opérateurs. Ils ont supposé que, pour chaque $x \in [0,1]$, $(-A(x))$ vérifie l'hypothèse d'ellipticité dite de Krein (voir [16], (2.2), p. 249) et des hypothèses de différentiabilité sur les résolvantes de la forme

$$(D.G)\quad \begin{cases} \exists \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right],\ \exists \eta \in]0,1[\text{ et } \exists N > 0 \text{ tels que} \\ \left\| \dfrac{\partial}{\partial x}(A(x) - \omega I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{N}{\omega^{\alpha + \frac{1}{2}}} \\ \left\| \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x) - \omega I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{N}{\omega^{\alpha}} \\ \left\| \dfrac{\partial}{\partial x}(A(x) - \omega I)^{-1} - \dfrac{\partial}{\partial s}(A(s) - \omega I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{N|x-s|^{\eta}}{\omega^{\alpha + \frac{1}{2}}} \\ \left\| \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x) - \omega I)^{-1} - \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(A(s) - \omega I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{N|x-s|^{\eta}}{\omega^{\alpha}}. \end{cases}$$

   En 1985, R. Labbas et B. Terreni (voir [20]) ont étudié l'équation différentielle (0.0.1) avec les conditions aux limites du type Sturm-Liouville

$$\begin{cases} a_0 u(0) - b_0 u'(0) = 0, \\ a_1 u(1) - b_1 u'(1) = 0, \end{cases}$$

   où a_i, $b_i \geqslant 0$ et $a_i + b_i > 0$; $i = 0, 1$. Ceci, en imposant aussi la restriction $f(0) = f(1) = 0$ et en utilisant l'hypothèse

$$(L.T)\quad \begin{cases} \exists \alpha, \rho, K > 0 \text{ tels que} \\ \left\| A(x)(A(x) - zI)^{-1}\left[(A(x))^{-1} - (A(s))^{-1}\right] \right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{K|x-s|^{\alpha}}{|z|^{\rho}}, \end{cases}$$

   où $\alpha + 2\rho - 2 > 0$.

   En 1987, l'équation différentielle (0.0.1) avec des conditions aux limites non homogènes a été traitée par R. Labbas (voir [18]) ceci en utilisant successivement l'hypothèse du type $(L.T)$ et les hypothèses du type $(D.G)$. Ici, il n'a pas imposé que $f(0) = f(1) = 0$. En utilisant les techniques de calculs de Sinestrari [30], il a obtenu des conditions nécessaires de compatibilité entre les donnés et le second membre f, sous la forme

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\varphi \in \overline{D(A(0))}, \text{ où } \quad \varphi = u(0), \\ f(1) - A(1)\psi \in \overline{D(A(1))}, \text{ où } \quad \psi = u(1), \end{cases}$$

   pour obtenir une solution stricte du problème (0.0.1)-(0.0.2).

   Dans toutes ces études, faites dans un cadre höldérien, les auteurs se sont basés sur le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation.

0.2 Résultats essentiels obtenus

Cette thèse comporte trois parties.
La première partie est consacrée à des rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans cette thèse. Nous donnons certains résultats classiques sur les semi-groupes, les espaces d'interpolation et les espaces de Hölder, les intégrales de Dunford, les puissances fractionnaires ainsi que les principaux théorèmes de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cas des espaces de Banach quelconques (voir Da Prato-Grisvard [9]) et dans le cas des espaces de Banach UMD (voir Dore-Venni [10]. Prüss-Monniaux [27]).
La deuxième partie concerne le cadre höldérien et est composée de 4 chapitres.
Le premier chapitre est consacré à la construction de la solution stricte du problème aux limites. On suppose l'existence de cette solution et à l'aide d'un raisomment heuristique on obtient une équation intégrale équivalente à notre problème.
Dans le chapitre 2 on montre le résultat de la régularité maximale de la solution stricte. La méthode utilisée s'inspire des travaux de Labbas [18], Bouziani [4].
Au chapitre 3, on justifie la représentation trouvée dans le premier chapitre par l'étude du problème approché associé.
Finalement, au chapitre 4, on donne des exemples concrets variés liés aux équations aux dérivées partielles.
Le résultat principal obtenu dans cette partie est le suivant : (voir Haoua-Medeghri [14])

Théorème 0.2.1 *Soit* $f \in C^{\beta}([0,1];E)$ *où* $\beta \in \left]0, \alpha+\mu-2\right]$ *et soit* $(\overline{Q_\omega(0)-H})^{-1}d_0 \in D_{Q_\omega(0)} \cap D(H)$*,* $u_1 \in D_{A(1)}$*. On suppose de plus que les hypothèses (0.0.3)∼(0.0.8) sont vérifieés et que :*

$$\begin{cases} Q_\omega(0)(\overline{Q_\omega(0)-H})^{-1}\left[d_0 - Q_\omega(0)^{-1}f(0)\right] \in D\left(Q_\omega(0)\right) \\ Q_\omega(0)^2(\overline{Q_\omega(0)-H})^{-1}\left[d_0 - Q_\omega(0)^{-1}f(0)\right] + f(0) \in D_{A(0)}\left(\dfrac{\beta}{2}, +\infty\right) \\ A_\omega(1)\, u_1 - f(1) \in D_{A(1)}\left(\dfrac{\beta}{2}, +\infty\right), \end{cases}$$

alors il existe $\omega^* > 0$ *tel que* $\forall \omega \geqslant \omega^*$ *l'équation (0.0.1) admet une unique solution* $w(\cdot) = Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot)$ *vérifiant :*

1. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in C([0,1];E)$
2. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in C^{\beta}([0,1];E)$
3. $u'' \in C^{\beta}([0,1];E)$
4. $u'' \in C([0,1];E) \cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\dfrac{\beta}{2}, +\infty\right)\right)$.

La $3^{\text{ème}}$ partie concerne le cadre L^P et est composée de 4 chapitres
Le premier chapitre est consacré à la construction de la solution stricte du problème aux limites.
Dans le chapitre 2 on montre le résultat de la régularité maximale de la solution stricte.

Au chapitre 3, on justifie la représentation trouvée dans le premier chapitre par l'étude du problème approché associé.
Finalement, au chapitre 4, on donne des exemples concrets variés liés aux équations aux dérivées partielles.
Le résultat principal obtenu dans cette partie est le suivant :

Théorème 0.2.2 *Soit* $f \in L^p(0,1;E)$ *où* $p \in]1,+\infty[$ *et soit* $d_0, u_1 \in E$. *On suppose de plus les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7) vérifieés et que*

$$(Q_\omega(0) - H)^{-1} d_0 \in D(A(0), E)_{\frac{1}{2p},p}, \quad u_1 \in D(A(1), E)_{\frac{1}{2p},p},$$

alors il existe $\omega^* > 0$ *tel que* $\forall \omega \geqslant \omega^*$ *l'équation (0.15.8) admet une unique solution* $w(\cdot) = Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot)$ *vérifiant :*

1. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in L^p(0,1;E)$.
2. $u'' \in W^{2,p}(0,1;E)$.

Première partie

Rappels

0.3 les opérateurs linéaires

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach complexe.
Un opérateur linéaire$A$ sur l'espace E est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset E$ dit domaine de A et à valeurs dans E. On désigne par $L(E)$ l'espace des opérateurs linéaires continus définie sur E. Cet espace muni de la norme

$$\|A\|_{L(E)} = \sup\{\|Ax\|_E : x \in E, \ \ \|x\|_E = 1\},$$

est un espace de Banach.

Définition 0.3.1 *L'opérateur A est dit fermé si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\},$$

est fermé dans $E \times E$.
La norme du graphe sur $D(A)$ est donnée pour tout $x \in D(A)$ par :

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_E \, .$$

Si A est fermé, alors $\left(D(A), \|\cdot\|_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach.

Proposition 0.3.1 *L'opérateur A est fermé si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que*

$$x_n \longrightarrow x \text{ et } Ax_n \longrightarrow y,$$

on a :

$$x \in D(A) \ \text{ et } Ax = y.$$

Définition 0.3.2 *L'opérateur A est dit fermable s'il admet une extension fermée.*

Proposition 0.3.2 *L'opérateur A est dit fermable si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que*

$$x_n \longrightarrow 0 \text{ et } Ax_n \longrightarrow y,$$

on a :

$$y = 0.$$

Opérateur sectoriel

Définition 0.3.3 *Soit E un espace de Banach complexe et $0 < \phi < \pi$.*
On pose $S_\phi = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \phi\}$ et $\sum_\phi = \mathbb{C} \diagup \overline{S_\phi}$. Un opérateur linéaire B sur E est dit sectoriel d'angle ϕ si et seulement si

$$\rho(B) \subset \overline{S_\phi},$$

et pour tout $\phi < \varphi < \pi$, il existe $M_\varphi > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in \rho(B), \left\|(B - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{M_\varphi}{|\lambda|}.$$

Pour plus de détails, voir H. Brezis [5] et H. Tanabe [33].

0.4 Semi-groupes

0.4.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 0.4.1 *Soit E un espace de Banach complexe et $(G(t))_{t\geqslant 0}$ une famille d'opérateurs linéaires sur E. Alors $(G(t))_{t\geqslant 0}$ constitue un semi-groupe sur E si*

1. $\forall t \geqslant 0,\ G(t) \in L(E),\ G(0) = I_E.$
2. $\forall t, s \geqslant 0,\ G(t+s) = G(t)G(s) = G(s)G(t).$

Si la deuxième condition est vérifiée pour t et s de signes quelconques, on dira qu'on a un groupe.

Définition 0.4.2 *On dit qu'un semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in E$, l'application $t \longrightarrow G(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans E est continue c'est à dire*

$$\forall x \in E,\ \lim_{t\longrightarrow 0} \|G(t)x - x\|_E = 0,$$

on dit aussi que $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Exemple 0.4.1 *Si $A \in L(E)$ et $G(t) = e^{tA}$, $t \geqslant 0$, alors $G(t)_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.*

Proposition 0.4.1 *Si $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe, alors il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\varpi \geqslant 0$ telles que*

$$\forall t \geqslant 0,\ \ \|G(t)\|_{L(E)} \leqslant Me^{\varpi t}.$$

Le C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est dit aussi du type (M, ϖ).
Le C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est dit uniformément borné si $M \geqslant 1$ et $\varpi = 0$, en particulier il est de contractions si $M = 1$ et $\varpi = 0$.

0.4.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu

Définition 0.4.3 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$, l'opérateur linéaire non borné $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \longrightarrow E$ défini par*

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \left\{\varphi \in E : \displaystyle\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \ \textit{existe dans } E\right\} \\ \forall \varphi \in D(\Lambda),\ \Lambda\varphi = \displaystyle\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}. \end{cases}$$

Exemple 0.4.2 *Soit $E = BUC([0, +\infty[\,;\mathbb{R})$, l'espace des fonctions uniformément continues et bornées de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $(G(t))_{t\geqslant 0}$ la famille d'opérateurs définie pour tout $f \in E$, $s, t \in \mathbb{R}^+$ par*

$$[G(t)f](s) = f(t+s).$$

Alors $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe de contractions et son générateur infinitésimal Λ est donné par :

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \{f \in E : f' \ \textit{existe, } f' \in E\} \\ \forall f \in D(\Lambda),\ \Lambda f = f'. \end{cases}$$

Proposition 0.4.2 *Si Λ est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$, alors*

1. *Λ est linéaire fermé.*
2. *$D(\Lambda)$ est dense dans E.*
3. *L'ensemble résolvant $\rho(\Lambda)$ contient le demi plan $P_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$ et*

$$\forall \lambda \in P_\omega,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|(\Lambda - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n},$$

où M et ω désignent les constantes de la proposition

Le théorème de Hille-Yosida donne la réciproque de ce résultat.

Théorème 0.4.1 *(Hille-Yosida) Soit $D(\Lambda) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire tel que :*

1. *Λ est fermé et $D(\Lambda)$ est dense dans E,*
2. *il existe $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ tels que :*

$$\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(\lambda)| > \omega\},$$

et pour $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, $n = 1, 2...$

$$\left\|(\Lambda - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}.$$

Alors Λ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$.

Proposition 0.4.3 *Soit $(G(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe tel que :*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|G(t)\|_{L(E)} \leqslant Me^{\omega t} \quad (M \geqslant 1,\ \omega \geqslant 0).$$

Alors Λ, le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t\geqslant 0}$, vérifie

1. *$\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(\lambda)| > \omega\}$ et*

$$\forall \lambda \in P_\omega,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|(\Lambda - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}.$$

2. *La résolvante de Λ est donnée par la transformation de Laplace*

$$\forall \lambda \in P_\omega, \quad (\lambda I - \Lambda)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)\, x dt.$$

3. *Le semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ peut se retrouver à partir de son générateur Λ par la formule*

$$G(t)\, x = \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} e^{t\Lambda_\lambda} x,\ t \geqslant 0,\ x \in E,$$

où $\Lambda_\lambda \in L(E)$ est l'approximation de Yosida de Λ définie par :

$$\Lambda_\lambda = -\lambda\Lambda(\Lambda - \lambda I)^{-1},\ \lambda > \omega.$$

On rassemble les principales propriétés des C_0 semi-groupes dans la

Proposition 0.4.4 *Soit $(G(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe et Λ son générateur infinitésimal. Alors*

1. *pour tout $x \in E$, La fonction $t \longmapsto G(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Si $x \in D(\Lambda)$ et $t \geqslant 0$ alors $G(t)x \in D(\Lambda)$, de plus, le graphe $t \longmapsto G(t)x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie*
$$\forall t \geqslant 0,\ \frac{d}{dt}G(t)x = \Lambda G(t)x = G(t)\Lambda x.$$
3. *Pour tout $x \in E$ et $t \geqslant 0$*
$$\int_0^t G(s)xds \in D(\Lambda) \ \text{ et } \Lambda\int_0^t G(s)xds = G(t)x - x,$$
et si de plus $x \in D(\Lambda)$
$$\Lambda\int_0^t G(s)xds = \int_0^t G(s)\Lambda xds = G(t)x - x.$$
4. *Si Λ est aussi générateur infinitésimal d'un autre C_0 semi-groupe $(H(t))_{t\geqslant 0}$, alors*
$$\forall t \geqslant 0, \quad G(t) = H(t).$$

Semi-groupes différentiables

Définition 0.4.4 *On dit qu'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est différentiable si pour tout x de E, la fonction $t \longmapsto G(t)x$ est différentiable de $]0,+\infty[$ dans E.*

Proposition 0.4.5 *Soit $(G(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe différentiable de générateur infinitésimal Λ. Alors , pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, on a :*

1. *$\forall t \in]0,+\infty[\,,\ G(t)x \in D(\Lambda^n)$.*
2. *$t \longmapsto G(t)x$ est n fois différentiable sur $]0,+\infty[$ et*
$$\forall t \in]0,+\infty[\,, \quad G^n(t)x = \Lambda^n G(t)x.$$
3. *$\forall t \in]0,+\infty[\,,\ G^n(t) \in \mathcal{L}(E)$.*
4. *$t \longmapsto G^n(t)$ est différentiable (donc continue) de $]0,+\infty[$ dans $\mathcal{L}(E)$.*

0.4.3 Semi-groupe analytique

Dans toute la suite arg désigne la détermination principale de la fonction argument caractérisée par :

$$\arg(z) = \varphi \text{ si } z = re^{i\varphi},\ r > 0,\ \varphi \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

Définition 0.4.5 *Soit $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. On appelle semi-groupe analytique de type α, une application G définie sur l'ensemble*

$$\sum = \left\{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \alpha\right\},$$

à valeurs dans $L(E)$ telle que :

1. *$z \longmapsto G(z)$ est analytique sur $\sum$.*
2. *$G(0) = I_E$ et $\forall x \in E,\ \lim\limits_{z \in \sum,\ z \to 0} G(z)\, x = x$.*
3. *$\forall z_1, z_2 \in \sum,\ G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2)$.*

Semi-groupe analytique généralisé
On dira que $\left(e^{xQ}\right)_{x \geq 0}$ est un semi-groupe analytique généralisé si Q est un opérateur linéaire dans E, à domaine non dense et vérifiant :

$$\begin{cases} \rho(Q) \supset S_{\omega,\delta} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\}\ \diagup\ |\arg(\lambda - \omega)| < \dfrac{\pi}{2} + \delta\right\} \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \in S_{\omega,\delta}} \left\|(\lambda - \omega)(\lambda I - Q)^{-1}\right\|_{L(E)} < +\infty, \end{cases}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Dans ce cas $\left(e^{xQ}\right)_{x \geqslant 0}$ n'est pas supposé être un semi-groupe fortement continu (voir E. Sinestrari [30], A. Lunardi [24]).

Remarque 0.4.1 *En fixant $r > 0$, $\delta_0 \in \left]0, \pi\right[$ alors $\left(e^{xQ}\right)_{x \geqslant 0}$ est défini par :*

$$e^{xQ} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda x} (\lambda I - Q)^{-1}\, d\lambda \quad si \quad x > 0 \\ I \quad si \quad x = 0, \end{cases}$$

où γ est le bord de $S_{\omega,\delta} \setminus B(0, r)$ orienté négativement.

Générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique (ou holomorphe)

Théorème 0.4.2 *(Kato) Soit $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire tel que*

1. *Λ est fermé.*
2. *$D(\Lambda)$ est dense dans E.*

3. $\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ *et*

$$\exists K > 0, \forall \lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0, \ \left\|(\Lambda - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{K}{|\lambda|}.$$

Alors Λ est générateur d'un semi-groupe analytique G vérifiant

4. $\exists M > 0, \forall t > 0, \|G(t)\|_{L(E)} \leqslant M.$
5. $\forall t > 0, G(t) \in L(E, D(\Lambda))$ *et*

$$\|\Lambda G(t)\|_{L(E)} \leqslant \frac{M}{t}.$$

Pour plus de détails, voir A. Lunardi ([24]).

0.5 Calcul et intégrale de Dunford

0.5.1 Formule de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(U)$, l'espace des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K, la formule de Cauchy est donnée par :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z_0} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté de K.

0.5.2 Intégrale de Dunford-Riesz

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule précédente pour construire $f(A)$ où A est un opérateur linéaire fermé et f est holomorphe.
Plus précisément, si $A \in L(E)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(A)$ (le spectre de A) alors on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par :

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté d'un compact à bord K contenant $\sigma(A)$ et contenu dans U.

0.5.3 Propriété de l'intégrale de Dunford

Théorème 0.5.1 *Soit f et $g \in H(T)$ et $A \in L(E)$, alors $f \cdot g \in H(A)$ et*

$$f(A) g(A) = (f \cdot g)(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda) g(\lambda) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

0.6 Puissances fractionnaires

Théorème 0.6.1 *Si A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans E tel que*

$$\begin{cases} \exists C > 0 : \ \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \ \text{ et pour } \lambda \geqslant 0 \\ \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases}$$

alors pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $-(-A)^{\alpha}$ génère un semi-groupe $G_{\alpha}(t)$ analytique et uniformément continu pour $t > 0$.

Exemple 0.6.1 *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a :*

$$G_{\frac{1}{2}}(t) = \int_0^{+\infty} (A - \lambda I)^{-1} \sin t\sqrt{\lambda} d\lambda.$$

Puissances fractionnaires avec partie réelle positive
Soit B un opérateur sectoriel d'angle ϕ. On se donne $\alpha \in \mathbb{C}$, il s'agit alors sous certaines conditions, d'activer la formule

$$B^{\alpha} = (z^{\alpha})(B).$$

Ici z^{α} désigne la détermination principale de la fonction "puissance α" caractérisée par

$$z^{\alpha} = e^{\alpha(\ln r + i\theta)} \text{ si } z = re^{i\theta}, \ r > 0, \ \theta \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

Proposition 0.6.1 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta > 0$, on a alors*

1. *B^{α} est un opérateur fermé de E.*
2. *$B^{\alpha+\beta} = B^{\alpha}B^{\beta} = B^{\beta}B^{\alpha}$.*
3. *$\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha \Longrightarrow D\left(B^{\beta}\right) \subset D(B^{\alpha})$ et en particulier*
$$\operatorname{Re}\alpha < 1 \Longrightarrow D(B) \subset D(B^{\alpha}).$$
4. *Si B est injectif alors B^{α} l'est aussi et*
$$\left(B^{-1}\right)^{\alpha} = (B^{\alpha})^{-1}.$$
5. *Si $0 \in \rho(B)$ alors $0 \in \rho(B^{\alpha})$.*
6. *Si $\theta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{\omega}$ alors*
$$\left(B^{\theta}\right)^{\alpha} = B^{\theta\alpha}.$$
7. *$B \in L(E) \Longrightarrow B^{\alpha} \in L(E)$.*

Puissances fractionnaires avec partie réelle quelconque

Proposition 0.6.2 *On considère $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et on suppose que B est injevtif. Alors*

1. *B^{α} est un opérateur fermé de E.*
2. *B^{α} est injectif et $(B^{\alpha})^{-1} = B^{-\alpha} = (B^{-1})^{\alpha}$.*
3. *$B^{\alpha+\beta} \subset B^{\alpha}B^{\beta}$.*
4. *Si $\theta \in \mathbb{R}$ avec $|\theta| < \dfrac{\pi}{\omega}$ alors*
$$\left(B^{\theta}\right)^{\alpha} = B^{\theta\alpha}.$$

Considérons maintenant le cas particulier où B admet un inverse borné.

Définition 0.6.1 *Si $0 \in \rho(B)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\alpha > 0$, alors*

1. *$B^{-\alpha} = (B^{-1})^{\alpha} \in L(E)$.*
2. *$B^{-\alpha-\beta} = B^{-\alpha}B^{-\beta} = B^{-\beta}B^{-\alpha}$.*

Pour plus de détails sur le calcul fonctionnel et les puissances fractionnaires, voir M. Haase ([13]).

0.7 Espaces de Hölder

Définition 0.7.1 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach complexe et $C([0,1];E)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans E muni da la norme*

$$\|\varphi\|_{C([0,1];E)} = \max_{x\in[0,1]} \|\varphi(x)\|_E .$$

Pour $\theta \in]0,1[$, l'espace défini par

$$C^{\theta}([a,b];E) = \left\{ \varphi \in C([0,1];E) : \sup_{\zeta,\zeta'\in[a,b],\zeta-\zeta'\neq 0} \frac{\|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta')\|}{|\zeta-\zeta'|^{\theta}} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^{\theta}([0,1];E)} = \|\varphi\|_{C([0,1];E)} + \sup_{\zeta,\zeta'\in[a,b],\zeta-\zeta'\neq 0} \frac{\|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta')\|}{|\zeta-\zeta'|^{\theta}},$$

est un espace de Banach appelé espace de Hölder à exposant θ.

0.8 Les espaces d'interpolation

Soient X_0 et X_1 deux espaces de Banach et E un espace topologique séparé avec $X_1 \hookrightarrow E$. Considérons maintenant les espaces de Banach $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$ munis des normes

$$\begin{cases} \|x\|_{X_0\cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1} \\ \|x\|_{X_0+X_1} = \inf\limits_{\substack{x=x_0+x_1\\ x_i\in X_i}} \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}, \end{cases}$$

le couple $\{X_0, X_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 0.8.1 *Soit $\{X_0, X_1\}$ un couple, on appelle espace intermédiaire entre X_0 et X_1 tout espace de Banach X telle que*

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

Théorème 0.8.1 (Marcel-Riesz) *Soit $K\colon L^{p_0}(\Omega_0) + L^{p_1}(\Omega_0) \longrightarrow L^{q_0}(\Omega_1) + L^{q_1}(\Omega_1)$ un opérateur linéaire avec $p_i, q_i \in [1, +\infty[$ et Ω_i, $i = 1; 2$ ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que*

$$\begin{cases} K \diagup L^{p_0}(\Omega_0) \in L(L^{p_0}, L^{q_0}) \\ \\ K \diagup L^{p_1}(\Omega_0) \in L(L^{p_1}, L^{q_1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall \theta \in]0, 1[\\ \\ K \diagup L^{p_0}(\Omega_0) \in L(L^{p_\theta}, L^{q_\theta}), \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p_\theta} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1} \\ \dfrac{1}{q_\theta} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}. \end{cases}$$

On appelle espace d'interpolation entre X_0 et X_1 l'espace $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ avec $p \in [1, +\infty[$, defini par :

$$x \in (X_0, X_1)_{\theta,p} \iff \begin{cases} (i)\ \ \forall t > 0; \exists u_0(t) \in X_0;\ \exists u_1(t) \in X_1\colon x = u_0(t) + u_1(t) \\ (ii)\ \ t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X_0) \text{ et } t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X_1), \end{cases}$$

où L^p_* est l'espaces des fonctions boréliennes de puissance p intégrable pour la mesure $\dfrac{dr}{r}$.

Définition 0.8.2 *1. $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} (i)\ \ \forall y > 0; \exists u_0(y) \in X_0; \exists u_1(y) \in X_1\colon x = u_0(y) + u_1(y) \\ (ii)\ \ e^{-\theta y} u_0 \in L^p(X_0) \text{ et } e^{(1-\theta) y} u_1 \in L^p(X_1). \end{cases}$$

On pose $t = e^y$ dans la définition précédente, on obtient.

2. $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \exists u\colon \mathbb{R} \longrightarrow X_0 \cap X_1 \text{ telle que } y \mapsto u(y) \\ (i)\ \ x = \int_{\mathbb{R}} u(y)\, dy \\ (ii)\ \ e^{-\theta y} u \in L^p(X_0) \text{ et } e^{(1-\theta) y} u \in L^p(X_1). \end{cases}$$

3. $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \exists u\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow X_0 \cap X_1 \text{ telle que} \\ t \mapsto u(t) \\ (i)\ \ x = \int_0^{+\infty} u(s) \dfrac{ds}{s} \\ (ii)\ \ e^{-\theta} u \in L^p_*(X_0) \text{ et } e^{(1-\theta)} u \in L^p_*(X_1). \end{cases}$$

Définition 0.8.3 *Pour $\theta \in \left]0,1\right[$ et $p \in [1,+\infty[$ on note $D_A(\theta,p)$ le sous espace de X suivant :*

$$D_A(\theta,p) = \left\{x \in X : \left\|r^\theta A(A+rI)^{-1}x\right\|_X \in L_*^p\right\},$$

pour $p = +\infty$

$$D_A(\theta,\infty) = \left\{x \in X : \sup_{r\geqslant 0}\left\|r^\theta A(A+rI)^{-1}x\right\|_X < \infty\right\},$$

muni de la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} = \|x\|_X + \sup_{r\geqslant 0}\left\|r^\theta A(A+rI)^{-1}x\right\|_X.$$

Remarque 0.8.1 *Ces espaces vérifient*

$$D_A(\theta,p) \subset D_A(\theta,\infty),$$

pour $\theta \in \left]0,1\right[$ et $p \in [1,+\infty[$.

Voir J.L. Lions et J. Peetre [23], [25]

0.9 La théorie des sommes d'opérateurs

0.9.1 La théorie des sommes d'opérateurs de Da-Prato et Grisvard

Soient E un espace de Banach complexe, A et B deux opérateurs linéaires fermés dans E, de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$.On s'intéresse alors à l'équation

$$Au + Bu = f, \tag{0.9.1}$$

où f est un vecteur donné dans E.
L'opérateur somme $L = A + B$ est défini par

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B) \\ Lu = Au + Bu \ \text{ si } \ u \in D(L), \end{cases}$$

et (0.9.1) s'écrit encore

$$Lu = f.$$

une solution stricte de (0.9.1) est un élément $u \in D(L)$ satisfaisant (0.9.1).
L'idéal est de trouver une telle solution lorsque f est quelconque dans E, mais ce n'est pas toujours possible on introduit donc une nouvelle notion :
u est une solution forte de (0.9.1) si et seulement si, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $D(L)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Lu_n = f. \tag{0.9.2}$$

Evidemment, une solution stricte de (0.9.1) est une solution forte de (0.9.1).
La notion de solution forte est donc plus faible.

Notons que si L est fermé les deux notions de solution stricte et forte sont équivalentes, mais la somme des deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermée.
D'autre part si l'on suppose que L est fermable (i.e. L admet une extention fermée) et si on note $\overline{L}$ sa fermeture (i.e. $\overline{L}$ est la plus petite extention fermée de L) alors (0.9.2) équivaut à

$$u \in D\left(\overline{L}\right) \text{ et } \overline{L}u = f.$$

Enfin dans le cas où L est fermable, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout f dans E, il existe une solution forte de (0.9.1).
2. $0 \in \rho\left(\overline{L}\right)$.

Et si L est fermé, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout f dans E, il existe une solution stricte de (0.9.1)
2. $0 \in \rho\left(L\right)$.

Dans ce contexte, on comprend l'inportance de trouver des conditions raisonnables sur les opérateurs A et B,qui assurent que L est fermable (voire fermé) et que $0 \in \rho\left(\overline{L}\right)$.
les deux théorèmes de Daprato et Grisvard, énoncés plus loin, répondent positivement à ce problème sur les sommes d'opérateurs sous les conditions suivantes.
Les hypothèses sur A et B
Soit $R > 0$, on suppose que les opérateurs vérifient

$$(DG0)\begin{cases} \overline{D\left(A\right) + D\left(B\right)} = E \\ A \text{ ou } B \text{ inversible} \end{cases}$$

$$(DG1)\begin{cases} \rho\left(-A\right) \supset \sum_{\varepsilon_A} = \left\{z \in \mathbb{C} \colon \left|z\right| \geqslant R \text{ et } \left|\arg\left(z\right)\right| < \varepsilon_A\right\} \\ \forall z \in \sum_{\varepsilon_A} \colon \left\|\left(A + zI\right)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C_A}{\left|z\right|} \\ \rho\left(-B\right) \supset \sum_{\varepsilon_B} = \left\{z \in \mathbb{C} \colon \left|z\right| \geqslant R \text{ et } \left|\arg\left(z\right)\right| < \varepsilon_B\right\} \\ \forall z \in \sum_{\varepsilon_B} \colon \left\|\left(\left(B + zI\right)^{-1}\right)\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C_B}{\left|z\right|} \\ \varepsilon_A + \varepsilon_B > \pi \\ \sigma\left(-A\right) \cap \sigma\left(B\right) = \varnothing \end{cases}$$

$$(DG2)\begin{cases} \forall \zeta \in \rho\left(-A\right), \forall \eta \in \rho\left(-B\right) \\ \left(A + \zeta I\right)^{-1}\left(B + \eta I\right)^{-1} = \left(B + \eta I\right)^{-1}\left(A + \zeta I\right)^{-1}, \end{cases}$$

avec $\rho\left(-A\right)$ et $\rho\left(-B\right)$ domaines résolvants de $\left(-A\right)$ et $\left(-B\right)$, $\sigma\left(-A\right)$ et $\sigma\left(B\right)$ spectres de $\left(-A\right)$ et B.
Sous les hypothèses précédentes, G. Da Prato et P. Grisvard voir [9] ont construit directement l'inverse de $\overline{L}$ à l'aide d'une intégrale de Dunford pour obtenir :

Théorème 0.9.1 *Sous les hypothèses* $(DG0)$, $(DG1)$, *et* $(DG2)$ *on a*

1. *La somme* L *est fermable,*
2. $0 \in \rho\left(\overline{L}\right)$,
3. *l'inverse de* $\overline{L}$ *est donné par une intégrale de Dunford :*

$$u = \left(\overline{A+B}\right)^{-1} f = \frac{-1}{2i\pi} \int\limits_{\Gamma} (B - zI)^{-1} (A + zI)^{-1} f dz,$$

ou Γ *serait une courbe de jordan séparant le spectre de* $(-A)$ *et* B.

La fonction u est alors l'unique solution forte de (0.9.1).

Théorème 0.9.2 *Sous les hypothèses* $(DG0)$, $(DG1)$ *et* $(DG2)$ *et pour* $0 < \theta < 1$ $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, *on a*

1. *Si* $f \in D_B(\theta, q)$ *alors* $u \in D(A) \cap D(B)$ *et* $Au,\ Bu \in D_B(\theta, q)$.
2. *Si*$f \in D_A(\theta,q)$ *alors* $u \in D(A) \cap D(B)$ *et* $Au,\ Bu \in D_A(\theta, q)$.

0.9.2 La théorie des sommes d'opérateurs de Dore et Venni

Les espaces UMD

On considère un espace de Banach E de type UMD (Unconditional Martingale Differences). Nous donnons ici une définition qui utilise la transformée de Hilbert.

Définition 0.9.1 *Pour* $\epsilon \in]0,1[$ *et* $p \in]1,+\infty[$, *on définit l'opérateur*

$$H_\varepsilon \in L\left(L^p(\mathbb{R}, E)\right),$$

par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}, E), \quad (H_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon<|s|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds, \ p.\ p.\ x \in \mathbb{R}, \tag{0.9.3}$$

et si pour un élément $f \in L^p(\mathbb{R}, E)$ *donné* $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f$ *existe dans* $L^p(\mathbb{R}, E)$, *cette limite est notée* Hf *et appelée la transformée de Hilbert de* f *sur* $L^p(\mathbb{R}, E)$.

Définition 0.9.2 E *est appelé espace* UMD *s'il existe* $p \in]1,+\infty[$ *tel que*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}, E), \quad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R}, E).$$

Dans ces conditions

$$\begin{array}{rcl} H : L^p(\mathbb{R}, E) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R}, E) \\ f & \longmapsto & Hf = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f \end{array}$$

est, d'aprés le théorème de Banach Steinhaus, un élément de $L\left(L^p(\mathbb{R}, E)\right)$, *appelé la transformée de Hilbert sur* $L^p(\mathbb{R}, E)$.

Notons que si E est un espace UMD alors (0.9.3) est vraie pour tout $p \in]1, +\infty[$.
Il est bon d'avoir aussi une caractérisation géométrique des espaces UMD, à cette fin on introduit la notion de $\zeta-$convexité.

Définition 0.9.3 *E est dit $\zeta-$convexe si et seulement si il existe une fonction*

$$\zeta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

vérifiant $\zeta(0,0) > 0$ et pour tout x, y de E

1. *$\zeta(x, \cdot)$ et $\zeta(\cdot, y)$ sont convexes sur E.*
2. *$\zeta(x, y) \leqslant \|x + y\|$ si $\|x\| = \|y\| = 1$.*

Le résultat fondamental de D.L. Burkholder est le suivant :

Théorème 0.9.3 *E est un espace UMD si et seulement si E est $\zeta-$convexe.*

Exemple 0.9.1 *Il est possible de donner de nombreux exemples d'espaces de Banach classiques qui ont la propriété UMD, ainsi :*

1. *Tout espace de Hilbert est UMD.*
2. *Tout espace isomorphe à un espace UMD est UMD.*
3. *Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est UMD.*
4. *Si les espaces E_1 et E_2 sont UMD alors les espaces interpolés (cas réel $(E_1, E_2)_{\theta,p}$ ou complexe $[E_1, E_2]_{\theta,p}$) sont UMD si $1 < p < \infty$.*
5. *Tout les espaces construits sur L^p, sont UMD si $1 < p < \infty$.*

Position du problème
Il s'agit, comme dans la théorie des sommes d'opérateurs de Da-Prato-Grisvard de résoudre l'équation

$$Au + Bu = g,$$

où $g \in E$ et A, B sont deux opérateurs linéaires fermés dans E.
On suppose entre outre que E est un espace UMD. Le théorème de Dore-Venni montre que, sous de bonnes hypothèses sur les opérateurs, $A + B$ est fermé, à inverse borné.
Les hypothèses sur A et B
On suppose cette fois-ci que les opérateurs A et B vérifient

$$(DV.1) \begin{cases} i)\ \rho(A) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_A > 0 : \\ \forall \lambda \geqslant 0,\ \left\| (A + \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{M_A}{1 + \lambda}, \\ ii)\ \rho(B) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_B > 0 : \\ \forall \lambda \geqslant 0,\ \left\| (B + \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{M_B}{1 + \lambda}, \\ \overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E. \end{cases}$$

$$(DV.2)\begin{cases} \forall\lambda\in\rho\left(-A\right),\forall\mu\in\rho\left(-B\right) \\ \left(A+\lambda I\right)^{-1}\left(B+\mu I\right)^{-1}-\left(B+\mu I\right)^{-1}\left(A+\lambda I\right)^{-1}=0. \end{cases}$$

$$(DV.3)\begin{cases} i)\ \forall s\in\mathbb{R},\ A^{is}\in L\left(E\right)\ \text{ et } \exists K>0,\ \theta_A>0: \\ \forall s\in\mathbb{R},\ \left\|A^{is}\right\|_{L(E)}\leqslant Ke^{|s|\theta_A}, \\ ii)\ \forall s\in\mathbb{R},\ B^{is}\in L\left(E\right)\ \text{ et } \exists K>0,\ \theta_B>0: \\ \forall s\in\mathbb{R},\ \left\|B^{is}\right\|_{L(E)}\leqslant Ke^{|s|\theta_B}, \\ \theta_A+\theta_B<\pi. \end{cases}$$

On note par $Bip\left(E,\theta\right)$ (Bounded imaginary power), l'ensemble des opérateurs sectoriels sur E, vérifiant $(DV.1)$ $(DV.3)$. On a alors le théorème remarquable suivant dû à Dore et Venni voir [10].

Théorème 0.9.4 *Si E est un espace UMD et sous les hypothèses $(DV.1)$, $(DV.2)$ et $(DV.3)$ l'opérateur*

$$L=A+B,$$

est fermé et

$$L^{-1}\in L\left(E\right).$$

L'opérateur inverse de L est défini explicitement par l'intégrale :

$$L^{-1}=\int_{\gamma}\frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin\pi z}dz,$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\left\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re}z<1\right\},$$

et orientée de $\infty e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vers $\infty e^{i\frac{\pi}{2}}$.

0.10 Lemmes utiles

On donne quelques lemmes utiles pour la suite du travail.

Lemme 0.10.1 *(Lemme de Schur) Soit $K:\Omega_1\times\Omega_2\longrightarrow\mathbb{R}$ mesurable et telle que*

$$\exists a>0:\forall x_2\in\Omega_2,\quad\int_{\Omega_1}\left|K\left(x_1,x_2\right)\right|dx_1\leqslant a,$$

$$\exists b>0:\forall x_1\in\Omega_1,\quad\int_{\Omega 2}\left|K\left(x_1,x_2\right)\right|dx_2\leqslant b,$$

alors l'opérateur

$$F\left(f\right)\left(x_2\right)=\int_{\Omega_1}K\left(x_1,x_2\right)f\left(x_1\right)dx_1,$$

vérifie

$$F\in\mathcal{L}\left(L^p\left(\Omega_1\right),L^p\left(\Omega_2\right)\right).$$

Lemme 0.10.2 *1. Il existe* $C>0$ *telle que pour* $z\in\gamma$ *et* $r>0$ *on a*

$$|z\pm r|\geqslant Cr,$$

et

$$|z\pm r|\geqslant C\,|z|\,,$$

2. Soit $\nu\in\,]0,1[$ *alors il existe* $C>0$ *telle que pour* $r>0$

$$\int_\Gamma \frac{1}{|r\pm z|\cdot|z|^\nu}\,|dz|\leqslant\frac{C}{r^\nu}.$$

Voir [20], [21] et [22]

Preuve. **(1)** pour $z\in\Gamma$ et $r>0$, on a

$$\begin{aligned} |z\pm r| &\geqslant AB=r\sin\theta_0\geqslant Kr\\ &\geqslant CD=|z|\sin\theta_0\geqslant K\,|z|\,. \end{aligned}$$

(2) Pour $\nu\in\,]0,1[$ et $r>0$, on a

$$\int_\Gamma\frac{|dz|}{|r\pm z|\cdot|z|^\nu}=\int_{\Gamma_r}\frac{|dz|}{|r\pm z|\cdot|z|^\nu}+\int_{\Gamma\diagdown\gamma_r}\frac{|dz|}{|r\pm z|\cdot|z|^\nu},$$

avec

$$\begin{cases}\Gamma=\Gamma_r\cup(\Gamma\diagdown\Gamma_r)\\ \Gamma_r=\{z\in\Gamma:|z|\leqslant r\}\\ \Gamma\diagdown\Gamma_r=\{z\in\Gamma:|z|\geqslant r\}\,,\end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r}\frac{|dz|}{|r\pm z|\,|z|^\nu} &= \int_{\substack{z\in\Gamma\\|z|\leqslant r}}\frac{|dz|}{|r\pm z|\,|z|^\nu}\\ &\leqslant \frac{1}{Kr}\int_0^r\frac{|dz|}{|z|^\nu}\leq\frac{1}{Kr}\left[|z|^{1-\nu}\right]_0^r\\ &\leqslant \frac{1}{Kr}r^{1-\nu}=\frac{K}{r^\nu}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma\diagdown\Gamma_r}\frac{|dz|}{|r\pm z|\cdot|z|^\nu} &= \int_r^{+\infty}\frac{|dz|}{|r\pm z|\cdot|z|^\nu}\\ &\leqslant \frac{1}{K}\int_r^{+\infty}\frac{|dz|}{|z|^{1+\nu}}\\ &\leqslant \frac{1}{K}\left[\frac{|z|^{-\nu}}{-\nu}\right]_r^{+\infty}\\ &\leqslant \frac{K}{r^\nu}. \end{aligned}$$

Ici K représente des valeurs constantes. □

Deuxième partie

Le problème de Robin à coefficients opérateurs(cadre espace de Hölder)

0.11 Solutions strictes

0.11.1 Position du problème

On considère le problème

$$\begin{cases} u''(x) + A(x)u(x) - \omega u(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{0.11.1}$$

où $(A(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A(x))$ non nécessairement denses dans un espace de Banach complexe E. H est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(H)$, d_0, u_1 sont des éléments donnés dans l'espace E et $f \in C([0,1];E)$.
Ici ω est un paramètre spectral strictement positif.

0.11.2 Les hypothèses

Remarque 0.11.1 *Pour ne pas alourdir les notations, on écrira pour chaque $x \in [0,1]$*

$$[Q_\omega(x)]^m = Q_\omega(x)^m.$$

Posons pour chaque $x \in [0,1]$

$$A_\omega(x) = A(x) - \omega I.$$

1. $\exists \omega_0 > 0$, $\exists C > 0 : \forall x \in [0,1], \forall z \geqslant 0$, $(A_{\omega_0}(x) - zI)^{-1} \in L(E)$ et

$$\left\|(A_{\omega_0}(x) - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C}{1+z}, \tag{0.11.2}$$

qui reste vraie dans le secteur (où θ_0 et r_0 sont des petits nombres réels positifs)

$$\Pi_{\theta_0,r_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leqslant \theta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_0\}.$$

Remarque 0.11.2 *L'hypothèse (0.11.2) implique que pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, les racines carrées :*

$$Q_\omega(x) = -(-A_\omega(x))^{1/2}, \quad x \in [0,1],$$

sont bien définies et elles génèrent des semi-groupes analytiques non fortement continus en zéro. (Voir A. V. Balakrishnan [3] dans le cas des domaines denses et Martinez-Sanz [26] dans le cas des domaines non denses).

De plus, il existe un autre secteur

$$\Pi_{\theta_1+\frac{\pi}{2},r_1} = \left\{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leqslant \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_1\},$$

où $\theta_1 > 0$ petit et $r_1 > 0$ tels que pour tout $x \in [0,1]$

$$\rho(Q_\omega(x)) \supset \Pi_{\theta_1+\frac{\pi}{2},r_1}.$$

Posons

$$\Gamma = \left\{ z = \rho e^{\pm i\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)} : \rho \geqslant r_1 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = r_1, \quad |\arg(z)| \geqslant \theta_1 + \frac{\pi}{2} \right\},$$

la courbe orientée de $\infty e^{-i\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$ à $\infty e^{i\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$.

2. On suppose aussi que la famille $(Q_\omega(x))_{x\in[0,1]}$ vérifie l'hypothèse de Labbas-Terreni

$$\begin{cases} \exists C, \alpha, \mu > 0, \forall x, \tau \in [0,1], \forall \omega \geqslant \omega_0 \\ \left\| Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1} \right) \right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C|x-\tau|^\alpha}{|z+\omega|^\mu} \\ \alpha + \mu - 2 > 0. \end{cases} \tag{0.11.3}$$

3. $\exists C > 0 : \forall x \in [0,1], \forall \omega \geqslant \omega_0$

$$\begin{cases} Q_\omega(x) - H \text{ est fermable et } 0 \in \rho\left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right) \\ \left\| \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant C(1 + \sqrt{\omega}). \end{cases} \tag{0.11.4}$$

4. $\forall x \in [0,1], \forall \omega \geqslant \omega_0$

$$\begin{cases} \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} \left((D(Q_\omega(x)), E)_{1-\theta,\infty} \right) \subset D(Q_\omega(x)) \cap D(H) \\ Q_\omega(x) \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} \left((D(Q_\omega(x)), E)_{1-\theta,\infty} \right) \subset \left((D(Q_\omega(x)), E)_{1-\theta,\infty} \right). \end{cases} \tag{0.11.5}$$

5. $\forall x \in [0,1], \forall \omega \geqslant \omega_0$

$$Q_\omega(x)^{-1} \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} = \left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} Q_\omega(x)^{-1}, \quad x \in [0,1] \tag{0.11.6}$$

6. $\exists C > 0 : \forall x, \tau \in [0,1], \forall \omega \geqslant \omega_0$

$$\left\| \left[\left(\overline{Q_\omega(x) - H} \right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(\tau) - H} \right)^{-1} \right] \zeta \right\|_E \leqslant k|x-\tau|^{\alpha+\mu} \|\zeta\|_E. \tag{0.11.7}$$

Remarque 0.11.3 *L'hypothèse (0.11.3) implique que :* $\exists C > 0, \forall x, \tau \in [0,1]$

$$\left\| Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left(Q_\omega(x)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2} \right) \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C|x-\tau|^\alpha}{|z+\omega|^\mu}.$$

Car :

$$\begin{aligned} Q_\omega(x)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2} &= \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1} \right) \left(Q_\omega(x)^{-1} + Q_\omega(\tau)^{-1} \right) \\ &\quad - Q_\omega(x)^{-1} Q_\omega(\tau)^{-1} + Q_\omega(\tau)^{-1} Q_\omega(x)^{-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1}\right)\left(Q_\omega(x)^{-1} + Q_\omega(\tau)^{-1}\right) \\
&\quad + Q_\omega(\tau)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1}\right) + Q_\omega(\tau)^{-2} \\
&\quad - \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1}\right) Q_\omega(\tau)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-2} \\
&= \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1}\right)\left(Q_\omega(x)^{-1} + Q_\omega(\tau)^{-1}\right) \\
&\quad + Q_\omega(\tau)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1}\right) \\
&\quad - \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1}\right) Q_\omega(\tau)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Remarque 0.11.4 *La représentation usuelle du semi-groupe est donnée par*

$$
e^{sQ_\omega(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{sz}\left(z - Q_\omega(x)\right)^{-1} dz, \qquad s > 0.
$$

0.11.3 Lemmes techniques

Lemme 0.11.1 *Supposons l'hypothèse (0.11.2). Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, $z \in \Gamma$ et $x \in [0,1]$, l'opérateur $Q_\omega(x)$ vérifie*

$$
\left\|\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{1+\omega} + |z|}.
$$

Preuve. Soit C' une courbe sectorielle entourant le spectre de $-A_\omega(x)$. En utilisant S. G. Krein [16], p. 116-117 et pour $z \geqslant 0$ on a

$$
\begin{aligned}
\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} &= -\left(\sqrt{-A_\omega(x)} + zI\right)^{-1} \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{\left(-A_\omega(x) - \lambda I\right)^{-1}}{z + \sqrt{\lambda}} d\lambda \\
&= \frac{-1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}\left(-A(x) + \omega I + sI\right)^{-1}}{s + z^2} ds,
\end{aligned}
$$

de l'hypothèse (0.11.4) et (0.11.5), pour $\omega \geqslant \omega_0$ et $x \in [0,1]$ on obtient

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1}\right\|_{L(E)} &\leqslant C\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{(1+\omega+s)(s+z^2)} ds \\
&\leqslant C\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+\omega+t^2)(t^2+z^2)} dt \\
&\leqslant \frac{C}{1+\omega-z^2}\left[\int_0^\infty \frac{1+\omega}{(1+\omega+t^2)} dt - \int_0^\infty \frac{z^2}{(t^2+z^2)} dt\right] \\
&\leqslant \frac{C}{\sqrt{1+\omega} + z}.
\end{aligned}
$$

□

Lemme 0.11.2 *Il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ et $\omega \geqslant \omega^*$, l'opérateur $I - e^{2Q_\omega(x)}$ est inversible et son inverse $\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}$ est borné.*

Preuve. Voir A. Lunardi [24], p. 59. On peut aussi le montrer autrement en vérifiant que

$$\left\| e^{2Q_\omega(x)} \right\|_{L(E)} < 1.$$

D'après le calcul fonctionnel de Dunford, et en utilisant les popriétés suivantes (voir Labbas-Terreni [20] et [21]).

$$\begin{cases} \exists C > 0 : \forall \omega > 0, \quad \forall z \in \Gamma \\ \left| z + \sqrt{\omega} \right| \geqslant C \left| z \right|; \;\; \left| z + \sqrt{\omega} \right| \geqslant C\sqrt{\omega}, \end{cases}$$

on peut écrire, pour $\phi \in E$

$$\begin{aligned} \left\| e^{2Q_\omega(x)} \phi \right\|_E &\leqslant C \int_\Gamma \frac{e^{2z}}{\left| z + \sqrt{\omega} \right|} \left| dz \right| \left\| \phi \right\|_E \\ &\leqslant C \int_\Gamma \frac{e^{\operatorname{Re}(2z)}}{\left| z + \sqrt{\omega} \right|^{1/2} \left| z \right|^{1/2}} \left| dz \right| \left\| \phi \right\|_E \\ &\leqslant C \int_\Gamma \frac{1}{\omega^{1/4}} \frac{e^{\operatorname{Re}(2z)}}{\left| z \right|^{1/2}} \left| dz \right| \left\| \phi \right\|_E \\ &\leqslant \frac{C}{\omega^{1/4}} \left\| \phi \right\|_E, \end{aligned}$$

d'où il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, $\left\| e^{2Q_\omega(x)} \right\|_{L(E)} < 1$. Ainsi l'opérateur $\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}$ existe et il est borné. □

Lemme 0.11.3 *Soit $x \in [0,1]$, les opérateurs $\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}$ et $\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}$ commutent.*

Preuve. On suppose

$$-\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} e^{2Q_\omega(x)} = -e^{2Q_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}. \tag{0.11.8}$$

Alors

$$\begin{aligned} & -\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} e^{2Q_\omega(x)} + \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \\ = \;\; & -e^{2Q_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} + \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \\ \Longrightarrow \;\; & \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right) = \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right) \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

alors $\forall \eta \in E$. On a

$$\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right) \eta = \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right) \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \eta,$$

$\forall \eta \in E$, on pose
$$\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)\eta = \xi,$$
donc
$$\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\xi = \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}\xi,$$
alors
$$\begin{aligned}\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} &= \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} \\ &\Longrightarrow \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} = \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}.\end{aligned}$$
Alors il suffit de montrer (0.11.8). On a
$$\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} e^{2Q_\omega(x)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} e^{2z}\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} dz,$$
montrons que
$$\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} = \left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1}\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}.$$
On a
$$Q_\omega(x)^{-1}\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} = \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} Q_\omega(x)^{-1},$$
alors pour $\varphi \in E$
$$\begin{aligned}&Q_\omega(x)^{-1}\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\varphi \\ =\; &\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} Q_\omega(x)^{-1}\varphi \\ \Longrightarrow\; &\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)\varphi = Q_\omega(x)\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} Q_\omega(x)^{-1}\varphi,\end{aligned}$$
on pose
$$Q_\omega(x)^{-1}\varphi = \psi,$$
alors
$$\begin{aligned}&\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right) Q_\omega(x)\psi \\ =\; &Q_\omega(x)\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\psi \\ \Longrightarrow\; &\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} Q_\omega(x) - z\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\psi \\ =\; &Q_\omega(x)\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\psi - z\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\psi \\ \Longrightarrow\; &\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\left(Q_\omega(x) - zI\right)\psi = \left(Q_\omega(x) - zI\right)\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1}\psi,\end{aligned}$$
on pose
$$\left(Q_\omega(x) - zI\right)\psi = \phi,$$

alors
$$\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}\phi=(Q_\omega(x)-zI)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\phi.$$
Donc
$$\begin{aligned}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} &= (Q_\omega(x)-zI)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\\ &\Longrightarrow (Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}=\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}(Q_\omega(x)-zI)^{-1}.\end{aligned}$$
□

Lemme 0.11.4 *Sous les hypothèses (0.11.2), (0.11.4)∼(0.11.7), il existe $\omega^*>0$ tel que pour tout $\omega\geqslant\omega^*$, l'opérateur*
$$\Lambda_\omega(x)=(Q_\omega(x)-H)+e^{2Q_\omega(x)}(Q_\omega(x)+H),\quad x\in[0,1],$$
de domaine
$$D(\Lambda_\omega(x))=D(Q_\omega(x))\cap D(H),\quad x\in[0,1],$$
est fermable et sa fermeture est inversible avec
$$\begin{aligned}&\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}\\ =\;&\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}\left[I+2\left(I-e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}Q_\omega(x)e^{2Q_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}\right]^{-1}\left(I-e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1},\end{aligned}$$
et
$$\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}=(Q_\omega(x)-H)^{-1}+(Q_\omega(x)-H)^{-1}W(x),$$
avec
$$\begin{cases}W(x)\in L(E),\ \ (Q_\omega(x)-H)^{-1}W(x)=W(x)(Q_\omega(x)-H)^{-1}\\ [W(x)](E)\subset\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}D\left(Q_\omega(x)^k\right).\end{cases}$$

Preuve. On suppose (0.11.2), (0.11.4)∼(0.11.7) et $\omega\geqslant\omega_0$, $x\in[0,1]$. On a
$$\begin{aligned}\Lambda_\omega(x) &= (Q_\omega(x)-H)+e^{2Q_\omega(x)}(Q_\omega(x)+H)\\ &= (Q_\omega(x)-H)-e^{2Q_\omega(x)}(Q_\omega(x)-H-2Q_\omega(x))\\ &= \left(I-e^{2Q_\omega(x)}\right)(Q_\omega(x)-H)+2e^{2Q_\omega(x)}Q_\omega(x),\end{aligned}$$
et puisque les opérateurs $\left(I-e^{2Q_\omega(x)}\right)$ et $e^{2Q_\omega(x)}Q_\omega(x)$ sont bornés alors
$$\begin{aligned}\overline{\Lambda_\omega(x)} &= \left(I-e^{2Q_\omega(x)}\right)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)+2e^{2Q_\omega(x)}Q_\omega(x)\\ &= \left[\left(I-e^{2Q_\omega(x)}\right)+2e^{2Q_\omega(x)}Q_\omega(x)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}\right]\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)\\ &= \left(I-e^{2Q_\omega(x)}\right)\left[I+2\left(I-e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}Q_\omega(x)e^{2Q_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}\right]\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right).\end{aligned}$$

Pour inverser l'opérateur $\overline{\Lambda_\omega(x)}$ il suffit de montrer que

$$\left\| 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \right\|_{L(E)} < 1.$$

Suite au lemme de Dore et Yakubov [11] p. 103, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, il existent des constantes C, $k > 0$ (qui ne dépendent pas de ω) telles que pour tout $y \geqslant 1$

$$\left\| (-A(x) + \omega I)^\alpha\, e^{-y(-A(x)+\omega I)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L(E)} \leqslant C e^{-ky\sqrt{\omega}},$$

en particulier

$$\left\| Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)} \right\|_{L(E)} \leqslant C e^{-2k\sqrt{\omega}},$$

et $\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)$ est inversible, d'où pour ω assez grand

$$\left\| 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C\left(1+\sqrt{\omega}\right) e^{-2k\sqrt{\omega}}}{1 - e^{-2k\sqrt{\omega}}},$$

on prendra alors $\omega^* \geqslant 0$ tel que

$$\left\| 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \right\|_{L(E)} < 1.$$

Alors, pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, $x \in [0,1]$, l'opérateur $\overline{\Lambda_\omega(x)}$ est inversible et son inverse est donné par

$$\begin{aligned} &\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} \\ = \; &\left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \left[I + 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \right]^{-1} \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Et de plus, on a

$$\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} = \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} (I + M(x))^{-1} (I + N(x))^{-1},$$

avec

$$\begin{cases} M(x) = 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} \in L(E) \\ N(x) = -e^{2Q_\omega(x)} \in L(E) \\ [M(x)](E) \subset \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q_\omega(x)^k\right), \qquad [N(x)](E) \subset \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q_\omega(x)^k\right). \end{cases}$$

Posons $U(x) = -M(x)(I + M(x))^{-1} \in L(E)$ et $V(x) = -N(x)(I + N(x))^{-1} \in L(E)$. Alors

$$\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} = \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} (I + U(x))(I + V(x)),$$

en effet

$(I+M(x))(I+M(x))^{-1}=I \Longleftrightarrow (I+M(x))^{-1}+M(x)(I+M(x))^{-1}=I$
$\Longleftrightarrow (I+M(x))^{-1}-U(x)=I$
$\Longleftrightarrow (I+M(x))^{-1}=U(x)+I$,et

$$\begin{aligned}(I+N(x))(I+N(x))^{-1} &= I \Longleftrightarrow (I+N(x))^{-1}+N(x)(I+N(x))^{-1}=I\\ &\Longleftrightarrow (I+N(x))^{-1}-V(x)=I\\ &\Longleftrightarrow (I+N(x))^{-1}=V(x)+I.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} &= \left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}(I+U(x))(I+V(x))\\ &= \left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}[\end{aligned}$$

I+U$(x)+V(x)+U(x)V(x)$
$=\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}(I+W(x))$,avec

$$\begin{cases}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}U(x)=U(x)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}\\ \left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}V(x)=V(x)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}\\ [U(x)](E)\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}D\left(Q_\omega(x)^k\right),\qquad [V(x)](E)\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}D\left(Q_\omega(x)^k\right).\end{cases}$$

□

0.11.4 Construction de la solution stricte

Cas constant et passage au cas abstrait

Dans le cas A_ω où l'opérateur $A_\omega(x)=A_\omega$ est constant avec l'hypothèse d'ellipticité (0.11.2), on pose $Q_\omega=-(-A_\omega)^{\frac{1}{2}}$ et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases}v''(x)+A_\omega v(x)=f(x), \quad x\in\,]0,1[\\ v'(0)-Hv(0)=d_0\\ v(1)=u_1,\end{cases}$$

la représentation de la solution v est donnée par la formule

$$v(x)=e^{xQ_\omega}\left[\left(\overline{\Lambda_\omega}\right)^{-1}d_0+(Q_\omega+H)\left(\overline{\Lambda_\omega}\right)^{-1}e^{Q_\omega}u_1\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}e^{xQ_\omega}\left(Q_\omega+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega}\right)^{-1}Q_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega}f\left(s\right)ds\\
&-\frac{1}{2}e^{xQ_\omega}\left(Q_\omega+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega}\right)^{-1}e^{Q_\omega}Q_\omega^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega}f\left(s\right)ds\\
&+e^{(1-x)Q_\omega}\left[\left(I-\left(Q_\omega+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega}\right)^{-1}e^{2Q_\omega}\right)u_1-\left(\overline{\Lambda_\omega}\right)^{-1}e^{Q_\omega}d_0\right]\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega}\left(Q_\omega+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega}\right)^{-1}e^{Q_\omega}Q_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega}f\left(s\right)ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega}\left[I-\left(Q_\omega+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega}\right)^{-1}e^{2Q_\omega}\right]Q_\omega^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega}f\left(s\right)ds\\
&+\frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega}f\left(s\right)ds\\
&+\frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega}f\left(s\right)ds,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Lambda_\omega=\left(Q_\omega-H\right)+e^{2Q_\omega}\left(Q_\omega+H\right)\text{ et}\\
&\left(\overline{\Lambda_\omega}\right)^{-1}=\left(\overline{Q_\omega-H}\right)^{-1}\left(I+2\left(I-e^{2Q_\omega}\right)^{-1}Q_\omega e^{2Q_\omega}\left(\overline{Q_\omega-H}\right)^{-1}\right)^{-1}\left(I-e^{2Q_\omega}\right)^{-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

(Voir le travail de M. Cheggag [7], p. 1460 et [6], p. 75).
Posons pour chaque $x\in[0,1]$

$$
\begin{aligned}
&L_{Q_\omega(x)}\left(x,f\right)\\
=\;&\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega\left(x\right)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega\left(x\right)}\right)^{-1}Q_\omega\left(x\right)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f\left(s\right)ds\\
&-\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega\left(x\right)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega\left(x\right)}\right)^{-1}e^{Q_\omega(x)}Q_\omega\left(x\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}f\left(s\right)ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega\left(x\right)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega\left(x\right)}\right)^{-1}e^{Q_\omega(x)}Q_\omega\left(x\right)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f\left(s\right)ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(I-\left(Q_\omega\left(x\right)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega\left(x\right)}\right)^{-1}e^{2Q_\omega(x)}\right)Q_\omega\left(x\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}f\left(s\right)ds\\
&+\frac{1}{2}Q_\omega\left(x\right)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}f\left(s\right)ds\\
&+\frac{1}{2}Q_\omega\left(x\right)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega(x)}f\left(s\right)ds.
\end{aligned}
$$

On écrit alors que

$$
L_{Q_\omega(x)}\left(x,f\right)=L_{Q_\omega(x)}\left(x,u''\left(x\right)-Q_\omega\left(x\right)^2u\left(x\right)\right),
$$

afin de trouver une équation intégrale vérifiée par u. On fera un calcul formel qu'on justifie plus loin.

On va faire un raisonnement heuristique : supposons qu'il existe une solution stricte u du problème (0.11.1), alors

$$\begin{aligned}
& L_{Q_\omega(x)}(x,f) \qquad (0.11.9)\\
= & \frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}\left(u''(s)-Q_\omega(s)^2u(s)\right)ds\\
& -\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}e^{Q_\omega(x)}Q_\omega(x)^{-1}\cdot\\
& \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(u''(s)-Q_\omega(s)^2u(s)\right)ds\\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}e^{Q_\omega(x)}Q_\omega(x)^{-1}\cdot\\
& \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}\left(u''(s)-Q_\omega(s)^2u(s)\right)ds\\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(I-\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}e^{2Q_\omega(x)}\right)Q_\omega(x)^{-1}\cdot\\
& \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(u''(s)-Q_\omega(s)^2u(s)\right)ds\\
& +\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left(u''(s)-Q_\omega(s)^2u(s)\right)ds\\
& +\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega(x)}\left(u''(s)-Q_\omega(s)^2u(s)\right)ds\\
= & \frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
& -\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}Q_\omega(s)^2u(s)\,ds\\
& -\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}e^{Q_\omega(x)}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}e^{Q_\omega(x)}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}Q_\omega(s)^2u(s)\,ds\\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}e^{Q_\omega(x)}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}e^{Q_\omega(x)}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}Q_\omega(s)^2u(s)\,ds\\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(I-\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}e^{2Q_\omega(x)}\right)Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(I-\left(Q_\omega(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}e^{2Q_\omega(x)}\right)Q_\omega(x)^{-1}\cdot\\
& \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}Q_\omega(s)^2u(s)\,ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}Q_\omega(s)^2\,u(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega(x)}Q_\omega(s)^2\,u(s)\,ds.
\end{aligned}$$

En faisant une double intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 Q_\omega(x)^{-1}\,e^{sQ_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
=\;& Q_\omega(x)^{-1}\,e^{Q_\omega(x)}u'(1)-Q_\omega(x)^{-1}\,u'(0)-e^{Q_\omega(x)}u(1)+u(0)+\int_0^1 Q_\omega(x)\,e^{sQ_\omega(x)}u(s)\,ds,
\end{aligned}$$

de même on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 Q_\omega(x)^{-1}\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
=\;& Q_\omega(x)^{-1}\,u'(1)-Q_\omega(x)^{-1}\,e^{Q_\omega(x)}u'(0)+u(1)-e^{Q_\omega(x)}u(0)\\
&+\int_0^1 Q_\omega(x)\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}u(s)\,ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
=\;& u'(x)-e^{xQ_\omega(x)}u'(0)+Q_\omega(x)\,u(x)-Q_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}u(0)\\
&+\int_0^x Q_\omega(x)^2\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}u(s)\,ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega(x)}u''(s)\,ds\\
=\;& e^{(1-x)Q_\omega(x)}u'(1)-u'(x)-Q_\omega(x)\,e^{(1-x)Q_\omega(x)}u(1)+Q_\omega(x)\,u(x)\\
&+\int_x^1 Q_\omega(x)^2\,e^{(s-x)Q_\omega(x)}u(s)\,ds\cdot
\end{aligned}$$

Donc en remplaçant dans l'expression (0.11.9), on obtient une expression simplifiée de $L_{Q_\omega(x)}(x,f)$, en posant

$$\forall x\in[0,1],\quad (Q_\omega(x)+H)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}=T_\omega(x).$$

$$\begin{aligned}
& L_{Q_\omega(x)}(x,f) \\
= \;& u(x) - e^{xQ_\omega(x)}\left(\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 + T_\omega(x)\, e^{Q_\omega(x)} u_1\right) \\
& - e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(\left[I - T_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)}\right] u_1 - \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} e^{Q_\omega(x)} d_0\right) \\
& + \frac{1}{2} T_\omega(x)\, e^{xQ_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)\, e^{sQ_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& - \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x)\, e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)\, e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x)\, e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)\, e^{sQ_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left(I - T_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)}\right) \cdot \\
& \int_0^1 Q_\omega(x)\, e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega(x)\, e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& + \frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega(x)\, e^{(s-x)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds.
\end{aligned}$$

En applicant formellement $Q_\omega(x)^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
& Q_\omega(x)^2 u(x) \\
& + \frac{1}{2} T_\omega(x)\, e^{xQ_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{sQ_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& - \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x)\, e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x)\, e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{sQ_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& - \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left(I - T_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)}\right) \cdot \\
& \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega(x)^3 e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
& + \frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega(x)^3 e^{(s-x)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) Q_\omega(s)^2 u(s)\, ds \\
= \;& Q_\omega(x)^2 L_{Q_\omega(x)}(x,f) \\
& + Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\left(\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 + T_\omega(x)\, e^{Q_\omega(x)} u_1\right) \\
& + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(\left[I - T_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)}\right] u_1 - \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} e^{Q_\omega(x)} d_0\right).
\end{aligned}$$

On pose

$$w = Q_\omega (\cdot)^2 u(\cdot),$$

alors on obtient l'équation

$$w + P_\omega w = G(d_0, u_1, f), \tag{0.11.10}$$

avec

$$\begin{aligned}
(P_\omega w)(x) &= \frac{1}{2} T_\omega(x) e^{xQ_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{sQ_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&- \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&- \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{sQ_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&+ \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&- \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega(x)^3 e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega(x)^3 e^{(s-x)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&= \sum_{i=1}^{7} I_i(x),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G(d_0, u_1, f)(x) &= Q_\omega(x)^2 L_{Q_\omega(x)}(x, f) \\
&\quad + Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 + T_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} u_1 \right) \\
&\quad + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left(\left[I - T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)}\right] u_1 - \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} e^{Q_\omega(x)} d_0 \right).
\end{aligned}$$

Proposition 0.11.1 *Sous les hypothèses (0.11.2)$\sim$(0.11.7) alors il existe $\omega^* > 0$ tel que*

$$\forall \omega \geqslant \omega^* : \quad \|P_\omega\|_{L(C([0,1];E))} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Preuve. Soit $x \in [0,1]$ et $\omega \geqslant \omega^*$, on a

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \frac{-1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_\Gamma \int_0^x z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds dz \\
&\quad - \frac{1}{4\pi i} T_\omega(x) \int_\Gamma \int_x^1 z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds dz \\
&= a_1(x) + b_1(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\|a_1(x)\|_E \leqslant K \int_\Gamma |z|^2 \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x e^{-(x+s)|z|} (x-s)^\alpha \, ds \right) \frac{d|z|}{|z+\omega|^\mu} \|w\|_{C([0,1];E)}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^x e^{-(x+s)|z|} (x-s)^\alpha \, ds \\
\leqslant \; & \left(\int_0^x e^{-(x+s)|z|} ds \right)^{1-\alpha} \left(\int_0^x e^{-(x+s)|z|} (x-s) \, ds \right)^\alpha \\
\leqslant \; & \left(\frac{e^{-x|z|} - e^{-2x|z|}}{|z|} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{|z|^2} e^{-2x|z|} + \frac{x}{|z|} e^{-x|z|} - \frac{1}{|z|^2} e^{-x|z|} \right)^\alpha \\
\leqslant \; & \left(\frac{1 - e^{-2|z|}}{|z|} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{|z|^2} e^{-2x|z|} + \frac{x}{|z|} e^{-x|z|} - \frac{1}{|z|^2} e^{-x|z|} \right)^\alpha \\
\leqslant \; & \frac{\left(1 - e^{-2|z|}\right)}{|z|^{1+\alpha}} \left(\frac{e^{-2x|z|} - e^{-x|z|} + |z| x e^{-x|z|}}{1 - e^{-2|z|}} \right)^\alpha \\
\leqslant \; & \frac{\left(1 - e^{-2|z|}\right)}{|z|^{1+\alpha}} \left(\frac{e^{-2|z|} - e^{-|z|} + |z| e^{-|z|}}{1 - e^{-2|z|}} \right)^\alpha \\
\leqslant \; & K \frac{1}{|z|^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|a_1(x)\|_E & \leqslant K \int_\Gamma \frac{|z|^2}{|z+\omega|^\mu |z|^{\alpha+1}} d|z| \, \|w\|_{C([0,1];E)} \\
& \leqslant K \int_\Gamma \frac{1}{|z+\omega|^\mu |z|^{\alpha-1}} d|z| \, \|w\|_{C([0,1];E)} \\
& \leqslant \frac{K}{\omega^{\alpha+\mu-2}} \|w\|_{C([0,1];E)},
\end{aligned}$$

et

$$\|b_1(x)\|_E \leqslant K \int_\Gamma |z|^2 \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_x^1 e^{-(x+s)|z|} (s-x)^\alpha \, ds \right) \frac{d|z|}{|z+\omega|^\mu} \|w\|_{C([0,1];E)}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
& \int_x^1 e^{-(x+s)|z|} (s-x)^\alpha \, ds \\
\leqslant \; & \left(\int_x^1 e^{-(x+s)|z|} ds \right)^{1-\alpha} \left(\int_x^1 e^{-(x+s)|z|} (s-x) \, ds \right)^\alpha \\
\leqslant \; & \left(\frac{e^{-2x|z|} - e^{-(1+x)|z|}}{|z|} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{-(1-x)}{|z|} e^{-(1+x)|z|} - \frac{1}{|z|^2} e^{-(1+x)|z|} + \frac{1}{|z|^2} e^{-2x|z|} \right)^\alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left(\frac{1-e^{-(1+x)|z|}}{|z|}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{-(1-x)}{|z|}e^{-(1+x)|z|}-\frac{1}{|z|^2}e^{-(1+x)|z|}+\frac{1}{|z|^2}e^{-2x|z|}\right)^{\alpha}\\
&\leqslant \left(\frac{1-e^{-2|z|}}{|z|}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{-(1-x)}{|z|}e^{-(1+x)|z|}-\frac{1}{|z|^2}e^{-(1+x)|z|}+\frac{1}{|z|^2}e^{-2x|z|}\right)^{\alpha}\\
&\leqslant \frac{\left(1-e^{-2|z|}\right)}{|z|^{1+\alpha}}\left(\frac{e^{-2x|z|}-e^{-(1+x)|z|}-(1-x)\,|z|\,e^{-(1+x)|z|}}{1-e^{-2|z|}}\right)^{\alpha}\\
&\leqslant \frac{\left(1-e^{-2|z|}\right)}{|z|^{1+\alpha}}\left(\frac{1-e^{-|z|}-|z|\,e^{-|z|}}{1-e^{-2|z|}}\right)^{\alpha}\\
&\leqslant K\frac{1}{|z|^{1+\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\|b_1(x)\|_E &\leqslant K\int_\Gamma \frac{|z|^2}{|z+\omega|^\mu\,|z|^{\alpha+1}}d\,|z|\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_\Gamma \frac{1}{|z+\omega|^\mu\,|z|^{\alpha-1}}d\,|z|\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant \frac{K}{\omega^{\alpha+\mu-2}}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\,.
\end{aligned}
$$

De même pour $I_i(x)$, $i=2,...,7$.
Donc il existe ω^* assez grand tel que $\forall\omega\geqslant\omega^*$: $\dfrac{K}{\omega^{\alpha+\mu-2}}\leqslant\dfrac{1}{2}$. Alors l'équation (0.11.10) admet donc une unique solution $w=Q_\omega(\cdot)^2\,u(\cdot)$ pour $\omega\geqslant\omega^*$ et donc

$$
u(\cdot)=Q_\omega(\cdot)^{-2}\,(I+P_\omega)^{-1}\,G(d_0,u_1,f)(\cdot)\,.
$$

□

0.11.5 Régularité du second membre $G(d_0,u_1,f)$

Les deux résultats suivants donnés pour $Q_\omega(x)$, $x\in[0,1]$ sont en fait valables pour tout opérateur $Q_\omega(x)$ générateur d'un semi-groupe analytique généralisé.

Lemme 0.11.5 *1. Soit $\varphi\in E$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $s\to e^{sQ_\omega(x)}\varphi\in C([0,1];E)$.
(b) $\varphi\in\overline{D(Q_\omega(x))}$.

2. Soit $\varphi\in E$, $\beta\in\,]0,1[$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $s\to e^{sQ_\omega(x)}\varphi\in C^\beta([0,1];E)$.
(b) $\varphi\in D_{Q_\omega(x)}(\beta,+\infty)$.

(Voir Acquistapace P. et Terreni B [1]).

Lemme 0.11.6 *Soit* $f \in C^{\beta}([0,1];E)$. *Alors*

$$Q_{\omega}(0)\int_0^1 e^{sQ_{\omega}(0)}(g(s)-g(0))\,ds \in (D(Q_{\omega}(0)),E)_{1-\theta,\infty}.$$

(Voir [12]).

Proposition 0.11.2 *Soit* β *fixé dans* $]0,\alpha+\mu-2]$ *et soient* $\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1} d_0 \in D(Q_{\omega}(0)) \cap D(H)$, $u_1 \in D_{A(1)}$ *et* $f \in C^{\beta}([0,1];E)$, *alors sous les hypothèses (0.11.2)∼(0.11.7) on a :*

1. $G(d_0,u_1,f) \in C([0,1];E)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left[d_0 - Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right] \in D(Q_{\omega}(0)), \\ Q_{\omega}(0)^2\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left[d_0 - Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right] + f(0) \in \overline{D(Q_{\omega}(0))}, \\ A_{\omega}(1)u_1 - f(1) \in \overline{D(Q_{\omega}(1))}. \end{cases}$$

2. $G(d_0,u_1,f) \in C^{\beta}([0,1];E)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left(d_0 - Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right) \in D(Q_{\omega}(0)), \\ Q_{\omega}(0)^2\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left(d_0 - Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right) + f(0) \in (D(Q_{\omega}(0)),E)_{1-\beta,\infty}, \\ A_{\omega}(1)u_1 - f(1) \in (D(Q_{\omega}(1)),E)_{1-\beta,\infty}. \end{cases}$$

Preuve. On rappelle que

$$\begin{aligned} & G(d_0,u_1,f)(x) \\ = \; & \frac{1}{2}e^{xQ_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\int_0^1 Q_{\omega}(x)e^{sQ_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\ & -\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\int_0^1 Q_{\omega}(x)e^{(2-s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\ & -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\int_0^1 Q_{\omega}(x)e^{(1+s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\ & +\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\int_0^1 Q_{\omega}(x)e^{(3-s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\ & -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}}\int_0^1 Q_{\omega}(x)e^{(1-s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\ & +\frac{1}{2}\int_0^x Q_{\omega}(x)e^{(x-s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\ & +\frac{1}{2}\int_x^1 Q_{\omega}(x)e^{(s-x)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\ & +Q_{\omega}(x)^2 e^{xQ_{\omega}(x)}\left[\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1}d_0 + T_{\omega}(x)e^{Q_{\omega}(x)}u_1\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left[\left(I - T_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)}\right) u_1 - \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} e^{Q_\omega(x)} d_0\right] \\
= & \ \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{sQ_\omega(x)} (f(s) - f(0))\, ds \\
& -\frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{(2-s)Q_\omega(x)} f(s)\, ds \\
& -\frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{(1+s)Q_\omega(x)} f(s)\, ds \\
& +\frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) \int_0^1 Q_\omega(x) e^{(3-s)Q_\omega(x)} f(s)\, ds \\
& -\frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x) e^{(1-s)Q_\omega(x)} (f(s) - f(1))\, ds \\
& +\frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega(x) e^{(x-s)Q_\omega(x)} (f(s) - f(0))\, ds \\
& +\frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega(x) e^{(s-x)Q_\omega(x)} (f(s) - f(1))\, ds \\
& +\frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) \left(e^{Q_\omega(x)} f(0) - f(0)\right) + \frac{1}{2}\left(e^{xQ_\omega(x)} f(0) - f(0)\right) \\
& +\frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left(f(1) - e^{Q_\omega(x)} f(1)\right) + \frac{1}{2}\left(e^{(1-x)Q_\omega(x)} f(1) - f(1)\right) \\
& +Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 - Q_\omega(x)^2 e^{(2-x)Q_\omega(x)} \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 \\
& +Q_\omega(x)^2 e^{(1+x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) u_1 - Q_\omega(x)^2 e^{(3-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) u_1 + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 \\
& = \sum_{i=1}^{7} I_i(x) + \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} [I - T_\omega(x)] f(0) + e^{(1-x)Q_\omega(x)} f(1) + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 \\
& +Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 + \frac{1}{2} e^{(1+x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) f(0) - \frac{1}{2} e^{(2-x)Q_\omega(x)} f(1) \\
& -Q_\omega(x)^2 e^{(2-x)Q_\omega(x)} \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 + Q_\omega(x)^2 e^{(1+x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) u_1 \\
& -Q_\omega(x)^2 e^{(3-x)Q_\omega(x)} T_\omega(x) u_1,
\end{aligned}
$$

on a

$$
\begin{aligned}
& [I - T_\omega(x)] f(0) \\
= & \left(I - (Q_\omega(x) + H)\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}\right) f(0) \\
= & [\Lambda_\omega(x) - (Q_\omega(x) + H)] \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} f(0) \\
= & \left[(Q_\omega(x) - H) + e^{2Q_\omega(x)} (Q_\omega(x) + H) - (Q_\omega(x) + H)\right] \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} f(0) \\
= & \left(-2H + e^{2Q_\omega(x)} (Q_\omega(x) + H)\right) \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} f(0) \\
= & -2H \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} f(0) + e^{2Q_\omega(x)} T_\omega(x) f(0),
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{aligned}
&G\left(d_0,u_1,f\right)(x)\\
=\;&-e^{xQ_\omega(x)}H\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}f(0)+Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}d_0\\
&+e^{(1-x)Q_\omega(x)}f(1)+Q_\omega(x)^2e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1\\
&+\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1Q_\omega(x)e^{sQ_\omega(x)}\left(f(s)-f(0)\right)ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\int_0^1Q_\omega(x)e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(f(s)-f(1)\right)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^xQ_\omega(x)e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left(f(s)-f(0)\right)ds-\frac{1}{2}f(0)\\
&+\frac{1}{2}\int_x^1Q_\omega(x)e^{(s-x)Q_\omega(x)}\left(f(s)-f(1)\right)ds-\frac{1}{2}f(1)\\
&+A_\omega(x)R\left(x,f,d_0,u_1\right),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&R\left(x,f,d_0,u_1\right)\\
=\;&-e^{xQ_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}T_\omega(x)\cdot\\
&\left[u_1-\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds+\frac{1}{2}\left(I+e^{Q_\omega(x)}\right)Q_\omega(x)^{-2}f(0)\right]\\
&+e^{(1-x)Q_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}\cdot\\
&\left[\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}d_0+\frac{1}{2}T_\omega(x)Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds+\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-2}f(1)\right]\\
&+e^{(1-x)Q_\omega(x)}e^{2Q_\omega(x)}T_\omega(x)\left[u_1-\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\right]
\end{aligned}$$

Puisque $Q_\omega(x)\,,\ x\in[0,1]$ génère un semi-groupe analytique généralisé, nous avons pour tout $m\in\mathbb{N}$

$$e^{Q_\omega(x)}\in L\left(E,D\left(\left[Q_\omega(x)\right]^m\right)\right),$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l}
R\left(\cdot,f,d_0,u_1\right)\in C^\infty\left([0,1];E\right)\\
A_\omega(\cdot)R\left(\cdot,f,d_0,u_1\right)\in C^\infty\left([0,1];E\right).
\end{array}\right.$$

Pour $I_1(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
&I_1(x)=\frac{1}{2}Q_\omega(x)e^{xQ_\omega(x)}\int_0^1e^{sQ_\omega(x)}\left(f(s)-f(0)\right)ds\\
=\;&\frac{1}{2}\left[Q_\omega(x)e^{xQ_\omega(x)}-Q_\omega(0)e^{xQ_\omega(0)}\right]\int_0^1e^{sQ_\omega(x)}\left(f(s)-f(0)\right)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}Q_\omega(0)\, e^{xQ_\omega(0)} \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} (f(s) - f(0))\, ds \\
= \; & \frac{1}{2}\left[Q_\omega(x)\, e^{xQ_\omega(x)} - Q_\omega(0)\, e^{xQ_\omega(0)}\right] \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} (f(s) - f(0))\, ds \\
& +\frac{1}{2}Q_\omega(0)\, e^{xQ_\omega(0)} \int_0^1 \left[e^{sQ_\omega(x)} - e^{sQ_\omega(0)}\right] (f(s) - f(0))\, ds \\
& +\frac{1}{2}Q_\omega(0)\, e^{xQ_\omega(0)} \int_0^1 e^{sQ_\omega(0)} (f(s) - f(0))\, ds \\
= \; & I_1^1(x) + I_1^2(x) + I_1^3(x).
\end{aligned}$$

D'autre part par un calcul algébrique simple on a que :

$$\begin{aligned}
& Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - zI)^{-1} \\
= \; & zQ_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left[Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}\right] Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - zI)^{-1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& (Q_\omega(x) - zI)^{-1} - (Q_\omega(0) - zI)^{-1} \\
= \; & \frac{1}{z}\left(Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - zI)^{-1}\right) \\
= \; & Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left[Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}\right] Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - zI)^{-1}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \left\|\frac{1}{2}\left[Q_\omega(x)\, e^{xQ_\omega(x)} - Q_\omega(0)\, e^{xQ_\omega(0)}\right]\right\|_E \\
= \; & \left\|-\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\left[Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - zI)^{-1}\right] dz\right\|_E \\
= \; & \left\|-\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma z e^{xz} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left[Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}\right] Q_\omega(0)(Q_\omega(0) - zI)^{-1}\, dz\right\|_E \\
\leqslant \; & C_1 \int_\Gamma |z|\, e^{-C_0 x|z|} \frac{x^\alpha}{|z|^\mu}\, d|z| \\
\leqslant \; & C_1 \int_\Gamma e^{-\sigma} \frac{x^\alpha}{\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu-1}} \frac{d\sigma}{x} \leq C_1 x^{\alpha+\mu-2},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\left\|\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} (f(s) - f(0))\, ds\right\|_E \leqslant C_2 \|f\|_{C^\beta([0,1];E)},$$

alors

$$\begin{aligned}
& \left\|I_1^1(x)\right\|_E \\
\leqslant \; & \left\|\frac{1}{2}\left[Q_\omega(x)\, e^{xQ_\omega(x)} - Q_\omega(0)\, e^{xQ_\omega(0)}\right]\right\| \cdot \left\|\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} (f(s) - f(0))\, ds\right\| \\
\leqslant \; & C_3 x^{\alpha+\mu-2} \|f\|_{C^\beta([0,1];E)},
\end{aligned}$$

pour $I_1^2(x)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|I_1^2(x)\right\|_E \\
\leqslant\ & C\left\|\int_0^1\int_\Gamma e^{sz}\left[(Q_\omega(x)-zI)^{-1}-(Q_\omega(0)-zI)^{-1}\right](f(s)-f(0))\,dzds\right\| \\
\leqslant\ & C\int_0^1\left(\int_\Gamma\left\|e^{sz}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left[Q_\omega(x)^{-1}-Q_\omega(0)^{-1}\right]\cdot\right.\right. \\
& \left.\left. Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}dz\right\|\right)s^\beta ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
\leqslant\ & C\int_0^1\left(\int_\Gamma e^{-C_0s|z|}\frac{x^\alpha s^\beta}{|z|^\mu}d|z|\right)ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
\leqslant\ & C\int_0^1\left(\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{x^\alpha s^\beta}{\left(\dfrac{\sigma}{s}\right)^\mu}\frac{d\sigma}{s}\right)ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
\leqslant\ & C\int_0^1 x^\alpha s^{\beta+\mu-1}ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
\leqslant\ & Cx^\alpha\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}.
\end{aligned}$$

pour $I_1^3(x)$ en utilisant le lemme 0.11.5 et 0.11.6, on a

$$Q_\omega(0)\int_0^1 e^{sQ_\omega(0)}(f(s)-f(0))\,ds\in(D(Q_\omega(0)),E)_{1-\beta,\infty},$$

équivaut à

$$e^{xQ_\omega(0)}Q_\omega(0)\int_0^1 e^{sQ_\omega(0)}(f(s)-f(0))\,ds\in C^\beta([0,1];E).$$

On fait de même pour $I_2(x)$.
Pour $I_3(x)$, on a

$$\begin{aligned}
&I_3(x) \\
=\ & \frac{1}{2}\int_0^x Q_\omega(x)\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}(f(s)-f(0))\,ds \\
=\ & \frac{1}{2}\int_0^x\left[Q_\omega(x)\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}-Q_\omega(s)\,e^{(x-s)Q_\omega(s)}\right](f(s)-f(0))\,ds \\
& +\frac{1}{2}Q_\omega(s)\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(s)}(f(s)-f(0))\,ds \\
=\ & I_3^1(x)+I_3^2(x),
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
&\left\|I_3^1(x)\right\|_E \\
\leqslant\ & C\left\|\int_0^x\int_\Gamma ze^{(x-s)z}\left[(Q_\omega(x)-zI)^{-1}-(Q_\omega(s)-zI)^{-1}\right](f(s)-f(0))\,dzds\right\| \\
\leqslant\ & C\int_0^x\left(\int_\Gamma\left\|ze^{(x-s)z}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left[Q_\omega(x)^{-1}-Q_\omega(s)^{-1}\right]\cdot\right.\right. \\
& \left.\left. Q_\omega(s)(Q_\omega(s)-zI)^{-1}dz\right\|s^\beta\right)ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C\int_0^x\int_\Gamma e^{-C_0(x-s)|z|}\frac{(x-s)^\alpha s^\beta}{|z|^{\mu-1}}d|z|\,ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}\\
&\leqslant C\int_0^x\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(x-s)^\alpha s^\beta}{\left(\dfrac{\sigma}{(x-s)}\right)^{\mu-1}}\frac{d\sigma}{(x-s)}ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}\\
&\leqslant C\int_0^x(x-s)^{\alpha+\mu-2}s^\beta ds\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}\leqslant Cx^{\alpha+\mu-1+\beta}\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}.
\end{aligned}$$

pour $I_3^2(x)$ en utilisant le lemme 0.11.5 et 0.11.6, on a

$$Q_\omega(s)\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(s)}(f(s)-f(0))\,ds\in(D(Q_\omega(s)),E)_{1-\beta,\infty},$$

donc

$$I_3(x)\in C^{1,\beta}([0,1];E)\cap C^\beta([0,1],D(Q_\omega(x))),$$

de même pour $I_4(x)$.
Et de plus on a

$$\begin{aligned}
&Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}d_0-e^{xQ_\omega(x)}H\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}f(0)\\
=\;&Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}d_0-e^{xQ_\omega(x)}H\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}f(0)\\
&+Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}W(x)\,d_0-e^{xQ_\omega(x)}H\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}W(x)\,f(0)\\
=\;&Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}d_0+e^{xQ_\omega(x)}(Q_\omega(x)-H)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}f(0)\\
&-e^{xQ_\omega(x)}Q_\omega(x)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}f(0)\\
&+Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}W(x)\,d_0-e^{xQ_\omega(x)}H\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}W(x)\,f(0)\\
=\;&Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}d_0+e^{xQ_\omega(x)}f(0)-e^{xQ_\omega(x)}Q_\omega(x)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}f(0)\\
&+Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}W(x)\,d_0-e^{xQ_\omega(x)}H\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}W(x)\,f(0).
\end{aligned}$$

0n a $W(x)\in L(E)$ et $R[W(x)]\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}D(Q_\omega(x)^k)$. Alors

$$\begin{aligned}
&Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}d_0+e^{xQ_\omega(x)}f(0)-e^{xQ_\omega(x)}Q_\omega(x)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}f(0)\\
=\;&\left[Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}d_0-Q_\omega(0)^2e^{xQ_\omega(0)}\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}d_0\right]\\
&+\left[Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1}d_0-Q_\omega(x)^2e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}d_0\right]\\
&+\left[-Q_\omega(x)e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}f(0)+Q_\omega(0)e^{xQ_\omega(0)}\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}f(0)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\left[-Q_\omega(x)\, e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} f(0) + Q_\omega(x)\, e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} f(0)\right] \\
& +\left[e^{xQ_\omega(x)} f(0) - e^{xQ_\omega(0)} f(0)\right] \\
& + e^{xQ_\omega(0)} \left[Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} d_0 - Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} f(0) + f(0)\right] \\
= \; & -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z e^{xz} \left[Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} - Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}\right] \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} d_0 dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz} \left[Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} - Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}\right] \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} f(0)\, dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z e^{xz} \left[Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} - Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}\right] \cdot \\
& \left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] d_0 dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z e^{xz} Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1} \left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] d_0 dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz} Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} \left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] f(0) dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz} \left[(Q_\omega(x)-zI)^{-1} - (Q_\omega(0)-zI)^{-1}\right] f(0)\, dz \\
& + e^{xQ_\omega(0)} \left[Q_\omega(0)^2 \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} d_0 - Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} f(0) + f(0)\right].
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} f(0) \\
= \; & -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^2 e^{xz} Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}\right) Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1} \cdot \\
& \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} d_0 dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z e^{xz} Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}\right) Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1} \cdot \\
& \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} f(0)\, dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^2 e^{xz} Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}\right) Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1} \cdot \\
& \left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] d_0 dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z e^{xz} Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1} \left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] d_0 dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz} Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} \left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] f(0) dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{xz} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-z\right)^{-1}\left[Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(0)^{-1}\right] Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-z\right)^{-1} f(0) dz \\
& +e^{xQ_{\omega}(0)}\left[\left[Q_{\omega}(0)\right]^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1} d_{0}-Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1} f(0)+f(0)\right] \\
= & \sum_{i=1}^{7} a_{i}(x).
\end{aligned}
$$

Pour $a_1(x)$ on a

$$
\begin{aligned}
\left\|a_{1}(x)\right\|_{E} & \leqslant K \int_{\Gamma}|z| e^{-x|z|} \frac{x^{\alpha}}{|z|^{\mu}} d|z|\left\|Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1} d_{0}\right\|_{E} \\
& \leqslant K \int_{\Gamma} e^{-\sigma} \frac{x^{\alpha}}{\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu-1}} \frac{d\sigma}{x}\left\|Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1} d_{0}\right\|_{E} \\
& \leqslant K \int_{\Gamma} \frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{\mu-1}} d\sigma x^{\alpha+\mu-2}\left\|Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1} d_{0}\right\|_{E} \\
& \leqslant K x^{\alpha+\mu-2}\left\|Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1} d_{0}\right\|_{E} \\
& \leqslant K\left\|Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1} d_{0}\right\|_{E},
\end{aligned}
$$

de même on a

$$
\begin{aligned}
\left\|a_{2}(x)\right\|_{E} & \leqslant K \int_{\Gamma} e^{-x|z|} \frac{x^{\alpha}}{|z|^{\mu-1}} d|z|\|f(0)\|_{E} \\
& \leqslant K \int_{\Gamma} e^{-\sigma} \frac{x^{\alpha}}{\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu-1}} \frac{d\sigma}{x}\|f(0)\|_{E} \\
& \leqslant K \int_{\Gamma} \frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{\mu-1}} d\sigma x^{\alpha+\mu-2}\|f(0)\|_{E} \\
& \leqslant K x^{\alpha+\mu-2}\|f(0)\|_{E} \leqslant K\|f(0)\|_{E},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|a_{3}(x)\right\|_{E} & \leqslant K \int_{\Gamma} e^{-x|z|} \frac{x^{\alpha}}{|z|^{\mu-2}} x^{\alpha+\mu} d|z|\left\|d_{0}\right\|_{E} \\
& \leqslant K \int_{\Gamma} e^{-\sigma} \frac{x^{2\alpha+\mu}}{\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu-2}} \frac{d\sigma}{x}\left\|d_{0}\right\|_{E} \\
& \leqslant K \int_{\Gamma} \frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{\mu-2}} d\sigma x^{2(\alpha+\mu)-3}\left\|d_{0}\right\|_{E} \\
& \leqslant K x^{\alpha+\mu-2}\left\|d_{0}\right\|_{E} \leqslant K\left\|d_{0}\right\|_{E},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left\| a_4(x) \right\|_E &\leqslant K \int_\Gamma |z|\, e^{-x|z|} x^{\alpha+\mu} d\,|z| \left\| d_0 \right\|_E \\
&\leqslant K \int_\Gamma \sigma e^{-\sigma} \frac{x^{\alpha+\mu}}{x} \frac{d\sigma}{x} \left\| d_0 \right\|_E \\
&\leqslant K \int_\Gamma \sigma e^{-\sigma} d\sigma x^{\alpha+\mu-2} \left\| d_0 \right\|_E \\
&\leqslant K x^{\alpha+\mu-2} \left\| d_0 \right\|_E \leqslant K \left\| d_0 \right\|_E ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| a_5(x) \right\|_E &\leqslant K \int_\Gamma e^{-x|z|} x^{\alpha+\mu} d\,|z| \left\| f(0) \right\|_E \\
&\leqslant K x^{\alpha+\mu-1} \left\| f(0) \right\|_E \leqslant K \left\| f(0) \right\|_E ,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left\| a_6(x) \right\|_E &\leqslant K \int_\Gamma e^{-x|z|} \frac{x^{\alpha}}{|z|^{\mu}} d\,|z| \left\| f(0) \right\|_E \\
&\leqslant K \int_\Gamma e^{-\sigma} \frac{x^{\alpha}}{\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}} \frac{d\sigma}{x} \left\| f(0) \right\|_E \\
&\leqslant K \int_\Gamma \frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{\mu}} d\sigma x^{\alpha+\mu-1} \left\| f(0) \right\|_E \\
&\leqslant K x^{\alpha+\mu-1} \left\| f(0) \right\|_E \leqslant K \left\| f(0) \right\|_E .
\end{aligned}$$

Et de plus on a

$$\begin{aligned}
& e^{(1-x)Q_\omega(x)} f(1) + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 \\
={}& e^{(1-x)Q_\omega(x)} f(1) - e^{(1-x)Q_\omega(1)} f(1) + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 - Q_\omega(1)^2 e^{(1-x)Q_\omega(1)} u_1 \\
& + e^{(1-x)Q_\omega(1)} f(1) + Q_\omega(1)^2 e^{(1-x)Q_\omega(1)} u_1 \\
={}& \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \left((Q_\omega(x) - zI)^{-1} - (Q_\omega(1) - zI)^{-1} \right) f(1)\, dz \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z e^{(1-x)z} \left(Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(1) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \right) u_1 dz \\
& + e^{(1-x)Q_\omega(1)} \left(f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1 \right) \\
={}& \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left[Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(1)^{-1} \right] \cdot \\
& Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} f(1)\, dz \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^2 e^{(1-x)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left[Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(1)^{-1} \right] \cdot \\
& Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} u_1 dz \\
& + e^{(1-x)Q_\omega(1)} \left(f(1) - A_\omega(1) u_1 \right) \\
={}& b_1(x) + b_2(x) + b_3(x) .
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\|b_1(x)\|_E &\leqslant K\int_\Gamma e^{-(1-x)|z|}\frac{(1-x)^\alpha}{|z|^\mu}d|z|\,\|f(1)\|_E\\
&\leqslant K\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(1-x)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{1-x}\right)^\mu}\frac{d\sigma}{(1-x)}\,\|f(1)\|_E\\
&\leqslant K(1-x)^{\alpha+\mu-1}\|f(1)\|_E\\
&\leqslant K\|f(1)\|_E\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|b_2(x)\|_E &\leqslant K\int_\Gamma e^{-(1-x)|z|}\frac{(1-x)^\alpha}{|z|^{\mu-1}}d|z|\,\|Q_\omega(1)\,u_1\|_E\\
&\leqslant K\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(1-x)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{1-x}\right)^{\mu-1}}\frac{d\sigma}{(1-x)}\,\|Q_\omega(1)\,u_1\|_E\\
&\leqslant K(1-x)^{\alpha+\mu-2}\|Q_\omega(1)\,u_1\|_E\\
&\leqslant K\|Q_\omega(1)\,u_1\|_E\,.
\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\begin{aligned}
&G(d_0,u_1,f)\\
\in\;& C([0,1];E)\\
\Longleftrightarrow\;&\begin{cases}
e^{xQ_\omega(0)}\left[Q_\omega(0)^2\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\left(d_0-Q_\omega(0)^{-1}f(0)\right)+f(0)\right]\in C([0,1];E)\,,\\[2ex]
e^{(1-x)Q_\omega(1)}\left[A_\omega(1)\,u_1-f(1)\right]\in C([0,1];E)
\end{cases}\\
\Longleftrightarrow\;&\begin{cases}
Q_\omega(0)^2\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}(d_0-Q_\omega(0)^{-1}f(0))+f(0)\in\overline{D(Q_\omega(0))},\\[2ex]
A_\omega(1)\,u_1-f(1)\in\overline{D(Q_\omega(1))}
\end{cases}
\end{aligned}$$

et puisque pour tout $\alpha\in\,]0,1[$ on a

$$\begin{cases}
\overline{D(A_\omega^\alpha)}\subset D(A_\omega)\\[1ex]
D(A_\omega)\subset D(A_\omega^\alpha)\,,
\end{cases}$$

et donc

$$\overline{D(A_\omega)}=\overline{D(A_\omega^\alpha)},$$

alors

$$\begin{cases}
\overline{D(Q_\omega(0))}=\overline{D(A(0))}\\[1ex]
\overline{D(Q_\omega(1))}=\overline{D(A(1))},
\end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} Q_\omega(0)^2\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\left(d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)\right) + f(0) \in \overline{D(A(0))} \\ A_\omega(1)\, u_1 - f(1) \in \overline{D(A(1))}. \end{cases}$$

Et de plus

$$\begin{array}{cl} & G(d_0, u_1, f) \\ \in & C^\beta([0,1]; E) \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} e^{xQ_\omega(0)}\left[Q_\omega(0)^2\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\left(d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)\right) + f(0)\right] \in C^\beta([0,1]; E) \\ e^{(1-x)Q_\omega(1)}\left[A_\omega(1)\, u_1 - f(1)\right] \in C^\beta([0,1]; E) \end{cases} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} Q_\omega(0)^2\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\left(d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)\right) + f(0) \in \left(D_{Q_\omega(0)}, E\right)_{1-\beta,\infty} \\ A_\omega(1)\, u_1 - f(1) \in \left(D_{Q_\omega(1)}, E\right)_{1-\beta,\infty} \end{cases} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} Q_\omega(0)^2\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\left(d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)\right) + f(0) \in \left(D_{A(0)}, E\right)_{1-\frac{\beta}{2},\infty} \\ A_\omega(1)\, u_1 - f(1) \in \left(D_{A(1)}, E\right)_{1-\frac{\beta}{2},\infty}. \end{cases} \end{array}$$

□

0.12 Régularité maximale de la solution

Dans ce chapitre on étudie la régularité maximale de la solution du problème (0.11.1).

0.12.1 Régularité de l'opérateur intégral P_ω

On rappelle que P_ω est défini sur l'espace $C([0,1]; E)$ par

$$\begin{aligned} (P_\omega w)(x) &= \frac{1}{2} T_\omega(x)\, e^{xQ_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{sQ_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\ & -\frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\ & +\frac{1}{2} \int_0^x Q_\omega(x)^3 e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\ & +\frac{1}{2} \int_x^1 Q_\omega(x)^3 e^{(s-x)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\,e^{Q_\omega(x)}\int_0^1 Q_\omega(x)^3\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\,e^{Q_\omega(x)}\int_0^1 Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\,e^{2Q_\omega(x)}\int_0^1 Q_\omega(x)^3\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

On a la proposition suivante

Proposition 0.12.1 *Sous les hypothèses (0.11.2)∼(0.11.7), on a :*

1. $P_\omega\in L\left(C([0,1];E),C^{\alpha+\mu-2}([0,1];E)\right)$
2. $P_\omega\in L\left(C(E),C(E)\cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right)\right)\right)$ *où* $\beta\in\left]0,\alpha+\mu-2\right]$.

Preuve. **Point(1)** Soient $0\leqslant\tau<x\leqslant1$ et $w\in C([0,1];E)$. on doit alors estimer

$$\|(P_\omega w)(x)-(P_\omega w)(\tau)\|,$$

on a

$$
\begin{aligned}
&(P_\omega w)(x)-(P_\omega w)(\tau)=\frac{1}{2}T_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}\int_0^1 Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}T_\omega(\tau)\,e^{\tau Q_\omega(\tau)}\int_0^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\int_0^1 Q_\omega(x)^3\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}e^{(1-\tau)Q_\omega(\tau)}\int_0^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{(1-s)Q_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^x Q_\omega(x)^3\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}\int_0^\tau Q_\omega(\tau)^3\,e^{(\tau-s)Q_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}\int_x^1 Q_\omega(x)^3\,e^{(s-x)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}\int_\tau^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{(s-\tau)Q_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\,e^{Q_\omega(x)}\int_0^1 Q_\omega(x)^3\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}e^{\tau Q_\omega(\tau)}T_\omega(\tau)\,e^{Q_\omega(\tau)}\int_0^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{(1-s)Q_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\,e^{Q_\omega(x)}\int_0^1 Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}e^{(1-\tau)Q_\omega(\tau)}T_\omega(\tau)\,e^{Q_\omega(\tau)}\int_0^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds$$
$$+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\,e^{2Q_\omega(x)}\int_0^1 Q_\omega(x)^3\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds$$
$$-\frac{1}{2}e^{(1-\tau)Q_\omega(\tau)}T_\omega(\tau)\,e^{2Q_\omega(\tau)}\int_0^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{(1-s)Q_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds$$
$$=\sum_{i=1}^{14} I_i(x)\,.$$

On a $I_9(x)+I_{10}(x)$, $I_{11}(x)+I_{12}(x)$ et $I_{13}(x)+I_{14}(x)$ sont en $0\left(|x-\tau|^\beta\right)$ avec $0<\beta\leqslant\alpha+\mu-2$.
Pour $I_1(x)+I_2(x)$, on a

$$\begin{aligned}
I_1(x)+I_2(x) &= \frac{1}{2}T_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}\int_0^x Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&\quad -\frac{1}{2}T_\omega(\tau)\,e^{\tau Q_\omega(\tau)}\int_0^\tau Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&\quad +\frac{1}{2}T_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}\int_x^1 Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&\quad -\frac{1}{2}T_\omega(\tau)\,e^{\tau Q_\omega(\tau)}\int_\tau^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&= A_1-B_1+C_1-D_1.
\end{aligned}$$

On majore A_1-B_1. On a

$$\begin{aligned}
& A_1-B_1=\frac{1}{2}T_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}\int_0^\tau Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
& -\frac{1}{2}T_\omega(\tau)\,e^{\tau Q_\omega(\tau)}\int_0^\tau Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}T_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}\int_\tau^x Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
= {}& \frac{1}{2}T_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}\int_0^\tau Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}T_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}\int_0^\tau Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(\tau)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
& -\frac{1}{2}T_\omega(\tau)\,e^{\tau Q_\omega(\tau)}\int_0^\tau Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}T_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}\int_\tau^x Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
= {}& \frac{-1}{4\pi i}T_\omega(x)\int_\Gamma\int_0^\tau z^2e^{(x+s)z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz\\
& -\frac{1}{4\pi i}T_\omega(x)\int_\Gamma\int_0^\tau z^2e^{(x+s)z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(\tau)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{4\pi i}T_{\omega}(\tau)\int_{\Gamma}\int_{0}^{\tau} z^{2}e^{(\tau+s)z}Q_{\omega}(\tau)\left(Q_{\omega}(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{4\pi i}T_{\omega}(x)\int_{\Gamma}\int_{\tau}^{x} z^{2}e^{(x+s)z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
= \;& \frac{-1}{4\pi i}T_{\omega}(\tau)\int_{\Gamma}\int_{0}^{\tau}\left(e^{(x+s)z}-e^{(\tau+s)z}\right)z^{2}Q_{\omega}(\tau)\left(Q_{\omega}(\tau)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& \left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{4\pi i}T_{\omega}(x)\int_{\Gamma}\int_{0}^{\tau} z^{2}e^{(x+s)z}\left(Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)-Q_{\omega}(\tau)\left(Q_{\omega}(\tau)-zI\right)^{-1}\right)^{-1}\cdot \\
& \left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{4\pi i}\left(T_{\omega}(x)-T_{\omega}(\tau)\right)\int_{\Gamma}\int_{0}^{\tau} z^{2}e^{(x+s)z}Q_{\omega}(\tau)\left(Q_{\omega}(\tau)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& \left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{4\pi i}T_{\omega}(x)\int_{\Gamma}\int_{0}^{\tau} z^{2}e^{(x+s)z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(\tau)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{4\pi i}T_{\omega}(x)\int_{\Gamma}\int_{\tau}^{x} z^{2}e^{(x+s)z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
= \;& \frac{-1}{4\pi i}T_{\omega}(\tau)\int_{0}^{\tau}\int_{\tau}^{x}\int_{\Gamma} e^{(\zeta+s)z}z^{3}Q_{\omega}(\tau)\left(Q_{\omega}(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dzd\zeta ds \\
& -\frac{1}{4\pi i}T_{\omega}(x)\int_{0}^{\tau}\int_{\Gamma} z^{3}e^{(x+s)z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(\tau)^{-1}\right)\cdot \\
& Q_{\omega}(\tau)\left(Q_{\omega}(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{4\pi i}T_{\omega}(x)\int_{0}^{\tau}\int_{\Gamma} z^{2}e^{(x+s)z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(\tau)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{4\pi i}T_{\omega}(x)\int_{\tau}^{x}\int_{\Gamma} z^{2}e^{(x+s)z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{4\pi i}\left(T_{\omega}(x)-T_{\omega}(\tau)\right)\int_{\Gamma}\int_{0}^{\tau} z^{2}e^{(x+s)z}Q_{\omega}(\tau)\left(Q_{\omega}(\tau)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& \left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dz \\
= \;& a_{1}+b_{1}+c_{1}+d_{1}+e_{1}.
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\left\|a_{1}\right\|_{E} &\leqslant K\int_{0}^{\tau}\int_{\tau}^{x}\int_{\Gamma} e^{-(\zeta+s)|z|}\left|z\right|^{3}\frac{(\tau-s)^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d\left|z\right|d\zeta ds\left\|w\right\|_{C([0,1];E)} \\
&\leqslant K\int_{0}^{\tau}\int_{\tau}^{x}\int_{\Gamma} e^{-(\zeta-s)|z|}\frac{(\tau-s)^{\alpha}}{|z|^{\mu-3}}d\left|z\right|d\zeta ds\left\|w\right\|_{C([0,1];E)} \\
&\leqslant K\int_{0}^{\tau}\int_{\tau}^{x}\int_{\Gamma} e^{-\sigma}\frac{(\tau-s)^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{(\zeta-s)}\right)^{\mu-3}}\frac{d\sigma}{(\zeta-s)}d\zeta ds\left\|w\right\|_{C([0,1];E)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant K\int_0^\tau\int_\tau^x (\tau-s)^\alpha(\zeta-s)^{\mu-4}\,d\zeta ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau\int_\tau^x (\zeta-s)^{\alpha+\mu-4}\,d\zeta ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau (x-s)^{\alpha+\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|b_1\|_E &\leqslant K\int_0^\tau\int_\Gamma e^{-(x+s)|z|}\,|z|^3\,\frac{(x-\tau)^\alpha}{|z|^\mu}\frac{(\tau-s)^\alpha}{|z|^\mu}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau\int_\Gamma e^{-(x-s)|z|}\frac{(x-\tau)^\alpha(\tau-s)^\alpha}{|z|^{2\mu-3}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau (x-\tau)^\alpha(\tau-s)^\alpha(x-s)^{2\mu-4}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau (x-s)^{2\alpha+2\mu-4}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{2\alpha+2\mu-3}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{2(\alpha+\mu-2)+1}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\left((x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\right)^2\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|c_1\|_E &\leqslant K\int_0^\tau\int_\Gamma e^{-(x+s)|z|}\,|z|^2\,\frac{(x-\tau)^\alpha}{|z|^\mu}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau\int_\Gamma e^{-(x-s)|z|}\frac{(x-\tau)^\alpha}{|z|^{\mu-2}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(x-\tau)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{(x-s)}\right)^{\mu-2}}\frac{d\sigma}{(x-s)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau (x-\tau)^\alpha(x-s)^{\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau (x-s)^{\alpha+\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|d_1\|_E &\leqslant K\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-(x+s)|z|}\,|z|^2\,\frac{(x-s)^\alpha}{|z|^\mu}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-(x-s)|z|}\frac{(x-s)^\alpha}{|z|^{\mu-2}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant K\int_{\tau}^{x}\int_{\Gamma}e^{-\sigma}\frac{(x-s)^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{(x-s)}\right)^{\mu-2}}\frac{d\sigma}{(x-s)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_{\tau}^{x}(x-s)^{\alpha+\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\,(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\,,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\|e_1\|_E &\leqslant K\int_{0}^{\tau}\int_{\Gamma}e^{-(x+s)|z|}\,|z|^2\,\frac{(\tau-s)^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_{0}^{\tau}\int_{\Gamma}e^{-(x-s)|z|}\frac{(\tau-s)^{\alpha}}{|z|^{\mu-2}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_{0}^{\tau}\int_{\Gamma}e^{-\sigma}\frac{(\tau-s)^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{(x-s)}\right)^{\mu-2}}\frac{d\sigma}{(x-s)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_{0}^{\tau}(\tau-s)^{\alpha}\,(x-s)^{\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_{0}^{\tau}(x-s)^{\alpha+\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\,(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\,.
\end{aligned}
$$

De la même manière on traite la différence C_1-D_1, on a

$$
\begin{aligned}
& C_1-D_1\\
={}& \frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\int_x^1 Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{\tau Q_\omega(\tau)}T_\omega(\tau)\int_\tau^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
={}& \frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\int_x^1 Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{\tau Q_\omega(\tau)}T_\omega(\tau)\int_\tau^x Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{\tau Q_\omega(\tau)}T_\omega(\tau)\int_x^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
={}& \frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\int_x^1 Q_\omega(x)^3\,e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{\tau Q_\omega(\tau)}T_\omega(\tau)\int_x^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{\tau Q_\omega(\tau)}T_\omega(\tau)\int_x^1 Q_\omega(\tau)^3\,e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(x)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}e^{\tau Q_\omega(\tau)}T_\omega(\tau)\int_\tau^x Q_\omega(\tau)^3 e^{sQ_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds \\
= \; & \frac{-1}{4\pi i}T_\omega(x)\int_\Gamma\int_x^1 z^2 e^{(x+s)z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}T_\omega(\tau)\int_\Gamma\int_x^1 z^2 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}T_\omega(\tau)\int_\Gamma\int_x^1 z^2 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}T_\omega(\tau)\int_\Gamma\int_\tau^x z^2 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
= \; & \frac{-1}{4\pi i}T_\omega(x)\int_\Gamma\int_x^1\left(e^{(x+s)z}-e^{(\tau+s)z}\right)z^2 Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& \left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{4\pi i}T_\omega(\tau)\int_\Gamma\int_x^1 z^2 e^{(\tau+s)z}\left(Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)-Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau)-zI\right)^{-1}\right)\cdot \\
& \left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{4\pi i}\left(T_\omega(x)-T_\omega(\tau)\right)\int_\Gamma\int_x^1 z^2 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& \left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}T_\omega(\tau)\int_\Gamma\int_x^1 z^2 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}T_\omega(\tau)\int_\Gamma\int_\tau^x z^2 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
= \; & \frac{-1}{4\pi i}T_\omega(x)\int_x^1\int_\tau^x\int_\Gamma e^{(\zeta+s)z}z^3 Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dzd\zeta ds \\
& -\frac{1}{4\pi i}T_\omega(\tau)\int_x^1\int_\Gamma z^3 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-1}-Q_\omega(\tau)^{-1}\right)\cdot \\
& Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{4\pi i}\left(T_\omega(x)-T_\omega(\tau)\right)\int_x^1\int_\Gamma z^2 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& \left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dzds \\
& +\frac{1}{4\pi i}T_\omega(\tau)\int_\Gamma\int_x^1 z^2 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}T_\omega(\tau)\int_\tau^x\int_\Gamma z^2 e^{(\tau+s)z}Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,dzds \\
= \; & a_2+b_2+c_2+d_2+e_2.
\end{aligned}
$$

On a

$$
\|a_2\|_E \leqslant K\int_x^1\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-(\zeta+s)|z|}\,|z|^3\,\frac{(s-x)^\alpha}{|z|^\mu}d\,|z|\,d\zeta ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}
$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant K\int_x^1\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-(s-\zeta)|z|}\frac{(s-x)^\alpha}{|z|^{\mu-3}}d\,|z|\,d\zeta ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(s-x)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{(s-\zeta)}\right)^{\mu-3}}\frac{d\sigma}{(s-\zeta)}d\zeta ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1\int_\tau^x(s-x)^\alpha(s-\zeta)^{\mu-4}\,d\zeta ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1\int_\tau^x(s-\zeta)^{\alpha+\mu-4}\,d\zeta ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1(s-\tau)^{\alpha+\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\,(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|b_2\|_E &\leqslant K\int_x^1\int_\Gamma e^{-(\tau+s)|z|}\,|z|^3\,\frac{(x-\tau)^\alpha}{|z|^\mu}\frac{(s-x)^\alpha}{|z|^\mu}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1\int_\Gamma e^{-(s-\tau)|z|}\frac{(x-\tau)^\alpha(s-x)^\alpha}{|z|^{2\mu-3}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(x-\tau)^\alpha(s-x)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{(s-\tau)}\right)^{\mu-3}}\frac{d\sigma}{(s-\tau)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1(x-\tau)^\alpha(s-x)^\alpha(s-\tau)^{\mu-4}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1(s-\tau)^{2\alpha+2\mu-4}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\,(x-\tau)^{2\alpha+2\mu-4}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\,(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|c_2\|_E &\leqslant K\int_x^1\int_\Gamma e^{-(\tau+s)|z|}\,|z|^2\,\frac{(s-x)^\alpha}{|z|^\mu}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1\int_\Gamma e^{-(s-\tau)|z|}\frac{(s-x)^\alpha}{|z|^{\mu-2}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(s-x)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{(s-\tau)}\right)^{\mu-2}}\frac{d\sigma}{(s-\tau)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1(s-x)^\alpha(s-\tau)^{\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant K\int_x^1 (s-\tau)^{\alpha}(s-\tau)^{\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1 (s-\tau)^{\alpha+\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|d_2\|_E &\leqslant K\int_x^1\int_\Gamma e^{-(\tau+s)|z|}\,|z|^2\,\frac{(x-\tau)^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1\int_\Gamma e^{-(s-\tau)|z|}\frac{(x-\tau)^{\alpha}}{|z|^{\mu-2}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(x-\tau)^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{(s-\tau)}\right)^{\mu-2}}\frac{d\sigma}{(s-\tau)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1 (x-\tau)^{\alpha}(s-\tau)^{\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1 (s-\tau)^{\alpha}(s-\tau)^{\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_x^1 (s-\tau)^{\alpha+\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\,,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\|e_2\|_E &\leqslant K\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-(\tau+s)|z|}\,|z|^2\,\frac{(s-\tau)^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-(s-\tau)|z|}\frac{(s-\tau)^{\alpha}}{|z|^{\mu-2}}d\,|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(s-\tau)^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{(s-\tau)}\right)^{\mu-2}}\frac{d\sigma}{(s-\tau)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_\tau^x (s-\tau)^{\alpha+\mu-3}\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\,\|w\|_{C([0,1];E)}\,.
\end{aligned}
$$

$I_3(x)+I_4(x)$ se traite comme $I_1(x)+I_2(x)$.
Pour $I_5(x)+I_6(x)$, on a

$$
\begin{aligned}
&I_5(x)+I_6(x)\\
=\;&\frac{1}{2}\int_0^x Q_\omega(x)^3\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}\int_0^\tau Q_\omega(\tau)^3\,e^{(\tau-s)Q_\omega(\tau)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(\tau)^{-2}\right)w(s)\,ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{\tau} Q_\omega(x)^3 e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^{\tau} Q_\omega(\tau)^3 e^{(\tau-s)Q_\omega(\tau)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_\tau^{x} Q_\omega(x)^3 e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\tau} Q_\omega(x)^3 e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^{\tau} Q_\omega(x)^3 e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(\tau)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^{\tau} Q_\omega(\tau)^3 e^{(\tau-s)Q_\omega(\tau)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_\tau^{x} Q_\omega(x)^3 e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&= \frac{-1}{4\pi i}\int_0^{\tau}\int_\Gamma z^2 e^{(x-s)z} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}\right) w(s)\, dzds \\
&\quad -\frac{1}{4\pi i}\int_0^{\tau}\int_\Gamma z^2 e^{(x-s)z} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} \left(Q_\omega(\tau)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, dzds \\
&\quad +\frac{1}{4\pi i}\int_0^{\tau}\int_\Gamma z^2 e^{(\tau-s)z} Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau) - zI\right)^{-1} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}\right) w(s)\, dzds \\
&\quad -\frac{1}{4\pi i}\int_\tau^{x}\int_\Gamma z^2 e^{(x-s)z} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, dzds \\
&= \frac{-1}{4\pi i}\int_0^{\tau}\int_\Gamma \left(e^{(x-s)z} - e^{(\tau-s)z}\right) z^2 Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau) - zI\right)^{-1} \cdot \\
&\quad \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}\right) w(s)\, dzds \\
&\quad -\frac{1}{4\pi i}\int_0^{\tau}\int_\Gamma z^2 e^{(x-s)z} \left(Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} - Q_\omega(\tau)\left(Q_\omega(\tau) - zI\right)^{-1}\right) \cdot \\
&\quad \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(\tau)^{-2}\right) w(s)\, dzds \\
&\quad -\frac{1}{4\pi i}\int_0^{\tau}\int_\Gamma z^2 e^{(x-s)z} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} \left(Q_\omega(\tau)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, dzds \\
&\quad -\frac{1}{4\pi i}\int_\tau^{x}\int_\Gamma z^2 e^{(x-s)z} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, dzds \\
&= a + b + c + d.
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\|a\|_E &\leqslant K\int_\Gamma\int_0^{\tau}\int_\tau^{x} e^{-(\xi-s)|z|}\,|z|^3\,\frac{(\tau-s)^\alpha}{|z|^\mu}\, d|z|\, d\xi ds\, \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leqslant K\int_\Gamma\int_0^{\tau}\int_\tau^{x} e^{-\sigma}\frac{(\tau-s)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{(\xi-s)}\right)^{\mu-3}}\frac{d\sigma}{(\xi-s)}\, d\xi ds\, \|w\|_{C([0,1];E)} \\
&\leqslant K\int_0^{\tau}\int_\tau^{x} (\tau-s)^\alpha (\xi-s)^{\mu-4}\, d\xi ds\, \|w\|_{C([0,1];E)}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\|w\|_{C([0,1];E)},$$

$$\|b\|_E \leqslant K\int_0^\tau\int_\Gamma e^{-(x-s)|z|}|z|^3\frac{(x-\tau)^\alpha}{|z|^\mu}\frac{(\tau-s)^\alpha}{|z|^\mu}d|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant K\int_0^\tau\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(x-\tau)^\alpha(\tau-s)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{(x-s)}\right)^{2\mu-3}}\frac{d\sigma}{(x-s)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau(x-\tau)^\alpha(\tau-s)^\alpha(x-s)^{2\mu-4}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau(x-s)^{2\alpha+2\mu-4}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\|w\|_{C([0,1];E)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|c\|_E &\leqslant K\int_0^\tau\int_\Gamma e^{-(x-s)|z|}|z|^2\frac{(x-\tau)^\alpha}{|z|^\mu}d|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(x-\tau)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{(x-s)}\right)^{\mu-2}}\frac{d\sigma}{(x-s)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_0^\tau(x-\tau)^\alpha(x-s)^{\mu-3}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\|w\|_{C([0,1];E)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|d\|_E &\leqslant K\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-(x-s)|z|}|z|^2\frac{(x-s)^\alpha}{|z|^\mu}d|z|\,ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_\tau^x\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{(x-s)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{(x-s)}\right)^{\mu-2}}\frac{d\sigma}{(x-s)}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_\tau^x(x-s)^\alpha(x-s)^{\mu-3}ds\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\|w\|_{C([0,1];E)}.
\end{aligned}$$

$I_7(x)+I_8(x)$ se traite comme $I_5(x)+I_6(x)$.
Finalement on déduit que

$$\|(P_\omega w)(x)-(P_\omega w)(\tau)\|_E \leqslant K(x-\tau)^{\alpha+\mu-2}\|w\|_{C([0,1];E)},$$

d'ou $P_\omega \in L\left(C([0,1];E), C^{\alpha+\mu-2}([0,1];E)\right)$.

Point(2) Pour montrer que $P_\omega \in L\left(C(E), C(E)\cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\dfrac{\beta}{2},+\infty\right)\right)\right)$ on doit prouver que pour tout $x\in[0,1]$ et $w\in C([0,1];E)$

$$\sup_{r>0}\left\|r^\beta Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-rI)^{-1}(P_\omega w)(x)\right\|_E \leqslant K\|w\|_{C([0,1];E)}.$$

En utilisant l'identité

$$\begin{aligned}
& Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-rI)^{-1}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} \\
= \ & (Q_\omega(x)-rI+rI)(Q_\omega(x)-rI)^{-1}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} \\
= \ & Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}+r(Q_\omega(x)-rI)^{-1}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} \\
= \ & Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}+\frac{r}{r-z}Q_\omega(x)\left[(Q_\omega(x)-rI)^{-1}-(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\right] \\
= \ & \frac{-z}{r-z}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}+\frac{r}{r-z}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-rI)^{-1},
\end{aligned}$$

et en tenant compte que l'intégrale en $Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-rI)^{-1}$ est nulle, on a

$$\begin{aligned}
& r^\beta Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-rI)^{-1}(P_\omega w)(x) \\
= \ & \frac{r^\beta}{4\pi i}T_\omega(x)\int_\Gamma\int_0^1 e^{(x+s)z}\frac{z^3}{r-z}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& -\frac{r^\beta}{4\pi i}\int_\Gamma\int_0^1 e^{(2-x-s)z}\frac{z^3}{r-z}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& +\frac{r^\beta}{4\pi i}\int_\Gamma\int_0^x e^{(x-s)z}\frac{z^3}{r-z}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& +\frac{r^\beta}{4\pi i}\int_\Gamma\int_x^1 e^{(s-x)z}\frac{z^3}{r-z}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& -\frac{r^\beta}{2}Q_\omega(x)^4(Q_\omega(x)-rI)^{-1}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)e^{Q_\omega(x)}. \\
& \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds \\
& -\frac{r^\beta}{2}Q_\omega(x)^4(Q_\omega(x)-rI)^{-1}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)e^{Q_\omega(x)}. \\
& \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds \\
& +\frac{r^\beta}{2}Q_\omega(x)^4(Q_\omega(x)-rI)^{-1}e^{(1-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)e^{2Q_\omega(x)}. \\
& \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,ds \\
= \ & \sum_{i=1}^7 I_i(x).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
I_1(x) = \ & \frac{r^\beta}{4\pi i}T_\omega(x)\int_\Gamma\int_0^x e^{(x+s)z}\frac{z^3}{r-z}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
& +\frac{r^\beta}{4\pi i}T_\omega(x)\int_\Gamma\int_x^1 e^{(x+s)z}\frac{z^3}{r-z}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2}-Q_\omega(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz \\
= \ & a_1(x)+b_1(x),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\|a_1(x)\|_E &\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma \frac{|z|^3}{|r-z|\,|z|^\mu}\left(\sup_{x\in[0,1]}\int_0^x e^{-(x+s)|z|}(x-s)^\alpha\,ds\right)d|z|\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma \frac{|z|^3}{|r-z|\,|z|^\mu\,|z|^{\alpha+1}}d|z|\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma \frac{1}{|r-z|\,|z|^{\alpha+\mu-2}}d|z|\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\frac{r^\beta}{r^{\alpha+\mu-2}}\|w\|_{C([0,1];E)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|b_1(x)\|_E &\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma \frac{|z|^3}{|r-z|\,|z|^\mu}\left(\sup_{x\in[0,1]}\int_x^1 e^{-(x+s)|z|}(s-x)^\alpha\,ds\right)d|z|\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma \frac{|z|^3}{|r-z|\,|z|^\mu\,|z|^{\alpha+1}}d|z|\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma \frac{1}{|r-z|\,|z|^{\alpha+\mu-2}}d|z|\,\|w\|_{C([0,1];E)}\\
&\leqslant K\frac{r^\beta}{r^{\alpha+\mu-2}}\|w\|_{C([0,1];E)}.
\end{aligned}$$

Les autres intégrales se traitent de la même façon.
Finalement on déduit que

$$\sup_{r>0}\left\|r^\beta Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-rI\right)^{-1}(P_\omega w)(x)\right\|_E \leqslant K\|w\|_{C([0,1];E)},$$

alors

$$P_\omega \in L\left(C(E), C(E)\cap B\left(D_{Q_\omega(\cdot)}(\beta,+\infty)\right)\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
D_{Q(\cdot)}(\beta,+\infty) &= \left(E, D_{Q(\cdot)}\right)_{\beta,+\infty}\\
&= \left(E, D_{Q^2(\cdot)}\right)_{\frac{\beta}{2},+\infty}\\
&= \left(E, D_{A(\cdot)}\right)_{\frac{\beta}{2},+\infty}\\
&= D_{A(\cdot)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right),
\end{aligned}$$

donc

$$P_\omega \in L\left(C(E), C(E)\cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right)\right)\right).$$

□

0.12.2 Régularité de l'opérateur $(I + P_\omega)^{-1}$

On a besoin d'énoncer la régularité de l'opérateur $(I + P_\omega)^{-1}$ qui existe pour $\omega \geqslant \omega^*$ puisque on a vu que $\|P_\omega\|_{L(C(E))} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $\omega \geqslant \omega^*$.

Proposition 0.12.2 *Sous les hypothèses (0.11.2)∼(0.11.7) et pour tout $\omega \geqslant \omega^*$ on a :*

i) $(I + P_\omega)^{-1} \in L\left(C\left(E\right)\right)$

ii) $(I + P_\omega)^{-1} \in L\left(C^\beta\left(E\right)\right), \quad \forall \beta \in \left]0, \alpha + \mu - 2\right]$

iii) $(I + P_\omega)^{-1} \in L\left(C\left(E\right) \cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\dfrac{\beta}{2}, +\infty\right)\right)\right), \quad \forall \beta \in \left]0, \alpha + \mu - 2\right].$

Preuve. **(i)** Se déduit de l'inversibilité de l'opérateur $I + P_\omega$.
(ii) Soit $w \in L\left(C^\beta\left(E\right)\right)$ et

$$h = (I + P_\omega)^{-1} w,$$

alors il suffit d'écrire que

$$h + P_\omega h = w,$$

et d'utiliser la proposition précédente.
(iii) Même raisonnement que celui pour le deuxième point. □

0.12.3 Résultat de régularité sur le second membre

On donne ici un résultat de régularité croisée sur le second membre $G\left(d_0, u_1, f\right)(\cdot)$.

Proposition 0.12.3 *Soit β fixé dans $\left]0, \alpha + \mu - 2\right]$ et soient* $\left(\overline{Q_\omega\left(0\right) - H}\right)^{-1} d_0 \in D_{Q_\omega(0)} \cap D\left(H\right)$, $u_1 \in D_{A(1)}$, $f \in C^\beta\left(\left[0,1\right]; E\right)$, *alors sous les hypothèses (0.11.2)∼(0.11.7) on a :*
$\left(G\left(d_0, u_1, f\right)(\cdot) + f(\cdot)\right) \in B\left(D_{A(\cdot)}\left(\dfrac{\beta}{2}, +\infty\right)\right)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} Q_\omega\left(0\right)^2 \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1}\left(d_0 - Q_\omega\left(0\right)^{-1} f(0)\right) + f(0) \in D_{A(0)}\left(\dfrac{\beta}{2}, +\infty\right) \\ \\ A_\omega\left(1\right) u_1 - f\left(1\right) \in D_{A(1)}\left(\dfrac{\beta}{2}, +\infty\right). \end{cases}$$

Preuve. On pour tout $x \in [0,1]$

$$G\left(d_0, u_1, f\right) = \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega\left(x\right) \int_0^1 Q_\omega\left(x\right) e^{sQ_\omega(x)} \left(f\left(s\right) - f\left(0\right)\right) ds$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\int_0^1 Q_\omega(x)\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(f(s)-f(1)\right)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^x Q_\omega(x)\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left(f(s)-f(x)\right)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_x^1 Q_\omega(x)\,e^{(s-x)Q_\omega(x)}\left(f(s)-f(x)\right)ds\\
&-\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1 Q_\omega(x)\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1 Q_\omega(x)\,e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}e^{2Q_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1 Q_\omega(x)\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\left(e^{Q_\omega(x)}f(0)-f(0)\right)+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(f(1)-e^{Q_\omega(x)}f(1)\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(e^{xQ_\omega(x)}f(x)-f(x)\right)+\frac{1}{2}\left(e^{(1-x)Q_\omega(x)}f(x)-f(x)\right)\\
&+Q_\omega(x)^2\,e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}d_0-Q_\omega(x)^2\,e^{(2-x)Q_\omega(x)}\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}d_0\\
&+Q_\omega(x)^2\,e^{(1+x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\,u_1-Q_\omega(x)^2\,e^{(3-x)Q_\omega(x)}T_\omega(x)\,u_1+Q_\omega(x)^2\,e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
&\quad G(d_0,u_1,f)(x)+f(x)\\
=&\ -e^{xQ_\omega(x)}H\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}f(0)+Q_\omega(x)^2\,e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}d_0\\
&+e^{(1-x)Q_\omega(x)}f(1)+Q_\omega(x)^2\,e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1\\
&+\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}\left(f(x)-f(0)\right)+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)}\left(f(x)-f(1)\right)\\
&+\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)}T_\omega(x)\int_0^1 Q_\omega(x)\,e^{sQ_\omega(x)}\left(f(s)-f(0)\right)ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega}\int_0^1 Q_\omega(x)\,e^{(1-s)Q_\omega(x)}\left(f(s)-f(1)\right)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^x Q_\omega(x)\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left(f(s)-f(x)\right)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_x^1 Q_\omega(x)\,e^{(s-x)Q_\omega(x)}\left(f(s)-f(x)\right)ds\\
&+A_\omega(x)\,R(x,f,d_0,f)\,.
\end{aligned}
$$

On doit montrer que

$$
\sup_{r>0}\left\|r^\beta Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-rI\right)^{-1}\left[G(d_0,u_1,f)(x)+f(x)\right]\right\|_E\leqslant K.
$$

On développe ces intégrales afin d'utiliser l'hpothèse (0.11.3), donc on aura

$$
\begin{aligned}
& r^{\beta} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1}\left[G\left(d_0,u_1,f\right)(x)+f(x)\right] \\
= & \frac{r^{\beta}}{4\pi i} T_{\omega}(x) \int_{\Gamma}\int_0^1 e^{(x+s)z}\frac{z}{r-z} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(0)\right) ds dz \\
& -\frac{r^{\beta}}{4\pi i}\int_{\Gamma}\int_0^1 e^{(2-x-s)z}\frac{z}{r-z} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(1)\right) ds dz \\
& +\frac{r^{\beta}}{4\pi i}\int_{\Gamma}\int_0^x e^{(x-s)z}\frac{z}{r-z} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(x)\right) ds dz \\
& +\frac{r^{\beta}}{4\pi i}\int_{\Gamma}\int_x^1 e^{(s-x)z}\frac{z}{r-z} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(x)\right) ds dz \\
& +\frac{r^{\beta}}{4\pi i}\int_{\Gamma} e^{xz}\frac{z}{r-z}\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(x)-f(0)\right) dz \\
& +\frac{r^{\beta}}{4\pi i}\int_{\Gamma} e^{(1-x)z}\frac{z}{r-z}\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(x)-f(1)\right) dz \\
& +r^{\beta} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1}\left[-e^{xQ_{\omega}(x)} H\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1} f(0)+Q_{\omega}(x)^2 e^{xQ_{\omega}(x)}\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1} d_0\right] \\
& +r^{\beta} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1}\left[e^{(1-x)Q_{\omega}(x)} f(1)+Q_{\omega}(x)^2 e^{(1-x)Q_{\omega}(x)} u_1\right] \\
& +r^{\beta} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1} A_{\omega}(x) R\left(x,f,d_0,f\right) \\
= & \sum_{i=1}^{6} I_i(x) \\
& +r^{\beta} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1}\left[-e^{xQ_{\omega}(x)} H\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1} f(0)+Q_{\omega}(x)^2 e^{xQ_{\omega}(x)}\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1} d_0\right] \\
& +r^{\beta} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1}\left[e^{(1-x)Q_{\omega}(x)} f(1)+Q_{\omega}(x)^2 e^{(1-x)Q_{\omega}(x)} u_1\right] \\
& +r^{\beta} Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1} A_{\omega}(x) R\left(x,f,d_0,f\right).
\end{aligned}
$$

Pour $I_1(x)$ on a

$$
\begin{aligned}
\left\|I_1(x)\right\|_E & \leqslant K r^{\beta}\int_{\Gamma}\frac{|z|}{|r-z|}\left(\sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 e^{-(x+s)|z|} s^{\beta} ds\right) d|z| \, \|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)} \\
& \leqslant K r^{\beta}\int_{\Gamma}\frac{|z|}{|r-z|}\frac{1}{|z|^{1+\beta}} d|z| \, \|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)} \\
& \leqslant K r^{\beta}\int_{\Gamma}\frac{d|z|}{|r-z|\,|z|^{\beta}}\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)} \leqslant K\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)}.
\end{aligned}
$$

On fait de même pour $I_2(x)$, $I_3(x)$ et $I_4(x)$.
Pour $I_5(x)$ on a

$$
\begin{aligned}
\left\|I_5(x)\right\|_E & \leqslant K r^{\beta}\int_{\Gamma} e^{-x|z|}\frac{1}{|r-z|} x^{\beta} d|z| \, \|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)} \\
& \leqslant K r^{\beta}\int_{\Gamma} e^{-x|z|}\frac{x^{\beta}}{|r-z|^{\beta}|r-z|^{1-\beta}} d|z| \, \|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant Kr^{\beta}\int_{\Gamma}e^{-x|z|}\frac{x^{\beta}}{r^{\beta}|z|^{1-\beta}}d|z|\,\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)}\\
&\leqslant K\int_{\Gamma}e^{-\sigma}\frac{x^{\beta}}{\left(\dfrac{\sigma}{x}\right)^{1-\beta}}\frac{d\sigma}{x}\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)}\leqslant K\|f\|_{C^{\beta}([0,1];E)}\,.
\end{aligned}$$

$I_6(x)$ se traite comme $I_5(x)$.
Et de plus on a

$$\begin{aligned}
&r^{\beta}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\left[e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}f(1)+Q_{\omega}(x)^{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}u_{1}\right]\\
=\;&\frac{-r^{\beta}}{2\pi i}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\cdot\\
&\int_{\Gamma}e^{(1-x)z}\frac{1}{z}\left(Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}-Q_{\omega}(1)(Q_{\omega}(1)-zI)^{-1}\right)f(1)\,dz\\
&-\frac{r^{\beta}}{2\pi i}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\cdot\\
&\int_{\Gamma}e^{(1-x)z}z\left(Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}-Q_{\omega}(1)(Q_{\omega}(1)-zI)^{-1}\right)u_{1}dz\\
&+r^{\beta}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}e^{(1-x)Q_{\omega}(1)}\left(Q_{\omega}(1)^{2}u_{1}+f(1)\right)\\
=\;&\frac{r^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{(1-x)z}\frac{z}{r-z}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(1)^{-1}\right)\cdot\\
&Q_{\omega}(1)(Q_{\omega}(1)-zI)^{-1}f(1)\,dz\\
&+\frac{r^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{(1-x)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(1)^{-1}\right)\cdot\\
&Q_{\omega}(1)(Q_{\omega}(1)-zI)^{-1}u_{1}dz\\
&+r^{\beta}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}e^{(1-x)Q_{\omega}(1)}\left(Q_{\omega}(1)^{2}u_{1}+f(1)\right)\\
&a_{1}(x)+b_{1}(x)+c_{1}(x)\,.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\|a_{1}(x)\|_{E}&\leqslant Kr^{\beta}\int_{\Gamma}e^{-(1-x)|z|}\frac{|z|}{|r-z|}\frac{(1-x)^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d|z|\,\|f(1)\|_{E}\\
&\leqslant Kr^{\beta}\int_{\Gamma}e^{-(1-x)|z|}\frac{(1-x)^{\alpha}}{|r-z|^{\beta}|r-z|^{1-\beta}|z|^{\mu-1}}d|z|\,\|f(1)\|_{E}\\
&\leqslant Kr^{\beta}\int_{\Gamma}e^{-(1-x)|z|}\frac{(1-x)^{\alpha}}{r^{\beta}|z|^{1-\beta}|z|^{\mu-1}}d|z|\,\|f(1)\|_{E}\\
&\leqslant K\int_{\Gamma}e^{-(1-x)|z|}\frac{(1-x)^{\alpha}}{|z|^{\mu-\beta}}d|z|\,\|f(1)\|_{E}\\
&\leqslant K\int_{\Gamma}e^{-\sigma}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{(1-x)}\right)^{\mu-\beta}}\frac{d\sigma}{(1-x)}\|f(1)\|_{E}\\
&\leqslant K(1-x)^{\alpha+\mu-1-\beta}\|f(1)\|_{E}\leqslant K\|f(1)\|_{E}\,,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|b_1(x)\|_E &\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma e^{-(1-x)|z|} \frac{|z|^2}{|r-z|} \frac{(1-x)^\alpha}{|z|^\mu} d|z| \, \|Q_\omega(1) u_1\|_E \\
&\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma e^{-(1-x)|z|} \frac{|z|^2 (1-x)^\alpha}{|r-z|^\beta |r-z|^{1-\beta} |z|^\mu} d|z| \, \|Q_\omega(1) u_1\|_E \\
&\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma e^{-(1-x)|z|} \frac{(1-x)^\alpha}{r^\beta |z|^{1-\beta} |z|^{\mu-2}} d|z| \, \|Q_\omega(1) u_1\|_E \\
&\leqslant K \int_\Gamma e^{-(1-x)|z|} \frac{(1-x)^\alpha}{|z|^{\mu-3-\beta}} d|z| \, \|Q_\omega(1) u_1\|_E \\
&\leqslant K \int_\Gamma e^{-\sigma} \frac{(1-x)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{(1-x)}\right)^{\mu-3-\beta}} \frac{d\sigma}{(1-x)} \|Q_\omega(1) u_1\|_E \\
&\leqslant K (1-x)^{\alpha+\mu-2-\beta} \|Q_\omega(1) u_1\|_E \\
&\leqslant K \|Q_\omega(1) u_1\|_E .
\end{aligned}$$

Et de plus on a

$$\begin{aligned}
&\left[Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} d_0 - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1} f(0)\right] \\
= \;& Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} d_0 + e^{xQ_\omega(x)} f(0) - e^{xQ_\omega(x)} Q_\omega(x) \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} f(0) \\
&+ Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} W(x) d_0 - e^{xQ_\omega(x)} H \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} W(x) f(0).
\end{aligned}$$

0n a $W(x) \in L(E)$ et $R[W(x)] \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D(Q_\omega(x)^k)$. Alors

$$\begin{aligned}
& r^\beta Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - rI)^{-1} \cdot \\
& \left[Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} d_0 - Q_\omega(0)^2 e^{xQ_\omega(0)} \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} d_0\right] \\
& + r^\beta Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - rI)^{-1} \cdot \\
& \left[Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} d_0 - Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} d_0\right] \\
& + r^\beta Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - rI)^{-1} \cdot \\
& \left[-e^{xQ_\omega(x)} Q_\omega(x) \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} f(0) + e^{xQ_\omega(0)} Q_\omega(0) \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} f(0)\right] \\
& + r^\beta Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - rI)^{-1} \cdot \\
& \left[-e^{xQ_\omega(x)} Q_\omega(x) \left(\overline{Q_\omega(x) - H}\right)^{-1} f(0) + e^{xQ_\omega(x)} Q_\omega(x) \left(\overline{Q_\omega(0) - H}\right)^{-1} f(0)\right] \\
& + r^\beta Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - rI)^{-1} \left[e^{xQ_\omega(x)} f(0) - e^{xQ_\omega(0)} f(0)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +r^{\beta}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\cdot \\
& e^{xQ_{\omega}(0)}\left[Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}d_{0}-Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}f(0)+f(0)\right] \\
= & -\frac{r^{\beta}}{2\pi i}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\int_{\Gamma}ze^{xz}\left(Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}-Q_{\omega}(0)(Q_{\omega}(0)-zI)^{-1}\right)\cdot \\
& \left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}d_{0}dz \\
& -\frac{r^{\beta}}{2\pi i}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\int_{\Gamma}ze^{xz}\left(Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}-Q_{\omega}(0)(Q_{\omega}(0)-zI)^{-1}\right)\cdot \\
& \left(\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}-\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\right)d_{0}dz \\
& -\frac{r^{\beta}}{2\pi i}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\int_{\Gamma}ze^{xz}Q_{\omega}(0)(Q_{\omega}(0)-zI)^{-1}\cdot \\
& \left(\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}-\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\right)d_{0}dz \\
& +\frac{r^{\beta}}{2\pi i}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\int_{\Gamma}e^{xz}\left(Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}-Q_{\omega}(0)(Q_{\omega}(0)-zI)^{-1}\right)\cdot \\
& \left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}f(0)dz \\
& +\frac{r^{\beta}}{2\pi i}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\int_{\Gamma}e^{xz}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}\cdot \\
& \left(\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}-\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\right)f(0)dz \\
& -\frac{r^{\beta}}{2\pi i}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\int_{\Gamma}e^{xz}\left((Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}-(Q_{\omega}(0)-zI)^{-1}\right)f(0)dz \\
& +Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-rI)^{-1}\cdot \\
& e^{xQ_{\omega}(0)}\left[Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}d_{0}-Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}f(0)+f(0)\right] \\
= & \frac{r^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{xz}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(0)^{-1}\right)Q_{\omega}(0)(Q_{\omega}(0)-zI)^{-1}\cdot \\
& \left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}d_{0}dz \\
& -\frac{r^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{xz}\frac{z^{2}}{r-z}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(0)^{-1}\right)Q_{\omega}(0)(Q_{\omega}(0)-zI)^{-1}\cdot \\
& \left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}f(0)dz \\
& +\frac{r^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{xz}\frac{z}{r-z}Q_{\omega}(x)(Q_{\omega}(x)-zI)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(0)^{-1}\right)\cdot \\
& Q_{\omega}(0)(Q_{\omega}(0)-zI)^{-1}f(0)dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{r^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{xz}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(0)^{-1}\right)Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& \left(\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}-\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\right)d_{0}dz \\
& +\frac{r^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{xz}\frac{z^{2}}{r-z}Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-zI\right)^{-1}\left(\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}-\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\right)d_{0}dz \\
& -\frac{r^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{xz}\frac{z}{r-z}\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}-\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\right)f(0)dz \\
& +Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1}\cdot \\
& e^{xQ_{\omega}(0)}\left[Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}d_{0}-Q_{\omega}(0)\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}f(0)+f(0)\right] \\
= \; & \sum_{i=1}^{7}J_{i}(x).
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
& J_{1}(x)+J_{2}(x)+J_{3}(x) \\
= \; & \frac{r^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{xz}\frac{z}{r-z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(0)^{-1}\right)Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& \left[Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}-Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right)+f(0)\right]dz,
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
& \left\|J_{1}(x)+J_{2}(x)+J_{3}(x)\right\|_{E} \\
\leqslant \; & Kr^{\beta}\int_{\Gamma} e^{-x|z|}\frac{|z|}{|r-z|}\frac{x^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d|z|\left\|Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}-Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right)+f(0)\right\|_{E} \\
\leqslant \; & Kr^{\beta}\int_{\Gamma} e^{-x|z|}\frac{x^{\alpha}}{|r-z|^{\beta}|r-z|^{1-\beta}|z|^{\mu-1}}d|z|\cdot \\
& \left\|Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}-Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right)+f(0)\right\|_{E} \\
\leqslant \; & K\int_{\Gamma} e^{-x|z|}\frac{x^{\alpha}}{|z|^{\mu-\beta}}d|z|\left\|Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}-Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right)+f(0)\right\|_{E} \\
\leqslant \; & K\int_{\Gamma} e^{-\sigma}\frac{x^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{x}\right)^{\mu-\beta}}\frac{d\sigma}{x}\left\|Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}-Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right)+f(0)\right\|_{E} \\
\leqslant \; & Kx^{\alpha+\mu-1-\beta}\left\|Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}-Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right)+f(0)\right\|_{E} \\
\leqslant \; & K\left\|Q_{\omega}(0)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}-Q_{\omega}(0)^{-1}f(0)\right)+f(0)\right\|_{E},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\|J_4(x)\|_E &\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma e^{-x|z|} \frac{|z|^3}{|r-z|} \frac{x^\alpha}{|z|^\mu} x^{\alpha+\mu} d|z| \, \|d_0\|_E \\
&\leqslant Kr^\beta \int_\Gamma e^{-x|z|} \frac{x^{2\alpha+\mu}}{|r-z|^\beta |r-z|^{1-\beta} |z|^{\mu-3}} d|z| \, \|d_0\|_E \\
&\leqslant K \int_\Gamma e^{-x|z|} \frac{x^{2\alpha+\mu}}{|z|^{\mu-2-\beta}} d|z| \, \|d_0\|_E \\
&\leqslant K \int_\Gamma e^{-\sigma} \frac{x^{2\alpha+\mu}}{\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu-2-\beta}} \frac{d\sigma}{x} \, \|d_0\|_E \\
&\leqslant Kx^{2(\alpha+\mu-2)+1-\beta} \|d_0\|_E \leqslant K \|d_0\|_E .
\end{aligned}$$

De même pour les autres termes.
Finalement si

$$\begin{aligned}
& G(d_0, u_1, f)(x) + f(x) \\
\in \quad & B\left(D_{A(x)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right)\right) \\
\iff \quad & \begin{cases} e^{xQ_\omega(0)} \left[Q_\omega(0)^2 (\overline{Q_\omega(0) - H})^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0)\right] \in C^\beta([0,1]; E) \\ e^{(1-x)Q_\omega(1)} (A_\omega(1) u_1 - f(1)) \in C^\beta([0,1]; E), \end{cases} \\
\iff \quad & \begin{cases} Q_\omega(0)^2 (\overline{Q_\omega(0) - H})^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \in D(Q_\omega(0), E)_{1-\beta,+\infty} \\ A_\omega(1) u_1 - f(1) \in D(Q_\omega(1), E)_{1-\beta,+\infty} \end{cases} \\
\iff \quad & \begin{cases} Q_\omega(0)^2 (\overline{Q_\omega(0) - H})^{-1} (d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)) + f(0) \in D(A_\omega(0), E)_{1-\frac{\beta}{2},+\infty} \\ (A_\omega(1) u_1 - f(1)) \in D(A_\omega(1), E)_{1-\frac{\beta}{2},+\infty} . \end{cases}
\end{aligned}$$

$\square$

0.12.4 Théorème de régularité maximale

On donne maintenant le théorème de régularité maximale qui englobe toutes les propositions précédentes.

$$w + P_\omega w = G(d_0, u_1, f), \quad \text{où } w = Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot).$$

Théorème 0.12.1 *Soit $f \in C^\beta([0,1]; E)$ où $\beta \in]0, \alpha+\mu-2]$ et soit $(\overline{Q_\omega(0) - H})^{-1} d_0 \in D_{Q_\omega(0)} \cap D(H)$, $u_1 \in D_{A(1)}$. On suppose de plus que les hypothèses (0.11.2)∼(0.11.7) sont vérifieés et :*

$$\begin{cases} Q_\omega(0)(\overline{Q_\omega(0) - H})^{-1} [d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)] \in D(Q_\omega(0)) \\ Q_\omega(0)^2 (\overline{Q_\omega(0) - H})^{-1} [d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)] + f(0) \in D_{A(0)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right) \\ A_\omega(1) u_1 - f(1) \in D_{A(1)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right), \end{cases}$$

alors il existe $\omega^* > 0$ tel que $\forall\omega \geqslant \omega^*$, alors la solution $w(\cdot) = Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot)$ de l'équation(0.11.10) vérifie :

1. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in C([0,1];E)$
2. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in C^\beta([0,1];E)$
3. $u'' \in C^\beta([0,1];E)$
4. $u'' \in C([0,1];E) \cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\dfrac{\beta}{2},+\infty\right)\right)$.

Preuve. La démonstration est la réunion de toutes les propositions précédentes pour les points (1) et (2).
Pour les points (3) (4) on écrit que :

$$\begin{aligned} u''(\cdot) &= f(\cdot) + Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \\ &= f(\cdot) + [G(d_0;u_1;f)(\cdot) - (P_\omega w)(\cdot)] \\ &= (f(\cdot) + G(d_0,u_1,f)(\cdot)) - (P_\omega w)(\cdot). \end{aligned}$$

□

0.13 Le problème approché

On a montré, par un raisonnement heuristique, au chapitre 1, que l'existence d'une solution stricte du problème (0.11.1) implique sa représentation par la formule (0.11.10) à partir d'un certain $\omega \geqslant \omega^*$. On va confirmer maintenant cette existence en considérant la famille de problèmes approchés suivants :

$$\begin{cases} u_n''(x) + A_n(x)u_n(x) - \omega u_n(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u_n'(0) - Hu_n(0) = d_0 \\ u_n(1) = u_1, \end{cases} \tag{0.13.1}$$

On pose, pour $x \in [0,1]$,

$$A_{\omega,n}(x) = A_n(x) - \omega I \qquad \text{et} \qquad Q_{\omega,n}(x) = -(-A_{\omega,n}(x))^{1/2},$$

et on considère la famille des approchants de Yosida de $(Q_\omega(x))_{x\in[0,1]}$ définie par :

$$Q_{\omega,n}(x) = -n\,Q_\omega(x)\,(Q_\omega(x) - nI)^{-1},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Par un calcul classique on a

$$(Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} = \frac{-1}{n+z}(Q_\omega(x) - nI)\left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}.$$

Lemme 0.13.1 *La famille $(Q_{\omega,n}(x))_{x\in[0,1]}$ vérifie aussi l'hypothèse (0.11.3) uniformément par rapport à n :*

$$\left\|Q_{\omega,n}(x)(Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1}\left(Q_{\omega,n}(x)^{-1} - Q_{\omega,n}(s)^{-1}\right)\right\|_{L(E)} \leqslant K\frac{|s-x|^\alpha}{|z+\omega|^\mu}. \tag{0.13.2}$$

Preuve. On peut écrire que

$$
\begin{aligned}
& Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega,n}(x)^{-1}-Q_{\omega,n}(s)^{-1}\right) \\
= \; & \frac{n}{n+z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\left[Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(s)^{-1}\right],
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
& \left\|Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega,n}(x)^{-1}-Q_{\omega,n}(s)^{-1}\right)\right\|_{L(E)} \\
\leqslant \; & K\frac{n}{|n+z|}\frac{|s-x|^{\alpha}}{\left|\dfrac{nz}{n+z}+\omega\right|^{\mu}} \\
\leqslant \; & K\frac{|s-x|^{\alpha}}{|z+\omega|^{\mu}}.
\end{aligned}
$$

Concernant le problème (0.13.1) on a le résultat. □

Proposition 0.13.1 *On suppose que* $f\in C\left([0,1];E\right)$, $\left(\overline{Q_{\omega}(0)-H}\right)^{-1}d_0\in D_{Q_{\omega}(0)}\cap D\left(H\right)$ *et* $u_1\in D_{A(1)}$. *Alors il existe* $\omega\left(n\right)$ *tel que* $\forall\omega>\omega\left(n\right)$, *le problème (0.13.1) admet une unique solution* $u_n\in C^2\left([0,1];E\right)$.

ğ**Preuve.** En effet on a

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u_n''(x)-\omega u_n(x)=f(x)-A_n(x)u_n(x), \quad x\in\left]0,1\right[\\
u_n'(0)-Hu_n(0)=d_0 \\
u_n(1)=u_1.
\end{array}
\right.
$$

Par analogie avec la résolution du problème (1)-(2), on en déduit que u_n vérifie l'équation intégrale suivante

$$
\begin{aligned}
& u_n\left(x\right)=e^{xQ_{\omega}(x)}\left[\left(\overline{\Lambda_{\omega}\left(x\right)}\right)^{-1}d_0+T_{\omega}\left(x\right)e^{Q_{\omega}(x)}u_1\right] \\
& +\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega}(x)}T_{\omega}\left(x\right)Q_{\omega}\left(x\right)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_{\omega}(x)}\left(f\left(s\right)-A_n\left(s\right)u_n\left(s\right)\right)ds \\
& -\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega}(x)}T_{\omega}\left(x\right)e^{Q_{\omega}(x)}Q_{\omega}\left(x\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_{\omega}(x)}\left(f\left(s\right)-A_n\left(s\right)u_n\left(s\right)\right)ds \\
& +e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}\left[\left(I-T_{\omega}\left(x\right)e^{2Q_{\omega}(x)}\right)u_1-\left(\overline{\Lambda_{\omega}\left(x\right)}\right)^{-1}e^{Q_{\omega}(x)}d_0\right] \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}T_{\omega}\left(x\right)e^{Q_{\omega}(x)}Q_{\omega}\left(x\right)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_{\omega}(x)}\left(f\left(s\right)-A_n\left(s\right)u_n\left(s\right)\right)ds \\
& +\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}T_{\omega}\left(x\right)e^{2Q_{\omega}(x)}Q_{\omega}\left(x\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_{\omega}(x)}\left(f\left(s\right)-A_n\left(s\right)u_n\left(s\right)\right)ds
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(1-s)Q_{\omega}(x)}\left(f(s)-A_{n}(s)\,u_{n}(s)\right)ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{x}e^{(x-s)Q_{\omega}(x)}\left(f(s)-A_{n}(s)\,u_{n}(s)\right)ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{x}^{1}e^{(s-x)Q_{\omega}(x)}\left(f(s)-A_{n}(s)\,u_{n}(s)\right)ds.
\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
&u_{n}(x)+\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\,Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{sQ_{\omega}(x)}A_{n}(s)\,u_{n}(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\,Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(2-s)Q_{\omega}(x)}A_{n}(s)\,u_{n}(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\,Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(1+s)Q_{\omega}(x)}A_{n}(s)\,u_{n}(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\,Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(3-s)Q_{\omega}(x)}A_{n}(s)\,u_{n}(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(1-s)Q_{\omega}(x)}A_{n}(s)\,u_{n}(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{x}e^{(x-s)Q_{\omega}(x)}A_{n}(s)\,u_{n}(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{x}^{1}e^{(s-x)Q_{\omega}(x)}A_{n}(s)\,u_{n}(s)\,ds\\
=\;&e^{xQ_{\omega}(x)}\left[\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1}d_{0}+T_{\omega}(x)\,e^{Q_{\omega}(x)}u_{1}\right]\\
&+e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}\left[\left(I-T_{\omega}(x)\,e^{2Q_{\omega}(x)}\right)u_{1}-\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1}e^{Q_{\omega}(x)}d_{0}\right]\\
&+\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\,Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{sQ_{\omega}(x)}f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\,Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(2-s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\,Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(1+s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}T_{\omega}(x)\,Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(3-s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(1-s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{0}^{x}e^{(x-s)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega}(x)^{-1}\int_{x}^{1}e^{(s-x)Q_{\omega}(x)}f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \|A_n(s)\|_{L(E)} &= \left\| nA(s)(A(s)-n)^{-1} \right\|_{L(E)} \\ &\leqslant n \left\| I + n(A(s)-n)^{-1} \right\|_{L(E)} \\ &\leqslant n(1+K) \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2} e^{xQ_\omega(x)} T_\omega(x) Q_\omega(x)^{-1} \int_0^1 e^{sQ_\omega(x)} A_n(s) u_n(s) \, ds \right\|_E \\ \leqslant \;& (1+K)n \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 Q_\omega(x)^{-1} e^{sQ_\omega(x)} ds \right) \sup_{s\in[0,1]} \|u_n(s)\|_E \\ \leqslant \;& \frac{n(1+K)}{\sqrt{\omega}} \sup_{s\in[0,1]} \|u_n(s)\|_E , \end{aligned}$$

de même on a

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2} e^{(1-x)Q_\omega(x)} Q_\omega(x)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)} A_n(s) u_n(s) \, ds \right\|_E \\ \leqslant \;& \frac{n(1+K)}{\sqrt{\omega}} \sup_{s\in[0,1]} \|u_n(s)\|_E . \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2} Q_\omega(x)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)} A_n(s) u_n(s) \, ds \right\|_E \\ \leqslant \;& (1+K)n \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x Q_\omega(x)^{-1} e^{(x-s)Q_\omega(x)} ds \right) \sup_{s\in[0,1]} \|u_n(s)\|_E \\ \leqslant \;& \frac{n(1+K)}{\sqrt{\omega}} \sup_{s\in[0,1]} \|u_n(s)\|_E , \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2} Q_\omega(x)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega(x)} A_n(s) u_n(s) \, ds \right\|_E \\ \leqslant \;& \frac{n(1+K)}{\sqrt{\omega}} \sup_{s\in[0,1]} \|u_n(s)\|_E . \end{aligned}$$

Ce qui permet l'inversibilité de l'équation (0.13.2) en choisissant $\omega = \omega(n)$ tel que

$$\frac{n(1+K)}{\sqrt{\omega(n)}} < 1;$$

dans ce cas $u_n \in C([0,1];E)$.

La famille $(A_n(x))_{x\in[0;1]}$ est bornée, de plus

$$u_n''(x) = f(x) - A_n(x)u_n(x) + \omega u_n(x).$$

Donc pour tout $\omega \geqslant \omega(n)$, le problème (0.11.10) admet une solution unique $u_n \in C^2([0,1];E)$.

$\square$

Proposition 0.13.2 *Il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists K(n) > 0$:*

$$\|u_n\|_{C([0,1];E)} \leqslant \frac{K(n)}{\sqrt{\omega}}\left(\|f\|_{C([0,1];E)} + \|d_0\|_E + \|u_1\|_E\right),$$

et ceci pour tout $u_n \in C^2([0,1];E)$, $u_n'(0) - Hu_n(0) = d_0$ et $u_n(1) = u_1$.

Preuve. Par le même raisonnement qu'au chapitre (2), u_n vérifie l'équation intégrale :

$$w_n + P_{\omega,n}w_n = G_n(d_0, u_1, f), \tag{0.13.3}$$

où

$$w_n = Q_{\omega,n}(\cdot)^2 u_n(\cdot),$$

d'où, pour $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
&(P_{\omega,n}w_n)(x)\\
=\;& \frac{1}{2}T_{\omega,n}(x)\, e^{xQ_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{sQ_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds\\
&-\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}T_{\omega,n}(x)\, e^{Q_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}T_{\omega,n}(x)\, e^{Q_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{sQ_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds\\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}T_{\omega,n}(x)\, e^{2Q_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)}\,.\\
&\left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^x Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(x-s)Q_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds\\
&+\frac{1}{2}\int_x^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(s-x)Q_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
G_n(d_0,u_1,f)(x) &= \frac{1}{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}T_{\omega,n}(x)\, Q_{\omega,n}(x) \int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)} f(s)\, ds\\
&-\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}T_{\omega,n}(x)\, Q_{\omega,n}(x) \int_0^1 e^{(2-s)Q_{\omega,n}(x)} f(s)\, ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}T_{\omega,n}(x)\,Q_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{(1+s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}T_{\omega,n}(x)\,Q_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{(3-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}Q_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\int_0^x e^{(x-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\int_x^1 e^{(s-x)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&+Q_{\omega,n}(x)^2\,e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left[\left(\overline{\Lambda_{\omega,n}(x)}\right)^{-1}d_0+T_{\omega,n}(x)\,e^{Q_{\omega,n}(x)}u_1\right]\\
&+Q_{\omega,n}(x)^2\,e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}\left[\left(I-T_{\omega,n}(x)\,e^{2Q_{\omega,n}(x)}\right)u_1-\left(\overline{\Lambda_{\omega,n}(x)}\right)^{-1}e^{Q_{\omega,n}(x)}d_0\right],
\end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} T_{\omega,n}(x)=(Q_{\omega,n}(x)+H)\left(\overline{\Lambda_{\omega,n}(x)}\right)^{-1}\\ Q_{\omega,n}(x)=-n\;Q_\omega(x)\,(\;Q_\omega(x)-nI)^{-1}\,,\end{cases}$$

sont des opérateurs bornés, pour tout $x\in[0,1]$;d'autre part, pour tout $x\in[0,1]$ et $z\in\Gamma$, on a

$$Q_{\omega,n}(x)\,(Q_{\omega,n}(x)-zI)^{-1}=\left\|\frac{n}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\right\|_{L(E)}\leqslant\frac{K(n)}{|z|};$$

ainsi

$$\left\|\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}T_{\omega,n}(x)\,Q_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\right\|_E\leqslant K(n)\,\|f\|_{C([0,1];E)}\,,$$

ce qui permet de déduire la continuité de $G_n(d_0,u_1,f)$. On fait de même pour les autres termes. On obtient alors

$$\|G_n(d_0,u_1,f)\|\leqslant K(n)\left(\|d_0\|_E+\|u_1\|_E+\|f\|_{C([0,1];E)}\right).$$

En se basant sur l'hypothèse (0.13.2) et du chapitre (1), on montre qu'il existe $\omega^*>0$ tel que pour tout $\omega\geqslant\omega^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$, l'opérateur $P_{\omega,n}$ est inversible et

$$u_n(x)=-(A(x)-\omega I)^{-1}(I+P_{\omega,n})^{-1}G_n(d_0,u_1,f)(x)\,.$$

□

Lemme 0.13.2 *Il existe $\omega^*>0$ tel que pour tout $\omega\geqslant\omega^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$, le problème approché (0.13.3) admet une solution unique $u_n\in C^2([0,1];E)$ et de plus*

$$u_n(x)=-(A(x)-\omega I)^{-1}(I+P_{\omega,n})^{-1}G_n(d_0,u_1,f)(x)\,.$$

Preuve. La proposition 0.13.1 montre qu'il existe $u_n \in C^2([0,1];E)$ solution de problème (0.13.1) pour tout $\omega \geqslant \omega(n)$. Ensuite grâce à l'estimation de la proposition 0.13.2, on a que u_n est solution de problème (0.11.10) pour $\omega \in \left[K(n)\left(1-\frac{1}{K(n)}\right), K(n)\left(1+\frac{1}{K(n)}\right)\right]$. Il suffit alors de réitérer ce raisonnement pour atteindre ω^*. □

Maintenant on doit étudier la convergence des opérateurs $G_n(d_0,u_1,f)$ et $P_{\omega,n}$ quand $n \longrightarrow +\infty$. On aura besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 0.13.3 *Pour tout $x \in [0,1]$, $z \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\begin{aligned}
&Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}-Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\\
= &-\frac{z}{n+z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1},
\end{aligned}$$

où $\left(Q_{\omega,n}(x)\right)_{x\in[0,1]}$ est la famille des approchants de Yosida de $\left(Q_{\omega}(x)\right)_{x\in[0,1]}$.

Preuve. Soient $x \in [0,1]$, $z \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a

$$\begin{aligned}
&Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}-Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\\
= &\ z\left(\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}-\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\right)\\
= &-z\left[\frac{1}{n+z}\left(Q_{\omega}(x)-nI\right)\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}+\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\right]\\
= &-\frac{z}{n+z}\left[\left(Q_{\omega}(x)-nI\right)\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}+(n+z)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\right]\\
= &-\frac{z}{n+z}\left[n\left(\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}-\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\right)+I\right.\\
&\left.+z\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}+\frac{nz}{n+z}\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\right]\\
= &-\frac{z}{n+z}\left[\frac{nz^2}{n+z}\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}+I\right.\\
&\left.+z\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}+\frac{nz}{n+z}\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\right]\\
= &-\frac{z}{n+z}\left[\left(I+\frac{nz}{n+z}\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\right)\left(I+z\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\right)\right]\\
= &-\frac{z}{n+z}\left[\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}+\frac{nz}{n+z}\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\cdot\right.\\
&\left.\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}+z\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\right]\\
= &-\frac{z}{n+z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 0.13.4 *Pour tout* $x \in [0,1]$, $z \in \Gamma$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x) - zI\right)^{-1} \longrightarrow Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1},$$

quand $n \longrightarrow +\infty$.

Preuve. Soit $x \in [0,1]$. Comme

$$\begin{cases} Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x) - zI\right)^{-1} = I + z\left(Q_{\omega,n}(x) - zI\right)^{-1} \\ Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} = I + z\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1}, \end{cases}$$

il suffit de montrer que

$$\left(Q_{\omega,n}(x) - zI\right)^{-1} \longrightarrow \left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1}, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} \left(Q_{\omega,n}(x) - zI\right)^{-1} &= -\frac{1}{n+z}\left(Q_\omega(x) - nI\right)\left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{n+z}I + \frac{n^2}{(n+z)^2}\left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\left\| \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} - \left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} \right\|_{L(E)} \\ = &\left\| \frac{-z^2}{n+z}\left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1} \right\|_{L(E)} \\ \leqslant &\frac{K|z|^2}{|n+z|}\frac{|n+z|}{n|z|}\frac{1}{|z|} \\ \leqslant &\frac{K}{n}. \end{aligned}$$

Donc $\left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} \longrightarrow \left(Q_\omega(x) - zI\right)^{-1}$, quand $n \longrightarrow +\infty$ d'ou le résultat. □

Lemme 0.13.5 *Pour tout* $x \in [0,1]$, $z \in \Gamma$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$T_{\omega,n}(x) \longrightarrow T_\omega(x), \qquad \textit{quand } n \longrightarrow +\infty,$$

et

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,n}(x)}\right)^{-1} \longrightarrow \left(\overline{\Lambda_\omega(x)}\right)^{-1}, \qquad \textit{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Il suffira d'écrire

$$
\begin{aligned}
& \left(Q_{\omega,n}(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_{\omega,n}(x)}\right)^{-1}-\left(Q_{\omega}(x)+H\right)\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1} \\
= \; & \left(Q_{\omega,n}(x)+H\right)\left[\left(\overline{\Lambda_{\omega,n}(x)}\right)^{-1}-\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1}\right] \\
& +\left[(Q_{\omega,n}(x)-(Q_{\omega}(x)\right]\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

d'utiliser les propriétés des approchants de Yoshida (voir Pazy [29], page 10) et les propriétés de $\left(\overline{\Lambda_{\omega}(x)}\right)^{-1}$.
On va étudier maintenant les convergences de $G_n(d_0,u_1,f)$ et de $P_{\omega,n}$ quand n tend vers l'infini.

Proposition 0.13.3 *Soient* $\beta\in\left]0,\alpha+\mu-2\right]$, $(\overline{Q_\omega(0)-H})^{-1}d_0\in D_{Q_\omega(0)}\cap D(H)$, $u_1\in D_{A(1)}$ *et* $f\in C^\beta([0,1];E)$. *Alors pour*

$$
\begin{cases}
Q_\omega(0)(\overline{Q_\omega(0)-H})^{-1}\left(d_0-Q_\omega(0)^{-1}f(0)\right)\in D\left(Q_\omega(0)\right) \\[2mm]
Q_\omega(0)^2(\overline{Q_\omega(0)-H})^{-1}\left(d_0-Q_\omega(0)^{-1}f(0)\right)+f(0)\in\overline{D_{Q_\omega(0)}} \\[2mm]
A_\omega(1)\,u_1-f(1)\in\overline{D_{Q_\omega(1)}},
\end{cases}
$$

on a

$$
G_n\longrightarrow G,\ \text{quand } n\longrightarrow+\infty\ \text{dans } C([0,1];E).
$$

Preuve. Pour tout $x\in[0,1]$ et en utilisant l'identité

$$
\begin{aligned}
& Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}-Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1} \\
= \; & -\frac{z}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

on peut écrire que

$$
\begin{aligned}
& G_n(d_0,u_1,f)(x)-G(d_0,u_1,f)(x) \\
= \; & \frac{-1}{4\pi i}T_{\omega,n}(x)\int_\Gamma\int_0^1 e^{(x+s)z}Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(0)\right)dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}T_\omega(x)\int_\Gamma\int_0^1 e^{(x+s)z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(0)\right)dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma\int_0^1 e^{(2-x-s)z}Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(1)\right)dsdz \\
& -\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma\int_0^1 e^{(2-x-s)z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(1)\right)dsdz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\int_{0}^{x} e^{(x-s)z}Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(0)\right)dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\int_{0}^{x} e^{(x-s)z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(0)\right)dsdz \\
& -\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\int_{x}^{1} e^{(s-x)z}Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(1)\right)dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}\int_{\gamma}\int_{x}^{1} e^{(s-x)z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(f(s)-f(1)\right)dsdz \\
& +\left[Q_{\omega,n}(x)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1}W(x)d_0-Q_{\omega}(x)^{2}e^{xQ_{\omega}(x)}\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}W(x)d_0\right] \\
& +\left[-e^{xQ_{\omega,n}(x)}H\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1}W(x)f(0)+e^{xQ_{\omega}(x)}H\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}W(x)f(0)\right] \\
& +\left[-e^{xQ_{\omega,n}(x)}Q_{\omega,n}(x)\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1}f(0)+e^{xQ_{\omega}(x)}Q_{\omega}(x)\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}f(0)\right] \\
& +\left[Q_{\omega,n}(x)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1}d_0-Q_{\omega}(x)^{2}e^{xQ_{\omega}(x)}\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}d_0\right] \\
& +\left[e^{xQ_{\omega,n}(x)}f(0)-e^{xQ_{\omega}(x)}f(0)\right]+\left[e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}f(1)-e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}f(1)\right] \\
& +\left[Q_{\omega,n}(x)^{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}u_1-Q_{\omega}(x)^{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}u_1\right] \\
& +R_n(x,f,d_0,u_1)-R(x,f,d_0,u_1) \\
= & \sum_{i=1}^{8}I_i(x) \\
& +\left[Q_{\omega,n}(x)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1}W(x)d_0-Q_{\omega}(x)^{2}e^{xQ_{\omega}(x)}\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}W(x)d_0\right] \\
& +\left[-e^{xQ_{\omega,n}(x)}H\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1}W(x)f(0)+e^{xQ_{\omega}(x)}H\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}W(x)f(0)\right] \\
& +\left[-e^{xQ_{\omega,n}(x)}Q_{\omega,n}(x)\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1}f(0)+e^{xQ_{\omega}(x)}Q_{\omega}(x)\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}f(0)\right] \\
& +\left[Q_{\omega,n}(x)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1}d_0-Q_{\omega}(x)^{2}e^{xQ_{\omega}(x)}\left(\overline{Q_{\omega}(x)-H}\right)^{-1}d_0\right] \\
& +\left[e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}f(1)-e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}f(1)\right] \\
& +\left[Q_{\omega,n}(x)^{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}u_1-Q_{\omega}(x)^{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}u_1\right] \\
& +R_n(x,f,d_0,u_1)-R(x,f,d_0,u_1).
\end{aligned}
$$

0n a

$$
\begin{aligned}
& I_1(x)+I_2(x) \\
= & \frac{1}{4\pi i}T_{\omega}(x)\int_{\Gamma}\int_{0}^{1} e^{(x+s)z}\left(Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}-Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}\right)\cdot \\
& \left(f(s)-f(0)\right)dsdz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{4\pi i}\left[T_\omega(x)-T_{\omega,n}(x)\right]\int_\Gamma\int_0^1 e^{(x+s)z}Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}(f(s)-f(0))\,dsdz \\
= \ & \frac{-1}{4\pi i}T_\omega(x)\int_\Gamma\int_0^1 e^{(x+s)z}\frac{z}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& (f(s)-f(0))\,dsdz \\
& +\frac{1}{4\pi i}\left[T_\omega(x)-T_{\omega,n}(x)\right]\int_\Gamma\int_0^1 e^{(x+s)z}Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}(f(s)-f(0))\,dsdz \\
= \ & a_1(x)+b_1(x),
\end{aligned}
$$

pour $a_1(x)$, on a

$$
\begin{aligned}
\|a_1(x)\|_E & \leqslant K\int_\Gamma \frac{|z|}{|n+z|}\left(\sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 e^{-(x+s)|z|}s^\beta ds\right)d|z|\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
& \leqslant K\int_\Gamma \frac{|z|}{|n+z|\,|z|^{1+\beta}}d|z|\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
& \leqslant \frac{K}{n^\beta}\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}\longrightarrow 0, \quad \text{quand } n\longrightarrow +\infty,
\end{aligned}
$$

pour $b_1(x)$, on a

$$
T_{\omega,n}(x)\longrightarrow T_\omega(x), \quad \text{quand } n\longrightarrow +\infty,
$$

donc

$$
\|b_1(x)\|_E\longrightarrow 0, \quad \text{quand } n\longrightarrow +\infty.
$$

Pour $I_3(x)+I_4(x)$, on a

$$
\begin{aligned}
& I_3(x)+I_4(x) \\
= \ & \frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma\int_0^1 e^{(2-x-s)z}\left(Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}-Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\right)\cdot \\
& (f(s)-f(1))\,dsdz \\
= \ & -\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma\int_0^1 e^{(2-x-s)z}\frac{z}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\cdot \\
& (f(s)-f(1))\,dsdz,
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\|I_3(x)+I_4(x)\|_E & \leqslant K\int_\Gamma \frac{|z|}{|n+z|}\left(\sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 e^{-(2-x-s)|z|}(1-s)^\beta ds\right)d|z|\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
& \leqslant K\int_\Gamma \frac{|z|}{|n+z|\,|z|^{1+\beta}}d|z|\,\|f\|_{C^\beta([0,1];E)} \\
& \leqslant \frac{K}{n^\beta}\|f\|_{C^\beta([0,1];E)}\longrightarrow 0, \ \text{quand } n\longrightarrow +\infty.
\end{aligned}
$$

Pour les autres intégrales le calcul est trop long ; il faut jumeler $(I_i(x)+I_{i+1}(x))$. On montre la convergence absolue en faisant le même découpage que celui utilisé pour la continuité du second membre $G(d_0, u_1, f)$ (voir la preuve de la proposition 0.11.2), ensuite on applique le théorème de la convergence dominée. Par exemple on a

$$\begin{aligned}
& e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)} f(1) - e^{(1-x)Q_\omega(x)} f(1) + Q_{\omega,n}(x)^2 e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)} u_1 - Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 \\
= & \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \left((Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} - (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \right) f(1)\, dz \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z e^{(1-x)z} \left(Q_{\omega,n}(x) (Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \right) u_1 dz \\
= & \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{1}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} \cdot \\
& Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(1)^{-1} \right) Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} f(1)\, dz \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{z^2}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} \cdot \\
& Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(1)^{-1} \right) Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} u_1 dz \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{1}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} f(1)\, dz \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{z^2}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} u_1 dz \\
= & \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{1}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \cdot \\
& \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(1)^{-1} \right) Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} \left[f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1 \right] dz \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{1}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} \cdot \\
& \left[f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1 \right] dz \\
= & a_1(x) + a_2(x).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\|a_1(x)\|_E & \leqslant \frac{K}{n} \int_\Gamma e^{-(1-x)|z|} \frac{(1-x)^\alpha}{|z|^{\mu+1}} d|z| \left\| f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1 \right\|_E \\
& \leqslant \frac{K}{n} \int_\Gamma e^{-\sigma} \frac{(1-x)^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{1-x} \right)^{\mu+1}} \frac{d\sigma}{(1-x)} \left\| f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1 \right\|_E \\
& \leqslant \frac{K}{n} (1-x)^{\alpha+\mu} \left\| f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1 \right\|_E \\
& \leqslant \frac{K}{n} \left\| f(1) + Q_\omega(1)^2 u_1 \right\|_E \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

On fait de même pour $a_2(x)$.

Et de plus on a

$$\begin{aligned}
&\left[Q_{\omega,n}(x)^2 e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1} d_0 - Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} d_0\right] \\
&+\left[-e^{xQ_{\omega,n}(x)}Q_{\omega,n}(x)\left(\overline{Q_{\omega,n}(x)-H}\right)^{-1} f(0) + e^{xQ_\omega(x)}Q_\omega(x)\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} f(0)\right] \\
&+\left[e^{xQ_{\omega,n}(x)}f(0) - e^{xQ_\omega(x)}f(0)\right] \\
= &\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^3}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-1}\right. \\
&\left.-Q_\omega(0)^{-1}\right)Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-zI\right)^{-1}\left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] d_0 dz \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^3}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-1}\right. \\
&\left.-Q_\omega(0)^{-1}\right)Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-zI\right)^{-1}\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} d_0 dz \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-zI\right)^{-1}\cdot \\
&\left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] d_0 dz \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-zI\right)^{-1}\cdot \\
&\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} d_0 dz \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-zI\right)^{-1}\cdot \\
&\left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] d_0 dz \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-zI\right)^{-1}\cdot \\
&\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} d_0 dz \\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-1}\right. \\
&\left.-Q_\omega(0)^{-1}\right)Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-zI\right)^{-1}\left[\left(\overline{Q_\omega(x)-H}\right)^{-1} - \left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1}\right] f(0)\, dz \\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-zI\right)^{-1}\cdot \\
&\left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}\right)Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-zI\right)^{-1}\left(\overline{Q_\omega(0)-H}\right)^{-1} f(0)dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{xz}\frac{z}{n+z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}.\\
&Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}\left(x\right)^{-1}-Q_{\omega}\left(0\right)^{-1}\right)Q_{\omega}\left(0\right)\left(Q_{\omega}\left(0\right)-zI\right)^{-1}f(0)dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{xz}\frac{1}{n+z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q_{\omega}\left(0\right)\left(Q_{\omega}\left(0\right)-zI\right)^{-1}f(0)dz\\
&+Q_{\omega,n}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(\left(\overline{Q_{\omega,n}\left(x\right)-H}\right)^{-1}-\left(\overline{Q_{\omega}\left(x\right)-H}\right)^{-1}\right)d_{0}\\
&-e^{xQ_{\omega,n}(x)}Q_{\omega,n}\left(x\right)\left(\left(\overline{Q_{\omega,n}\left(x\right)-H}\right)^{-1}-\left(\overline{Q_{\omega}\left(x\right)-H}\right)^{-1}\right)f\left(0\right)\\
=\ &\sum_{i=1}^{10}b_{i}\left(x\right).
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
&b_{2}\left(x\right)+b_{6}\left(x\right)+b_{7}\left(x\right)\\
=\ &\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{xz}\frac{z}{n+z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}\left(x\right)^{-1}\right.\\
&\left.-Q_{\omega}\left(0\right)^{-1}\right)Q_{\omega}\left(0\right)\left(Q_{\omega}\left(0\right)-zI\right)^{-1}\left[Q_{\omega}\left(0\right)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}\left(0\right)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}+Q_{\omega}\left(0\right)^{-1}f\left(0\right)\right)+f\left(0\right)\right],
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
&\left\Vert b_{2}\left(x\right)+b_{6}\left(x\right)+b_{7}(x)\right\Vert_{E}\\
\leqslant\ &\frac{K}{n}\int_{\Gamma}e^{-x|z|}\frac{x^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d\left|z\right|\left\Vert Q_{\omega}\left(0\right)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}\left(0\right)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}+Q_{\omega}\left(0\right)^{-1}f\left(0\right)\right)+f\left(0\right)\right\Vert_{E}\\
\leqslant\ &\frac{K}{n}\int_{\Gamma}e^{-\sigma}\frac{x^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\frac{d\sigma}{x}\left\Vert Q_{\omega}\left(0\right)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}\left(0\right)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}+Q_{\omega}\left(0\right)^{-1}f\left(0\right)\right)+f\left(0\right)\right\Vert_{E}\\
\leqslant\ &\frac{K}{n}x^{\alpha+\mu-1}\left\Vert Q_{\omega}\left(0\right)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}\left(0\right)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}+Q_{\omega}\left(0\right)^{-1}f\left(0\right)\right)+f\left(0\right)\right\Vert_{E}\\
\leqslant\ &\frac{K}{n}\left\Vert Q_{\omega}\left(0\right)^{2}\left(\overline{Q_{\omega}\left(0\right)-H}\right)^{-1}\left(d_{0}+Q_{\omega}\left(0\right)^{-1}f\left(0\right)\right)+f\left(0\right)\right\Vert_{E}\longrightarrow 0,\ \text{quand } n\longrightarrow+\infty.
\end{aligned}
$$

pour $b_{1}\left(x\right)$, on a

$$
\begin{aligned}
\left\Vert b_{1}\left(x\right)\right\Vert_{E}&\leqslant\frac{K}{n}\int_{\Gamma}e^{-x|z|}\left|z\right|^{2}\frac{x^{\alpha}}{|z|^{\mu}}x^{\alpha+\mu}d\left|z\right|\left\Vert d_{0}\right\Vert_{E}\\
&\leqslant\frac{K}{n}\int_{\Gamma}e^{-\sigma}\frac{x^{2\alpha+\mu}}{\left(\dfrac{\sigma}{x}\right)^{\mu-2}}\frac{d\sigma}{x}\left\Vert d_{0}\right\Vert_{E}\\
&\leqslant\frac{K}{n}x^{2(\alpha+\mu-2)+1}\left\Vert d_{0}\right\Vert_{E}\\
&\leqslant\frac{K}{n}\left\Vert d_{0}\right\Vert_{E}\longrightarrow 0,\ \text{quand } n\longrightarrow+\infty.
\end{aligned}
$$

De même pour les autres termes. □

Proposition 0.13.4 *Pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, on a*

i) $P_{\omega,n} \in L\left(C\left([0,1];E\right)\right)$ *et* $\left\|P_{\omega,n}\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

ii) $P_{\omega,n} w \longrightarrow P_\omega w$ *dans* $C\left([0,1];E\right)$, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

iii) $\left(I+P_{\omega,n}\right)^{-1} \in L\left(C\left([0,1];E\right)\right)$ *et*

$$\exists K>0 : \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \left\|\left(I+P_{\omega,n}\right)^{-1}\right\|_{L(C(E))} \leqslant K.$$

iv) $\left(I+P_{\omega,n}\right)^{-1} w \longrightarrow \left(I+P_\omega\right)^{-1} w$ *pour tout* $w \in C\left(E\right)$, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

Preuve. **i)** Même raisonnement que pour l'opérateur P_ω.
ii) C'est une conséquence de la convergence dominée.
iii) C'est une conséquence directe de 1.
iv) Soit $w \in C\left([0,1];E\right)$, on a

$$\begin{aligned}
& \left(I+Q_{\omega,n}\right)^{-1} w - \left(I+Q_\omega\right)^{-1} w \\
= \ & \left(I+Q_{\omega,n}\right)^{-1} \left[w - \left(I+Q_{\omega,n}\right)\left(I+Q_\omega\right)^{-1} w\right] \\
= \ & \left(I+Q_{\omega,n}\right)^{-1} \left[Q_\omega w - Q_{\omega,n} w\right]\left(I+Q_\omega\right)^{-1} w \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

□

Théorème 0.13.1 *Sous les hypothèses (0.11.2)∼(0.11.7). Soient $f \in C^\beta\left([0,1];E\right)$ avec $\beta \in \left]0, \alpha+\mu-2\right]$. On suppose que*

$$(\overline{Q_\omega(0)-H})^{-1} d_0 \in D_{Q_\omega(0)} \cap D\left(H\right) \quad et \quad u_1 \in D_{A(1)}.$$

Alors pour

$$\left\{\begin{array}{l}
Q_\omega(0)(\overline{Q_\omega(0)-H})^{-1}\left(d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)\right) \in D\left(Q_\omega\left(0\right)\right) \\
Q_\omega(0)^2(\overline{Q_\omega(0)-H})^{-1}\left(d_0 - Q_\omega(0)^{-1} f(0)\right) + f(0) \in \overline{D_{Q_\omega(0)}} \\
A_\omega\left(1\right) u_1 - f\left(1\right) \in \overline{D_{Q_\omega(1)}},
\end{array}\right.$$

et il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$ la fonction u définie par

$$u\left(x\right) = -\left(A\left(x\right) - \omega I\right)^{-1}\left(I+P_\omega\right)^{-1} G\left(d_0, u_1, f\right)\left(x\right),$$

est l'unique solution stricte du problème (0.11.1).

Preuve. Soit ω^* défini dans la proposition 0.13.2.Pour $\omega \geqslant \omega^*$, on pose

$$u\left(x\right) = -\left(A\left(x\right) - \omega I\right)^{-1}\left(I+P_\omega\right)^{-1} G\left(d_0, u_1, f\right)\left(x\right),$$

et soit

$$u_n\left(x\right) = -\left(A_n\left(x\right) - \omega I\right)^{-1}\left(I+P_{\omega,n}\right)^{-1} G_n\left(d_0, u_1, f\right)\left(x\right).$$

Alors u_n est une solution du problème approché (0.13.1) d'aprés le lemme 0.13.2 et de plus u_n est dans l'espace $C^2([0,1];E)$. Or on vient de voir que $u_n \longrightarrow u$ dans $C([0,1];E)$ d'une part et que

$$\begin{cases} u_n''(x) = f(x) - (A_n(x) - \omega I)\, u_n(x) \\ u_n'(0) - Hu_n(0) = d_0 \\ u_n(1) = u_1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} u_n''(x) = f(x) + (I + P_{\omega,n})^{-1} G_n(d_0, u_1, f)(x) \\ u_n'(0) - Hu_n(0) = d_0 \\ u_n(1) = u_1. \end{cases}$$

Et par passage à la limite, on a

$$u_n''(x) \longrightarrow f(x) + (I + P_\omega)^{-1} G(d_0, u_1, f)(x) = f(x) - (A(x) - \omega I)\, u(x).$$

Et donc

$$u''(x) = f(x) - (A(x) - \omega)\, u(x).$$

□

0.14 Exemples d'applications

On donne dans ce chapitre des exemples concrets en considérant les espaces $E = L^q(]0,1[)$, $(1 < q < +\infty)$, $E = C([0,1])$, $E = C(\overline{\Omega})$ et $E = L^p(\Omega)$, $(1 < q < +\infty)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 0.14.1 *Considérons l'espace de Banach $E = L^q(]0,1[)$, $(1 < q < +\infty)$ muni de sa norme naturelle. On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $Q(x) = -\sqrt{-A(x)}$ pour tout $x \in [0,1]$ par*

$$\begin{cases} D(Q(x)) = \{\varphi \in W^{2,q}(]0,1[) : \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0,\ \varphi(1) = 0\} \\ [(Q(x))\varphi](y) = \varphi''(y), \qquad y \in]0,1[, \end{cases}$$

où $b(x)$ est une fonction vérifiant :

$$\begin{cases} b(x) \geqslant b_0 \\ |b(x) - b(s)| \leqslant K\,|x-s|^{1+\varepsilon} \\ \varepsilon > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2q}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} D(A(x)) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in W^{4,p}(]0,1[) : \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0,\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi''(0) - b(x)\varphi'''(0) = 0, \quad \varphi''(1) = 0 \end{array} \right\} \\ (A(x)\varphi)(y) = -\varphi^{(4)}(y), \qquad y \in]0,1[. \end{cases} \tag{0.14.1}$$

Un calcul direct permet, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $\psi \in E$, de résoudre l'équation spectrale

$$Q(x)\varphi - z\varphi = \psi,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} \varphi''(y) - z\varphi(y) = \psi(y), \quad y \in]0,1[\\ \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$(Q(x) - zI)^{-1}\psi)(y) = \int_0^1 K_\rho(y,x,s)\psi(s)\,ds,$$

avec $\rho = \sqrt{z}$ (ici $\operatorname{Re}(\rho) > 0$) et le noyau de Green K_ρ est défini par

$$K_\rho(y,x,s) = -\begin{cases} \dfrac{\sinh\rho(1-y)[\sinh\rho s + b(x)\rho\cosh\rho s]}{\rho[\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho]} \ldots si \;\; 0 \leqslant s \leqslant y \\ \dfrac{\sinh\rho(1-s)[\sinh\rho y + b(x)\rho\cosh\rho y]}{\rho[\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho]} \ldots si \;\; y \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

L'opérateur $Q(x)$ est inversible, son inverse est borné et on a

$$\left(Q(x)^{-1}\psi\right)(y) = \int_0^1 K_0(y,x,s)\psi(s)\,ds,$$

avec

$$K_0(y,x,s) = -\begin{cases} \dfrac{(1-y)[s+b(x)]}{1+b(x)} \ldots si \;\; 0 \leqslant s \leqslant y \\ \dfrac{(1-s)[y+b(x)]}{1+b(x)} \ldots si \;\; y \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour tout x, $s \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} & Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1} - Q(s)^{-1}\right] \\ = \;& Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}Q(s) - I\right]Q(s)^{-1} \\ = \;& \left[(Q(x)-zI)^{-1}Q(s) - Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\right]Q(s)^{-1} \\ = \;& \left[(Q(x)-zI)^{-1}Q(s) - (Q(x)-zI+zI)(Q(x)-zI)^{-1}\right]Q(s)^{-1} \\ = \;& \left[(Q(x)-zI)^{-1}Q(s) - I - z(Q(x)-zI)^{-1}\right]Q(s)^{-1} \\ = \;& \left[(Q(x)-zI)^{-1}(Q(s)-zI) - I\right]Q(s)^{-1}. \end{aligned}$$

Soit $f \in E = L^q(]0,1[)$. On doit estimer :

$$\left\|\left[(Q(x)-zI)^{-1}(Q(s)-zI) - I\right]Q(s)^{-1}f\right\|_{L^q(]0,1[)}.$$

On pose

$$v = Q(s)^{-1}f,$$

et

$$u = (Q(x) - zI)^{-1} (Q(s) - zI) v.$$

d'où

$$Q(s) v = f,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} v''(y) = f(y) \\ v(0) - b(s) v'(0) = 0 \\ v(1) = 0; \end{cases}$$

$$v(y) = \int_0^1 K_0(y, s, \tau) f(\tau) d\tau.$$

De l'équation :

$$u = (Q(x) - zI)^{-1} (Q(s) - zI) v,$$

on a

$$\begin{cases} u''(y) - zu(y) = v''(y) - zv(y) \\ u(0) - b(x) u'(0) = 0 \\ u(1) = 0; \end{cases}$$

On doit estimer $\|u - v\|$ *.*
On a $u - v$ *solution du problème :*

$$\begin{cases} (u-v)''(y) - z(u-v)(y) = 0 \\ (u-v)(0) - b(x)(u-v)'(0) = (b(s) - b(x)) v'(0) \\ (u-v)(1) = 0; \end{cases}$$

posons $(b(s) - b(x)) v'(0) = g(s, x, v)$ *, alors :*

$$\begin{cases} \varphi''(y) - z\varphi(y) = 0 \\ \varphi(0) - b(x) \varphi'(0) = g(s, x, v) \\ \varphi(1) = 0, \end{cases}$$

la solution φ *s'écrit :*

$$\varphi(y) = \frac{[b(x) - b(s)] v'(0)}{\sinh\rho + \rho b(x) \cosh\rho} \sinh(1 - y)\rho.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$ *, on a (voir [1], p. 54)*

$$\begin{aligned} & |\sinh\rho + \rho b(x) \cosh\rho| \\ = & \left| \frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{2} [[(1 + \mathrm{Re}(\rho) b(x)) \cos\mathrm{Im}(\rho) - \mathrm{Im}(\rho) \sin\mathrm{Im}(\rho)] \right. \\ & +i [(1 + \mathrm{Re}(\rho) b(x)) \sin\mathrm{Im}(\rho) + \mathrm{Im}(\rho) \cos\mathrm{Im}(\rho)]] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{2}\left[\left[(\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)-1) \cos \operatorname{Im}(\rho)+\operatorname{Im}(\rho) \sin \operatorname{Im}(\rho)\right]\right. \\
& \left.\left.+i\left[(1-\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)) \sin \operatorname{Im}(\rho)+\operatorname{Im}(\rho) \cos \operatorname{Im}(\rho)\right]\right]\right| \\
\geqslant & \left|\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2}\left[\left[(1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)) \cos \operatorname{Im}(\rho)-\operatorname{Im}(\rho) \sin \operatorname{Im}(\rho)\right]\right.\right. \\
& \left.\left.+\ +i\left[(1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)) \sin \operatorname{Im}(\rho)+\operatorname{Im}(\rho) \cos \operatorname{Im}(\rho)\right]\right]\right| \\
& -\left|\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{2}\left[\left[(\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)-1) \cos \operatorname{Im}(\rho)+\operatorname{Im}(\rho) \sin \operatorname{Im}(\rho)\right]\right.\right. \\
& \left.\left.+i\left[(1-\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)) \sin \operatorname{Im}(\rho)+\operatorname{Im}(\rho) \cos \operatorname{Im}(\rho)\right]\right]\right| \\
= & \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2}\left[(1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x))^2+(\operatorname{Im}(\rho))^2\, b(x)^2\right]^{1/2} \\
& -\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{2}\left[(1-\operatorname{Re}(\rho)\, b(x))^2+(\operatorname{Im}(\rho))^2\, b(x)^2\right]^{1/2} \\
\geqslant & \sinh \operatorname{Re}(\rho)\left[1+(\operatorname{Re}(\rho))^2\, b(x)^2+2 \operatorname{Re}(\rho)\, b(x)\right]^{1/2},
\end{aligned}
$$

donc

$$
|\sinh \rho+\rho b(x) \cosh \rho| \geqslant \sinh \operatorname{Re}(\rho)\,[1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)],
$$

alors

$$
|\varphi(y)| \leqslant |b(x)-b(s)| \,.\, |v'(0)| \,.\, \frac{\sinh(1-y) \operatorname{Re}(\rho)}{\sinh \operatorname{Re}(\rho)\,[1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]},
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\frac{\sinh(1-y) \operatorname{Re}(\rho)}{\sinh \operatorname{Re}(\rho)\,[1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]} & = \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)(1-y)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)(1-y)}}{\left[e^{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right][1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]} \\
& = \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)(1-y)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)(1-y)}}{e^{\operatorname{Re}(\rho)}\left[1-e^{-2 \operatorname{Re}(\rho)}\right][1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]} \\
& = \frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho) y}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)(2-y)}}{\left[1-e^{-2 \operatorname{Re}(\rho)}\right][1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]} \\
& = \frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho) y}\left[1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)(2-y)}\right]}{\left[1-e^{-2 \operatorname{Re}(\rho)}\right][1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]} \\
& \leqslant \frac{C e^{-\operatorname{Re}(\rho) y}}{[1+\operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]},
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\left|e^{-\operatorname{Re}(\rho) y}\right|^q dy & = \frac{1}{q \operatorname{Re}(\rho)}\left[1-e^{-q \operatorname{Re}(\rho)}\right] \\
& \leqslant \frac{1}{q \operatorname{Re}(\rho)}.
\end{aligned}
$$

et de plus

$$
v(y)=\int_0^y \frac{(1-y)[\tau+b(s)]}{1+b(s)} f(\tau)\, d\tau+\int_y^1 \frac{(1-\tau)[y+b(s)]}{1+b(s)} f(\tau)\, d\tau,
$$

alors

$$v'(y) = -\int_0^y \frac{[\tau + b(s)]}{1+b(s)} f(\tau)\, d\tau + \int_y^1 \frac{(1-\tau)}{1+b(s)} f(\tau)\, d\tau,$$

alors

$$v'(0) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)}{1+b(s)} f(\tau)\, d\tau,$$

donc

$$\begin{aligned} |v'(0)| &\leqslant \left(\int_0^1 \left|\frac{(1-\tau)}{1+b(s)}\right|^r d\tau\right)^{1/r} \left(\int_0^1 |f(\tau)|^q\, d\tau\right)^{1/p} \\ &\leqslant C\, \|f\|_{L^q(]0,1[)} . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{L^q(]0,1[)} &= \|\varphi\|_{L^q(]0,1[)} \\ &\leqslant \frac{|b(x) - b(s)| \cdot |v'(0)|}{1 + \mathrm{Re}(\rho) \cdot b(x)} \cdot \frac{1}{q^{1/q}} \cdot \frac{1}{(\mathrm{Re}(\rho))^{1/q}} \\ &\leqslant \frac{C\,|x-s|^{1+\varepsilon}}{|z|^{1/2+1/2q}} \|f\|_{L^q(]0,1[)} . \end{aligned}$$

On définit l'opérateur H par $H = aI$, avec $a > 0$.

Remarque 0.14.1 *Comme $Q(x)$ est fermé pour tout $x \in [0,1]$ et aI est borné, alors*
Preuve.

$$\overline{Q(x) - aI} = Q(x) - aI.$$

Voir [17], p. 190, Theorem 1.1. □

Pour vérifier l'hypothèse (0.15.6), on doit prouver que

$$(Q(x) - aI)^{-1} Q(x)^{-1} = Q(x)^{-1} (Q(x) - aI)^{-1} .$$

On a

$$(Q(x) - aI)^{-1} = \left[Q(x)\left(I - aQ(x)^{-1}\right)\right]^{-1} = \left(I - aQ(x)^{-1}\right)^{-1} Q(x)^{-1} ,$$

on choisit a tel que

$$|a| < \frac{1}{\max\limits_{x\in[0,1]} \left\|Q(x)^{-1}\right\|_{L(E)}},$$

donc

$$\forall x \in [0,1], \quad \left\|aQ(x)^{-1}\right\|_{L(E)} < 1,$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} (Q(x) - aI)^{-1} Q(x)^{-1} &= \left(I - aQ(x)^{-1}\right)^{-1} Q(x)^{-2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k Q(x)^{-k}\right) Q(x)^{-2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k Q(x)^{-k-2} , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q(x)^{-1}(Q(x)-aI)^{-1} &= Q(x)^{-1}\left(I-aQ(x)^{-1}\right)^{-1}Q(x)^{-1} \\ &= Q(x)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a^kQ(x)^{-k}\right)Q(x)^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}a^kQ(x)^{-k-2}. \end{aligned}$$

Donc

$$(Q(x)-aI)^{-1}Q(x)^{-1}=Q(x)^{-1}(Q(x)-aI)^{-1}.$$

Montrons maintenant l'hypothèse (0.15.6) i.e

$$\left\|((Q(x)-aI))^{-1}-((Q(\tau)-aI))^{-1}\right\|_E\leqslant C|x-\tau|^{\alpha+\mu}.$$

En utilisant la théorie des sommes d'opérateurs de Da-Prato et Grisvard, on a

$$\begin{aligned} (Q(x)-aI)^{-1} &= \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma (Q(x)-\lambda I)^{-1}(-a+\lambda)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(Q(x)-\lambda I)^{-1}}{(-a+\lambda)}d\lambda, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & (Q(x)-aI)^{-1}-(Q(\tau)-aI)^{-1} \\ = & \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(Q(x)-\lambda I)^{-1}-(Q(\tau)-\lambda I)^{-1}}{(-a+\lambda)}d\lambda \\ = & \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{Q(x)(Q(x)-\lambda I)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]Q(\tau)(Q(\tau)-\lambda I)^{-1}}{(-a+\lambda)}d\lambda \\ = & \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{Q(x)(Q(x)-\lambda I)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]Q(\tau)(Q(\tau)-\lambda I)^{-1}}{(-a+\lambda)}d\lambda \\ & +\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{Q(x)(Q(x)-\lambda I)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right]Q(\tau)(Q(\tau)-\lambda I)^{-1}}{(-a+\lambda)}d\lambda \\ = & I_1+I_2, \end{aligned}$$

où

$$\Gamma_1=\left\{\lambda\in\Gamma:\ |\lambda|\leqslant\frac{1}{|x-\tau|}\right\}\quad et\quad \Gamma_2=\left\{\lambda\in\Gamma:\ |\lambda|\geqslant\frac{1}{|x-\tau|}\right\},$$

on a

$$\begin{aligned} \|I_1\|_E &\leqslant K\int_{\Gamma_1}\frac{|x-\tau|^\alpha}{|-a+\lambda||\lambda|^\mu}d|\lambda|, \\ &\leqslant K\int_{\frac{1}{2|x-\tau|}}^{\frac{1}{|x-\tau|}}\frac{|x-\tau|^\alpha}{|-a+\lambda||\lambda|^\mu}d|\lambda| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha}\int_{\frac{1}{2|x-\tau|}}^{\frac{1}{|x-\tau|}}\frac{d\left|\lambda\right|}{\left|\lambda\right|^{1+\mu}}\\
&\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha}\left[\frac{\left|\lambda\right|^{-\mu}}{-\mu}\right]_{\frac{1}{2|x-\tau|}}^{\frac{1}{|x-\tau|}}\\
&\leqslant \frac{K}{-\mu}\left|x-\tau\right|^{\alpha}\left[\left|x-\tau\right|^{\mu}-2^{\mu}\left|x-\tau\right|^{\mu}\right]\\
&\leqslant \frac{K}{\mu}\left|x-\tau\right|^{\alpha+\mu}\left[2^{\mu}-1\right]\\
&\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha+\mu},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\left\|I_2\right\|_E &\leqslant K\int_{\Gamma_2}\frac{\left|x-\tau\right|^{\alpha}}{\left|-a+\lambda\right|\left|\lambda\right|^{\mu}}d\left|\lambda\right|\\
&\leqslant K\int_{\Gamma_2}\frac{\left|x-\tau\right|^{\alpha}}{\left|\lambda\right|^{\mu+1}}d\left|\lambda\right|\\
&\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha}\int_{\frac{1}{|x-\tau|}}^{+\infty}\frac{d\left|\lambda\right|}{\left|\lambda\right|^{\mu+1}}\\
&\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha}\left[\left|\lambda\right|^{-\mu}\right]_{\frac{1}{|x-\tau|}}^{+\infty}\\
&\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha+\mu}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\left\|\left(Q\left(x\right)-aI\right)^{-1}-\left(Q\left(\tau\right)-aI\right)^{-1}\right\|_{L(E)}\leqslant C\left|x-\tau\right|^{\alpha+\mu}.$$

Alors les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7) sont vérifiées.
Finalement tous les résultats obtenus s'appliquent au problème concret quasi-elliptique suivant où $(\omega>0)$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,y\right)-\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}\left(x,y\right)-\omega u\left(x,y\right)=f\left(x,y\right), \quad \left(x,y\right)\in\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\\
\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(0,y\right)-au\left(0,y\right)=d_0\left(y\right), \quad u\left(1,y\right)=u_1\left(y\right),\ y\in\left[0,1\right]\\
u\left(x,0\right)-b\left(x\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(x,0\right)=0, \qquad =\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,1\right)=u\left(x,1\right)\\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,0\right)-b\left(x\right)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}\left(x,0\right)=0.
\end{cases}
$$

Exemple 0.14.2 *Considérons l'espace de Banach* $E=C\left(\left[0,1\right]\right)$ *muni de sa norme naturelle. On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés* $Q(x)=-\sqrt{-A\left(x\right)}$ *pour tout* $x\in\left[0,1\right]$ *par :*

$$
\begin{cases}
D\left(Q\left(x\right)\right)=\left\{\varphi\in C^2\left(\left[0,1\right]\right):\varphi\left(0\right)-b\left(x\right)\varphi'\left(0\right)=0,\ \varphi\left(1\right)=0\right\}\\
\left[\left(Q\left(x\right)\right)\varphi\right]\left(y\right)=\varphi''\left(y\right), \qquad y\in\left[0,1\right],
\end{cases}
$$

où $b(x)$ *est une fonction vérifiant :*

$$\begin{cases} b(x) \geqslant b_0 \\ |b(x) - b(s)| \leqslant K\,|x-s|^{1+\varepsilon} \\ \varepsilon > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2q}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} D(A(x)) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in C^4([0,1]) : \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0,\ \ \varphi(1) = 0 \\ \varphi''(0) - b(x)\varphi'''(0) = 0, \quad \varphi''(1) = 0 \end{array} \right\} \\ (A(x)\varphi)(y) = -\varphi^{(4)}(y), \qquad\qquad y \in [0,1]. \end{cases}$$

Un calcul direct permet, pour $z \in \mathbb{C} \diagdown \mathbb{R}_-$ *et* $\psi \in E$*, de résoudre l'équation spectrale*

$$Q(x)\varphi - z\varphi = \psi,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} \varphi''(y) - z\varphi(y) = \psi(y), \quad y \in]0,1[\\ \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$(Q(x) - zI)^{-1}\psi)(y) = \int_0^1 K_\rho(y,x,s)\,\psi(s)\,ds,$$

avec $\rho = \sqrt{z}$ *(ici* $\operatorname{Re}(\rho) > 0$*) et le noyau de Green* K_ρ *est défini par*

$$K_\rho(y,x,s) = -\begin{cases} \dfrac{\sinh\rho(1-y)\left[\sinh\rho s + b(x)\rho\cosh\rho s\right]}{\rho\left[\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho\right]} ...si \;\; 0 \leqslant s \leqslant y \\ \dfrac{\sinh\rho(1-s)\left[\sinh\rho y + b(x)\rho\cosh\rho y\right]}{\rho\left[\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho\right]} ...si \;\; y \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

L'opérateur $Q(x)$ *est inversible, son inverse est borné et on a*

$$\left(Q(x)^{-1}\psi\right)(y) = \int_0^1 K_0(y,x,s)\,\psi(s)\,ds,$$

avec

$$K_0(y,x,s) = -\begin{cases} \dfrac{(1-y)\left[s + b(x)\right]}{1 + b(x)} ...si \;\; 0 \leqslant s \leqslant y \\ \dfrac{(1-s)\left[y + b(x)\right]}{1 + b(x)} ...si \;\; y \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour tout $x,\ s \in [0,1]$*, on a*

$$Q(x)(Q(x) - zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1} - Q(s)^{-1}\right] = \left[(Q(x) - zI)^{-1}(Q(s) - zI) - I\right]Q(s)^{-1}.$$

Soit $f \in E = C([0,1])$. *On doit estimer :*

$$\left\| \left[(Q(x) - zI)^{-1} (Q(s) - zI) - I \right] Q(s)^{-1} f \right\|_{L^q(]0,1[)}.$$

On pose

$$v = Q(s)^{-1} f,$$

et

$$u = (Q(x) - zI)^{-1} (Q(s) - zI) v.$$

d'où

$$Q(s) v = f,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} v''(y) = f(y) \\ v(0) - b(s) v'(0) = 0 \\ v(1) = 0; \end{cases}$$

on en déduit que

$$v(y) = \int_0^1 K_0(y, s, \tau) f(\tau) \, d\tau.$$

De l'équation :

$$u = (Q(x) - zI)^{-1} (Q(s) - zI) v,$$

on a

$$\begin{cases} u''(y) - zu(y) = v''(y) - zv(y) \\ u(0) - b(x) u'(0) = 0 \\ u(1) = 0; \end{cases}$$

On doit estimer $\|u - v\|$.
On a $u - v$ *solution du problème :*

$$\begin{cases} (u-v)''(y) - z(u-v)(y) = 0 \\ (u-v)(0) - b(x)(u-v)'(0) = (b(s) - b(x)) v'(0) \\ (u-v)(1) = 0; \end{cases}$$

posons $(b(s) - b(x)) v'(0) = g(s, x, v)$, *alors :*

$$\begin{cases} \varphi''(y) - z\varphi(y) = 0 \\ \varphi(0) - b(x) \varphi'(0) = g(s, x, v) \\ \varphi(1) = 0, \end{cases}$$

la solution φ *s'écrit :*

$$\varphi(y) = \frac{[b(x) - b(s)] v'(0)}{\sinh \rho + \rho b(x) \cosh \rho} \sinh(1 - y) \rho.$$

Pour tout $x \in [0,1]$ *, on a (voir [1], p. 54)*

$$|\sinh \rho + \rho b(x) \cosh \rho| \geqslant \sinh \operatorname{Re}(\rho) [1 + \operatorname{Re}(\rho) b(x)],$$

alors

$$|\varphi(y)| \leqslant |b(x) - b(s)| . |v'(0)| . \frac{\sinh(1-y)\operatorname{Re}(\rho)}{\sinh \operatorname{Re}(\rho) [1 + \operatorname{Re}(\rho) b(x)]},$$

On a

$$\frac{\sinh(1-y)\operatorname{Re}(\rho)}{\sinh \operatorname{Re}(\rho) [1 + \operatorname{Re}(\rho) b(x)]} \leqslant \frac{Ce^{-\operatorname{Re}(\rho) y}}{[1 + \operatorname{Re}(\rho) b(x)]},$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| e^{-\operatorname{Re}(\rho) y} \right| dy &= \frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)} \left[1 - e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right] \\ &\leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}. \end{aligned}$$

et de plus

$$v(y) = \int_0^y \frac{(1-y)[\tau + b(s)]}{1 + b(s)} f(\tau) d\tau + \int_y^1 \frac{(1-\tau)[y + b(s)]}{1 + b(s)} f(\tau) d\tau,$$

alors

$$v'(y) = -\int_0^y \frac{[\tau + b(s)]}{1 + b(s)} f(\tau) d\tau + \int_y^1 \frac{(1-\tau)}{1 + b(s)} f(\tau) d\tau,$$

alors

$$v'(0) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)}{1 + b(s)} f(\tau) d\tau,$$

donc

$$\begin{aligned} |v'(0)| &\leqslant \int_0^1 \left| \frac{(1-\tau)}{1 + b(s)} f(\tau) \right| d\tau \\ &\leqslant C \|f\|_{C([0,1])}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{C([0,1])} &= \|\varphi\|_{C([0,1])} \\ &\leqslant \frac{|b(x) - b(s)| \cdot |v'(0)|}{1 + \operatorname{Re}(\rho) \cdot b(x)} \cdot \frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))} \\ &\leqslant \frac{C |x - s|^{1+\varepsilon}}{|z|} \|f\|_{C([0,1])}. \end{aligned}$$

On définit l'opérateur H *par* $H = aI$*, avec* $a > 0$.
Par le même raisonnement de l'exemple (1) les hypothèses (0.15.4)∼(0.15.7) sont vérifiées.

Exemple 0.14.3 *soit $E = C\left(\overline{\Omega}\right)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert régulier et borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2. Pour une fonction régulière $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $y \longmapsto u(y_1, \cdots, y_n)$, on pose*

$$\begin{cases} E(x,y,D)\,u(y) \\ = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y)\,D_{ij}u(y) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y)\,D_i u(y) + c(x,y)\,u(y)\,, \quad (x,y) \in [0,1]\times\Omega \\ \Gamma(x,s,D)\,u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x,s)\,D_i u + e(x,s)\,u, \qquad (x,s) \in [0,1]\times\partial\Omega. \end{cases}$$

Où les coefficients

$$\begin{cases} a_{ij}, b_i, c & : [0,1]\times\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C} \\ d_i, e & : [0,1]\times\partial\Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \end{cases}$$

vérifiant les hypothèses suivantes

1. $\exists \eta > 0 : \forall (x,y) \in [0,1]\times\overline{\Omega}$, $\forall \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y)\,\zeta_i\zeta_j \geqslant \eta\,|\zeta|^2 = \eta\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_n^2\right),$$

2. $\forall (x,s) \in [0,1]\times\partial\Omega$,

$$\begin{cases} \operatorname{Im} d_i(x,s) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x,s)\,v_i(s) \neq 0, \end{cases}$$

   où $v(s) = (v_1(s), v_2(s), \cdots, v_n(s))$ est le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$ au point s,

3. $a_{ij}(x,\cdot), b_i(x,\cdot), c(x,\cdot) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *uniformément par rapport à $x \in [0,1]$, et $d_i(x,\cdot), e(x,\cdot) \in C^1(\partial\Omega)$ uniformément par rapport à $x \in [0,1]$,*

4. $a_{ij}(\cdot,y), b_i(\cdot,y), c(\cdot,y) \in C^{\sigma}([0,1])$, $0 < \sigma < 1$, *uniformément par rapport à y, et $d_i(\cdot,s), e(\cdot,s) \in C^{2,\nu}([0,1])$, $0 < \nu < 1$ uniformément par rapport à $s \in \partial\Omega$.*

Maintenant, considérons alors le problème suivant (où $\omega > 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - E^2(x,y,D)\,u(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), \quad \textit{sur} \quad [0;1]\times\overline{\Omega} \\ \Gamma(x,s,D)\,u(x,s) = 0, \qquad \textit{sur} \quad [0;1]\times\partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - au(0,y) = d_0(y) \\ u(1,y) = u_1(y). \end{cases} \tag{0.14.2}$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $\left((-A(x))^{\frac{1}{2}}\right)_{x\in[0;1]}$ *par*

$$\begin{cases} D\left(-(-A(x))^{\frac{1}{2}}\right) = \{u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{2,q}(\Omega),\ q>n:\ E(x,\cdot,D)u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et} \quad \Gamma(x,\cdot,D)u = 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega\} \\ \left(-(-A(x))^{\frac{1}{2}} u\right)(y) = E(x,y,D)u(y), \qquad\qquad y \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Ce qui conduit à

$$\begin{cases} D(A(x)) = \{u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{4,q}(\Omega),\ q>n:\ E(x,\cdot,D)u \in C\left(\overline{\Omega}\right);\ E^2(x,\cdot,D)u \in C\left(\overline{\Omega}\right), \\ \qquad\qquad \Gamma(x,\cdot,D)u = 0 \text{ et } \Gamma(x,\cdot,D)(-A(x))^{\frac{1}{2}}u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega\} \\ (A(x)u)(y) = -E^2(x,y,D)u(y), \qquad\qquad y \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

Posons

$$Q(x) = -(-A(x))^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 0.14.2 *Les domaines* $D(A(x))$ *(De même pour* $D(Q(x))$*) sont variables à cause des conditions aux limites qui dépendent de* x*.*

Si on veut appliquer les résultats du chapitre 2 il faut montrer que la famille $(Q(x))_{x\in[0,1]}$ *vérifie les hypothèses 0.11.2 et 0.11.3 l'outil fondamental pour cette vérification est le théorème suivant*

Théorème 0.14.1 *Sous les hypothèses 1, 2, 3 et 4, il existe* $\varphi_0 \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, ω_0, r_0, $C_0 > 0$ *tels que pour tout* $z \in \sum_{\varphi_0,\omega_0} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z-\omega_0)| \leqslant \varphi_0,\}$ *où* $|z| > \omega_0$ *et* $x \in]0,1[$, *le problème*

$$\begin{cases} E(x,\cdot,D)u - zu = f \in C\left(\overline{\Omega}\right) \\ \Gamma(x,\cdot,D)u = g \in C^1(\partial\Omega), \end{cases}$$

admet une unique solution $u(x,.) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{2,q}(\Omega)$ *vérifiant pour tout* K *assez grand et* $r \geqslant r_z = \dfrac{Kr_0}{2|z|^{\frac{1}{2}}}$

$$\begin{aligned} &\left(|z|\,\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + |z|^{\frac{1}{2}}\|Du\|_{C(\overline{\Omega})} + |z|^{\frac{n}{2q}} \sup_{y_0\in\overline{\Omega}} \left\|D^2u\right\|_{L^q\left(\Omega_{r,y_0}\right)}\right) \\ \leqslant\ & C_0|z|^{\frac{n}{2q}}\left[\sup_{y_0\in\overline{\Omega}}\|f\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} + \sup_{y_0\in\overline{\Omega}}\inf_{\omega}\left(\left\|w\psi_{2r,y_0}\right\|_{W^{1,q}\left(\Omega_{2r,y_0}\right)}\right)\right], \end{aligned}$$

où

$$\Omega_{r,y_0} = B(y_0,r)\cap\Omega, \qquad \psi_{r,y_0}(y) = \psi\left(\frac{y-y_0}{r}\right),$$

où ψ est une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B(0,1)$ telle que

$$\psi = \begin{cases} 1 \quad sur \quad B\left(0, \dfrac{1}{2}\right) \\ 0 \qquad sinon, \end{cases}$$

et $w = g$ sur $\partial\Omega$.

Preuve. *Voir la preuve dans Stewart [32], p. 306.* □

Remarque 0.14.3 *les hypothèses (0.11.2)∼(0.11.7) sont vérifiées.*

Exemple 0.14.4 *Considérons l'espace de Banach $E = L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, où Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2.*
On garde les mêmes notations et les trois premières hypothèses de l'exemples précédent avec l'hypothèse supplémentaire suivante
il existe ρ, $K > 0$ tels que pour tout $x_1, x_2 \in [0,1]$, $y \in \Omega$ et $s \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x_1,y) - a_{ij}(x_2,y)| + \sum_{i=1}^{n} |b_i(x_1,y) - b_i(x_2,y)| + |c(x_1,y) - c(x_2,y)| \\ \leqslant \ & K|x_1 - x_2|^{\rho}, \\ & \sum_{i=1}^{n} |d_i(x_1,s) - d_i(x_2,s)| + |e(x_1,s) - e(x_2,s)| \leqslant K|x_1 - x_2|, \\ & \sum_{i,k=1}^{n} |D_k d_i(x_1,s)| + \sum_{k=1}^{n} |D_k e(x_1,s)| \leqslant K. \end{aligned}$$

On considère alors le problème concret suivant (où $\omega > 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - E^2(x,y,D)\,u(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), & sur \quad [0;1] \times \overline{\Omega} \\ \Gamma(x,s,D)\,u(x,s) = 0, & sur \quad [0;1] \times \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - au(0,y) = d_0(y) \\ u(1,y) = u_1(y). \end{cases}$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $\left((-A(x))^{\frac{1}{2}}\right)_{x\in[0;1]}$ par

$$\begin{cases} D\left(-(-A(x))^{\frac{1}{2}}\right) = \{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \Gamma(x,s,D)\,\varphi = 0,\ s \in \partial\Omega\} \\ \left(-(-A(x))^{\frac{1}{2}}\varphi\right)(y) = E(x,y,D)\,\varphi(y), \qquad y \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} D\left(A\left(x\right)\right) = \left\{\varphi \in W^{4,p}\left(\Omega\right) : \Gamma\left(x,s,D\right)\varphi = 0,\ et\ \Gamma\left(x,s,D\right)\left(-A\left(x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\varphi = 0,\ \ s \in \partial\Omega\right\} \\ \left(A\left(x\right)\varphi\right)\left(y\right) = -E^{2}\left(x,y,D\right)\varphi\left(y\right), \qquad\qquad y \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

Posons

$$Q\left(x\right) = -\left(-A\left(x\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 0.14.4 *Les domaines $D\left(A\left(x\right)\right)$ (De même pour $D\left(Q\left(x\right)\right)$) sont variables à cause des conditions aux limites qui dépendent de x.*

On doit donc une fois encore vérifier les hypothèses 0.11.2 et 0.11.3 du chapitre 2. On utilise principalement le théorème suivant

Théorème 0.14.2 *Sous les hypothèses 1, 2 et 3, il existe $\varphi \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et $\omega = \omega\left(p\right) \geqslant 0$ tels que pour tout $z \in \sum_{\varphi,\omega} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\arg\left(z-\omega\right)\right| \leqslant \varphi\right\}$ où $\left|z\right| > \omega$ et $x \in \left]0,1\right[$, le problème*

$$\begin{cases} E\left(x,\cdot,D\right)u - zu = f \in L^{p}\left(\Omega\right) \\ \Gamma\left(x,\cdot,D\right)u = g \in W^{1-\frac{1}{p},p}\left(\partial\Omega\right) \end{cases}, \qquad p \in \left]1,+\infty\right[,$$

admet une unique solution $u\left(x,.\right) \in W^{2,p}\left(\Omega\right)$. De plus il existe $C\left(p\right) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\left(\left|z-\omega\right|\left\|u\right\|_{L^{p}(\Omega)} + \left|z-\omega\right|^{\frac{1}{2}}\left\|Du\right\|_{L^{p}(\Omega)} + \left\|D^{2}u\right\|_{L^{p}(\Omega)}\right) \\ \leqslant\ & C\left(p\right)\left[\left\|f\right\|_{L^{p}(\Omega)} + \inf_{w \in W^{1,p}(\Omega)}\left\{\left|z\right|^{\frac{1}{2}}\left\|w\right\|_{L^{p}(\Omega)} + \left\|Dw\right\|_{L^{p}(\Omega)}\right\}\right], \end{aligned}$$

où $w = g$ sur $\partial\Omega$.

Preuve. *Voir S. Agmon [2] où H. Tanabe [33], page 83, lemme 3.8.1 et page 88, théorème 3.8.2.* □

Remarque 0.14.5 *les hypothèses (0.11.2)∼(0.11.7) sont vérifiées.*

Troisième partie

Le problème de Robin à coefficients opérateurs (cadre espace L^p)

0.15 Solutions strictes

0.15.1 Position du problème

On considère le problème

$$\begin{cases} u''(x) + A(x)u(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{0.15.1}$$

où $(A(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A(x))$ non nécessairement denses dans un espace de Banach complexe E. H est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(H)$, d_0, u_1 sont des éléments données dans l'espace E et $f \in L^p(0,1;E)$, $1 < p < +\infty$.
On cherche pour

$$f \in L^p(0,1;E), 1 < p < +\infty,$$

une solution stricte de (0.15.1), c'est-à-dire une solution u telle que

$$\begin{cases} \text{p.p.} x \in [0,1], \quad u(x) \in D(A(x)) \text{ et} \\ x \longmapsto A(x)u(x) \in L^p(0,1;E) \\ u \in W^{2,p}(0,1;E) \\ u(0) \in D(H). \end{cases}$$

0.15.2 Les hypothèses

Posons pour tout $x \in [0,1]$

$$Q_\omega(x) = -(-A_\omega(x))^{1/2},$$

avec

$$A_\omega(x) = A(x) - \omega I.$$

1. $$E \text{ est un espace } UMD. \tag{0.15.2}$$
2. $\exists \omega_0 > 0$, $\exists C > 0 : \forall x \in [0,1], \forall z \geqslant 0$, $(A_{\omega_0}(x) - zI)^{-1} \in L(E)$ et
$$\left\| (A_{\omega_0}(x) - zI)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C}{1+z}, \tag{0.15.3}$$
qui reste vraie dans le secteur (où θ_0 et r_0 sont des petits nombres réels positifs)
$$\Pi_{\theta_0,r_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leqslant \theta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_0\}.$$

Remarque 0.15.1 *L'hypothèse (0.15.3) implique que pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, les racines carrées :*

$$Q_\omega(x) = -(-A_\omega(x))^{1/2}, \quad x \in [0,1],$$

sont bien définies et elles génèrent des semi-groupes analytiques non fortement continus en zéro. (Voir A. V. Balakrishnan [3] dans le cas des domaines denses et Martinez-Sanz [26] dans le cas des domaines non denses).

De plus, il existe un autre secteur

$$\Pi_{\theta_1+\frac{\pi}{2},r_1} = \left\{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leqslant \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_1\},$$

où $\theta_1 > 0$ petit et $r_1 > 0$ tels que pour tout $x \in [0,1]$

$$\rho(Q_\omega(x)) \supset \Pi_{\theta_1+\frac{\pi}{2},r_1}.$$

Posons

$$\Gamma = \left\{z = \rho e^{\pm i\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)} : \rho \geqslant r_1\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1, \quad |\arg(z)| \geqslant \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right\},$$

la courbe orientée de $\infty e^{-i\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)}$ à $\infty e^{i\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)}$.

3. $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall \omega \geqslant \omega_0$, $(-A_{\omega_0}(x))^{is} \in L(E)$ et $\exists C > 1$, $\exists \theta_0 \in]0,\pi[$:

$$\left\|(-A_{\omega_0}(x))^{is}\right\|_{L(E)} \leqslant Ce^{\theta_0|s|}, \tag{0.15.4}$$

on dit que $-A_{\omega_0}(x)$ est de classe $Bip(\theta_0)$.

4. $\exists C, \alpha, \mu > 0 : \forall x, \tau \in [0,1], \forall \omega \geqslant \omega_0$

$$\begin{cases} \left\|Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(\tau)^{-1}\right)\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C|x-\tau|^\alpha}{|z+\omega|^\mu}, \\ \alpha + \mu - 2 > 0. \end{cases} \tag{0.15.5}$$

De plus on fera l'hpothèse suivante

5. $\exists C > 0 : \forall x \in [0,1], \forall \omega \geqslant \omega_0$

$$\begin{cases} Q_\omega(x) - H \text{ est fermé, } 0 \in (Q_\omega(x) - H) \text{ et} \\ \left\|(Q_\omega(x) - H)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant C(1 + \sqrt{\omega}). \end{cases} \tag{0.15.6}$$

6. $\exists k > 0 : \forall x, \tau \in [0,1]$ et $\forall \zeta \in E$

$$\left\|\left[(Q_\omega(x) - H)^{-1} - (Q_\omega(\tau) - H)^{-1}\right]\zeta\right\|_E \leqslant k|x-\tau|^{\alpha+\mu}\|\zeta\|_E. \tag{0.15.7}$$

0.15.3 Lemmes techniques

Lemme 0.15.1 *Il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ et $\omega \geqslant \omega^*$, l'opérateur $I - e^{2Q_\omega(x)}$ est inversible et son inverse $\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}$ est borné.*

Preuve. Voir A. Lunardi [24], p. 59. □

Lemme 0.15.2 *Sous les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7), il existe* $\omega^* > 0$ *tel que pour tout* $x \in [0,1]$ *et* $\omega \geqslant \omega^*$, *l'opérateur*

$$\Lambda_\omega(x) = (Q_\omega(x) - H) + e^{2Q_\omega(x)}(Q_\omega(x) + H),$$

de domaine

$$D(\Lambda_\omega(x)) = D(Q_\omega(x)) \cap D(H),$$

est fermé, admet un inverse borné et

$$\begin{aligned} & (\Lambda_\omega(x))^{-1} \\ = \;& (Q_\omega(x) - H)^{-1}\left[I + 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)} (Q_\omega(x) - H)^{-1}\right]^{-1} \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$(\Lambda_\omega(x))^{-1} = (Q_\omega(x) - H)^{-1} + (Q_\omega(x) - H)^{-1} W(x),$$

avec

$$\begin{cases} W(x) \in L(E), \;\; (Q_\omega(x) - H)^{-1} W(x) = W(x)(Q_\omega(x) - H)^{-1} \\ W(x)(E) \subset \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q_\omega(x)^k\right). \end{cases}$$

Preuve. On suppose (0.15.2), (0.15.4)∼(0.15.7), $\omega \geqslant \omega_0$ et $x \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega(x) &= (Q_\omega(x) - H) + e^{2Q_\omega(x)}(Q_\omega(x) + H) \\ &= (Q_\omega(x) - H) - e^{2Q_\omega(x)}(Q_\omega(x) - H - 2Q_\omega(x)) \\ &= \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)(Q_\omega(x) - H) + 2e^{2Q_\omega(x)} Q_\omega(x), \end{aligned}$$

et puisque les opérateurs $\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)$ et $e^{2Q_\omega(x)}Q_\omega(x)$ sont bornés alors

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega(x) &= \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)(Q_\omega(x) - H) + 2e^{2Q_\omega(x)} Q_\omega(x) \\ &= \left[\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right) + 2e^{2Q_\omega(x)} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - H)^{-1}\right](Q_\omega(x) - H) \\ &= \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)\left[I + 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)}(Q_\omega(x) - H)^{-1}\right](Q_\omega(x) - H). \end{aligned}$$

Pour inverser l'opérateur $\Lambda_\omega(x)$ il suffit de montrer que

$$\left\| 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)} (Q_\omega(x) - H)^{-1} \right\|_{L(E)} < 1.$$

Suite au lemme de Dore et Yakubov [11] p. 103, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, il existent des constantes C, $k > 0$ (qui ne dépendent pas de ω) telles que pour tout $y \geqslant 1$

$$\left\| (-A(x) + \omega I)^\alpha e^{-y(-A(x)+\omega I)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L(E)} \leqslant C e^{-ky\sqrt{\omega}},$$

en particulier

$$\left\| Q_\omega(x)\, e^{2Q_\omega(x)} \right\|_{L(E)} \leqslant C e^{-2k\sqrt{\omega}},$$

et $\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)$ est inversible, d'où pour ω assez grand

$$\left\| 2\left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} Q_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)} \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant C\left(1 + \sqrt{\omega}\right) e^{-2k\sqrt{\omega}},$$

on prendra alors $\omega^* \geqslant 0$ tel que

$$\left\| 2\left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} Q_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)} \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} \right\|_{L(E)} < 1.$$

Alors, pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, $x \in [0,1]$, l'opérateur $\Lambda_\omega(x)$ est inversible et son inverse est donné par

$$\begin{aligned} & \left(\Lambda_\omega(x)\right)^{-1} \\ = & \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} \left[I + 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1}\right]^{-1} \left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Et de plus, on a

$$\left(\Lambda_\omega(x)\right)^{-1} = \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} \left(I + M(x)\right)^{-1} \left(I + N(x)\right)^{-1},$$

avec

$$\begin{cases} M(x) = 2\left(I - e^{2Q_\omega(x)}\right)^{-1} Q_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} \in L(E) \\ N(x) = -e^{2Q_\omega(x)} \in L(E) \\ M(x)(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q_\omega(x)^k\right), \qquad N(x)(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q_\omega(x)^k\right). \end{cases}$$

Posons $U(x) = -M(x)\left(I + M(x)\right)^{-1} \in L(E)$ et $V(x) = -N(x)\left(I + N(x)\right)^{-1} \in L(E)$. Alors

$$\left(\Lambda_\omega(x)\right)^{-1} = \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} \left(I + U(x)\right)\left(I + V(x)\right),$$

en effet

$$\begin{aligned} \left(I + M(x)\right)\left(I + M(x)\right)^{-1} &= I \Longleftrightarrow \left(I + M(x)\right)^{-1} + M(x)\left(I + M(x)\right)^{-1} = I \\ &\Longleftrightarrow \left(I + M(x)\right)^{-1} - U(x) = I \\ &\Longleftrightarrow \left(I + M(x)\right)^{-1} = U(x) + I, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(I + N(x)\right)\left(I + N(x)\right)^{-1} &= I \Longleftrightarrow \left(I + N(x)\right)^{-1} + N(x)\left(I + N(x)\right)^{-1} = I \\ &\Longleftrightarrow \left(I + N(x)\right)^{-1} - V(x) = I \\ &\Longleftrightarrow \left(I + N(x)\right)^{-1} = V(x) + I. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_\omega(x)\right)^{-1} &= \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} \left(I + U(x)\right)\left(I + V(x)\right) \\ &= \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} \left[I + U(x) + V(x) + U(x)V(x)\right] \\ &= \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} \left(I + W(x)\right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} U(x) = U(x)\left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} \\ \left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} V(x) = V(x)\left(Q_\omega(x) - H\right)^{-1} \\ U(x)(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q_\omega(x)^k\right), \qquad V(x)(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q_\omega(x)^k\right). \end{cases}$$

□

0.15.4 Construction de la solution stricte

En utilisant la même méthode de la partie 2, on obtient l'équation

$$w + P_\omega w = G(d_0, u_1, f), \tag{0.15.8}$$

avec

$$w(\cdot) = Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot),$$

et

$$\begin{aligned}
&(P_\omega w)(x) = \frac{1}{2}K_\omega(x) e^{xQ_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{sQ_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&+\frac{1}{2}\int_0^x Q_\omega(x)^3 e^{(x-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&+\frac{1}{2}\int_x^1 Q_\omega(x)^3 e^{(s-x)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&-\frac{1}{2}e^{xQ_\omega(x)} K_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)} K_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{sQ_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_\omega(x)} K_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)} \int_0^1 Q_\omega(x)^3 e^{(1-s)Q_\omega(x)} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds \\
= &\sum_{i=1}^{7} I_i(x),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G(d_0, u_1, f)(x) &= Q_\omega(x)^2 L_{Q_\omega(x)}(x, f) \\
&\quad + Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \left(\Lambda_\omega(x)^{-1} d_0 + K_\omega(x) e^{Q_\omega(x)} u_1\right) \\
&\quad + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} \left(\left[I - K_\omega(x) e^{2Q_\omega(x)}\right] u_1 - \Lambda_\omega(x)^{-1} e^{Q_\omega(x)} d_0\right),
\end{aligned}$$

tel que

$$K_\omega(x) = \left(Q_\omega(x) + H\right) \Lambda_\omega(x)^{-1}.$$

Proposition 0.15.1 *On suppose que les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7) sont vérifieés alors il existe $\omega^* > 0$ tel que*

$$\forall \omega \geqslant \omega^* : \|P_\omega\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1;E))} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Preuve. Soit $x \in [0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{-1}{4\pi i} K_\omega(x) \int_\Gamma \int_0^1 z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds dz \\ &= \int_0^1 \left[\int_\Gamma \frac{-1}{4\pi i} K_\omega(x) z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) dz\right] w(s)\, ds \\ &= \int_0^1 K_z(x,s)\, w(s)\, ds, \end{aligned}$$

avec

$$K_z(x,s) = \int_\Gamma \frac{-1}{4\pi i} K_\omega(x) z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) dz.$$

On a pour $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |K_z(x,s)|\, ds \\ =\ & \int_0^1 \int_\Gamma \left\| \frac{-1}{4\pi i} K_\omega(x) z^2 e^{(x+s)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) dz \right\| ds \\ \leqslant\ & C \int_0^1 \int_\Gamma |z|^2 e^{-C_0(x+s)|z|} \frac{|x-s|^\alpha}{|z+\omega|^\mu} d|z|\, ds \\ \leqslant\ & C \int_\Gamma |z|^2 \left(\int_0^1 e^{-C_0(x+s)|z|} |x-s|^\alpha ds\right) \frac{d|z|}{|z+\omega|^\mu} \\ \leqslant\ & C \int_\Gamma |z|^2 \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x e^{-C_0(x+s)|z|}(x-s)^\alpha ds + \sup_{x\in[0,1]} \int_x^1 e^{-C_0(x+s)|z|}(s-x)^\alpha ds\right) \frac{d|z|}{|z+\omega|^\mu}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_0^x e^{-(x+s)|z|}(x-s)^\alpha ds \leqslant C \frac{1}{|z|^{1+\alpha}},$$

et

$$\int_x^1 e^{-(x+s)|z|}(s-x)^\alpha ds \leqslant C \frac{1}{|z|^{1+\alpha}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K_z(x,s)|\, ds &\leqslant C \int_\Gamma \frac{|z|^2}{|z+\omega|^\mu |z|^{\alpha+1}} d|z| \\ &\leqslant C \int_\Gamma \frac{1}{|z+\omega|^\mu |z|^{\alpha-1}} d|z| \\ &\leqslant \frac{C}{\omega^{\alpha+\mu-2}}. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Schur, on obtient

$$\|I_1\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1;E))} \leqslant \frac{C}{\omega^{\alpha+\mu-2}},$$

ou bien, pour toute $w \in L^p(0,1;E)$, on a :

$$\|I_1(w)\|_{L^p(0,1;E)} \leqslant \frac{C}{\omega^{\alpha+\mu-2}} \|w\|_{L^p(0,1;E)},$$

$I_2(x)$, $I_5(x)$, $I_6(x)$ et $I_7(x)$ se traitent de la même façon.
Et de plus, on a

$$\begin{aligned}
& I_3(x) + I_4(x) \\
= & -\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \int_0^x z^2 e^{(x-s)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, ds dz \\
& -\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \int_x^1 z^2 e^{(s-x)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) w(s)\, dz \\
= & -\frac{1}{4\pi i}\int_0^x \left(\int_\Gamma z^2 e^{(x-s)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) dz\right) w(s)\, ds \\
& -\frac{1}{4\pi i}\int_x^1 \left(\int_\Gamma z^2 e^{(s-x)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) dz\right) w(s)\, ds \\
= & \int_0^1 K_z(x,s)\, w(s)\, ds,
\end{aligned}$$

avec

$$K_z(x,s) = \begin{cases} \int_\Gamma \frac{-1}{4\pi i} z^2 e^{(x-s)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) dz & \text{si } \ 0 \leqslant s \leqslant x \\ \int_\Gamma \frac{-1}{4\pi i} z^2 e^{(s-x)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) dz & \text{si } \ x \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

On a, pour $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |K_z(x,s)|\, ds \\
\leqslant & \int_0^x \int_\Gamma \left\| \frac{1}{4\pi i} z^2 e^{(x-s)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) dz \right\| ds \\
& + \int_x^1 \int_\Gamma \left\| \frac{1}{4\pi i} z^2 e^{(s-x)z} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}\left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2}\right) dz \right\| ds \\
\leqslant & \ C_1 \int_0^x \int_\Gamma |z|^2 e^{-C_0(x-s)|z|} \frac{(x-s)^\alpha}{|z+\omega|^\mu} d|z|\, ds \\
& + C_2 \int_x^1 \int_\Gamma |z|^2 e^{-C_0(s-x)|z|} \frac{(s-x)^\alpha}{|z+\omega|^\mu} d|z|\, ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C_1 \int_\Gamma |z|^2 \left(\int_0^x e^{-C_0(x-s)|z|} (x-s)^\alpha \, ds \right) \frac{d|z|}{|z+\omega|^\mu} \\
&\quad + C_2 \int_\Gamma |z|^2 \left(\int_x^1 e^{-C_0(s-x)|z|} (x-s)^\alpha \, ds \right) \frac{d|z|}{|z+\omega|^\mu} \\
&\leqslant C \int_\Gamma |z|^2 \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x e^{-C_0(x-s)|z|} (x-s)^\alpha \, ds + \sup_{x\in[0,1]} \int_x^1 e^{-C_0(s-x)|z|} (s-x)^\alpha \, ds \right) \frac{d|z|}{|z+\omega|^\mu}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_0^x e^{-(x-s)|z|} (x-s)^\alpha \, ds \leqslant C \frac{1}{|z|^{1+\alpha}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |K_z(x,s)| \, ds &\leqslant C \int_\Gamma \frac{|z|^2}{|z+\omega|^\mu |z|^{\alpha+1}} d|z| \\
&\leqslant C \int_\Gamma \frac{1}{|z+\omega|^\mu |z|^{\alpha-1}} d|z| \\
&\leqslant \frac{C}{\omega^{\alpha+\mu-2}}.
\end{aligned}$$

D'apès le lemme de Schur, on obtient

$$\|I_3 + I_4\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1;E))} \leqslant \frac{C}{\omega^{\alpha+\mu-2}},$$

ou bien, pour toute $w \in L^p(0,1;E)$, on a :

$$\|I_3(w) + I_4(w)\|_{L^p(0,1;E)} \leqslant \frac{C}{\omega^{\alpha+\mu-2}} \|w\|_{L^p(0,1;E)}.$$

Donc il existe ω^* assez grand tel que $\forall \omega \geqslant \omega^* : \dfrac{C}{\omega^{\alpha+\mu-2}} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Alors l'équation (0.15.8) admet donc une unique solution $w = Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot)$ pour $\omega \geqslant \omega^*$ et donc

$$u(\cdot) = Q_\omega(\cdot)^{-2} (I + P_\omega)^{-1} G(d_0, u_1, f)(\cdot).$$

□

0.15.5 Régularité du second membre $G(d_0, u_1, f)(\cdot)$

On rappelle que $G(d_0, u_1, f)(x)$ est défini sur l'espace $L^p(0,1;E)$ par

$$\begin{aligned}
&G(d_0, u_1, f)(x) \\
= \; &Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)} \Lambda_\omega(x)^{-1} d_0 + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 \\
&+ \frac{1}{2} Q_\omega(x) \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)} f(s) \, ds + \frac{1}{2} Q_\omega(x) \int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega(x)} f(s) \, ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}Q_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}K_\omega(x)\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}Q_\omega(x)\,e^{(1-x)Q_\omega(x)}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds \\
& +Q_\omega(x)^2\,e^{xQ_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}K_\omega(x)\left(u_1-\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\right) \\
& -Q_\omega(x)^2\,e^{(1-x)Q_\omega(x)}e^{2Q_\omega(x)}K_\omega(x)\left(u_1-\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\right) \\
& -Q_\omega(x)^2\,e^{(1-x)Q_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}\left(\Lambda_\omega(x)^{-1}d_0+\frac{1}{2}K_\omega(x)\,Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds\right) \\
= \; & Q_\omega(x)^2\,e^{xQ_\omega(x)}\Lambda_\omega(x)^{-1}d_0+Q_\omega(x)^2\,e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1 \\
& +\sum_{i=1}^{4}I_i(x)+A_\omega(x)\,R(x,d_0,u_1,f)\,.
\end{aligned}
$$

Les deux résultats suivants données pour Q_ω, sont en fait valables pour tout opérateur Q_ω générateur d'un semi-groupe analytique généralisé.

Lemme 0.15.3 *Supposons l'hpothèse (0.15.3) est réalisée et soient $x \in [0,1]$, $p \in \,]1,\infty[$ et $\omega \geqslant \omega^*$. Alors*

1. *$s \longmapsto A_\omega(x)\,e^{sQ_\omega(x)}\varphi \in L^p(0,1;E)$ si et seulement si $\varphi \in (D(A(x)),E)_{\frac{1}{2p},p}$.*
2. *$s \longmapsto Q_\omega(x)\,e^{sQ_\omega(x)}\varphi \in L^p(0,1;E)$ si et seulement si $\varphi \in (D(A(x)),E)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.*

Preuve. Rappelons que si $m \in \mathbb{N}^*$ et C génère un semi groupe analytique alors

$$\phi \in (D(C^m),E)_{\frac{1}{mp},p}\,,$$

si et seulement si

$$C^m e^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1;E)\,.$$

En effet

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left\|C^m e^{xC}\phi\right\|^p dx &= \int_0^1 x^{m\cdot\frac{1}{mp}\cdot p}\left\|C^m e^{xC}\phi\right\|^p\frac{dx}{x} \\
&\leqslant \int_0^\infty \left\|x^{m\left(1-\left(1-\frac{1}{mp}\right)\right)}C^m e^{xC}\phi\right\|^p\frac{dx}{x} \\
&\leqslant K\left\|\phi\right\|_{(D(C^m),E)_{\frac{1}{mp},p}}.
\end{aligned}
$$

(Voir H. Triebel [34], Théoreme P. 96).
Ainsi $A_\omega(x)\,e^{sQ_\omega(x)}\varphi \in L^p(0,1;E)$ si et seulement si

$$\varphi \in \left(D\left(Q_\omega(x)^2\right),E\right)_{\frac{1}{2p},p}=(D(A_\omega(x)),E)_{\frac{1}{2p},p}=(D(A(x)),E)_{\frac{1}{2p},p}\,.$$

Similairement $Q_\omega(x)\, e^{sQ_\omega(x)}\varphi \in L^p(0,1;E)$ si et seulement si

$$\varphi \in \left(D\left(Q_\omega(x)\right), E\right)_{\frac{1}{p},p}.$$

On conclut en utilisant les propriétés de réitération de Lions-Peetre [23].

$$\begin{aligned}\left(D\left(Q_\omega(x)\right), E\right)_{\frac{1}{p},p} &= \left(E, D\left(Q_\omega(x)\right)\right)_{1-\frac{1}{p},p} \\ &= \left(E, D\left(Q_\omega(x)^2\right)\right)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \\ &= \left(D\left(A(x)\right), E\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.\end{aligned}$$

□

Dans le cas autonome Q_ω, on a le résultat suivant :

Lemme 0.15.4 *Sous l'hypothèses (0.15.2)∼(0.15.4) et $1 < p < +\infty$, on a*

1. *Pour $f \in L^p(0,1;E)$*

$$x \longmapsto F(x,f) = Q_\omega \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega} f(s)\, ds \in L^p(0,1;E)$$

2. *Pour $f \in L^p(0,1;E)$*

$$x \longmapsto K(x,f) = Q_\omega \int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega} f(s)\, ds \in L^p(0,1;E)$$

3. *Pour $f \in L^p(0,1;E)$*

$$x \longmapsto T(x,f) = Q_\omega e^{xQ_\omega} \int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\, ds \in L^p(0,1;E).$$

Preuve. Pour la première assertion on va appliquer le théorème de Dore et Venni [10], à l'étude du problème

$$\begin{cases} v'(x) - Q_\omega v(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in (0,1), \\ v(0) = 0, \end{cases} \tag{0.15.9}$$

alors , puisque E est un espace UMD et Q_ω est un opérateur linéaire fermé dans X, vérifiant les hypothèses du théorème de Dore et Venni, alors pour tout $f \in L^p(0,1,E)$, le problème (0.15.9) admet une solution unique stricte v telle que

$$v \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1,D(Q_\omega)),$$

avec

$$v(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega} f(s)\, ds, \text{ p.p. } x \in (0,1),$$

et donc

$$Q_\omega v : x \longmapsto Q_\omega \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega} f(s)\, ds \in L^p(0,1,E).$$

L'assertion 2 découle de la première car en posant $t = 1 - s$ on obtient

$$\begin{aligned} K(x,f) &= Q_\omega \int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega} f(s)\, ds \\ &= Q_\omega \int_0^{1-x} e^{(1-x-t)Q_\omega} f(1-t)\, dt \\ &= F(1-x, f(1-\cdot)), \end{aligned}$$

donc $K(\cdot, f) = x \to F(1-x, f(1-.)) \in L^p(0,1,E)$.
Pour l'assertion 3, on écrit

$$\begin{aligned} T(x,f) &= Q_\omega \int_0^1 e^{(x+s)Q_\omega} f(s)\, ds \\ &= Q_\omega \int_0^x e^{(x+s)Q_\omega} f(s)\, ds + Q_\omega \int_x^1 e^{(x+s)Q_\omega} f(s)\, ds \\ &= Q_\omega \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega} e^{2sQ_\omega} f(s)\, ds + e^{2xQ_\omega} Q_\omega \int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega} f(s)\, ds \\ &= F\left(x, e^{2Q_\omega} f\right) + e^{2xQ_\omega} K(x,f) \in L^p(0,1,E), \end{aligned}$$

donc $T(\cdot, f) = x \to F\left(x, e^{2Q_\omega} f\right) + e^{2xQ_\omega} K(x,f) \in L^p(0,1,E)$. □

Théorème 0.15.1 *Soit Y un espace UMD, et soit $p \in (1, +\infty)$. On note $X := L^p(0,T;Y)$. On suppose que $(L(t))_{t\in[0,T]}$ est une famille mesurable d'opérateurs sectoriels sur Y qui vérifie $L(t) \in BIP(Y)$ et qu'il existe des constantes M, $K > 0$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ telles que pour tout $t \in [0,T]$*

$$\left\|(L(t) + \lambda)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \sum_{\pi-\varphi} \quad et \quad \left\|L(t)^{is}\right\| \leqslant K e^{\varphi|s|}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

On suppose de plus qu'il existe des constantes $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in (0,1]$ et $M_1 > 0$ telles que pour tout $\lambda \in \sum_{\pi-\varphi}$ et pour tout t, $s \in [0,T]$, on a

$$\left\|L(t)(L(t) + \lambda I)^{-1}\left(L(t)^{-1} - L(s)^{-1}\right)\right\| \leqslant \frac{M_1 |t-s|^\beta}{1+|\lambda|^{1-\alpha}}.$$

Alors pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$, *le problème*

$$(nCP) \qquad \begin{cases} u'(t) - L(t)\,u(t) = f(t)\,, \ \textit{pour. } t \in [0,T]\,, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in W^{1,p}(0,T;Y) \cap L^p(0,T;D(A))$, *où* $D(A)$ *est le domaine de l'opérateur* A *défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \{x \in X;\ u(t) \in D(L(t))\,, \quad t \in [0,T]\,, \quad Au \in X\} \\ (Au)(t) = L(t)\,u(t)\,. \end{cases}$$

Preuve. Voir la thèse Sylvie Monniaux [28], ou Monniaux-Pruss [27] □

Proposition 0.15.2 *Supposons (0.15.2)∼(0.15.7). Soient* d_0, $u_1 \in E$ *et* $f \in L^p(0,1;E)$, $1 < p < \infty$, *alors pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$, *on a*

$$G(d_0,u_1,f)(\cdot) \in L^p(0,1;E)\,,$$

si et seulement si

$$(Q_\omega(0) - H)^{-1}\,d_0 \in (D(A(0)),E)_{\frac{1}{2p},p}\,, \qquad u_1 \in (D(A(1)),E)_{\frac{1}{2p},p}$$

Preuve. Pour tout $x \in [0,1]$, $\zeta \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$e^{Q_\omega(x)}\zeta \in D\left(Q_\omega(x)^k\right),$$

et donc

$$A_\omega(x)\,e^{\cdot Q_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}\zeta = e^{\cdot Q_\omega(x)}A_\omega(x)\,e^{Q_\omega(x)}\zeta,$$

ainsi $A_\omega(x)\,e^{\cdot Q_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}\zeta$ est borné et appartient à $L^p(0,1,E)$.
Donc

$$A_\omega(x)\,R(x,f,d_0,u_1) \in L^p(0,1;E)\,.$$

Pour $I_1(x)$ on va appliquer le théorème (0.14.1), à l'étude du problème

$$\begin{cases} u'(x) - Q_\omega(x)\,u(x) = f(x)\,, \ \text{p.p. } x \in (0,x)\,, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{0.15.10}$$

Remarque 0.15.2 *L'hypothèse (0.15.4) implique que* $Q_\omega(x)$ *est Bip* $\left(\frac{\theta}{2}\right)$, *(voir Haase [13]).*

On pose

$$v(s) = e^{(x-s)Q_\omega(x)}u(s)\,, \quad s \in [0,x]\,.$$

Alors pour $s \in [0,x[$, on a

$$\begin{aligned} v'(s) &= -Q_\omega(x)\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}u(s) + e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left[Q_\omega(s)\,u(s) + f(s)\right] \\ &= Q_\omega(x)\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left[Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(s)^{-1}\right]Q_\omega(s)\,u(s) \\ &\quad + e^{(x-s)Q_\omega(x)}f(s)\,, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^x v'(s)\,ds &= \int_0^x Q_\omega(x)\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left[Q_\omega(x)^{-1}-Q_\omega(s)^{-1}\right]Q_\omega(s)\,u(s)\,ds\\ &\quad+\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}u(x) &= \int_0^x Q_\omega(x)\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left[Q_\omega(x)^{-1}-Q_\omega(s)^{-1}\right]Q_\omega(s)\,u(s)\,ds\\ &\quad+\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds,\end{aligned}$$

en appliquant $Q_\omega(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}Q_\omega(x)\,u(x) &= \int_0^x Q_\omega(x)^2\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left[Q_\omega(x)^{-1}-Q_\omega(s)^{-1}\right]Q_\omega(s)\,u(s)\,ds\\ &\quad+Q_\omega(x)\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds,\end{aligned}$$

on pose

$$\Psi(x,s)=Q_\omega(x)^2\,e^{(x-s)Q_\omega(x)}\left[Q_\omega(x)^{-1}-Q_\omega(s)^{-1}\right],$$

$$L(f)(x)=Q_\omega(x)\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds,$$

et

$$\Phi g(x)=\int_0^x \Psi(x,s)\,g(s)\,ds,$$

alors le problème (0.15.10) admet une unique solution stricte u telle que

$$u=Q_\omega^{-1}(I-\Phi)^{-1}L(f),$$

et on a

$$L(f)(x)=Q_\omega(x)\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\in L^p(0,x;E).$$

Voir [1], p. 56.
D'aprés le Théorème (0.15.1), on a $I_1(x)\in L^p(0,1;E)$.
On fait de même pour $I_2(x)$.
Pour $I_3(x)$, on a p.p $x\in(0,1)$

$$\begin{aligned}&I_3(x)\\ &= \frac{1}{2}Q_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds\\ &= \frac{1}{2}\left[Q_\omega(x)\,e^{xQ_\omega(x)}-Q_\omega(0)\,e^{xQ_\omega(0)}\right]\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds\\ &\quad+\frac{1}{2}Q_\omega(0)\,e^{xQ_\omega(0)}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[Q_\omega(x)e^{xQ_\omega(x)} - Q_\omega(0)e^{xQ_\omega(0)}\right]\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds \\
&\quad +\frac{1}{2}Q_\omega(0)e^{xQ_\omega(0)}\int_0^1 \left[e^{sQ_\omega(x)} - e^{sQ_\omega(0)}\right]f(s)\,ds \\
&\quad +\frac{1}{2}Q_\omega(0)e^{xQ_\omega(0)}\int_0^1 e^{sQ_\omega(0)}f(s)\,ds \\
&= I_3^1(x) + I_3^2(x) + I_3^3(x),
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2}\left[Q_\omega(x)e^{xQ_\omega(x)} - Q_\omega(0)e^{xQ_\omega(0)}\right]\right\|_E \\
&= \left\|-\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\left[Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1} - Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}\right]dz\right\|_E \\
&= \left\|-\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma ze^{xz}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left[Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1}\right]Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}dz\right\|_E \\
&\leqslant C_1\int_\Gamma |z|\,e^{-C_0x|z|}\frac{x^\alpha}{|z|^\mu}d|z| \\
&\leqslant C_1\int_\Gamma e^{-\sigma}\frac{x^\alpha}{\left(\dfrac{\sigma}{x}\right)^{\mu-1}}\frac{d\sigma}{x} \\
&\leqslant C_1x^{\alpha+\mu-2},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds\right\|_E &\leqslant \left(\int_0^1 \left\|e^{sQ_\omega(x)}\right\|^q ds\right)^{1/q}\left(\int_0^1 \|f(s)\|^p\,ds\right)^{1/p} \\
&\leqslant C_2\|f\|_{L^p(0,1;E)},
\end{aligned}$$

donc p.p $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|I_3^1(x)\right\|_E \\
&\leqslant \left\|\frac{1}{2}\left[Q_\omega(x)e^{xQ_\omega(x)} - Q_\omega(0)e^{xQ_\omega(0)}\right]\right\|\cdot\left\|\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds\right\|_E \\
&\leqslant Cx^{\alpha+\mu-2}\|f\|_{L^p(0,1;E)},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left\|I_3^1(x)\right\|^p dx\right)^{1/p} &\leqslant C\left(\int_0^1 x^{(\alpha+\mu-2)p}\|f\|^p_{L^p(0,1;E)}\,dx\right)^{1/p} \\
&\leqslant C\left(\int_0^1 x^{(\alpha+\mu-2)p}dx\right)^{1/p}\|f\|_{L^p(0,1;E)} \\
&\leqslant C\|f\|_{L^p(0,1;E)}.
\end{aligned}$$

Pour $I_3^2(x)$, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| I_3^2(x) \right\|_E \\
\leqslant\ & C \left\| \int_0^x \left[e^{sQ_\omega(x)} - e^{sQ_\omega(0)} \right] f(s)\, ds \right\| \\
& + C \left\| \int_x^1 \left[e^{sQ_\omega(x)} - e^{sQ_\omega(0)} \right] f(s)\, ds \right\| \\
\leqslant\ & C \left(\int_0^x \left\| e^{sQ_\omega(x)} - e^{sQ_\omega(0)} \right\|^q ds \right)^{1/q} \left(\int_0^x \| f(s) \|^p ds \right)^{1/p} \\
& + C \left(\int_x^1 \left\| e^{sQ_\omega(x)} - e^{sQ_\omega(0)} \right\|^q ds \right)^{1/q} \left(\int_x^1 \| f(s) \|^p ds \right)^{1/p} \\
\leqslant\ & C \left(\int_0^x \left\| \int_\Gamma e^{sz} \left[(Q_\omega(x) - zI)^{-1} - (Q_\omega(0) - zI)^{-1} \right] dz \right\|^q ds \right)^{1/q} \| f \|_{L^p(0,1;E)} \\
& + C \left(\int_x^1 \left\| \int_\Gamma e^{sz} \left[(Q_\omega(x) - zI)^{-1} - (Q_\omega(0) - zI)^{-1} \right] dz \right\|^q ds \right)^{1/q} \| f \|_{L^p(0,1;E)},
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_\Gamma e^{sz} \left[(Q_\omega(x) - zI)^{-1} - (Q_\omega(0) - zI)^{-1} \right] dz \right\| \\
\leqslant\ & C \int_\Gamma \left\| e^{sz} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left[Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(0)^{-1} \right] Q_\omega(0) (Q_\omega(0) - zI)^{-1} dz \right\| \\
\leqslant\ & C \int_\Gamma e^{-C_0 s|z|} \frac{x^\alpha}{|z|^\mu} d|z| \\
\leqslant\ & C \int_\Gamma e^{-\sigma} \frac{x^\alpha}{\left(\frac{\sigma}{s} \right)^\mu} \frac{d\sigma}{s} \leq C x^\alpha s^{\mu-1},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^x \left(x^\alpha s^{(\mu-1)} \right)^q ds \right)^{1/q} &\leqslant C \left(\int_0^x x^{q(\alpha+\mu-1)} ds \right)^{1/q} \\
&\leqslant C \left(x^{q(\alpha+\mu-1)+1} \right)^{1/q} \\
&\leqslant C \left(x^{q(\alpha+\mu-1)} \right)^{1/q} \leqslant C x^{\alpha+\mu-1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\int_x^1 \left(x^\alpha s^{(\mu-1)} \right)^q ds \right)^{1/q} &\leqslant C \left(\int_0^x s^{q(\alpha+\mu-1)} ds \right)^{1/q} \\
&\leqslant C \left(x^{q(\alpha+\mu-1)+1} \right)^{1/q} \\
&\leqslant C \left(x^{q(\alpha+\mu-1)} \right)^{1/q} \\
&\leqslant C x^{\alpha+\mu-1},
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left\|I_3^2(x)\right\|_E^p dx\right)^{1/p} &\leqslant C\left(\int_0^1 x^{p(\alpha+\mu-1)}dx\right)^{1/p}\|f\|_{L^p(0,1;E)}\\ &\leqslant C\|f\|_{L^p(0,1;E)}.\end{aligned}$$

Donc $I_3^2 \in \mathcal{L}\left(L^p(0,1;E), L^p(0,1;E)\right)$
Pour $I_3^3(x)$ en utilisant le lemme (0.15.4), on a

$$I_3^3 \in \mathcal{L}\left(L^p(0,1;E), L^p(0,1;E)\right).$$

De même pour $I_4(x)$.
Et de plus on a

$$\begin{aligned}&Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\Lambda_\omega(x)^{-1}d_0 + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1\\ = &\left[Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)-H\right)^{-1}d_0 - Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)-H\right)^{-1}W(x)\,d_0\right]\\ &+Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1,\end{aligned}$$

on a $W(x) \in L(E)$ et $R(W(x)) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q_\omega(x)^k\right)$. Donc

$$\begin{aligned}&Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)-H\right)^{-1}d_0 + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1\\ = &\left[Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)-H\right)^{-1}d_0 - Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(0)-H\right)^{-1}d_0\right]\\ &+\left[Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(0)-H\right)^{-1}d_0 - Q_\omega(0)^2 e^{xQ_\omega(0)}\left(Q_\omega(0)-H\right)^{-1}d_0\right]\\ &+\left[Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1 - Q_\omega(1)^2 e^{(1-x)Q_\omega(1)}u_1\right]\\ &+\left[Q_\omega(0)^2 e^{xQ_\omega(0)}\left(Q_\omega(0)-H\right)^{-1}d_0 + Q_\omega(1)^2 e^{(1-x)Q_\omega(1)}u_1\right]\\ = &-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma ze^{xz}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-z\right)^{-1}\left[\left(Q_\omega(x)-H\right)^{-1}-\left(Q_\omega(0)-H\right)^{-1}\right]d_0dz\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma ze^{xz}\left(Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-z\right)^{-1}-Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-z\right)^{-1}\right)\left(Q_\omega(0)-H\right)^{-1}d_0dz\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma ze^{(1-x)z}\left(Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-z\right)^{-1}-Q_\omega(1)\left(Q_\omega(1)-z\right)^{-1}\right)u_1dz\\ &+\left[Q_\omega(0)^2 e^{xQ_\omega(0)}\left(Q_\omega(0)-H\right)^{-1}d_0 + Q_\omega(1)^2 e^{(1-x)Q_\omega(1)}u_1\right].\end{aligned}$$

D'autre part par un calcul algébrique simple on a que

$$\begin{aligned}&Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-z\right)^{-1}-Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-z\right)^{-1}\\ = &zQ_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-z\right)^{-1}\left[Q_\omega(x)^{-1}-Q_\omega(0)^{-1}\right]Q_\omega(0)\left(Q_\omega(0)-z\right)^{-1},\end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned}&Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\left(Q_\omega(x)-H\right)^{-1}d_0 + Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1\\ = &-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma ze^{xz}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-z\right)^{-1}\left[\left(Q_\omega(x)-H\right)^{-1}-\left(Q_\omega(0)-H\right)^{-1}\right]d_0dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} z^{2}e^{xz}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-z\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(0)^{-1}\right)\cdot \\
& \qquad\qquad Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-z\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(0)-H\right)^{-1}d_{0}dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} z^{2}e^{(1-x)z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-z\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(x)^{-1}-Q_{\omega}(1)^{-1}\right)Q_{\omega}(1)\left(Q_{\omega}(1)-z\right)^{-1}u_{1}dz \\
& +\left[Q_{\omega}(0)^{2}e^{xQ_{\omega}(0)}\left(Q_{\omega}(0)-H\right)^{-1}d_{0}+Q_{\omega}(1)^{2}e^{(1-x)Q_{\omega}(1)}u_{1}\right] \\
= \;& a(x)+b(x)+c(x)+d(x).
\end{aligned}$$

Pour $a(x)$, on a p.p $x\in(0,1)$

$$\begin{aligned}
\left\|a(x)\right\|_{E} &\leqslant C\int_{\Gamma}|z|\,e^{-C_{0}x|z|}x^{\alpha+\mu}d|z|\left\|d_{0}\right\|_{E} \\
&\leqslant C\int_{\Gamma}\frac{\sigma}{x}e^{-\sigma}x^{\alpha+\mu}\frac{d\sigma}{x}\left\|d_{0}\right\|_{E} \\
&\leqslant Cx^{\alpha+\mu-2}\left\|d_{0}\right\|_{E},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left(\int_{0}^{1}\left\|a(x)\right\|_{E}^{p}dx\right)^{1/p} &\leqslant C\left(\int_{0}^{1}x^{(\alpha+\mu-2)p}dx\right)^{1/p}\left\|d_{0}\right\|_{E} \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

donc

$$a\in L^{p}(0,1;E).$$

Pour $b(x)$, on a p.p $x\in(0,1)$

$$\begin{aligned}
\left\|b(x)\right\|_{E} &\leqslant C\int_{\Gamma}|z|\,e^{-C_{0}x|z|}\frac{x^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d|z|\left\|Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-H\right)^{-1}d_{0}\right\|_{E} \\
&\leqslant C\int_{\Gamma}e^{-\sigma}\frac{x^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{x}\right)^{\mu-1}}\frac{d\sigma}{x}\left\|Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-H\right)^{-1}d_{0}\right\|_{E} \\
&\leqslant C\int_{\Gamma}\frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{\mu-1}}d\sigma x^{\alpha+\mu-2}\left\|Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-H\right)^{-1}d_{0}\right\|_{E} \\
&\leqslant Cx^{\alpha+\mu-2}\left\|Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-H\right)^{-1}d_{0}\right\|_{E},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left(\int_{0}^{1}\left\|b(x)\right\|_{E}^{p}dx\right)^{1/p} &\leqslant C\left(\int_{0}^{1}x^{(\alpha+\mu-2)p}dx\right)^{1/p}\left\|Q_{\omega}(0)\left(Q_{\omega}(0)-H\right)^{-1}d_{0}\right\|_{E} \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

donc

$$b\in L^{p}(0,1;E).$$

On fait de même pour $c(x)$.

Finalement p.p $x \in (0,1)$

$$G(d_0, u_1, f)(x) \in L^p(0,1;E),$$

si et seulement si

$$\begin{cases} Q_\omega(0)^2 e^{xQ_\omega(0)} (Q_\omega(0) - H)^{-1} d_0 \in L^p(0,1;E) \\ Q_\omega(1)^2 e^{(1-x)Q_\omega(1)} u_1 \in L^p(0,1;E), \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} (Q_\omega(0) - H)^{-1} d_0 \in (D(A(0)), E)_{\frac{1}{2p},p}, \\ u_1 \in (D(A(1)), E)_{\frac{1}{2p},p}. \end{cases}$$

□

0.16 Régularité maximale de la solution

Dans cette partie on étudie la régularité maximale de la solution du proplème (0.15.1).

0.16.1 Régularité de l'opérateur intégral P_ω

Proposition 0.16.1 *Sous les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7), on a*

$$P_\omega \in \mathcal{L}\left(L^p(0,1;E), L^p(0,1;E) \cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right)\right)\right), \quad \beta \in]0, \alpha + \mu - 2].$$

Preuve. Pour montrer que $P_\omega \in \mathcal{L}\left(L^p(0,1;E), L^p(0,1;E) \cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right)\right)\right)$ on doit prouver que pour tout $x \in [0,1]$ et $w \in L^p(0,1;E)$

$$\sup_{r>0} \left\| r^\beta Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - rI)^{-1} (P_\omega w)(x) \right\|_E \leqslant K \|w\|_{L^p(0,1;E)}.$$

En utilisant l'identité

$$\begin{aligned} & Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - rI)^{-1} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \\ = \ & (Q_\omega(x) - rI + rI) (Q_\omega(x) - rI)^{-1} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \\ = \ & Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} + r (Q_\omega(x) - rI)^{-1} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \\ = \ & Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} + \frac{r}{r-z} Q_\omega(x) \left[(Q_\omega(x) - rI)^{-1} - (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \right] \\ = \ & \frac{-z}{r-z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} + \frac{r}{r-z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - rI)^{-1}, \end{aligned}$$

et en tenant compte que l'intégrale en $Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - rI)^{-1}$ est nulle. 0n a

$$\begin{aligned} & r^\beta Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - rI)^{-1} (P_\omega w)(x) \\ = \ & \frac{r^\beta}{4\pi i} Q_\omega(x) e^{xQ_\omega(x)} K_\omega(x) \int_\Gamma \int_0^1 e^{sz} \frac{z^2}{r-z} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \cdot \\ & \left(Q_\omega(s)^{-2} - Q_\omega(x)^{-2} \right) w(s)\, ds dz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{r^{\beta}}{4\pi i}Q_{\omega}(x)\,e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}\int_{\Gamma}\int_{0}^{1}e^{(1-s)z}\frac{z^{2}}{r-z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\cdot\\
&\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz\\
&+\frac{r^{\beta}}{4\pi i}Q_{\omega}(x)\int_{\Gamma}\int_{0}^{x}e^{(x-s)z}\frac{z^{2}}{r-z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz\\
&+\frac{r^{\beta}}{4\pi i}Q_{\omega}(x)\int_{\Gamma}\int_{x}^{1}e^{(s-x)z}\frac{z^{2}}{r-z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz\\
&-\frac{r^{\beta}}{2}Q_{\omega}(x)^{4}\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1}e^{xQ_{\omega}(x)}K_{\omega}(x)\,e^{Q_{\omega}(x)}\cdot\\
&\int_{0}^{1}e^{(1-s)Q_{\omega}(x)}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&-\frac{r^{\beta}}{2}Q_{\omega}(x)^{4}\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}K_{\omega}(x)\,e^{Q_{\omega}(x)}\cdot\\
&\int_{0}^{1}e^{sQ_{\omega}(x)}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
&+\frac{r^{\beta}}{2}Q_{\omega}(x)^{4}\left(Q_{\omega}(x)-rI\right)^{-1}e^{(1-x)Q_{\omega}(x)}K_{\omega}(x)\,e^{2Q_{\omega}(x)}\cdot\\
&\int_{0}^{1}e^{(1-s)Q_{\omega}(x)}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,ds\\
=\;&\sum_{i=1}^{7}I_{i}(x).
\end{aligned}
$$

On a pour p.p $x\in(0,1)$

$$
\begin{aligned}
&I_{1}(x)\\
=\;&\frac{r^{\beta}}{4\pi i}K_{\omega}(x)\int_{\Gamma}\int_{0}^{1}e^{(x+s)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)w(s)\,dsdz\\
=\;&\int_{0}^{1}K_{z}(x,s)\,w(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

avec

$$
K_{z}(x,s)=\int_{\Gamma}\frac{r^{\beta}}{4\pi i}K_{\omega}(x)\,e^{(x+s)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)ds
$$

On a

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{1}\left|K_{z}(x,s)\right|ds\\
\leqslant\;&Cr^{\beta}\int_{0}^{1}\int_{\Gamma}\left\|e^{(x+s)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}(s)^{-2}-Q_{\omega}(x)^{-2}\right)dz\right\|_{E}ds\\
\leqslant\;&Cr^{\beta}\int_{0}^{x}\int_{\Gamma}\frac{|z|^{3}}{|r-z|}e^{-C_{0}(x+s)|z|}\frac{(x-s)^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d\,|z|\,ds
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \quad Cr^{\beta}\int_{\Gamma}\frac{|z|^{3}}{|r-z|}\left(\sup_{x\in[0,1]}\int_{0}^{x}e^{-C_{0}(x+s)|z|}\left(x-s\right)^{\alpha}ds+\sup_{x\in[0,1]}\int_{x}^{1}e^{-C_{0}(x+s)|z|}\left(s-x\right)^{\alpha}ds\right)\frac{d\left|z\right|}{\left|z\right|^{\mu}}\\
&\leqslant \quad Cr^{\beta}\int_{\Gamma}\frac{|z|^{3}}{|r-z|\left|z\right|^{\mu}}\frac{d\left|z\right|}{\left|z\right|^{1+\alpha}}\\
&\leqslant \quad Cr^{\beta}\int_{\Gamma}\frac{d\left|z\right|}{|r-z|\left|z\right|^{\alpha+\mu-2}}\\
&\leqslant \quad \frac{Cr^{\beta}}{r^{\alpha+\mu-2}}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Schur, on a pour $w\in L^{p}\left(0,1;E\right)$

$$\left\Vert I_{1}\left(w\right)\right\Vert_{L^{p}(0,1;E)}\leqslant\frac{Cr^{\beta}}{r^{\alpha+\mu-2}}\left\Vert w\right\Vert_{L^{p}(0,1;E)}.$$

$I_{2}\left(x\right)$ se traite comme $I_{1}\left(x\right)$.
Pour $I_{3}\left(x\right)+I_{4}\left(x\right)$, on a p.p $x\in\left(0,1\right)$

$$\begin{aligned}
&I_{3}\left(x\right)+I_{4}\left(x\right)\\
=\;&\frac{r^{\beta}}{4\pi i}\int_{\Gamma}\int_{0}^{x}e^{(x-s)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}\left(s\right)^{-2}-Q_{\omega}\left(x\right)^{-2}\right)w\left(s\right)dsdz\\
&+\frac{r^{\beta}}{4\pi i}\int_{\Gamma}\int_{x}^{1}e^{(s-x)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}\left(s\right)^{-2}-Q_{\omega}\left(x\right)^{-2}\right)w\left(s\right)dsdz\\
=\;&\frac{r^{\beta}}{4\pi i}\int_{0}^{1}K_{z}\left(x,s\right)w\left(s\right)ds,
\end{aligned}$$

avec

$$K_{z}\left(x,s\right)=\begin{cases}\int_{\Gamma}\frac{r^{\beta}}{4\pi i}e^{(x-s)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}\left(s\right)^{-2}-Q_{\omega}\left(x\right)^{-2}\right)ds & \text{si }\;0\leqslant s\leqslant x\\[2ex]
\int_{\Gamma}\frac{r^{\beta}}{4\pi i}e^{(s-x)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}\left(s\right)^{-2}-Q_{\omega}\left(x\right)^{-2}\right)ds & \text{si }\;x\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{1}\left|K_{z}\left(x,s\right)\right|ds\\
\leqslant\;&C_{1}r^{\beta}\int_{0}^{x}\int_{\Gamma}\left\Vert e^{(x-s)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}\left(s\right)^{-2}-Q_{\omega}\left(x\right)^{-2}\right)dz\right\Vert_{E}ds\\
&+C_{2}r^{\beta}\int_{x}^{1}\int_{\Gamma}\left\Vert e^{(s-x)z}\frac{z^{3}}{r-z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega}\left(s\right)^{-2}-Q_{\omega}\left(x\right)^{-2}\right)dz\right\Vert_{E}ds\\
\leqslant\;&C_{1}r^{\beta}\int_{0}^{x}\int_{\Gamma}\frac{|z|^{3}}{|r-z|}e^{-C_{0}(x-s)|z|}\frac{(x-s)^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d\left|z\right|ds\\
&+C_{2}r^{\beta}\int_{x}^{1}\int_{\Gamma}\frac{|z|^{3}}{|r-z|}e^{-C_{0}(s-x)|z|}\frac{(s-x)^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d\left|z\right|ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \quad Cr^{\beta}\int_{\Gamma}\frac{|z|^{3}}{|r-z|}\left(\sup_{x\in[0,1]}\int_{0}^{x}e^{-C_{0}(x-s)|z|}\left(x-s\right)^{\alpha}ds+\sup_{x\in[0,1]}\int_{x}^{1}e^{-C_{0}(s-x)|z|}\left(s-x\right)^{\alpha}ds\right)\frac{d\left|z\right|}{|z|^{\mu}}\\
&\leqslant \quad Cr^{\beta}\int_{\Gamma}\frac{|z|^{3}}{|r-z|\,|z|^{\mu}}\frac{d\left|z\right|}{|z|^{1+\alpha}}\\
&\leqslant \quad Cr^{\beta}\int_{\Gamma}\frac{d\left|z\right|}{|r-z|\,|z|^{\alpha+\mu-2}}\\
&\leqslant \quad \frac{Cr^{\beta}}{r^{\alpha+\mu-2}}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Schur, on a pour $w\in L^{p}\left(0,1;E\right)$

$$\left\Vert I_{3}\left(w\right)+I_{4}\left(w\right)\right\Vert_{L^{p}(0,1;E)}\leqslant\frac{Cr^{\beta}}{r^{\alpha+\mu-2}}\left\Vert w\right\Vert_{L^{p}(0,1;E)}.$$

Finalement on déduit que

$$\sup_{r>0}\left\Vert r^{\beta}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-rI\right)^{-1}\left(P_{\omega}w\right)\left(x\right)\right\Vert_{E}\leqslant C\left\Vert w\right\Vert_{L^{p}(0,1;E)},$$

alors

$$P_{\omega}\in\mathcal{L}\left(L^{p}\left(0,1;E\right),L^{p}\left(0,1;E\right)\cap B\left(D_{Q_{\omega}(\cdot)}\left(\beta,+\infty\right)\right)\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
D_{Q(\cdot)}\left(\beta,+\infty\right) &= \left(E,D_{Q(\cdot)}\right)_{\beta,+\infty}\\
&= \left(E,D_{Q(\cdot)^{2}}\right)_{\frac{\beta}{2},+\infty}\\
&= \left(E,D_{A(\cdot)}\right)_{\frac{\beta}{2},+\infty}\\
&= D_{A(\cdot)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right),
\end{aligned}$$

donc

$$P_{\omega}\in\mathcal{L}\left(L^{p}\left(0,1;E\right),L^{p}\left(0,1;E\right)\cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right)\right)\right).$$

□

0.16.2 Régularité de l'opérateur intégral $\left(I+P_{\omega}\right)^{-1}$

On a besoin d'énoncer la régularité de l'opérateur $\left(I+P_{\omega}\right)^{-1}$ qui existe pour $\omega\geqslant\omega^{*}$ puisque on a vu que $\left\Vert P_{\omega}\right\Vert_{L(L^{p}(0,1;E))}\leqslant\dfrac{1}{2}$ pour tout $\omega\geqslant\omega^{*}$.

Proposition 0.16.2 *Sous les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7) et pour tout $\omega\geqslant\omega^{*}$, on a*

1. $\left(I+P_{\omega}\right)^{-1}\in L\left(L^{p}\left(0,1;E\right)\right),\quad 1<p<+\infty$
2. $\left(I+P_{\omega}\right)^{-1}\in L\left(L^{p}\left(0,1;E\right)\cap B\left(D_{A(\cdot)}\left(\dfrac{\beta}{2},+\infty\right)\right)\right),\quad \beta\in\left]0,\alpha+\mu-2\right[.$

Preuve. Se déduit de l'inversibilité de l'opérateur $I+P_{\omega}$. □

0.16.3 Théoreme de régularité maximale

On donne maintenant le théorème de régularité maximale qui englobe toutes les propositions précédentes.

Théorème 0.16.1 *Soit $f \in L^p(0,1;E)$ où $p \in \left]1,+\infty\right[$ et soit $d_0, u_1 \in E$. On suppose de plus les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7) vérifieés et que*

$$(Q_\omega(0)-H)^{-1} d_0 \in D(A(0),E)_{\frac{1}{2p},p}, \quad u_1 \in D(A(1),E)_{\frac{1}{2p},p},$$

alors il existe $\omega^* > 0$ tel que $\forall \omega \geqslant \omega^*$ la solution de l'équation (0.15.8) $w(\cdot) = Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot)$ vérifie :

1. $Q_\omega(\cdot)^2 u(\cdot) \in L^p(0,1;E)$.
2. $u'' \in W^{2,p}(0,1;E)$.

0.17 Le problème approché

On a montré,par un raisonnement heuristique,dans la partie précédente que l'existence d'une solution stricte du problème (0.15.1) implique sa représentation par la formule (0.15.8) à partir d'un certain $\omega \geqslant \omega^*$.Maintenant et pour montrer cette existence on considère la famille de problèmes approchés suivante

$$\begin{cases} u_n''(x) + A_n(x)u_n(x) - \omega u_n(x) = f(x), \quad x \in \left]0,1\right[\\ u_n'(0) - Hu_n(0) = d_0 \\ u_n(1) = u_1, \end{cases} \tag{0.17.1}$$

On pose, pour $x \in [0,1]$,

$$A_{\omega,n}(x) = A_n(x) - \omega I \qquad \text{et} \qquad Q_{\omega,n}(x) = -\left(-A_{\omega,n}(x)\right)^{1/2},$$

et on considère la famille des approchants de Yosida de $\left(Q_\omega(x)\right)_{x\in[0,1]}$ définie par :

$$Q_{\omega,n}(x) = -n\, Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - nI\right)^{-1},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Par un calcul classique on a

$$\left(Q_{\omega,n}(x) - zI\right)^{-1} = \frac{-1}{n+z}\left(Q_\omega(x) - nI\right)\left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} I\right)^{-1}.$$

Lemme 0.17.1 *La famille $\left(Q_{\omega,n}(x)\right)_{x\in[0,1]}$ vérifie aussi l'hypothèse (0.15.5) uniformément par-rapport à n*

$$\left\| Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x) - zI\right)^{-1}\left(Q_{\omega,n}(x)^{-1} - Q_{\omega,n}(s)^{-1}\right)\right\|_{L(E)} \leqslant K\frac{|s-x|^\alpha}{|z+\omega|^\mu}. \tag{0.17.2}$$

Concernant le problème (0.17.1) on a le résultat

Proposition 0.17.1 *On suppose que* $f \in L^p(0,1;E)$, $(Q_\omega(0) - H)^{-1} d_0 \in D_{Q_\omega(0)} \cap D(H)$ *et* $u_1 \in D_{A(1)}$. *Alors il existe* $\omega(n)$ *tel que* $\forall\omega > \omega(n)$, *le problème (0.17.1) admet une unique solution* $u_n \in W^{2,p}(0,1;E)$.

La famille $(A_n(x))_{x\in[0;1]}$ est bornée, de plus

$$u_n''(x) = f(x) - A_n(x)u_n(x) + \omega u_n(x).$$

Donc pour tout $\omega \geqslant \omega(n)$, le problème (0.17.1) admet une solution unique $u_n \in W^{2,p}(0,1;E)$.

Proposition 0.17.2 *Il existe* $\omega^* > 0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists C(n) > 0$:

$$\|u_n\|_{L^p(0,1;E)} \leqslant \frac{C(n)}{\sqrt{\omega}}\left(\|f\|_{L^p(0,1;E)} + \|d_0\|_E + \|u_1\|_E\right),$$

et ceci pour tout $u_n \in W^{2,p}(0,1;E)$, $u_n'(0) - Hu_n(0) = d_0$ *et* $u_n(1) = u_1$.

Preuve. Par le même raisonnement de la partie (2) u_n vérifie l'équation intégrale :

$$w_n + P_{\omega,n}w_n = G_n(d_0, u_1, f),$$

où

$$w_n = Q_{\omega,n}(\cdot)^2 u_n(\cdot),$$

$$\begin{aligned}
& (P_{\omega,n}w_n)(x) \\
= \; & \frac{1}{2}K_{\omega,n}(x)\, e^{xQ_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{sQ_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds \\
& -\frac{1}{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\, e^{Q_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\, e^{Q_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{sQ_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds \\
& +\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\, e^{2Q_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)} \,. \\
& \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)} \int_0^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds \\
& +\frac{1}{2}\int_0^x Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(x-s)Q_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds \\
& +\frac{1}{2}\int_x^1 Q_{\omega,n}(x)^3 e^{(s-x)Q_{\omega,n}(x)} \left(Q_{\omega,n}(s)^{-2} - Q_{\omega,n}(x)^{-2}\right) w_n(s)\, ds,
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
&G_n(d_0,u_1,f)(x)=\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\,e^{xQ_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\,e^{(1+x)Q_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\,e^{(2-x)Q_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\,e^{(3-x)Q_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\,e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}\int_0^1 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\int_0^x e^{(x-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\int_x^1 e^{(s-x)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
&+Q_{\omega,n}(x)^2\,e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left[\Lambda_{\omega,n}(x)^{-1}d_0+K_{\omega,n}(x)\,e^{Q_{\omega,n}(x)}u_1\right]\\
&+Q_{\omega,n}(x)^2\,e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}\left[\left(I-K_{\omega,n}(x)\,e^{2Q_{\omega,n}(x)}\right)u_1-\Lambda_{\omega,n}(x)^{-1}e^{Q_{\omega,n}(x)}d_0\right].
\end{aligned}
$$

On a pour tout $x\in[0,1]$ et $z\in\Gamma$

$$
\left\|\frac{n}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\right\|_{L(E)}\leqslant\frac{K(n)}{|z|},
$$

ce qui permet de montrer la continuité de $G_n(d_0,u_1,f)$, on a

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\,e^{xQ_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\right\|_E\\
\leqslant\;& K(n)\int_0^1\left\|e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\right\|\\
\leqslant\;& K(n)\left(\int_0^1\left\|e^{sQ_{\omega,n}(x)}\right\|^q ds\right)^{1/q}\left(\int_0^1|f(s)|^p\,ds\right)^{1/p}\\
\leqslant\;& K(n)\,\|f\|_{L^p(0,1;E)},
\end{aligned}
$$

Les autres termes se traitent de la même manière. Donc

$$
\|G_n(d_0,u_1,f)\|\leqslant K(n)\left(\|d_0\|_E+\|u_1\|_E+\|f\|_{L^p(0,1;E)}\right).
$$

En se basant sur l'hypothèse (0.13.2) et de la même manière qu'au chapitre (1), on montre qu'il existe $\omega^*>0$ tel que pour tout $\omega\geqslant\omega^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$, l'opérateur $P_{\omega,n}$ est inversible et

$$
u_n(x)=-\left(A_n(x)-\omega I\right)^{-1}\left(I+P_{\omega,n}\right)^{-1}G_n(d_0,u_1,f)(x).
$$

□

Lemme 0.17.2 *Il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le problème approché (0.11.10) admet une solution unique $u_n \in W^{2,p}(0,1;E)$ et de plus*

$$u_n(x) = -(A(x) - \omega I)^{-1} (I + P_{\omega,n})^{-1} G_n(d_0, u_1, f)(x).$$

Preuve. La proposition (0.17.1) montre qu'il existe $u_n \in W^{2,p}(0,1;E)$ solution de problème (0.11.10) pour tout $\omega \geqslant \omega(n)$. Ensuite grâce à l'estimation de la proposition (0.17.2), on a que u_n est solution de problème (0.11.10) pour $\omega \in \left[K(n)\left(1 - \frac{1}{K(n)}\right), K(n)\left(1 + \frac{1}{K(n)}\right)\right]$. Il suffit alors de réitérer ce raisonnement pour atteindre ω^*. □

Maintenant on doit étudier la convergence des opérateurs $G_n(d_0, u_1, f)$ et $P_{\omega,n}$ quand $n \longrightarrow +\infty$. On aura besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 0.17.3 *Pour tout $x \in [0,1]$, $z \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\begin{aligned} & Q_{\omega,n}(x)(Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} \\ = & -\frac{z}{n+z} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} I\right)^{-1} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}, \end{aligned}$$

où $(Q_{\omega,n}(x))_{x\in[0,1]}$ est la famille des approchants de Yosida de $(Q_\omega(x))_{x\in[0,1]}$.

Lemme 0.17.4 *Pour tout $x \in [0,1]$, $z \in \Gamma$, on a*

$$Q_{\omega,n}(x)(Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} \longrightarrow Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1},$$

quand $n \longrightarrow +\infty$.

Pour tout $x \in [0,1]$, $z \in \Gamma$, on a

$$K_{\omega,n}(x) \longrightarrow K_\omega(x), \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty,$$

et

$$(Q_{\omega,n}(x) - H)^{-1} \longrightarrow (Q_\omega(x) - H)^{-1}, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

On va étudier maintenant les convergences de $G_n(d_0, u_1, f)$ et de $P_{\omega,n}$ quand n tend vers l'infini.

Proposition 0.17.3 *Soit $f \in L^p(0,1;E)$ avec $1 < p < \infty$. Alors pour*

$$(Q_\omega(0) - H)^{-1} d_0 \in D(Q_\omega(0)) \cap D(H) \quad \text{et} \quad u_1 \in D(A(1)).$$

On a

$$G_n(d_0, u_1, f) \longrightarrow G(d_0, u_1, f), \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \text{ dans } L^p(0,1;E).$$

Preuve. Pour $x \in [0,1]$ et en utilisant l'identité

$$\begin{aligned} & Q_{\omega,n}(x)(Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1} \\ = & -\frac{z}{n+z} Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} I\right)^{-1} Q_\omega(x)(Q_\omega(x) - zI)^{-1}. \end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
& G_n\left(d_0,u_1,f\right)(x)-G\left(d_0,u_1,f\right)(x)\\
= \; & Q_{\omega,n}(x)^2 e^{xQ_{\omega,n}(x)}\Lambda_{\omega,n}(x)^{-1}d_0-Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\Lambda_\omega(x)^{-1}d_0\\
& +Q_{\omega,n}(x)^2 e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}u_1-Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1\\
& +\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)e^{xQ_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
& -\frac{1}{2}Q_\omega(x)e^{xQ_\omega(x)}K_\omega(x)\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds\\
& -\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}\int_0^1 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}Q_\omega(x)e^{(1-x)Q_\omega(x)}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\int_0^x e^{(x-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds-\frac{1}{2}Q_\omega(x)\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)\int_x^1 e^{(s-x)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds-\frac{1}{2}Q_\omega(x)\int_x^1 e^{(s-x)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\\
& +Q_{\omega,n}(x)^2 e^{xQ_{\omega,n}(x)}e^{Q_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\left(u_1-\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\right)\\
& -Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}K_\omega(x)\left(u_1-\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\right)\\
& -Q_{\omega,n}(x)^2 e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}e^{2Q_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\left(u_1-\frac{1}{2}Q_{\omega,n}(x)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\right)\\
& +Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}e^{2Q_\omega(x)}K_\omega(x)\left(u_1-\frac{1}{2}Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega(x)}f(s)\,ds\right)\\
& -Q_{\omega,n}(x)^2 e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}e^{Q_{\omega,n}(x)}\left(\Lambda_{\omega,n}(x)^{-1}d_0+\frac{1}{2}K_{\omega,n}(x)Q_{\omega,n}(x)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\right)\\
& +Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}e^{Q_\omega(x)}\left(\Lambda_\omega(x)^{-1}d_0+\frac{1}{2}K_\omega(x)Q_\omega(x)^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds\right)\\
= \; & Q_{\omega,n}(x)^2 e^{xQ_{\omega,n}(x)}\Lambda_{\omega,n}(x)^{-1}d_0-Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}\Lambda_\omega(x)^{-1}d_0\\
& +Q_{\omega,n}(x)^2 e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)}u_1-Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)}u_1\\
& +\sum_{i=1}^{8}I_i(x)+R_n\left(x,f,d_0,u_1\right)-R\left(x,f,d_0,u_1\right).
\end{aligned}
$$

Pour $I_1(x)+I_2(x)$, on a

$$
\begin{aligned}
& Q_{\omega,n}(x)e^{xQ_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\\
& -Q_\omega(x)e^{xQ_\omega(x)}K_\omega(x)\int_0^1 e^{sQ_\omega(x)}f(s)\,ds
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= Q_{\omega,n}(x)\,e^{xQ_{\omega,n}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds \\
&\quad -Q_{\omega}(x)\,e^{xQ_{\omega}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\
&\quad +Q_{\omega}(x)\,e^{xQ_{\omega}(x)}K_{\omega,n}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\
&\quad -Q_{\omega}(x)\,e^{xQ_{\omega}(x)}K_{\omega}(x)\int_0^1 e^{sQ_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\
&= K_{\omega,n}(x)\left[Q_{\omega,n}(x)\,e^{xQ_{\omega,n}(x)}-Q_{\omega}(x)\,e^{xQ_{\omega}(x)}\right]\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds \\
&\quad +K_{\omega,n}(x)\,Q_{\omega}(x)\,e^{xQ_{\omega}(x)}\int_0^1\left(e^{sQ_{\omega,n}(x)}-e^{sQ_{\omega}(x)}\right)f(s)\,ds \\
&\quad +\left[K_{\omega,n}(x)-K_{\omega}(x)\right]Q_{\omega}(x)\,e^{xQ_{\omega}(x)}\int_0^1 e^{sQ_{\omega}(x)}f(s)\,ds \\
&= I_1^1(x)+I_1^2(x)+I_1^3(x),
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
&\left\|Q_{\omega,n}(x)\,e^{xQ_{\omega,n}(x)}-Q_{\omega}(x)\,e^{xQ_{\omega}(x)}\right\|_E \\
&= \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\left(Q_{\omega,n}(x)\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}-Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}\right)dz\right\|_E \\
&= \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z}{n+z}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q_{\omega}(x)\left(Q_{\omega}(x)-zI\right)^{-1}dz\right\|_E \\
&\leqslant C\int_\Gamma \frac{|z|}{|n+z|}e^{-C_0x|z|}\frac{|n+z|}{n\,|z|}\,|dz| \\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_\Gamma e^{-C_0x|z|}d\,|z|,
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^1 e^{sQ_{\omega,n}(x)}f(s)\,ds\right\|_E \\
&= \left\|\frac{-1}{2\pi i}\int_0^1\int_\Gamma e^{sz}\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}f(s)\,dzds\right\|_E \\
&\leqslant C\left(\int_0^1\left\|\int_\Gamma e^{sz}\left(Q_{\omega,n}(x)-zI\right)^{-1}dz\right\|_E^q ds\right)^{1/q}\left(\int_0^1\|f(s)\|_E^p\,ds\right)^{1/p} \\
&\leqslant C\left(\int_0^1\left(\int_\Gamma\frac{e^{-s|z|}}{|z|}d\,|z|\right)^q ds\right)^{1/q}\|f\|_{L^p(0,1;E)} \\
&\leqslant C\,\|f\|_{L^p(0,1;E)},
\end{aligned}$$

alors

$$\left\|I_1^1(x)\right\|_E \leqslant \frac{C}{n}\,\|f\|_{L^p(0,1;E)} \to 0, \qquad \text{quand } \; n\to+\infty.$$

Pour $I_1^2(x)$, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^1 \left(e^{sQ_{\omega,n}(x)} - e^{sQ_\omega(x)} \right) f(s)\, ds \right\|_E \\
= & \left\| \int_0^1 \int_\Gamma e^{sz} \left((Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} - (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \right) f(s)\, dz ds \right\|_E \\
\leqslant & \; C \left(\int_0^1 \left\| \int_\Gamma e^{sz} \left((Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} - (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \right) dz \right\|_E^q ds \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(0,1;E)} \\
\leqslant & \; C \left(\int_0^1 \left(\int_\Gamma \frac{1}{|z|} \frac{|z|}{|n+z|} \frac{|n+z|}{n|z|} e^{-s|z|} d|z| \right)^q ds \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(0,1;E)} \\
\leqslant & \; \frac{C}{n} \left(\int_0^1 \left(\int_\Gamma \frac{1}{|z|} e^{-s|z|} d|z| \right)^q ds \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(0,1;E)} \\
\leqslant & \; \frac{C}{n} \|f\|_{L^p(0,1;E)},
\end{aligned}$$

alors

$$\left\| I_1^2(x) \right\|_E \leqslant \frac{C}{n} \|f\|_{L^p(0,1;E)} \to 0, \qquad \text{quand} \;\; n \to +\infty,$$

on a $K_{\omega,n}(x) \to K_\omega(x)$ quand $n \to +\infty$, alors

$$\left\| I_1^3(x) \right\|_E \to 0, \qquad \text{quand} \;\; n \to +\infty.$$

donc

$$\| I_1(x) + I_2(x) \|_E \to 0, \qquad \text{quand} \;\; n \to +\infty,$$

Pour les autres intégrales le calcul est trop long il faut jumeler $(I_i(x) + I_{i+1}(x))$. On montre la convergence absolue en faisant le même découpage que celui utilisé pour la continuité du second membre $G(d_0, u_1, f)$ (voir la preuve de la proposition 0.15.2), ensuite on applique le théorème de la convergence dominée. Par exemple on a

$$\begin{aligned}
& Q_{\omega,n}(x)^2 e^{(1-x)Q_{\omega,n}(x)} u_1 - Q_\omega(x)^2 e^{(1-x)Q_\omega(x)} u_1 \\
= & -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z e^{(1-x)z} \left(Q_{\omega,n}(x) (Q_{\omega,n}(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \right) u_1 dz \\
= & -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{z^2}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} \right)^{-1} Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} u_1 dz \\
= & -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{z^2}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} \right)^{-1} \cdot \\
& \left[Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} - Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} \right] u_1 dz \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{z^2}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} \right)^{-1} Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} u_1 dz \\
= & -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(1-x)z} \frac{z^2}{n+z} Q_\omega(x) \left(Q_\omega(x) - \frac{nz}{n+z} \right)^{-1} \cdot \\
& Q_\omega(x) (Q_\omega(x) - zI)^{-1} \left(Q_\omega(x)^{-1} - Q_\omega(1)^{-1} \right) Q_\omega(1) (Q_\omega(1) - zI)^{-1} u_1 dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{(1-x)z}\frac{z^{2}}{n+z}Q_{\omega}\left(x\right)\left(Q_{\omega}\left(x\right)-\frac{nz}{n+z}\right)^{-1}Q_{\omega}\left(1\right)\left(Q_{\omega}\left(1\right)-zI\right)^{-1}u_{1}dz\\
=\ & I_{1}\left(x\right)+I_{2}\left(x\right).
\end{aligned}$$

Pour $I_1(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|I_{1}\left(x\right)\right\|_{E} &\leqslant C\int_{\Gamma}e^{-(1-x)|z|}\frac{|z|^{2}}{|n+z|}\frac{|n+z|}{n\,|z|}\frac{(1-x)^{\alpha}}{|z|^{\mu}}d\,|z|\,\|u_{1}\|_{E}\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_{\Gamma}e^{-(1-x)|z|}\frac{(1-x)^{\alpha}}{|z|^{\mu-1}}d\,|z|\,\|u_{1}\|_{E}\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_{\Gamma}e^{-\sigma}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma}{1-x}\right)^{\mu-1}}\frac{d\sigma}{(1-x)}\,\|u_{1}\|_{E}\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{\mu-1}}(1-x)^{\alpha+\mu-2}\,d\sigma\,\|u_{1}\|_{DE}\\
&\leqslant \frac{C}{n}(1-x)^{\alpha+\mu-2}\,\|u_{1}\|_{DE}\\
&\leqslant \frac{C}{n}\,\|u_{1}\|_{E},
\end{aligned}$$

pour $I_2(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|I_{2}\left(x\right)\right\|_{E} &\leqslant C\int_{\Gamma}\frac{1}{|n+z|}e^{-(1-x)|z|}\frac{|n+z|}{n\,|z|}d\,|z|\,\left\|Q_{\omega}\left(1\right)^{2}u_{1}\right\|_{E}\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_{\Gamma}\frac{1}{|z|}e^{-(1-x)|z|}d\,|z|\,\left\|Q_{\omega}\left(1\right)^{2}u_{1}\right\|_{E}\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_{\Gamma}\frac{1}{\left(\dfrac{\sigma}{1-x}\right)}e^{-\sigma}\frac{d\sigma}{(1-x)}\left\|Q_{\omega}\left(1\right)^{2}u_{1}\right\|_{E}\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_{\Gamma}\frac{1}{\sigma}e^{-\sigma}d\sigma\left\|Q_{\omega}\left(1\right)^{2}u_{1}\right\|_{E}\\
&\leqslant \frac{C}{n}\left\|Q_{\omega}\left(1\right)^{2}u_{1}\right\|_{E}.
\end{aligned}$$

Et de plus, on a

$$\begin{aligned}
&Q_{\omega,n}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\Lambda_{\omega,n}^{-1}\left(x\right)d_{0}-Q_{\omega}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega}(x)}\Lambda_{\omega}\left(x\right)^{-1}d_{0}\\
=\ &Q_{\omega,n}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(Q_{\omega,n}\left(x\right)-H\right)^{-1}d_{0}-Q_{\omega,n}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(Q_{\omega}\left(x\right)-H\right)^{-1}d_{0}\\
&+Q_{\omega,n}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(Q_{\omega,n}\left(x\right)-H\right)^{-1}W\left(x\right)d_{0}-Q_{\omega,n}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(Q_{\omega}\left(x\right)-H\right)^{-1}W\left(x\right)d_{0},
\end{aligned}$$

on a $W(x)\in L(E)$ et $R(W(x))\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}D\left(Q_{\omega}(x)^{k}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
&Q_{\omega,n}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(Q_{\omega,n}\left(x\right)-H\right)^{-1}d_{0}-Q_{\omega}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega}(x)}\left(Q_{\omega}\left(x\right)-H\right)^{-1}d_{0}\\
=\ &Q_{\omega,n}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(Q_{\omega,n}\left(x\right)-H\right)^{-1}d_{0}-Q_{\omega,n}\left(x\right)^{2}e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left(Q_{\omega}\left(x\right)-H\right)^{-1}d_{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad +Q_{\omega,n}(x)^2 e^{xQ_{\omega,n}(x)}(Q_\omega(x)-H)^{-1}d_0 - Q_\omega(x)^2 e^{xQ_\omega(x)}(Q_\omega(x)-H)^{-1}d_0\\
&= Q_{\omega,n}(x)^2 e^{xQ_{\omega,n}(x)}\left[(Q_{\omega,n}(x)-H)^{-1}d_0-(Q_{\omega,n}(x)-H)^{-1}d_0\right]\\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}\right)^{-1}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left[Q_\omega(x)^{-1}\right.\\
&\quad \left.-Q_\omega(0)^{-1}\right]Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}\left[(Q_{\omega,n}(x)-H)^{-1}-(Q_{\omega,n}(0)-H)^{-1}\right]d_0dz\\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}\right)^{-1}Q_\omega(x)(Q_\omega(x)-zI)^{-1}Q_\omega(x)\cdot\\
&\quad (Q_\omega(x)-zI)^{-1}\left[Q_\omega(x)^{-1}-Q_\omega(0)^{-1}\right]Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}(Q_{\omega,n}(0)-H)^{-1}d_0dz\\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}\right)^{-1}Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}\cdot\\
&\quad \left[(Q_{\omega,n}(x)-H)^{-1}-(Q_{\omega,n}(0)-H)^{-1}\right]d_0dz\\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{xz}\frac{z^2}{n+z}Q_\omega(x)\left(Q_\omega(x)-\frac{nz}{n+z}\right)^{-1}Q_\omega(0)(Q_\omega(0)-zI)^{-1}\cdot\\
&\quad (Q_{\omega,n}(0)-H)^{-1}d_0dz\\
&= \sum_{i=1}^{5}a_i.
\end{aligned}$$

On a

$$\|a_1(x)\|_E\to 0,$$

pour $a_2(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\|a_2(x)\|_E &\leqslant C\int_\Gamma \frac{|z|^2}{|n+z|}e^{-x|z|}\frac{|n+z|}{n|z|}\frac{x^\alpha}{|z|^\mu}x^{\alpha+\mu}d|z|\,\|d_0\|_E\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_\Gamma |z|^{1-\mu}x^{2\alpha+\mu}e^{-x|z|}d|z|\,\|d_0\|_E\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_\Gamma \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{1-\mu}e^{-\sigma}x^{2\alpha+\mu}\frac{d\sigma}{x}\|d_0\|_E\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_\Gamma \sigma^{1-\mu}e^{-\sigma}x^{2(\alpha+\mu)-2}d\sigma\,\|d_0\|_E\\
&\leqslant \frac{C}{n}x^{2(\alpha+\mu)-2}\|d_0\|_E\\
&\leqslant \frac{C}{n}\|d_0\|_E,
\end{aligned}$$

pour $a_3(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\|a_3(x)\|_E &\leqslant C\int_\Gamma \frac{|z|^2}{|n+z|}e^{-x|z|}\frac{|n+z|}{n|z|}x^{\alpha+\mu}d|z|\,\|d_0\|_E\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_\Gamma |z|\,x^{\alpha+\mu}e^{-x|z|}d|z|\,\|d_0\|_E\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_\Gamma \left(\frac{\sigma}{x}\right)e^{-\sigma}x^{\alpha+\mu}\frac{d\sigma}{x}\|d_0\|_E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{C}{n}\int_{\Gamma}\sigma e^{-\sigma}x^{\alpha+\mu-2}d\sigma\left\|d_0\right\|_E\\
&\leqslant \frac{C}{n}x^{\alpha+\mu-2}\left\|d_0\right\|_E\\
&\leqslant \frac{C}{n}\left\|d_0\right\|_E,
\end{aligned}$$

de même pour $a_4(x)$ et $a_5(x)$. □

Proposition 0.17.4 *Sous les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7) et pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, on a*

1. $P_{\omega,n} \in L(L^p(0,1;E))$ *et* $\left\|P_{\omega,n}\right\|_{L([0,1],E)} \leqslant \frac{1}{2}$.
2. $P_{\omega,n}v \longrightarrow P_\omega v$, *quand* $n \longrightarrow +\infty$ *dans* $L^p(0,1;E)$.
3. $(I+P_{\omega,n})^{-1} \in L(L^p(0,1;E))$ *et il existe* $K>0$ *tel que* $\left\|(I+P_{\omega,n})^{-1}\right\|_{L(L^p(0,1;E))} \leqslant K$, $\forall n>0$.
4. $(I+P_{\omega,n})^{-1}v \longrightarrow (I+P_\omega)^{-1}v$, $\forall v \in L^p(0,1;E)$.

Preuve. **i)** Même raisonnement que pour l'opérateur P_ω.
ii) C'est une conséquence de la convergence dominée.
iii) C'est une conséquence directe de 1.
iv) Soit $w \in L([0,1];E)$, on a

$$\begin{aligned}
&(I+Q_{\omega,n})^{-1}w-(I+Q_\omega)^{-1}w\\
=\;&(I+Q_{\omega,n})^{-1}\left[w-(I+Q_{\omega,n})(I+Q_\omega)^{-1}w\right]\\
=\;&(I+Q_{\omega,n})^{-1}\left[Q_\omega w-Q_{\omega,n}w\right](I+Q_\omega)^{-1}w \longrightarrow 0,\quad \text{quand } n\longrightarrow\infty.
\end{aligned}$$

□

Théorème 0.17.1 *:Sous les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7). Soient $f \in L^p(0,1;E)$,et $d_0, u_1 \in E$, on suppose de plus*

$$(Q_\omega(0)-H)^{-1}d_0 \in (D(A(0)),E)_{\frac{1}{2p},p}, \qquad u_1 \in (D(A(1)),E)_{\frac{1}{2p},,p}.$$

Alors il existe ω^* tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$ la fonction u définie par

$$u(x)=(A(x)-\omega I)^{-1}(I+P_\omega)^{-1}G(d_0,u_1,f)(x),$$

est l'unique solution stricte du problème (0.15.1).

Preuve. Même raisonnement que la partie précédente. □

Remarque 0.17.1 *Si E n'est pas UMD et les opérateurs $(Q(x))_{x\in[0,1]}$ ne sont pas Bip, on peut obtenir des résultats similaires pour un second membre g dans un espace d'interpolation en utilisant les résultats de Acquistapace-Terreni voir [1].*

0.18 Exemples d'applications

Nous allons illustrer les résultats obtenus avec des exemples concrets varié en considérant l'espace $E = L^q(]0,1[)$ et $E = L^q(\Omega)$, $(1 < q < +\infty)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 0.18.1 *Considérons l'espace de Banach $E = L^q(]0,1[)$, $(1 < q < +\infty)$ muni de sa norme naturelle. On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $Q(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ par*

$$\begin{cases} D(Q(x)) = \{\varphi \in W^{2,q}(]0,1[) : \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0,\ \varphi(1) = 0\} \\ [(Q(x))\varphi](y) = \varphi''(y), \qquad\qquad y \in]0,1[, \end{cases}$$

où $b(x)$ est une fonction vérifiant :

$$\begin{cases} b(x) \geqslant b_0 \\ |b(x) - b(s)| \leqslant K|x-s|^{1+\varepsilon} \\ \varepsilon > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2q}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} D(A(x)) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in W^{4,p}(]0,1[) : \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0,\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi''(0) - b(x)\varphi'''(0) = 0, \quad \varphi''(1) = 0 \end{array} \right\} \\ (A(x)\varphi)(y) = -\varphi^{(4)}(y), \qquad\qquad y \in]0,1[. \end{cases}$$

Un calcul direct permet, pour $z \in \mathbb{C}\diagdown\mathbb{R}_-$ et $\psi \in E$, de résoudre l'équation spectrale

$$Q(x)\varphi - z\varphi = \psi,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} \varphi''(y) - z\varphi(y) = \psi(y), \quad y \in]0,1[\\ \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$(Q(x) - zI)^{-1}\psi)(y) = \int_0^1 K_\rho(y,x,s)\psi(s)\,ds,$$

avec $\rho = \sqrt{z}$ (ici $\mathrm{Re}(\rho) > 0$) et le noyau de Green K_ρ est défini par

$$K_\rho(y,x,s) = -\begin{cases} \dfrac{\sinh\rho(1-y)\,[\sinh\rho s + b(x)\rho\cosh\rho s]}{\rho\,[\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho]} & si \quad 0 \leqslant s \leqslant y \\ \dfrac{\sinh\rho(1-s)\,[\sinh\rho y + b(x)\rho\cosh\rho y]}{\rho\,[\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho]} & si \quad y \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

L'opérateur $Q(x)$ est inversible, son inverse est borné et on a

$$\left(Q(x)^{-1}\psi\right)(y)=\int_0^1 K_0(y,x,s)\,\psi(s)\,ds,$$

avec

$$K_0(y,x,s)=-\begin{cases}\dfrac{(1-y)\,[s+b(x)]}{1+b(x)} & si\quad 0\leqslant s\leqslant y\\ \dfrac{(1-s)\,[y+b(x)]}{1+b(x)} & si\quad y\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

Pour tout $x,\ s\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}&Q(x)\,(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(s)^{-1}\right]\\ =\ &\left[(Q(x)-zI)^{-1}(Q(s)-zI)-I\right]Q(s)^{-1}.\end{aligned}$$

Soit $f\in E=L^q(]0,1[)$. On doit estimer :

$$\left\|\left[(Q(x)-zI)^{-1}(Q(s)-zI)-I\right]Q(s)^{-1}f\right\|_{L^q(]0,1[)}.$$

On pose

$$v=Q(s)^{-1}f,$$

et

$$u=(Q(x)-zI)^{-1}(Q(s)-zI)\,v.$$

d'où

$$Q(s)\,v=f,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases}v''(y)=f(y)\\ v(0)-b(s)\,v'(0)=0\\ v(1)=0;\end{cases}$$

on en déduit que

$$v(y)=\int_0^1 K_0(y,s,\tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

De l'équation :

$$u=(Q(x)-zI)^{-1}(Q(s)-zI)\,v,$$

on a

$$\begin{cases}u''(y)-zu(y)=v''(y)-zv(y)\\ u(0)-b(x)\,u'(0)=0\\ u(1)=0;\end{cases}$$

On doit estimer $\|u-v\|$.

On a $u - v$ *solution du problème :*

$$\begin{cases} (u-v)''(y) - z(u-v)(y) = 0 \\ (u-v)(0) - b(x)(u-v)'(0) = (b(s) - b(x))\, v'(0) \\ (u-v)(1) = 0; \end{cases}$$

posons $(b(s) - b(x))\, v'(0) = g(s, x, v)$, *alors :*

$$\begin{cases} \varphi''(y) - z\varphi(y) = 0 \\ \varphi(0) - b(x)\,\varphi'(0) = g(s, x, v) \\ \varphi(1) = 0, \end{cases}$$

la solution φ *s'écrit :*

$$\varphi(y) = \frac{[b(x) - b(s)]\, v'(0)}{\sinh \rho + \rho b(x) \cosh \rho} \sinh(1-y)\rho.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, *on a (voir [1], p. 54)*

$$|\sinh \rho + \rho b(x) \cosh \rho| \geqslant \sinh \operatorname{Re}(\rho) \left[1 + (\operatorname{Re}(\rho))^2 b(x)^2 + 2 \operatorname{Re}(\rho)\, b(x)\right]^{1/2},$$

donc

$$|\sinh \rho + \rho b(x) \cosh \rho| \geqslant \sinh \operatorname{Re}(\rho)\, [1 + \operatorname{Re}(\rho)\, b(x)],$$

alors

$$|\varphi(y)| \leqslant |b(x) - b(s)| \,.\, |v'(0)| \,.\, \frac{\sinh(1-y) \operatorname{Re}(\rho)}{\sinh \operatorname{Re}(\rho)\, [1 + \operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]},$$

On a

$$\frac{\sinh(1-y) \operatorname{Re}(\rho)}{\sinh \operatorname{Re}(\rho)\, [1 + \operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]} \leqslant \frac{C e^{-\operatorname{Re}(\rho) y}}{[1 + \operatorname{Re}(\rho)\, b(x)]},$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|e^{-\operatorname{Re}(\rho) y}\right|^q dy &= \frac{1}{q \operatorname{Re}(\rho)} \left[1 - e^{-q \operatorname{Re}(\rho)}\right] \\ &\leqslant \frac{1}{q \operatorname{Re}(\rho)}. \end{aligned}$$

et de plus

$$v(y) = \int_0^y \frac{(1-y)[\tau + b(s)]}{1 + b(s)} f(\tau)\, d\tau + \int_y^1 \frac{(1-\tau)[y + b(s)]}{1 + b(s)} f(\tau)\, d\tau,$$

alors

$$v'(y) = -\int_0^y \frac{[\tau + b(s)]}{1 + b(s)} f(\tau)\, d\tau + \int_y^1 \frac{(1-\tau)}{1 + b(s)} f(\tau)\, d\tau,$$

alors

$$v'(0)=\int_0^1 \frac{(1-\tau)}{1+b(s)} f(\tau)\,d\tau,$$

donc

$$\begin{aligned}|v'(0)| &\leqslant \left(\int_0^1 \left|\frac{(1-\tau)}{1+b(s)}\right|^r d\tau\right)^{1/r} \left(\int_0^1 |f(\tau)|^q\,d\tau\right)^{1/q}\\ &\leqslant C\,\|f\|_{L^q(]0,1[)}\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|u-v\|_{L^q(]0,1[)} &= \|\varphi\|_{L^q(]0,1[)}\\ &\leqslant \frac{|b(x)-b(s)|\cdot|v'(0)|}{1+\operatorname{Re}(\rho)\cdot b(x)}\cdot\frac{1}{q^{1/q}}\cdot\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^{1/q}}\\ &\leqslant \frac{C\,|x-s|^{1+\varepsilon}}{|z|^{1/2+1/2q}}\,\|f\|_{L^q(]0,1[)}\,.\end{aligned}$$

On définit l'opérateur H par $H=aI$, avec $a>0$.
Pour vérifier l'hypothèse (0.15.6), on doit prouver que

$$(Q(x)-aI)^{-1}\,Q(x)^{-1}=Q(x)^{-1}\,(Q(x)-aI)^{-1}\,.$$

On a

$$(Q(x)-aI)^{-1}=\left[Q(x)\left(I-aQ(x)^{-1}\right)\right]^{-1}=\left(I-aQ(x)^{-1}\right)^{-1}Q(x)^{-1}\,,$$

on choisit a tel que

$$|a|<\frac{1}{\max\limits_{x\in[0,1]}\left\|Q(x)^{-1}\right\|_{L(E)}},$$

donc

$$\forall x\in[0,1]\,,\quad \left\|aQ(x)^{-1}\right\|_{L(E)}<1,$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}(Q(x)-aI)^{-1}\,Q(x)^{-1} &= \left(I-aQ(x)^{-1}\right)^{-1}Q(x)^{-2}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}a^kQ(x)^{-k}\right)Q(x)^{-2}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}a^kQ(x)^{-k-2}\,,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Q(x)^{-1}\,(Q(x)-aI)^{-1} &= Q(x)^{-1}\left(I-aQ(x)^{-1}\right)^{-1}Q(x)^{-1}\\ &= Q(x)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a^kQ(x)^{-k}\right)Q(x)^{-1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}a^kQ(x)^{-k-2}\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\left(Q\left(x\right)-aI\right)^{-1}Q\left(x\right)^{-1}=Q\left(x\right)^{-1}\left(Q\left(x\right)-aI\right)^{-1}.$$

Montrons maintenant l'hypothèse (0.15.6) i.e

$$\left\|\left(Q\left(x\right)-aI\right)^{-1}-\left(Q\left(\tau\right)-aI\right)^{-1}\right\|_{L(E)}\leqslant C\left|x-\tau\right|^{\alpha+\mu}.$$

Comme $Q\left(x\right)$ *est fermé pour tout* $x\in\left[0,1\right]$ *et* aI *est borné, alors*

$$\overline{Q\left(x\right)-aI}=Q\left(x\right)-aI,$$

(voir [17], p. 190, Theorem 1.1). Donc en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs de Da-Prato et Grisvard, on a

$$\begin{aligned}\left(Q\left(x\right)-aI\right)^{-1} &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(Q\left(x\right)-\lambda I\right)^{-1}\left(-a+\lambda\right)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\left(Q\left(x\right)-\lambda I\right)^{-1}}{\left(-a+\lambda\right)}d\lambda,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}& \left(Q\left(x\right)-aI\right)^{-1}-\left(Q\left(\tau\right)-aI\right)^{-1} \\ = & \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\left(Q\left(x\right)-\lambda I\right)^{-1}-\left(Q\left(\tau\right)-\lambda I\right)^{-1}}{\left(-a+\lambda\right)}d\lambda \\ = & \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{Q\left(x\right)\left(Q\left(x\right)-\lambda I\right)^{-1}\left[Q\left(x\right)^{-1}-Q\left(\tau\right)^{-1}\right]Q\left(\tau\right)\left(Q\left(\tau\right)-\lambda I\right)^{-1}}{\left(-a+\lambda\right)}d\lambda \\ = & \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{Q\left(x\right)\left(Q\left(x\right)-\lambda I\right)^{-1}\left[Q\left(x\right)^{-1}-Q\left(\tau\right)^{-1}\right]Q\left(\tau\right)\left(Q\left(\tau\right)-\lambda I\right)^{-1}}{\left(-a+\lambda\right)}d\lambda \\ & +\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{Q\left(x\right)\left(Q\left(x\right)-\lambda I\right)^{-1}\left[Q\left(x\right)^{-1}-Q\left(\tau\right)^{-1}\right]Q\left(\tau\right)\left(Q\left(\tau\right)-\lambda I\right)^{-1}}{\left(-a+\lambda\right)}d\lambda \\ = & I_1+I_2,\end{aligned}$$

où

$$\Gamma_1=\left\{\lambda\in\Gamma:\ \ |\lambda|\leqslant\frac{1}{|x-\tau|}\right\}\quad et\ \ \Gamma_2=\left\{\lambda\in\Gamma:\ \ |\lambda|\geqslant\frac{1}{|x-\tau|}\right\},$$

on a

$$\begin{aligned}\left\|I_1\right\|_E &\leqslant K\int_{\Gamma_1}\frac{\left|x-\tau\right|^{\alpha}}{\left|-a+\lambda\right|\left|\lambda\right|^{\mu}}d\left|\lambda\right|, \\ &\leqslant K\int_{\frac{1}{2|x-\tau|}}^{\frac{1}{|x-\tau|}}\frac{\left|x-\tau\right|^{\alpha}}{\left|-a+\lambda\right|\left|\lambda\right|^{\mu}}d\left|\lambda\right| \\ &\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha}\int_{\frac{1}{2|x-\tau|}}^{\frac{1}{|x-\tau|}}\frac{d\left|\lambda\right|}{\left|\lambda\right|^{1+\mu}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha}\left[\frac{\left|\lambda\right|^{-\mu}}{-\mu}\right]_{\frac{1}{2|x-\tau|}}^{\frac{1}{|x-\tau|}} \\
&\leqslant \frac{K}{-\mu}\left|x-\tau\right|^{\alpha}\left[\left|x-\tau\right|^{\mu}-2^{\mu}\left|x-\tau\right|^{\mu}\right] \\
&\leqslant \frac{K}{\mu}\left|x-\tau\right|^{\alpha+\mu}\left[2^{\mu}-1\right] \\
&\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha+\mu}.
\end{aligned}$$

Pour I_2, on a

$$\begin{aligned}
\left\|I_2\right\|_E &\leqslant K\int_{\Gamma_2}\frac{\left|x-\tau\right|^{\alpha}}{\left|-a+\lambda\right|\left|\lambda\right|^{\mu}}d\left|\lambda\right| \\
&\leqslant K\int_{\Gamma_2}\frac{\left|x-\tau\right|^{\alpha}}{\left|\lambda\right|^{\mu+1}}d\left|\lambda\right| \\
&\leqslant K\left|x-\tau\right|^{\alpha}\int_{\frac{1}{|x-\tau|}}^{+\infty}\frac{d\left|\lambda\right|}{\left|\lambda\right|^{\mu+1}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\left\|\left(Q\left(x\right)-aI\right)^{-1}-\left(Q\left(\tau\right)-aI\right)^{-1}\right\|_{L(E)}\leqslant C\left|x-\tau\right|^{\alpha+\mu}.$$

L'hypothèse (0.15.4) est verifiée voir Labbas Moussaoui [19]
Alors les hypothèses (0.15.2)∼(0.15.7) sont vérifiées.
Finalement tous les résultats obtenus s'appliquent au problème concret quasi-elliptique suivant où $(\omega>0)$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,y\right)-\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}\left(x,y\right)-\omega u\left(x,y\right)=f\left(x,y\right), \quad \left(x,y\right)\in\left[0,1\right]\times\left[0,1\right] \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(0,y\right)-au\left(0,y\right)=d_0\left(y\right), \quad u\left(1,y\right)=u_1\left(y\right), \ y\in\left[0,1\right] \\
u\left(x,0\right)-b\left(x\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(x,0\right)=0, \quad =\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,1\right)=u\left(x,1\right) \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,0\right)-b\left(x\right)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}\left(x,0\right)=0.
\end{cases}$$

Remarque 0.18.1 *Les hypothèses (0.15.4)∼(0.15.6) sont vérifiées pour le cas particulier $H=-Q\left(x\right)$. En effet dans ce cas*

Exemple 0.18.2 *On considère le cas $E=L^q\left(\Omega\right)$, $1<q<\infty$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec l'opérateur donné par (0.14.1). Les hypothèses (0.15.2), (0.15.3) et (0.15.5)∼(0.15.7) restent vraies pour le cas $b\left(x\right)$ verifie*

$$\begin{cases}
b\left(x\right)\geqslant b_0 \\
\left|b\left(x\right)-b\left(s\right)\right|\leqslant K\left|x-s\right|^{1+\varepsilon}.
\end{cases}$$

De plus l'hypothèse (0.15.4) est verifiée voir Labbas Moussaoui [19].

Bibliographie

[1] P. Acquistapace and B. Terreni. : *Some existence and regularity results for abstract non-autonomous parabolic equations.* J. Math. Anal. Appl. 99(1), 9-64(1984).

[2] S. Agmon, A. Douglis and L. Niremberg. : *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Comm Pure Appl. Math, Vol. 12, (1959), pp. 623-727.

[3] A. V. Balakrishnan. : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by them.* Pacif. J. Math. 10 (1960), 419-437.

[4] F. Bouziani, A. Favini, R. Labbas and A. Medeghri. : *Study of boundary value and transmission problems gouverned by a class of variable operators verifying the Labbas-Terreni non commutativity assumption,* Rev Mat Complut. (2012), 24, pp. 131-168.

[5] H. Brezis. : *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[6] M. Cheggag. : *Problèmes de Sturm- Liouville, Abstrait pour une Equation Différentielle Abstraite Complète Elliptique du Seconde Ordre dans Divers Espaces*, 2008.

[7] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri. : *Abstract differential equations of elliptic type with general Robin boundary conditions in Hölder spaces*, Applicable Analysis, Vol, 91, No. 8, August 2012, 1453-1475.

[8] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri. : *Elliptic problems with Robin boundary coefficient-operator conditions in general L^p Sobolev spaces and applications.* Bulletin SUSU MMCS, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 56-77.

[9] G. Da Prato et P. Grisvard. : *Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. IX Ser.54 (1975), 305-387.

[10] G. Dore and A. Venni. : *On the closedness of the sum of two closed operators*, Mathematicsche Zeitschrift, 196 (1987), 124-136.

[11] G. Dore and S. Yakubov. : *Semigroup Estimates and Noncoercive Boundary Value Problems, Semigroup Forum,* 60 (2000), 93-121.

[12] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi. : *Necessary and Sufficient Conditions in the Study of Maximal Regularity of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 22 (2008), 973-987.

[13] M. Haase. : *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 169*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.

[14] R. Haoua and A. Medeghri. : *Robin boundary value problems for elliptic operational differential equations with variable operators*, Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2015.

[15] A. V. Kuyazyuk. : *The Dirichlet problem for second order differential equations with operator coefficient* (Russian) Ukrain Math, Zh, 37 (1985), n. 2, 256-273.

[16] S. G. Krein. : *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscou, 1967.

[17] T. Kato. : *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1980.

[18] R. Labbas. : *Problèmes aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

[19] R. Labbas and M. Moussaoui. : *On the resolution of the heat equation with discontinous ceofficients.* Semigroup Forum, 60 (2000), pp. 187-201.

[20] R. Labbas et B. Terreni. : *Sommes d'opérateurs linéaires du type parabolique et elliptique,* C. R. Acd. Sci. Paris, 301, Série 1, n. 5 (1985).

[21] R. Labbas et B. Terreni. : *Sommes d'Opérateurs de Type et Elliptic Parabolique*, 1ère Partie. Boll. Un. Math. Ital. 1-B (7), (1987), pp. 545-569.

[22] R. Labbas et B. Terreni. : *Sommes d'Opérateurs de Type et Elliptic Parabolique*, 2ème Partie. Boll. Un. Math. Ital. 1-B (7), (1988), pp. 141-162.

[23] J.L. Lions et J. Peetre. : *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), 5-68.

[24] A. Lunardi. : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995.

[25] A. Lunardi. : *An Introduction to Interpolation Tyeory,* Scuola Normal Superiore Pisa, (1999).

[26] C. Martinez and M. Sanz. : *The Theory of Fractional Powers of Operators*, North Holland, Mathematics studies 187, 2001.

[27] S. Monniaux and J. Prüss. : *A Theorem of Dore-Venni type for noncommuting operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 4787-4814.

[28] S. Monniaux. : *Générateur analytique et régularité maximale.* Thèse. Université de France-Comté. 1995.

[29] A. Pazy. : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, Tokyo, 1983.

[30] E. Senestrari. : *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions,* J. Math. Anal. App. 66, (1985), pp. 16-66.

[31] P. E. Sobolevskii. : *Equations of parabolic type in Banach spaces*, Trudy Mouscou. Math. Obsc. 10 (1961), 297-350 (Russian) ; English Transl. Amer Math. Soc. Transl. 49 (1965), 1-62.

[32] H. B. Stewart. : *Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. 259, (1980), pp. 299-310.

[33] H. Tanabe. : *Equations of evolution, Monographs and Studies in Mathematics*, Vol. 6, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, 1979.

[34] H. Triebel. : *Interpolation theory, Function spaces, differential operators*, Amsterdam, North Holland 1978.