Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Mostaganem - Abdelhamid ibn Badis (UMAB)

◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊◊

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème :

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Décomposition de Kalman pour les systèmes linéaires de Lyapunov singuliers

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Dédicace

À mes chers parents.

À mon Professeur Bouagada Djillali.

L'erreur n'annule pas la valeur de l'effort accompli.

Qui veut faire quelque chose trouve un moyen.

Qui ne veut rien faire trouve une excuse.

Proverbes arabes (Traduction).

Remerciement

Je voudrais exprimer ma plus grande gratitude et mes sincères remerciements à :

Tous ceux et celles qui m'ont assisté et soutenu de près ou de loin dans ma modeste contribution, en particulier à :

Mon encadreur Monsieur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'Université de Mostaganem pour m'avoir fait confiance en me proposant un sujet de recherche intéressant. Tout au long de ces mois de recherche, il a su m'orienter en me guidant, m'encourageant et en me conseillant, tout en me laissant une grande liberté. Qu'il trouve l'expression de mes sincères remerciements pour sa disponibilité malgré ses multiples occupations et différents empêchements.

Monsieur Mohand OULD ALI, Maitre de Conférences à l'Université de Mostaganem de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de soutenance et pour l'intérêt qu'il a apporté à mon travail.

Monsieur Mustapha MOHAMMEDI, Maitre Assistant à l'Université de Mostaganem d'avoir accepter de faire partie de mon Jury de soutenance.

Monsieur Mohammed Amine GHEZZAR, Maitre Assistant à l'Université de Mostaganem, pour ses conseils judicieux, les discussions fructueuses et son soutien de tous les instants durant mon cursus universitaire.

Monsieur Omar BELHAMITI, Maitre de Conférences à l'Université de Mostaganem et Chef de Département de Mathématiques et Informatique, pour son soutien indifférenciable, ses conseils précieux et ses encouragements. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance.

Tous les Professeurs que j'ai rencontré à mes côtés durant tout mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.

Enfin, je ne peux omettre mes parents et ma famille dont l'affection et le soutien continus ont constitué pour moi un socle sur lequel j'ai pu m'appuyer pour élaborer ce modeste produit de recherche.

Hafssa

Table des matières

Symboles et Abréviations

Ensembles

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{R}^n$	Espace réel euclidien de dimension n.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$.

Opérations, Relations Matricielles et Notations

$\exp(A)$ ou e^A	Exponentielle de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
$\dim(A)$	Dimension de A.
$tr(A)$	Trace de A.
$\det(A)$	Déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$rg(A)$	Rang de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
$\mathrm{Im}(A)$	Espace image de A; $\mathrm{Im}(A) := \{y \ : \ y = Ax\}$.
$\ker(A)$	Noyau de A ; $\ker(A) := \{x \ \text{ tel que } \ Ax = 0\}$.
A^T	Transposée de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
I_n	Matrice identité de dimension $n \times n$.
$I, \ 0$	Matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée.
A^{-1}	Inverse de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $det(A) \neq 0$.
$\deg(P)$	Degré d'un polynôme P.
ζ^n	Ensemble des fonctions n-fois continûment différentiables.
$\\|\cdot\\|_e$	Norme euclidienne.

Abréviations

LTI Linéaire invariant dans le temps (en anglais, linear time invariant).

TL Transformation de Laplace.

Introduction

La théorie de contrôle est une science de l'ingénieur qui analyse les propriétés des systèmes commandés (contrôlés), c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lequel on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). La théorie de contrôle est appliquée dans plusieurs domaine en particulier en ingénierie mathématiques et mathématiques appliquées. L'importance de la théorie de contrôle en ingénierie mathématiques et mathématiques appliquées est sa présence dans plusieurs problèmes tels qu'on cite par exemple : l'élèctronique, l'automatique, la cinétique chimique, l'aéronautique et dans l'industrie, etc.. De nombreux problèmes sont modélisés sous forme d'un système de Lyapunov[1] singuliers.

Un système linéaire de Lyapunov singulier est décrit par les équations :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)F + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1}$$

où $x(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $y(\cdot) \in \mathbb{R}^{p\times n}$, E, A, F, B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Le système (1) est appelé système linéaire de Lyapunov singulier en temps continu unidimensionnel. Lorsque $E = I$ (matrice identité) le système est appelé système linéaire de Lyapunov standard.

Les systèmes de Lyapunov sont très peu abordés par la communauté automaticienne, malgré ses intérêts pratiques, voir [10] ; plusieurs résultats ont été trouvé sur l'analyse de cette classe de systèmes quand $F = 0$, en particulier, en terme de l'analyse de la contrôlabilité et d'observabilité de cette classe de systèmes, pour plus de détails on se refère à [1], [12] et [21].

Les notions de contrôlabilité et d'observabilité ont été introduites par Kalman[2]

[1] Alexandre Lyapunov (6 juin 1857 - 3 novembre 1918) est un mathématicien russe.

[2] Rudolf Kalman (né le 19 mai 1930) est un mathématicien et automaticien américain.

en 1960 et ils sont devenus les concepts clés de la théorie des systèmes dynamiques. Du point de vue de la contrôlabilité et d'observabilité, tout système linéaire invariant dans le temps (LTI) peut être décomposer par l'utilisation de la transformation de similitude en quatre parties indépendantes. Ce fait, est l'essentiel du théorème de la *décomposition de Kalman.* Le théorème nous permet de comprendre les différences profondes entre les différentes formes de description des systèmes dynamiques linéaires, la modification de la dynamique des systèmes linéaires par des évaluations de l'état et de sortie et les différences entre les différents concepts de la stabilité des systèmes dynamiques.

Dans ce contexte, nous allons présenter une extension du théorème de la décomposition de Kalman pour la classe des systèmes linéaires de Lyapunov singuliers. Pour ce faire, nous avons mené des travaux de recherche sur les systèmes de Lyapunov en temps continu. Pour les systèmes de Lyapunov standards nous proposons une adaptation du théorème. La technique utilisé nous permettre de réécrire le système sous forme d'un système LTI. Il sera montré que, dans le cas des systèmes de Lyapunov singuliers, la transformation de similitude doit être remplacer par l'équivalence stricte et presque toutes les déclarations du théorème de Kalman peuvent être étendues pour le système de Lyapunov singuliers.

Afin d'accomplir au mieux cette étude, le mémoire est structuré en quatre chapitres en plus de l'introduction, la conclusion et les perspectives.

Dans le premier chapitre, nous nous préparons pour les prochains chapitres en donnant l'arrière-plan mathématiques. Nous donnerons quelques techniques et résultats dont nous aurons besoin pour la suite. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux propriétés structurelles des systèmes de Lyapunov standards et nous présenterons la décomposition de Kalman pour cette classe de systèmes.

Le troisième chapitre est consacré à montrer que le théorème de la décomposition de Kalman peut être étendu pour les systèmes singuliers.

Ce mémoire s'achève par un algorithme, un exemple numérique est cependant illustré pour l'adaptation de l'approche.

Chapitre 1

Notions de bases et préliminaires

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de donner quelques techniques et résultats utilisées dans ce mémoire et de présenter quelques rappels sur les systèmes linéaires invariants en temps continu. Pour ce faire, nous nous basons sur les références suivantes [5], [6], [9] et [13].

1.1 Introduction

Pour prévoir le comportement d'un système dynamique, il est nécessaire d'effectuer une modélisation mathématique du problème. Une telle modélisation est souvent obtenue à l'aide de la représentation d'état. La représentation d'état d'un processus est obtenue en appliquant la méthode dite de variables d'états. Cette méthode offre une meilleure compréhension du système et s'avère très intéressante pour l'analyse et la synthèse des systèmes. Pour obtenir un modèle d'espace d'état, nous devons choisir quelques variables qui ont une signification physique comme la vitesse, le poids, la température, l'accélération, etc. Ces variables doivent contenir suffisamment d'informations pour caractériser le processus étudié. Puis, plusieurs équations seront établies à partir des relations entre ces variables. Généralement, ce sont des équations différentielles et algébriques qui décrivent le modèle mathématique d'un processus physique. Nous arrivons naturellement à une mise en équation de la forme suivante :

$$\begin{cases} F(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) = 0 & (1.a) \\ G(t, x(t), u(t), y(t)) = 0 & (1.b) \end{cases} \tag{1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'*états* regroupant des variables d'états, $\dot{x}(t)$ est sa dérivée par rapport au temps, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ désigne le vecteur des *entrées* (*contrôle*), $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des *sorties* (*réponses ou mesures*).

Dans le système (1.1), l'équation $(1.a)$ s'appelle l'*équation d'état (d'évolution),* et l'équation $(1.b)$ s'appelle l'*équation de sortie* (*d'observation*).

1.2 Notions sur le produit de Kronecker

Le produit de Kronecker est une opération portant sur les matrices, il se note par le symbole $\otimes$.

Définition 1.1 *Le produit de Kronecker de deux matrices $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ est la matrice $A \otimes B \in \mathbb{R}^{\,mp \times nq}$ donnée par :*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & \dots & \dots & a_{1n-1}B & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & \dots & \dots & a_{2n-1}B & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-11}B & a_{m-12}B & \dots & \dots & \dots & a_{m-1n-1}B & a_{m-1n}B \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & \dots & \dots & a_{mn-1}B & a_{mn}B \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Exemple 1.1 *Avec les matrices A et B suivantes :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad et \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix},$$

on obtient,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 8 & 5 & 0 & 0 & 16 & 10 \\ 4 & -8 & 6 & -12 & -3 & 6 \\ 32 & 20 & 64 & 30 & -24 & -15 \end{bmatrix}.$$

Quelques propriétés de produit de Kronecker

Le produit de Kronecker possède un certain nombre de propriétés intéressantes.

1. Le produit de Kronecker est associatif : pour tout triplet de matrices A, B et C :

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C). \tag{1.3}$$

2. Le produit de Kronecker n'est pas commutatif :

$$A \otimes B \neq B \otimes A. \tag{1.4}$$

3. Le produit de Kronecker est distributif par rapport à l'addition : Pour tout quadruplet A, B, C et D, tel que, $(A + B)$ et $(C + D)$, existent on obtient :

$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D). \tag{1.5}$$

4. Le produit de Kronecker est également distributif par rapport au produit matriciel standard : Pour tout quadruplet : A, B, C et D, tel que, $A.B$ et $C.D$, existent on obtient :

$$(A \otimes C)(B \otimes D) = (AB) \otimes (CD). \tag{1.6}$$

5. Pour toute matrice A et B, on a :

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T. \tag{1.7}$$

6. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$, alors :

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^p \det(B)^m = \det(B \otimes A). \tag{1.8}$$

7. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ sont deux matrices non singulières, alors la matrice $A \otimes B$ l'est aussi et

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}. \tag{1.9}$$

1.3 Vectorisation d'une matrice

La vectorisation d'une matrice est une transformation qui convertit la matrice dans un vecteur de colonne.

Définition 1.2 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre $m \times n$, on associe à A le vecteur mn lignes, noté $vec(A)$, obtenue en empilant les colonnes de la matrice A au-dessus d'une autre,*

$$vec(A) = [a_{11}, a_{21}, \cdots\cdots, a_{m1}, a_{12}, \cdots\cdots a_{m2}, \cdots\cdots, a_{1n}, \cdots\cdots, a_{mn}]^T . \quad (1.10)$$

Par exemple, pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, la vectorisation de A est :

$$vec(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La vectorisation est fréquemment utilisée avec le produit de Kronecker pour exprimer des transformations sur les matrices. Cette propriété sera définie dans le second chapitre.

1.4 La transformation de Laplace

Définition 1.3 *Une fonction de la variable t est dite Causale, si elle est nulle pour $t < 0$.*

Le vecteur d'états, le vecteur de sortie et le vecteur de contrôle sont des fonctions causales. Nous définissons, donc, la transformé de Laplace que pour des fonctions causales.

Définition 1.4 *Soit f une fonction du temps t et causale, sa transformée de Laplace notée $F(s)$ est donnée par,*

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad (1.11)$$

où s est à priori un nombre complexe.

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ n'existe pas dans tout les cas : il est nécessaire que l'intégrale ci-dessus converge. La fonction $f(t)$ s'appelle l'original de $F(s)$.

Propriétés

Pour tout α, β dans $\mathbb{R}$ et pour f, g deux fonctions causales, nous décrivons les propriétés importantes et utiles pour répondre à certains problèmes de résolution.

1. Linéarité :
$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s). \tag{1.12}$$

2. Dérivation :
$$L[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0). \tag{1.13}$$

3. Convolution :
$$L[(f * g)(t)] = L[f(t)]L[g(t)] = F(s)G(s), \tag{1.14}$$

avec
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(y)g(t-y)dy. \tag{1.15}$$

La transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace inverse notée L^{-1} est définie par,
$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} F(s)e^{st}ds. \tag{1.16}$$

1.5 Outils d'algèbre linéaire

Dans cette petite section, nous proposons quelques outils d'algèbre linéaire qui sont très utiles dans notre travail.

1.5.1 Polynôme caractéristique

On définit le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ par
$$\chi_A(\lambda) = \det[\lambda I_n - A]. \tag{1.17}$$

Théorème 1.1 (Cayley-Hamilton) *Soit $\chi_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice A, alors*
$$\chi_A(A) = 0. \tag{1.18}$$

1.5.2 Rappel sur les exponentielles des matrices

L'exponentielle d'une matrice carrée M de dimension n se définit par son développement en série entière :

$$e^M = I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots\cdots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}M^i,$$

où I_n est la matrice identité de dimension n. Il est clair que e^M est de même dimension que M. Voici quelques unes des propriétés importantes concernant les exponentielles des matrices. Si M et N sont deux matrices de dimensions $n \times n$, alors :

$$e^M e^N = e^{M+N}, \text{ si les matrices } M \text{ et } N \text{ commutent i.e. } MN = NM.$$

$$\frac{d}{dt}(e^{Mt}) = Me^{Mt}.$$

$$(e^M)^{-1} = e^{-M}.$$

Remarque 1.1 *Plusieurs techniques existent pour calculer e^{Mt}, parmis elles, citons l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton ou encore la fonction inverse de Laplace*

$$L^{-1}([\lambda I - M]^{-1}) = e^{Mt}.$$

1.5.3 Matrices équivalentes

Soient A et B deux matrices de $\mathbb{R}^{n\times p}$. On dit que A est équivalente à B s'il existe deux matrices carrées inversibles $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{p\times p}$ telles que :

$$A = PBQ.$$

Proposition 1.1 *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

1.5.4 Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

Les opérations élémentaires sont d'un intérêt important et servant à répondre à de nombreux problèmes de contrôle en général. Utiles pour la résolution des systèmes standards et même singuliers qu'ils soient unidimensionnels ou bidimensionnels.

Description des opérations élémentaires :

Soient m, $n \in \mathbb{N}^*$ et M une matrice à m lignes et n colonnes.

Définition 1.5 *En notant L_i la $i^{ème}$ ligne de M, on appelle opération élémentaire sur M toute opération de l'un des types suivants :*

- $L_i \leftarrow L_i + sL_j$, où $s \in \mathbb{R}$, on ajoute à la L_i la $j^{ème}$ ligne de M multipliée par s.

- $L_i \leftarrow L_j$ et $L_j \leftarrow L_i$, permutation de deux lignes de M.

On peut effectuer des opérations similaires sur les colonnes (En notant C_i la $i^{ème}$ colonne de M).

Définition 1.6 (Matrice de permutation) *Une matrice de permutation est une matrice carrée qui vérifie les propriétés suivantes :*

- Les coefficients sont 0 et 1.

- Il n'y a qu'un seul 1 par ligne.

- Il n'y a qu'un seul 1 par colonne.

Exemple 1.2 (Matrice de permutation)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2 *Toute opération élémentaire sur les lignes et les colonnes de M transforme M en une matrice équivalente.*

1.6 Systèmes linéaires invariants à temps continu unidimensionnel

Un cas particulier des systèmes de la forme (1.1) qui est utilisé pour décrire certains types de processus est le suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \tag{1.19}$$

Le système (1.19) est appelé système linéaire invariant à temps continu (sous l'hypothèse que le temps t dans lequel évolue le système est continu). Il est parfois utile de considérer aussi un temps k discret, où $k \in \mathbb{N}$. De tels systèmes linéaires, dits à temps discret, obéissent généralement à une équation de récurrence de type :

$$\begin{cases} Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \tag{1.20}$$

avec, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$: la matrice d'entrée, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$: la matrice de sortie, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$: la matrice de couplage ou de transmission et $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Définition 1.7 *Le système (1.19) est dit singulier si* $\det E = 0$.

-Dans le cas contraire, c'est à dire si $\det E \neq 0$, il est dit standard.

-Si $E = I_n$, le système est aussi appelé standard (ou explicite).

Remarque 1.3 *Si* $\det E \neq 0$, *alors multiplions la première équation du système (1.19) par* E^{-1}, *on obtient le système suivant,*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{1.21}$$

qui est un système explicite.

1.6.1 Faisceau régulier

Un faisceau de matrices est une matrice dont les coefficients sont des polynômes de degré 1, il est dit régulier si :

1. E et A sont des matrices carrées de même ordre.
2. Le déterminant $|Es - A|$ ne s'annule pas identiquement.

Notons que dans le cas où le déterminant $|Es - A| = 0$, le faisceau est dit singulier.

Définition 1.8 *Le système (1.19) est dit à faisceau régulier si et seulement si* $\det(Es - A) \neq 0$ *pour certain* $s \in \mathbb{C}$.

1.6.2 Théorème de Weierstrass : Cas d'un Faisceau Régulier

Tout faisceau régulier $A + \lambda B$ peut être réduit en une forme quasi-diagonale canonique (strictement équivalente) :

$$\begin{bmatrix} J+\lambda I & & & \\ & N^{\mu_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{\mu_s} \end{bmatrix}$$

où la forme normale du premier bloc diagonal $J + \lambda I$ est déterminée d'une façon unique par les diviseurs élémentaires de $A + \lambda B$ et les s derniers blocs diagonaux correspondent aux diviseurs élémentaires infinis $\mu_1, \ldots, \mu_s$,

avec,

$$\begin{aligned} N^{\mu_1} &= I^{\mu_1} + \mu_1 H = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & 1 & & \ldots \\ \ldots & & & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & & & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & & & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 1.4 *Pour plus de détails, et concernant les notions des diviseurs élémentaires finis et infinis, on se refaire à [9].*

Chapitre 2

Les systèmes linéaires de Lyapunov en temps continu

Ce chapitre sera consacré à l'étude des systèmes linéaires de Lyapunov en temps continu. Dans un premier temps nous aurons à réécrire le système de Lyapunov sous forme d'un système LTI pour faciliter l'étude des propriétés de cette classe de systèmes par la suite. Nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes : [1], [2] et [16].

2.1 Introduction

Un système décrit par les équations :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)F + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

est appelé système linéaire de Lyapunov à temps continu unidimensionnel, où $x(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est l'*état,* $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est le *contrôle,* $y(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ est la *sortie,* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont des matrices constantes. Le système (2.1) est appelé singulier si $\det E = 0$. Dans le cas contraire i.e. $\det E \neq 0$ est dit standard ; si $E = I_n$, le système est aussi appelé standard ou explicite.

Remarque 2.1 *Dans le cas où* $\det E \neq 0$, *en multipliant la première équation du* *système (2.1) par* E^{-1}, *on obtient le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}x(t)F + E^{-1}Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

qui est un système explicite.

La technique utilisée pour étudier les systèmes de Lyapunov en temps continu est la vectorisation moyennant le produit de Kronecker. Cette technique nous permettra de réécrire le système sous forme d'un système LTI. La proposition suivante nous caractérise la relation entre ses deux notions.

Proposition 2.1 *Soient* A, B *et* Y *des matrices de dimensions* $n \times m$, $m \times l$ *et* $l \times k$ *respectivement, on a alors,*

$$vec(AYB) = (B^T \otimes A)vec(Y). \tag{2.3}$$

Il existe deux autres formulations utiles :

$$vec(YB) = (B^T \otimes I)vec(Y) \tag{2.4}$$

$$vec(AY) = (I \otimes A)vec(Y) \tag{2.5}$$

tel que I *est la matrice identité dans la dimension appropriée.*

Maintenant, en appliquant l'opérateur vec au système de Lyapunov (2.1) en utilisant les propriétés ci-dessus, nous aurons :

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = G\tilde{x}(t) + H\tilde{u}(t), \\ \tilde{y}(t) = K\tilde{x}(t), \end{cases} \tag{2.6}$$

où $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^{mn}$, $\tilde{y}(t) \in \mathbb{R}^{pn}$, $G \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, $H \in \mathbb{R}^{n^2 \times nm}$, $K \in \mathbb{R}^{np \times n^2}$ et $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= vec(x(t)),\ \tilde{u}(t) = vec(u(t)),\ \ \tilde{y}(t) = vec(y(t)), \\ G &= I_n \otimes A + F^T \otimes I_n,\ H = I_n \otimes B,\ K = I_n \otimes C \text{ et } \tilde{E} = I_n \otimes E. \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *On s'intéresse plus particulièrement dans ce chapitre au cas standard i.e.* $\tilde{E} = I_n \otimes I_n = I_{n^2}$.

2.2 Systèmes linéaires de Lyapunov à temps continu standard

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = G\tilde{x}(t) + H\tilde{u}(t), \\ \tilde{y}(t) = K\tilde{x}(t), \end{cases} \tag{2.7}$$

avec la donnée de la condition initiale $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$.

Notre objectif principal est d'analyser cette classe de système.

2.2.1 Trajectoire d'états et réponse du système de Lyapunov en temps continu

Nous limitons notre attention sur l'équation homogène correspondant à (2.7) et qui est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = G\tilde{x}(t). \tag{2.8}$$

Définition 2.1 *On appelle une matrice de transition (ou matrice de transition d'état), l'unique solution du système différentiel matriciel*

$$\dot{Y}(t) = AY(t),$$

satisfaisant la condition initiale $Y(t_0)$, *et qui est donnée par* $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

Proposition 2.2 *La matrice de transition* Φ *vérifie :*

$\dot{\Phi}(t, t_0) = A\Phi(t, t_0)$.

$\Phi(t, t) = I$.

$(\Phi(t, t_0))^{-1} = \Phi(t_0, t)$.

$\Phi(t_0, t_1)\Phi(t_1, t) = \Phi(t_0, t) \quad \forall\ (t_0, t_1, t) \in \mathbb{R}^3$.

À travers ses propriétés et définitions, nous caractérisons la recherche de la solution de (2.8) par le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Soient*

$$\begin{aligned} \Phi_1(t,t_0) &= \exp((I_n \otimes A)(t-t_0)) \\ et \ \ \Phi_2(t,t_0) &= \exp((F^T \otimes I_n)(t-t_0)), \end{aligned}$$

les matrices de transition du système $\dot{\tilde{x}}(t) = (I_n \otimes A)\tilde{x}(t)$ *et* $\dot{\tilde{x}}(t) = (F^T \otimes I_n)\tilde{x}(t)$ *respectivement, alors la matrice* $\Phi(t,t_0)$ *définie par,*

$$\Phi(t,t_0) = \Phi_1(t,t_0)\ \Phi_2(t,t_0) \tag{2.9}$$

est la matrice de transition du système (2.8), et toute solution de (2.8) est de la forme $\tilde{x}(t) = \Phi(t,t_0)\tilde{x}(t_0)$ *avec* $\tilde{x}(t_0)$ *est un vecteur constant d'ordre* n^2.

Preuve. On considère

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t,t_0) &= \dot{\Phi}_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0) + \Phi_1(t,t_0)\dot{\Phi}_2(t,t_0) \\ &= (I_n \otimes A)\Phi_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0) + (F^T \otimes I_n)\Phi_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0) \\ &= (I_n \otimes A + F^T \otimes I_n)\Phi_1(t,t_0)\Phi_2(t,t_0) \end{aligned}$$

Par conséquent $\dot{\Phi} = G\Phi$, de plus, $\Phi(t,t) = \Phi_1(t,t)\Phi_2(t,t) = I_{n^2}I_{n^2} = I_{n^2}$, alors Φ est la matrice de transition de (2.8). En outre, il peut facilement voir que $\tilde{x}(t) = \Phi(t,t_0)\tilde{x}(t_0)$ est une solution de (2.8) et chaque solution de (2.8) est de cette forme.

■

Remarque 2.3

$$\exp((I_n \otimes A)(t-t_0))\exp((F^T \otimes I_n)(t-t_0)) = \exp((I_n \otimes A + F^T \otimes I_n)(t-t_0)).$$

Pour monter ça, on utilise la propriété du produit de Kronecker (1.6), on obtient alors,

$$\begin{aligned} (I_n \otimes A)(F^T \otimes I_n) &= F^T \otimes A \\ &= (F^T I_n) \otimes (I_n A) \\ &= (F^T \otimes I_n)(I_n \otimes A). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, la solution de (2.7) est dérivée.

Théorème 2.1 *Soit $\Phi(t,t_0)$ la matrice de transition de (2.7), alors la solution unique de (2.7), avec la donné de la condition initiale $\tilde{x}(t_0)=\tilde{x}_0$, est,*

$$\tilde{x}(t)=\Phi(t,t_0)\left[\tilde{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)(I_n\otimes B)\tilde{u}(\tau)d\tau\right]. \tag{2.10}$$

Preuve. Nous envisageons deux étapes,

la première étape : La solution de l'équation homogène qui est donnée par,

$$\tilde{x}(t)=\Phi(t,t_0)\tilde{x}(t_0).$$

la deuxième étape : La solution de l'équation complète (non homogène),

$$\dot{\tilde{x}}(t)=G\tilde{x}(t)+H\tilde{u}(t).$$

Par la méthode de la variation de la constante. On a donc $\tilde{x}(t)=\Phi(t,t_0)z(t)$, $z(t_0)=\tilde{x}(t_0)$ d'où par dérivation, on obtient :

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\dot{\Phi}(t,t_0)z(t)+\Phi(t,t_0)\dot{z}(t).$$

L'équation d'évolution $\dot{\tilde{x}}(t)=G\tilde{x}(t)+H\tilde{u}(t)$, se transforme donc en

$$(I_n\otimes A+F^T\otimes I_n)\Phi(t,t_0)z(t)+\Phi(t,t_0)\dot{z}(t)=G\ \Phi(t,t_0)z(t)+H\tilde{u}(t)$$

Soit, après simplification,

$$\Phi(t,t_0)\dot{z}(t)=H\tilde{u}(t)$$

on obtient, alors,

$$\dot{z}(t)=\Phi(t_0,t)H\tilde{u}(t)$$

et après intégration, nous obtenons :

$$z(t)=z(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)H\tilde{u}(\tau)d\tau.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t)&=\Phi(t,t_0)(z(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)H\tilde{u}(\tau)d\tau)\\&=\Phi(t,t_0)\left[\tilde{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)H\tilde{u}(\tau)d\tau\right],\end{aligned}$$

avec, $H = I_n \otimes B$. ■

La réponse du système (2.7) est donné par,

$$\tilde{y}(t) = (I_n \otimes C)\Phi(t,t_0)\left[\tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)(I_n \otimes B)\tilde{u}(\tau)d\tau\right]. \tag{2.11}$$

2.3 Analyse et propriétés des systèmes linéaires de Lyapunov

Dans ce paragraphe on va considérer quelques concepts de contrôlabilité et d'observabilité du système (2.7), puis on établit des critères pour les caractériser.

2.3.1 Contrôlabilité

Question posée :

Étant donnés deux états $\tilde{x}_0 = \tilde{x}(t_0)$ et $\tilde{x}_f = \tilde{x}(t_f)$, est-il possible de guider un système initialement en $\tilde{x}_0$ jusqu'à l'état $\tilde{x}_f$? en terme mathématiques, le système est-il contrôlable ?

Définition 2.2 *Le système (2.7) est dit contrôlable (commandable) sur l'intervalle fini $[t_0; t_f]$ si et seulement si pour tout état de départ $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$, tout état d'arrivée $\tilde{x}(t_f) = \tilde{x}_f$ et tout temps fini non nul T il existe une fonction de commande $\tilde{u}(t) : [t_0; T] \to \mathbb{R}^{mn}$, telle que la solution du système satisfaisant la condition initiale $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ satisfasse $\tilde{x}(T = t_f) = \tilde{x}_f$.*

Caractérisation

$$\forall \tilde{x}_0,\ \forall \tilde{x}_f,\ \forall T > 0 \ \textbf{ fini, } \ \exists \tilde{u}(t) \ : [t_0; T] \to \mathbb{R}^{mn} \ \ / \ \tilde{x}(T, \tilde{x}_0, \tilde{u}) = \tilde{x}_f.$$

Définition 2.3 *Le système (2.7) est dit complètement contrôlable si et seulement si tout les états sont contrôlables.*

Lemme 2.2 *Le système (2.7) est contrôlable si et seulement si la matrice de com-*

mandabilité symétrique de dimension $n^2 \times n^2$

$$W(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)(I_n \otimes B)(I_n \otimes B)^T \Phi^T(t_0, \tau) d\tau,$$

est inversible, où Φ *est définie dans (2.9). Dans ce cas, le contrôle est*

$$\tilde{u}(t) = -(I_n \otimes B)^T \Phi^T(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_f) \{\tilde{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\tilde{x}_f\} \tag{2.12}$$

définie sur $t_0 \leq t \leq t_f$*, et transférant* $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ *en* $\tilde{x}(t_f) = \tilde{x}_f$.

La matrice W est appelée grammien de contrôlabilité.

Nous citons quelques notions mathématiques utilisées dans la preuve.
- $\|v\|_e^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$, avec, v est un vecteur colonne de dimension n.
- Une matrice symétrique $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (i.e. $S^T = S$) est dite :

1. Définie positive ($S > 0$) si et seulement si $x^T S x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

2. Semi-définie positive ($S \geq 0$) si et seulement si $x^T S x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Preuve. Supposons que $W(t_0, t_f)$ est inversible, alors le contrôle défini par (2.12) existe. Maintenant en substituant (2.12) dans (2.10) avec $t = t_f$, nous avons,

$$\begin{aligned}
& \tilde{x}(t_f) \\
= \; & \Phi(t_f, t_0) \left[\tilde{x}(t_0) \right. \\
& \left. - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)(I_n \otimes B)(I_n \otimes B)^T \Phi^T(t_0, \tau) W^{-1}(t_0, t_f) \{\tilde{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\tilde{x}_f\} d\tau \right] \\
= \; & \Phi(t_f, t_0)\Phi(t_0, t_f)\tilde{x}_f = \tilde{x}_f.
\end{aligned}$$

Par conséquent, (2.7) est contrôlable.

Inversement, supposons que le système (2.7) est contrôlable, alors nous devons montrer que $W(t_0, t_f)$ est non singulière.

W est symétrique, car,

$$\begin{aligned} W^T &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)(I_n \otimes B)(I_n \otimes B)^T \Phi^T(t_0,\tau)d\tau\right]^T \\ &= \int_{t_0}^{t_f} (\Phi^T(t_0,\tau))^T((I_n \otimes B)^T)^T(I_n \otimes B)^T \Phi^T(t_0,\tau)d\tau \\ &= W. \end{aligned}$$

Puisque W est symétrique nous pouvons construire la forme quadratique

$$\begin{aligned} \alpha^T W \alpha &= \int_{t_0}^{t_f} \theta^T(\tau,t_0)\theta(\tau,t_0)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \|\theta\|_e^2 d\tau \geq 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

où α est un vecteur colonne constante arbitraire de dimension n^2 et

$$\theta(\tau,t_0) = (I_n \otimes B)^T \Phi^T(t_0,\tau)\alpha,$$

de (2.13), $W(t_0,t_f)$ est semi définie positive. Supposons qu'il existe un certain $\beta \neq 0$ tel que $\beta^T W(t_0,t_f)\beta = 0$, puis à partir de l'équation (2.13) avec $\theta = \eta$ quand $\alpha = \beta$, ceci implique

$$\int_{t_0}^{t_f} \|\eta\|_e^2 d\tau = 0.$$

En utilisant les propriétés des normes, nous aurons,

$$\eta(\tau,t_0) = 0, \qquad t_0 \leq \tau \leq t_f. \tag{2.14}$$

Comme (2.7) est contrôlable donc il existe un contrôle $\hat{U}(t)$ rendant $\tilde{x}(t_f) = 0$ si $\tilde{x}(t_0) = \beta$. Par conséquent, à partir de (2.10) nous aurons,

$$\beta = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)(I_n \otimes B)\hat{U}(\tau)d\tau.$$

On considère par suite,

$$\begin{aligned}\|\beta\|_e^2 &= \beta^T\beta = -\int_{t_0}^{t_f}\hat{U}^T(\tau)(I_n\otimes B)^T\Phi^T(t_0,\tau)\beta d\tau \\ &= -\int_{t_0}^{t_f}\hat{U}^T(\tau)\eta(\tau,t_0)d\tau = 0.\end{aligned}$$

d'où $\beta = 0$, qui est une contradiction à notre supposition, donc $W(t_0, t_f)$ est symétrique et définie positive et elle est par conséquent inversible. ■

Théorème 2.2 (Le critère de Kalman) *Le système (2.7) est contrôlable si et seulement si la matrice φ définie par,*

$$\varphi = [H\ GH\ G^2H\ldots\ldots\ldots G^{n^2-1}H]$$

est de rang plein i.e. $rg(\varphi) = n^2$ où n^2 est l'ordre du système (2.7) avec $G = I_n\otimes A + F^T\otimes I_n$ et $H = I_n\otimes B$, φ est appelée la matrice de contrôlabilité.

Dans ce cas, la paire (G,H) est dite contrôlable. Notons que ce théorème est un test pratique pour la contrôlabilité.

Un autre test par les valeurs propres adapté au test de **Popov-Belevitch-Hautus** est cependant caractérisé.

Théorème 2.3 (Test par les valeurs propres pour la contrôlabilité) *Considérons la matrice*

$$[I_{n^2}s - G, H]\in\mathbb{R}^{n^2\times(n^2+nm)}.$$

La paire (G,H) est contrôlable si et seulement si

$$rang([I_{n^2}s - G, H]) = n^2 \tag{2.15}$$

pour toute valeur propre de G.
Ou en d'autres termes, la paire (G,H) n'est pas contrôlable si et seulement si

$$rang([I_{n^2}s - G, H]) < n^2 \tag{2.16}$$

pour certaines valeurs propres s de G.

Sous-espace de contrôlabilité

On définit le sous-espace vectoriel, noté $\Re_c$, qui contient tout les états contrôlables, comme suit :

$$\Re_c = \left\{ \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)(I_n \otimes B)\tilde{u}(\tau)d\tau, \quad \tilde{u}(\cdot) : [t_0, t] \to \mathbb{R}^{mn} \right\},$$

$\Re_c$ est le sous-espace de contrôlabilité.

Théorème 2.4

$$\Re_c = \operatorname{Im}\varphi, \ \textit{tel que} \ \operatorname{Im}\varphi = \textit{vect}\{H, GH, \ldots\ldots, G^{n^2-1}H\}.$$

Lemme 2.3 *Si l'état $\tilde{x} \in \Re_c$, alors, $G\tilde{x} \in \Re_c$ i.e. l'espace $\Re_c$ est $G-$invariant.*

Preuve. Si $\tilde{x} \in \Re_c$, ça signifie qu'il existe un vecteur α tel que

$$\tilde{x} = \ [H \ GH \quad \cdots G^{n^2-1}H]\alpha,$$

alors,

$$G\tilde{x} = \ [GH \ \ G^2H \quad \cdots G^{n^2}H]\alpha,$$

grâce au théorème de *Cayley-Hamilton,* G^{n^2} peut être exprimée comme combinaison linéaire de $G^{n^2-1}, \ldots, I_{n^2}$, ce qui implique $\tilde{x} = \varphi\beta$ donc, $G\tilde{x} \in \Re_c$. ■

Maintenant, nous allons établir une forme spéciale pour un système non contrôlable en séparant les parties contrôlables à des parties non contrôlables.

Forme standard pour le système non contrôlable

Si le système (2.7) est non contrôlable i.e. $rang\varphi = n_c < n^2$, il est alors possible de séparer la partie contrôlable du système au moyen d'une transformation de similitude approprié, ce qui revient à changer la base de l'espace d'état $\Re_c$.

On considère $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_c}\}$ tout les n_c vecteurs linéairements indépendants de $\Re_c$. On définit la matrice de transformation (ou de similitude) $Q \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$,

$$Q = [v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_c}, Q_{n^2-n_c}] \tag{2.17}$$

où la matrice $Q_{n^2-n_c}$ de dimension $n^2 \times (n^2 - n_c)$ contient $n^2 - n_c$ vecteurs linéairements indépendants choisit de tels sorte que la matrice Q soit non singulière. Il existe de nombreux choix.

Lemme 2.4 *Pour la paire* (G, H) *non contrôlable, il existe une matrice non singulière* Q *tel que,*

$$\bar{G} = Q^{-1}GQ = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ 0 & \bar{G}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = Q^{-1}H = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

où $\bar{G}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $\bar{H}_1 \in \mathbb{R}^{n_c \times nm}$ *et la paire* $(\bar{G}_{11}, \bar{H}_1)$ *est contrôlable.*

La paire $(\bar{G}, \bar{H})$ est appelée la *forme standard* pour le système (2.7) non contrôlable.

Preuve. $i)$ Montrons l'existence de la matrice Q :

La matrice Q de dimension $n^2 \times n^2$ existe par construction et elle est inversible car $\det(Q) \neq 0$.

$ii)$ Nous avons besoin de voir,

$$GQ = G[v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_c}, Q_{n^2-n_c}] = [v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_c}, Q_{n^2-n_c}] \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ 0 & \bar{G}_{22} \end{bmatrix} = Q\bar{G}.$$

Comme l'espace $\Re_c$ est $G-$invariant, alors, $Gv_i \in \Re_c$, qui peut être écrite comme combinaison linéaire seulement de n_c vecteurs dans la base de $\Re_c$, alors $\bar{G}_{11}$ est une matrice de dimension $n_c \times n_c$, et la matrice ci-dessous est nulle.

De même,

$$H = Q\bar{H} = [v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_c}, Q_{n^2-n_c}] \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

avec, les colonnes de H qui sont linéairements indépendantes sont dans $\Re_c$.

$iii)$ On considère le changement de base $\tilde{x}(t) = Q\bar{x}(t)$, le système (2.7) devient :

$$\begin{cases} Q\dot{\bar{x}}(t) = GQ\bar{x}(t) + Hu(t) \\ \bar{y}(t) = KQ\bar{x}(t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = Q^{-1}GQ\bar{x}(t) + Q^{-1}Hu(t) \\ \bar{y}(t) = KQ\bar{x}(t) \end{cases}$$

notons $\bar{G} = Q^{-1}GQ = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ 0 & \bar{G}_{22} \end{bmatrix}$, $\bar{H} = Q^{-1}H = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\bar{K} = KQ$ qui n'a pas de forme particulière, on obtient donc la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{G}\bar{x}(t) + \bar{H}\tilde{u}(t), \\ \bar{y}(t) = \bar{K}\bar{x}(t), \end{cases} \tag{2.19}$$

cette représentation est appelée la *forme standard de système (2.7) non contrôlable.*

iiii) Il reste à montrer que la paire $(\bar{G}_{11}, \bar{H}_1)$ est contrôlable, on définit la matrice de contrôlabilité $\bar{\varphi}$ pour le système (2.19) donnée par,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= [\bar{H} \quad \bar{G}\bar{H} \cdots\cdots\cdots \bar{G}^{n^2-1}\bar{H}] \\ &\Rightarrow \quad \bar{\varphi} = Q^{-1}\varphi. \end{aligned}$$

$rg\bar{\varphi} = rg\varphi = n_c$, car,

$rg\bar{\varphi} = rg \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{G}_{11}\bar{H}_1 & \cdots\cdots & \bar{G}_{11}^{n^2-1}\bar{H}_1 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$

par le théorème de Cayley-Hamilton,

$rg\bar{\varphi} = rg[\bar{H}_1 \quad \bar{G}_{11}\bar{H}_1 \cdots\cdots \bar{G}_{11}^{n_c^2-1}\bar{H}_1| \cdots \quad \bar{G}_{11}^{n^2-1}\bar{H}_1] = n_c$ donc la paire $(\bar{G}_{11}, \bar{H}_1)$ est contrôlable. ■

L'équation d'état peut maintenant être écrite comme suit,

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{G}_{11}\bar{x}_1(t) + \bar{G}_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{H}_1\tilde{u}(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{G}_{22}\bar{x}_2(t), \end{cases} \tag{2.20}$$

ce qui montre que le contrôle $\tilde{u}(t)$ n'affecte pas la composante $\bar{x}_2(t)$ et, par conséquent, la composante $\bar{x}_2(t)$ est déterminée uniquement par la valeur de vecteur initial $\bar{x}_2(t_0)$.

L'entrée $\tilde{u}(t)$ affecte certainement $\bar{x}_1(t)$, on notera également que l'élément de trajectoire $\bar{x}_1(t)$ est également influencée par $\bar{x}_2(t)$.

2.3.2 Observabilité

Définition 2.4 *Le système (2.7) est dit observable si $\tilde{x}_0$ est déterminé d'une manière unique connaissant $\tilde{u}(t)$ et $\tilde{y}(t)$.*

Définition 2.5 *Le système (2.7) est dit complètement observable si et seulement si tout les états sont observables.*

Voici un test d'observabilité adapté au système de Lyapunov et en relation avec la matrice gramienne.

Lemme 2.5 *Le système (2.7) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité symétrique*

$$V(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau, t_0)(I_n \otimes C)^T (I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0) d\tau \tag{2.21}$$

est inversible.

La matrice V est appelée gramien d'observabilité.

Preuve. Supposons que $V(t_0, t_f)$ est inversible. Nous avons,

$$\tilde{y}(t) = (I_n \otimes C)\tilde{x}(t).$$

Comme $\tilde{x}(t) = \Phi(t, t_0)\tilde{x}(t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)(I_n \otimes B)\tilde{u}(\tau)d\tau$, on a :

$$\tilde{y}(t) = (I_n \otimes C)\Phi(t, t_0)\tilde{x}(t_0) + (I_n \otimes C)\Phi(t, t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)(I_n \otimes B)\tilde{u}(\tau)d\tau,$$

en posant $y(t) = (I_n \otimes C)\Phi(t, t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)(I_n \otimes B)\tilde{u}(\tau)d\tau$, on obtient,

$$\hat{y}(t) = (I_n \otimes C)\Phi(t, t_0)\tilde{x}(t_0), \tag{2.22}$$

avec,

$$\hat{y}(t) = \tilde{y}(t) - y(t).$$

Multiplions (2.22) par $\Phi^T(t, t_0)(I_n \otimes C)^T$ et après intégration, on obtient,

$$\int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau, t_0)(I_n \otimes C)^T \hat{y}(\tau)d\tau = V(t_0, t_f)\tilde{x}(t_0),$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t_0) = V(t_0, t_f)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau, t_0)(I_n \otimes C)^T \hat{y}(\tau)d\tau,$$

d'où le système (2.7) est observable.

Inversement, supposons que (2.7) est observable, nous montrons que $V(t_0, t_f)$ est inversible.

V est symétrique, car,

$$\begin{aligned} V^T &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau, t_0)(I_n \otimes C)^T (I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0) d\tau\right]^T \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau, t_0)\ (I_n \otimes C)^T ((I_n \otimes C)^T)^T (\Phi^T(\tau, t_0))^T d\tau \\ &= V. \end{aligned}$$

Comme $V(t_0, t_f)$ est symétrique, nous pouvons construire la forme quadratique

$$\begin{aligned} \alpha^T V \alpha &= \int_{t_0}^{t_f} [(I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0)\alpha]^T [(I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0)\alpha] d\tau \qquad (2.23) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \|\eta(\tau, t_0)\|_e^2 d\tau \geq 0, \end{aligned}$$

où α est un vecteur colonne constante arbitraire de dimension n^2 et

$$\eta(\tau, t_0) = (I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0)\alpha.$$

De (2.23) $V(t_0, t_f)$ est semi définie positive. Supposons qu'il existe un certain β tel que $\beta^T V \beta = 0$. À partir de l'équation (2.23) avec $\eta = \theta$ quand $\alpha = \beta$, ce qui résulte,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_f} \|\theta(\tau, t_0)\|_e^2 d\tau = 0 \\ &\Rightarrow \theta(\tau, t_0) = 0,\ t_0 \leq \tau \leq t_f \\ &\Rightarrow (I_n \otimes C)\Phi(\tau, t_0)\beta = 0,\ t_0 \leq \tau \leq t_f. \end{aligned}$$

De (2.22), ceci implique que lorsque $\tilde{x}(t_0) = \beta$, la sortie est identiquement nulle sur tout l'intervalle, alors $\tilde{x}(t_0)$ ne peut pas être déterminer d'une manière unique, c'est une contradiction avec le système (2.7) est observable. Donc $V(t_0, t_f)$ est symétrique et définie positive, et alors inversible. ■

Théorème 2.5 (Le critère de Kalman) *Le système (2.7) est observable si et seule-*

ment si la matrice O définie par,

$$O = \begin{bmatrix} K \\ KG \\ \vdots \\ KG^{n^2-1} \end{bmatrix}$$

est de rang plein i.e. $rgO = n^2$ avec $G = I_n \otimes A + F^T \otimes I_n$ et $K = I_n \otimes C$. On appelle O la matrice d'observabilité.

Dans ce cas, la paire $(G,\ K)$ est dite observable.

Voici un test par les valeurs propres étendu pour l'observabilité.

Théorème 2.6 (Test par les valeurs propres pour l'observabilité) *Considérer la matrice*

$$\begin{bmatrix} I_{n^2}s - G \\ K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n^2+np)\times n^2}.$$

La paire $(G,\ K)$ est observable si et seulement si

$$rg\left(\begin{bmatrix} I_{n^2}s - G \\ K \end{bmatrix}\right) = n^2 \tag{2.24}$$

pour toute valeur propre de G.

Ou en d'autres termes, la paire (G, K) n'est pas observable si et seulement si le

$$rg\left(\begin{bmatrix} I_{n^2}s - G \\ K \end{bmatrix}\right) < n^2 \tag{2.25}$$

pour certaines valeurs propres s de G.

Sous-espace de non observabilité

L'espace des états non observables, notée $\Re_{\bar{O}}$, est un sous-espace vectoriel, définie comme suit :

$\Re_{\bar{O}} = \ker(O)$, tel que, $\ker(O) = \{\tilde{x}\ /\ O\tilde{x} = 0\}$. $\Re_{\bar{O}}$ est le sous-espace des états non observable.

Il est clair que, l'état $\tilde{x}$ est observable si et seulement si $O\tilde{x} \neq 0$.

Lemme 2.6 *Si l'état $\tilde{x} \in \Re_{\bar{O}}$, alors $G\tilde{x} \in \Re_{\bar{O}}$ i.e. l'espace $\Re_{\bar{O}}$ est $G-$invariant.*

Preuve. Si $\tilde{x} \in \Re_{\bar{O}}$, ça signifie que $O\tilde{x} = 0$. Montrons que $G\tilde{x} \in \Re_{\bar{O}}$ i.e. $OG\tilde{x} = 0$.

On a

$$OG\tilde{x} = \begin{bmatrix} K \\ KG \\ \vdots \\ KG^{n^2-1} \end{bmatrix} G\tilde{x} = \begin{bmatrix} KG \\ KG^2 \\ \vdots \\ KG^{n^2} \end{bmatrix} \tilde{x}$$

grâce au théorème de *Cayley-Hamilton,* G^{n^2} peut être exprimée comme combinaison linéaire de $G^{n^2-1}, \ldots, I_{n^2}$, ce qui implique $OG\tilde{x} = 0$ donc $G\tilde{x} \in \Re_{\bar{O}}$. ■

Quand le système (2.7) est non observable, il est possible de séparer les parties observables à des parties non observables. On exposera dans ce qui suit la forme dite spéciale pour un système non observable.

Forme standard pour le système non observable

La forme standard pour le système (2.7) non observable peut être dérivée de la même manière que la forme standard de système non contrôlable. Si le système n'est pas observable i.e. $rangO = n_O < n^2$, il est alors possible de séparer la partie du système non observable à l'aide d'une transformation de similitude. Cela revient à modifier la base de l'espace d'état $\Re_{\bar{O}}$.

On considère $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_{\bar{O}}}\}$ tout les $n_{\bar{O}}$ vecteurs linéairements indépendants de $\Re_{\bar{O}}$ tels que $n_{\bar{O}} = n^2 - n_O$. On définit la matrice de transformation de similitude $Q \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$,

$$Q = [Q_{n_O}, v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_{\bar{O}}}] \tag{2.26}$$

où Q_{n_O} contient n_O vecteurs linéairements indépendants choisis de tels sorte que la matrice Q soit non singulière. Le choix n'est pas unique.

Lemme 2.7 *Pour la paire (G, K) non observable, il existe une matrice non singulière Q telle que,*

$$\bar{G} = Q^{-1}GQ = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & 0 \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = KQ = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.27}$$

où $\bar{G}_{11} \in \mathbb{R}^{n_O \times n_O}$, $\bar{K}_1 \in \mathbb{R}^{np \times n_O}$ *et la paire* $(\bar{G}_{11}, \bar{K}_1)$ *est observable.*

La paire $(\bar{G},\ \bar{K})$ est la *forme standard* pour le système (2.7) non observable.

Preuve. $i)$ Montrons l'existence de la matrice Q :

La matrice Q de dimension $n^2 \times n^2$ existe par construction et elle est inversible car,

$$\det(Q) \neq 0.$$

$ii)$ Nous avons besoins de voir ça,

$$GQ = G[Q_{n_O}, v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_{\bar{O}}}] = [Q_{n_O}, v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_{\bar{O}}}] \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & 0 \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{bmatrix} = Q\bar{G}.$$

Comme l'espace $\ker(O)$ est $G-$invariant, alors, $Gv_i \in \ker(O)$, qui peut être écrite comme combinaison linéaire seulement de $n_{\bar{O}}$ vecteurs dans la base de $\ker(O)$, alors $\bar{G}_{11}$ est une matrice de dimension $n_O \times n_O$, et la matrice ci-côtée est nulle.

De même,

$$KQ = K[Q_{n_O}, v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_{\bar{O}}}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{K}.$$

avec, les lignes de K qui sont linéairements indépandantes sont dans $(\ker(O))^{\perp}$.

$iii)$ On considère le changement de base $\tilde{x}(t) = Q\bar{x}(t)$, le système (2.7) devient :

$$\begin{cases} Q\dot{\bar{x}}(t) = GQ\bar{x}(t) + Bu(t) \\ \bar{y}(t) = KQ\bar{x}(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = Q^{-1}GQ\bar{x}(t) + Q^{-1}Hu(t) \\ \bar{y}(t) = KQ\bar{x}(t) \end{cases}$$

notons $\bar{G} = Q^{-1}GQ = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & 0 \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{bmatrix}$, $\bar{K} = KQ = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\bar{H} = Q^{-1}H$ qui n'a pas de forme particulière, on obtient donc la forme suivante,

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{G}\bar{x}(t) + \bar{H}u(t), \\ \bar{y}(t) = \bar{K}\bar{x}(t). \end{cases} \tag{2.28}$$

Cette représentation est appelée la *forme standard* dite aussi *spéciale de système non observable.*

$iiii)$ Il reste à montrer que la paire $(\bar{G}_{11},\ \bar{K}_1)$ est observable, on définit la matrice d'observabilité $\tilde{O}$ pour le système (2.28) donnée par,

$$\tilde{O} = \begin{bmatrix} \bar{K} \\ \bar{K}\bar{G} \\ \vdots \\ \bar{K}\bar{G}^{n^2-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{O} = OQ.$$

$rg(\tilde{O}) = rg(O) = n_O$, car,

$$rg\left(\tilde{O}\right) = rg \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 \\ \bar{K}_1\bar{G}_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{K}_1\bar{G}_{11}^{n^2-1} & 0 \end{bmatrix}$$

par le théorème de Cayley-Hamilton,

$$rg\left(\tilde{O}\right) = rg \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \vdots \\ \bar{K}_1\bar{G}_{11}^{n_O^2-1} \\ \hline \vdots \\ \\ \bar{K}_1\bar{G}_{11}^{n^2-1} \end{bmatrix} = n_O, \text{ donc la paire } (\bar{G}_{11},\ \bar{K}_1) \text{ est observable.} \quad \blacksquare$$

L'équation de sortie peut maintenant être écrite comme,

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{G}_{11}\bar{x}_1(t) + \bar{G}_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{H}_1\tilde{u}(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{G}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{G}_{22}\bar{x}_2(t) + \bar{H}_2\tilde{u}(t), \\ \bar{y}(t) = \bar{K}_1\bar{x}_1(t), \end{cases} \tag{2.29}$$

il est clair que l'état $\bar{x}_2(t)$ est non observable, par contre $\bar{x}_1(t)$ est observable parce que la paire $(\bar{G}_{11},\ \bar{K}_1)$ est observable.

2.3.3 Systèmes duals

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = G\tilde{x}(t) + H\tilde{u}(t), \\ \tilde{y}(t) = K\tilde{x}(t), \end{cases} \tag{2.30}$$

avec,

$$G = I_n \otimes A + F^T \otimes I_n,\ \ H = I_n \otimes B \text{ et } K = I_n \otimes C.$$

le duale du système (2.30) est définie comme suit,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_D(t) = G_D\tilde{x}_D(t) + H_D\tilde{u}_D(t), \\ \tilde{y}_D(t) = K_D\tilde{x}_D(t), \end{cases} \tag{2.31}$$

où

$$G_D = G^T = I_n \otimes A^T + F \otimes I_n, \;\; H_D = K^T = I_n \otimes C^T \;\text{ et }\; K_D = H^T = I_n \otimes B^T.$$

Le système (2.30), noté par $\{G, H, K\}$, est contrôlable si et seulement si son duale (2.31), noté par $\{G_D, H_D, K_D\}$, est observable, et inversement.

Preuve. Le système $\{G, H, K\}$ est contrôlable si et seulement si $\varphi = \begin{bmatrix} H \; GH \cdots G^{n^2-1}H \end{bmatrix}$ est de rang plein, et $\{G_D, H_D, K_D\}$ est observable si et seulement si

$$O_D = \begin{bmatrix} H^T \\ H^T G^T \\ \vdots \\ H^T (G^T)^{n^2-1} \end{bmatrix}$$

est de rang plein. Or $O_D^T = \varphi$, donc $\{G, H, K\}$ est contrôlable si et seulement si $\{G_D, H_D, K_D\}$ est observable. ■

Remarque 2.4 *Comme dans la discussion précédente concernant la paire (G, H) non contrôlable, nous allons sélectionné une matrice de transformation Q pour réduire une paire (G, K) non observable à la forme standard. Le plus simple est de citer la dualité et de travailler avec la paire $(G_D = G^T, \; H_D = K^T)$ non contrôlable.*

Dans les deux sections précédentes, nous avons présenté deux types de formulaires standards, qui dépendaient d'une séparation des états contrôlables à des états non contrôlables, et une autre qui sépare les états observables à des états non observables. La question se pose naturellement de savoir si ces deux formes standards peuvent en quelque sorte être combinées. La décomposition de Kalman fait exactement cela.

Une décomposition de Kalman fournit un moyen mathématique pour convertir une représentation de tout système LTI à une forme dans laquelle le système peut être décomposer en une forme standard qui indique clairement les composants observables et/ou contrôlables du système.

Nous considérons le système (2.7) non contrôlable et non observable, nous présentons maintenant l'adaptation de ce théorème à cette classe des systèmes.

On note n_c la dimension du sous espace contrôlable $\Re_c$ tel que $n_c = \dim \Re_c = rang\varphi$. La dimension du sous espace non observable $\Re_{\bar{O}} = \ker(O)$ est donné par $n_{\bar{O}} = n^2 - rangO = n^2 - n_O$. Soit $n_{c\bar{O}} \leq \min(n_c, n_{\bar{O}})$ la dimension du sous espace $\Re_{c\bar{O}} = \Re_c \cap \Re_{\bar{O}}$, qui contient tous les vecteurs d'états contrôlables mais non observables.

On choisit

$$Q = [V_1\ V_2\ V_3\ V_4] \tag{2.32}$$

où $V_1 \in \mathbb{R}^{n^2\times(n_{c\bar{O}})}$ contient les $n_{c\bar{O}}$ vecteurs formant une base pour $\Re_{c\bar{O}}$, $V_2 \in \mathbb{R}^{n^2\times(n_c - n_{c\bar{O}})}$ contient les $n_c - n_{c\bar{O}}$ vecteurs qui formant une base pour $\Re_c$, $V_3 \in \mathbb{R}^{n^2\times(n_{\bar{O}} - n_{c\bar{O}})}$ contient $n_{\bar{O}} - n_{c\bar{O}}$ vecteurs constituant une base pour $\Re_{\bar{O}}$ et $V_4 \in \mathbb{R}^{n^2\times(n^2 + (n_{c\bar{O}} - n_c - n_{\bar{O}}))}$ contient les $n^2 + (n_{c\bar{O}} - n_c - n_{\bar{O}})$ vecteurs choisis de tels sorte que la matrice Q soit non singulière.

2.4 Théorème

Pour la paire (G, H) non contrôlable et la paire (G, K) non observable, il existe une matrice Q non singulière tel que,

$$\begin{cases} \bar{G} = Q^{-1}GQ = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} & \bar{G}_{13} & \bar{G}_{14} \\ 0 & \bar{G}_{22} & 0 & \bar{G}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{G}_{33} & \bar{G}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{G}_{44} \end{bmatrix}, \\ \bar{H} = Q^{-1}H = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{K} = KQ = \begin{bmatrix} 0 & \bar{K}_2 & 0 & \bar{K}_4 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{2.33}$$

où : $(\bar{G}_{11}, \bar{H}_1, 0)$ représente la partie contrôlable et non observable, $(\bar{G}_{22}, \bar{H}_2, \bar{K}_2)$ représente la partie contrôlable et observable, $(\bar{G}_{33}, 0, 0)$ représente la partie non contrôlable et non observable, $(\bar{G}_{44}, 0, \bar{K}_4)$ représente la partie non contrôlable et observable.

Avec, $\bar{G}_{11} \in \mathbb{R}^{n_{c\bar{O}} \times n_{c\bar{O}}}$, $\bar{G}_{22} \in \mathbb{R}^{(n_c - n_{c\bar{O}})\times(n_c - n_{c\bar{O}})}$, $\bar{G}_{33} \in \mathbb{R}^{(n_{\bar{O}} - n_{c\bar{O}})\times(n_{\bar{O}} - n_{c\bar{O}})}$, $\bar{G}_{44} \in \mathbb{R}^{(n^2+(n_{c\bar{O}}-n_c-n_{\bar{O}}))\times(n^2+(n_{c\bar{O}}-n_c-n_{\bar{O}}))}$, $\bar{H}_1 \in \mathbb{R}^{n_{c\bar{O}}\times nm}$, $\bar{H}_2 \in \mathbb{R}^{(n_c-n_{c\bar{O}})\times nm}$, $\bar{K}_2 \in \mathbb{R}^{np\times(n_c-n_{c\bar{O}})}$ et $\bar{K}_4 \in \mathbb{R}^{np\times(n^2+(n_{c\bar{O}}-n_c-n_{\bar{O}}))}$.

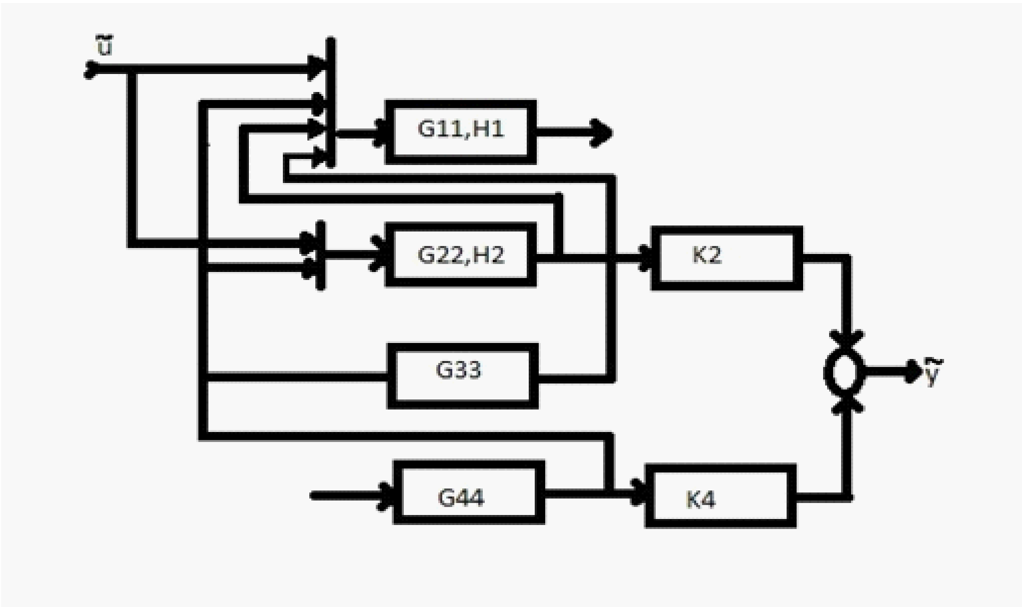

Figure 1 : Schéma illustrant la décomposition de Kalman.

Interprétation du schéma

D'après la figure, il en résulte que,

1- l'entrée $\tilde{u}$ affecte directement seulement la partie contrôlable et non observable et la partie contrôlable et observable.

2- L'entrée est reliée à la sortie du système uniquement par sa partie contrôlable et observable.

3- Sur la sortie du système affecte aussi, indirectement, la dynamique de la partie non contrôlable et non observable et la partie non contrôlable et observable.

Chapitre 3

La décomposition de Kalman pour les systèmes de Lyapunov singuliers

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des systèmes linéaires de Lyapunov singuliers unidimensionnels tells que, la régularité, la trajectoire d'états et réponse du système, la commandabilité et l'observabilité. Ensuite, nous présentons la décomposition de Kalman étendue pour cette classe de systèmes. Enfin, nous allons présenter la notion d'une réalisation minimale. Pour ce faire, nous nous basons sur les références [8], [14] et [22].

3.1 Introduction

Un système décrit par les équations

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)F + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

est appelé un système linéaire de Lyapunov singulier.

Le système (3.1) est équivalent au système (3.2),

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = G\tilde{x}(t) + H\tilde{u}(t), \\ \tilde{y}(t) = K\tilde{x}(t), \end{cases} \tag{3.2}$$

avec,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= vec(x(t)), \quad \tilde{u}(t) = vec(u(t)), \qquad \tilde{y}(t) = vec(y(t)),\\ G &= I_n \otimes A + F^T \otimes I_n, \quad H = I_n \otimes B, \quad K = I_n \otimes C \ et \ \tilde{E} = I_n \otimes E.\end{aligned}$$

Le système (3.2) est aussi appelé système singulier, car,

$$\det(\tilde{E}) = \det(I_n \otimes E) = (\det I_n)^n (\det E)^n = 0.$$

Définition 3.1 *Le système (3.2) est dit régulier si et seulement si*

$$\det(\tilde{E}s - G) \neq 0 \ pour \ certain \ s \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

Pour un système singulier, on supposera pour la suite que $\det(\tilde{E}s - G) \neq 0$ pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

3.2 Trajectoire d'états et réponse du système

3.2.1 Solvabilité par le théorème de Kronecker-Weierstrass

Si la condition (3.3) est satisfaite alors il existe deux matrices non singulières $P \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ telles que le système (3.2) peut être décomposer en deux sous systèmes :

1- un sous-système lent :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{G}_1 \bar{x}_1 + \bar{H}_1 \tilde{u},\\ \bar{y}_1 &= \bar{K}_1 \bar{x}_1,\end{aligned} \tag{3.4}$$

2- un sous-système rapide :

$$\begin{aligned}N\dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_2 + \bar{H}_2 \tilde{u},\\ \bar{y}_2 &= \bar{K}_2 \bar{x}_2,\end{aligned} \tag{3.5}$$

où

$$\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix} = Q^{-1}\tilde{x}, \ \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \ \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2},$$

$$\bar{E} = P\tilde{E}Q = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0\\ 0 & N\end{bmatrix}, \ N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2},$$

$$\bar{G} = PGQ = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \ \bar{G}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1},$$

$$\bar{H} = PH = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix}, \ \bar{H}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times nm}, \ \bar{H}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times nm},$$

$$\bar{C} = CQ = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}, \ \bar{C}_1 \in \mathbb{R}^{np \times n_1}, \ \bar{C}_2 \in \mathbb{R}^{np \times n_2},$$

$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, $n_1 = \deg\det[\tilde{E}s - G]$, $n_1 + n_2 = n^2$, N est nilpotente d'indice de nilpotence μ, c.-à-d. $N^{\mu-1} \neq 0$ et $N^{\mu} = 0$, avec $\mu = rg\tilde{E} - \deg(\det[\tilde{E}s - G]) + 1$.

3.2.2 Trajectoire d'états et réponse du système

Nous présentons dans ce qui suit, la trajectoire d'états pour la classe des systèmes linéaires de Lyapunov singuliers.

Considérons le système singulier défini par (3.2), et qui vérifie (3.3). Le système (3.2) est équivalent au système donné par (3.4) et (3.5).

Le sous-système (3.4) est un système usuel, sa trajectoire d'état est définie pour toute condition initiale $\bar{x}_1(t_0)$ par,

$$\dot{\bar{x}}_1 = \Phi(t, t_0)(\bar{x}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\bar{H}_1\tilde{u}(\tau)d\tau), \tag{3.6}$$

et sa réponse est donnée par,

$$\bar{y}_1 = \bar{K}_1[\Phi(t, t_0)(\bar{x}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\bar{H}_1\tilde{u}(\tau)d\tau)]. \tag{3.7}$$

Calculons à présent la réponse du sous-système rapide. Supposons $\tilde{u}(t) \in \zeta^{\mu-1}$, où $\zeta^{\mu-1}$ désigne l'ensemble des fonctions $(\mu - 1)$ fois continûment différentiables. En dérivant et en pré-multipliant par N l'équation (3.5) $(\mu - 1)$ fois, on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
N\dot{\bar{x}}_2(t) &= \bar{x}_2(t) + \bar{H}_2\tilde{u}(t)\\
N^2\bar{x}_2^{(2)}(t) &= N\dot{\bar{x}}_2(t) + N\bar{H}_2\dot{\tilde{u}}(t)\\
&\ldots\ldots\\
N^k\bar{x}_2^{(k)}(t) &= N^{k-1}\bar{x}_2^{(k-1)}(t) + N^{k-1}\bar{H}_2\tilde{u}^{(k-1)}(t)\\
&\ldots\ldots\\
N^{\mu-1}\bar{x}_2^{(\mu-1)}(t) &= N^{\mu-2}\bar{x}_2^{(\mu-2)}(t) + N^{\mu-2}\bar{H}\tilde{u}^{(\mu-2)}(t)\\
0 &= N^{\mu-1}\bar{x}_2^{(\mu-1)}(t) + N^{\mu-1}\bar{H}_2\tilde{u}^{(\mu-1)}(t),
\end{aligned}
$$

on déduit l'expression de $\bar{x}_2(t)$ et finalement de $\bar{y}_2(t)$,

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_2(t) &= -\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i\bar{H}_2\tilde{u}^{(i)}(t),\\
\bar{y}_2(t) &= -\sum_{i=0}^{\mu-1} \bar{K}_2N^i\bar{H}_2\tilde{u}^{(i)}(t).
\end{aligned}
$$

Pour finir, l'état $\tilde{x}(t) = Q\bar{x}(t)$ et la réponse de $\tilde{y}(t) = KQ\bar{x}(t)$.

Théorème 3.1 *La solution de l'équation d'état avec la donné de la condition initiale, est donnée par la formule suivante :*

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= Q\begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}\left\{\Phi(t,t_0)(\bar{x}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\bar{H}_1\tilde{u}(\tau)d\tau)\right\} \qquad (3.8)\\
&+Q\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix}\left\{-\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i\bar{H}_2\tilde{u}^{(i)}(t)\right\}.
\end{aligned}
$$

La réponse de système est cependant donné par :

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= KQ\left\{\begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}[\Phi(t,t_0)(\bar{x}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\bar{H}_1\tilde{u}(\tau)d\tau)]\right\} \qquad (3.9)\\
&+KQ\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix}(-\sum_{i=0}^{\mu-1} N^i\bar{H}_2\tilde{u}^{(i)}(t))\right\}.
\end{aligned}
$$

3.3 Contrôlabilité - Observabilité

3.3.1 Contrôlabilité

Définition 3.2 *Le système (3.2) est dit contrôlable (commandable) sur l'intervalle fini $[t_0; t_f]$ si et seulement si pour tout état de départ $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$, tout état final $\tilde{x}(t_f) = \tilde{x}_f$ et tout temps fini non nul T il existe une fonction de commande $\tilde{u}(t)$: $[t_0; T] \to \mathbb{R}^{mn}$, vérifions $\tilde{u}(t) \in \zeta^{\mu-1}$, telle que la solution du système satisfaisant la condition initiale $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ satisfasse $\tilde{x}(T = t_f) = \tilde{x}_f$.*

Considérons le système (3.2) sous sa forme de Kronecker-Weierstrass (3.4) et (3.5) alors nous pouvons donner le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) Le système (3.2) est contrôlable.

2) Le sous système lent et le sous système rapide sont tous les deux contrôlables.

3)

$$\begin{aligned} rg[Is - G_1, H_1] &= n_{1,} \text{ pour certain } s \in \mathbb{C} \\ \text{et } rg[N, H_2] &= n_2, \text{ avec, } n_1 + n_2 = n^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

4)

$$rg[\tilde{E}s - G, H] = n^2, \quad \text{pour certain} \ \ s \in \mathbb{C} \ .....(a)$$

et

$$rg[\tilde{E}, H] = n^2 \ \ .....(b). \tag{3.11}$$

Preuve. On se base sur [8] pour adapter nos résultats, il s'agit d'une extension aux systèmes de Lyapunov. ■

3.3.2 Observabilité

Définition 3.3 *Le système (3.2) est dit observable si $\tilde{x}_0$ est déterminé d'une manière unique connaissant $\tilde{u}(t)$ et $\tilde{y}(t)$.*

Théorème 3.3 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) Le système (3.2) est observable.

2) Le sous système lent et le sous système rapide sont tous les deux observables.

3)

$$rg \begin{bmatrix} Is - G_1 \\ K_1 \end{bmatrix} = n_1, \quad \textit{pour certain } s \in \mathbb{C} \tag{3.12}$$

$$et\ rg \begin{bmatrix} N \\ K_2 \end{bmatrix} = n_2, \ avec,\ n_1 + n_2 = n^2.$$

4)

$$rg \begin{bmatrix} \tilde{E}s - G \\ K \end{bmatrix} = n^2, \quad \textit{pour certain } s \in \mathbb{C}.....(a)$$

et

$$rg \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ K \end{bmatrix} = n^2 \qquad (b). \tag{3.13}$$

Preuve. Pour adapter nos résultats, nous nous basons sur [8]. ■

3.4 Décomposition de Kalman

Considérons le système en temps continu (3.2) non contrôlable et non observable i.e. $rg[\tilde{E}s - G, H] < n^2$ et $rg \begin{bmatrix} \tilde{E}s - G \\ K \end{bmatrix} < n^2$ pour certain $s \in \mathbb{C}$. Du point de vue le système peut être décomposer en quatre parties : la partie contrôlable et non observable, la partie contrôlable et observable, la partie non contrôlable et non observable et la partie non contrôlable et observable.

À cause du théorème 2.4, le sous-système standard peut être décomposer en quatre parties indépendantes,

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{11} \\ \dot{\bar{x}}_{12} \\ \dot{\bar{x}}_{13} \\ \dot{\bar{x}}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{1_{11}} & \bar{G}_{1_{12}} & \bar{G}_{1_{13}} & \bar{G}_{1_{14}} \\ 0 & \bar{G}_{1_{22}} & 0 & \bar{G}_{1_{24}} \\ 0 & 0 & \bar{G}_{1_{33}} & \bar{G}_{1_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{G}_{1_{44}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{x}_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} \\ \bar{H}_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} \tag{3.14}$$

$$\bar{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{K}_{12} & 0 & \bar{K}_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{x}_{14} \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

où

$$T_1^{-1}\bar{G}_1 T_1 = \begin{bmatrix} \bar{G}_{1_{11}} & \bar{G}_{1_{12}} & \bar{G}_{1_{13}} & \bar{G}_{1_{14}} \\ 0 & \bar{G}_{1_{22}} & 0 & \bar{G}_{1_{24}} \\ 0 & 0 & \bar{G}_{1_{33}} & \bar{G}_{1_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{G}_{1_{44}} \end{bmatrix},$$

$$T_1^{-1}\bar{H}_1 = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} \\ \bar{H}_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_1 T_1 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{K}_{12} & 0 & \bar{K}_{14} \end{bmatrix},$$

$x_{1i} \in \mathbb{R}^{n_{1i}}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $n_{11}+n_{12}+n_{13}+n_{14} = n_1$, $T_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ est une matrice non singulière.

Considérons N, $\bar{H}_2$ et $\bar{K}_2$ les matrices de système régulier ($\det[Ns - I_{n_2}] \neq 0$), le sous-système singulier rapide peut être décomposer en quatre parties,

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & N_{33} & N_{34} \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{21} \\ \dot{\bar{x}}_{22} \\ \dot{\bar{x}}_{23} \\ \dot{\bar{x}}_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{x}_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{H}_{21} \\ \bar{H}_{22} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} \tag{3.16}$$

$$\bar{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{K}_{22} & 0 & \bar{K}_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{x}_{24} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

où

$$T_2^{-1} N T_2 = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & N_{33} & N_{34} \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} \end{bmatrix},$$

$$T_2^{-1}\bar{H}_2 = \begin{bmatrix} \bar{H}_{21} \\ \bar{H}_{22} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_2 T_2 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{K}_{22} & 0 & \bar{K}_{24} \end{bmatrix},$$

$N_{ij} \in \mathbb{R}^{\,n_{2i} \times n_{2j}}$, $i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, $\bar{H}_{2i} \in \mathbb{R}^{n_{2i} \times nm}$, $i = 1,\ 2$, $\bar{K}_{2j} \in \mathbb{R}^{np \times n_{2j}}$, $j = 2,\ 4$, $n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} = n_2$, $T_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ est une matrice non singulière.

On définit

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1i} \\ \bar{x}_{2i} \end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_{ii} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{ii} \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_{ii} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{1_{ii}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad i = 1,\ 2, 3, 4,$$

$$\bar{E}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_{ij} \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{1_{ij}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad \text{pour } i \neq j, \tag{3.18}$$

$$\bar{H}_i = \begin{bmatrix} \bar{H}_{1i} \\ \bar{H}_{2i} \end{bmatrix}, \ i = 1,\ 2, \quad \bar{K}_j = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1j} & \bar{K}_{2j} \end{bmatrix}, \ j = 2,\ 4,$$

On peut alors écrire les équations (3.14), (3.15), (3.16) et (3.17) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} & \bar{E}_{14} \\ 0 & \bar{E}_{22} & 0 & \bar{E}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{E}_{33} & \bar{E}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{E}_{44} \end{bmatrix} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} & \bar{G}_{13} & \bar{G}_{14} \\ 0 & \bar{G}_{22} & 0 & \bar{G}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{G}_{33} & \bar{G}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{G}_{44} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} \tag{3.19}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{K}_2 & 0 & \bar{K}_4 \end{bmatrix} \bar{x}. \tag{3.20}$$

Théorème 3.4 *Le système singulier (3.2) non contrôlable et non observable satisfaisant la condition (3.3) peut être décomposer en quatre sous-système : le sous-système singulier* $(\bar{E}_{11}, \bar{G}_{11}, \bar{H}_1, 0)$ *qui est contrôlable et non observable, le sous-système singulier* $(\bar{E}_{22}, \bar{G}_{22}, \bar{H}_2, \bar{K}_2)$ *qui est contrôlable et observable, le sous-système singulier* $(\bar{E}_{33}, \bar{G}_{33}, 0, 0)$ *qui est non contrôlable et non observable, le sous-système singulier* $(\bar{E}_{44}, \bar{G}_{44}, 0, \bar{K}_4)$ *qui est non contrôlable et observable.*

Preuve. Écrire les équations (3.19) et (3.20) sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{E}\dot{\bar{x}} &= \bar{G}\bar{x} + \bar{H}\tilde{u} \\ \bar{y} &= \bar{K}\bar{x} \end{aligned} \tag{3.21}$$

obtenir,

$$\bar{E} = \bar{P}\tilde{E}\bar{Q},\ \bar{G} = \bar{P}G\bar{Q},\ \bar{H} = \bar{P}H \text{ et } \bar{K} = K\bar{Q}.$$

avec, $\bar{P} = T^{-1}P$, $\bar{Q} = QT$, où $T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$ est la matrice de changement de base.

Nous allons montrer que le sous-système $(\bar{E}_{11}, \bar{G}_{11}, \bar{H}_1, 0)$ satisfait la condition (3.11).

En utilisant (3.18) on obtient,

$$rang[\bar{E}_{11}s - \bar{G}_{11}, \bar{H}_1] = rang \begin{bmatrix} Is - \bar{G}_{1_{11}} & 0 & \bar{H}_{11} \\ 0 & N_{11}s - I & \bar{H}_{21} \end{bmatrix} = n_{11} + n_{21},$$

car, $rang[Is - \bar{G}_{1_{11}}, \bar{H}_{11}] = n_{11}$ et la matrice $[N_{11}s - I]$ est non singulière pour certains $s \in \mathbb{C}$. La condition (a) est satisfaite. La condition (b) est aussi satisfaite, car,

$$rang[N_{11}, \bar{H}_{21}] = n_{21},$$

et donc,

$$rang[\bar{E}_{11}, \bar{H}_1] = rang \begin{bmatrix} I & 0 & \bar{H}_{11} \\ 0 & N_{11} & \bar{H}_{21} \end{bmatrix} = n_{11} + n_{21},$$

donc le sous-système $(\bar{E}_{11}, \bar{G}_{11}, \bar{H}_1, 0)$ est contrôlable, et le sous-système $(\bar{E}_{11}, \bar{G}_{11}, \bar{H}_1, 0)$ est non observable car $\bar{K}_1 = 0$.

Maintenant, montrons que le sous-système $(\bar{E}_{22}, \bar{G}_{22}, \bar{H}_2, \bar{K}_2)$ est contrôlable et observable.

En utilisant (3.18) on obtient,

$$rang[\bar{E}_{22}s - \bar{G}_{22}, \bar{H}_2] = rang \begin{bmatrix} Is - \bar{G}_{1_{22}} & 0 & \bar{H}_{12} \\ 0 & N_{22}s - I & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22},$$

car, $rang[Is - \bar{G}_{1_{22}}, \bar{H}_{12}] = n_{12}$, et la matrice $[N_{22}s - I]$ est non singulière pour certains $s \in \mathbb{C}$. La condition (a) est satisfaite. La condition (b) est aussi satisfaite, car,

$$rang[N_{22}, \bar{H}_{22}] = n_{22},$$

et donc,

$$rang[\bar{E}_{22}, \bar{H}_2] = rang \begin{bmatrix} I & 0 & \bar{H}_{12} \\ 0 & N_{22} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22},$$

le sous-système $(\bar{E}_{22}, \bar{G}_{22}, \bar{H}_2, \bar{K}_2)$ est contrôlable. Pour montrer que le sous-système $(\bar{E}_{22}, \bar{G}_{22}, \bar{H}_2, \bar{K}_2)$ est aussi observable en utilisant les condition (3.13.a) et (3.13.b). Alors, on obtient :

$$rang \begin{bmatrix} \bar{E}_{22}s - \bar{G}_{22} \\ \bar{K}_2 \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} Is - \bar{G}_{1_{22}} & 0 \\ 0 & N_{22}s - I \\ \bar{K}_{12} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22},$$

car,

$$rang \begin{bmatrix} Is - \bar{G}_{1_{22}} \\ \bar{K}_{12} \end{bmatrix} = n_{12},$$

et la matrice $[N_{22}s - I]$ est non singulière pour certain $s \in \mathbb{C}$.

De même,

$$rang \begin{bmatrix} \bar{E}_{22} \\ \bar{K}_2 \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{22} \\ \bar{K}_{12} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22},$$

car,

$$rang \begin{bmatrix} N_{22} \\ \bar{K}_{22} \end{bmatrix} = n_{22},$$

donc la condition (3.13) est vérifiée et le sous-système $(\bar{E}_{22}, \bar{G}_{22}, \bar{H}_2, \bar{K}_2)$ est observable.

Le sous-système $(\bar{E}_{33}, \bar{G}_{33}, 0, 0)$ est non contrôlable et non observable car $\bar{H}_3 = 0$ et $\bar{K}_3 = 0$. L'observabilité de sous-système $(\bar{E}_{44}, \bar{G}_{44}, 0, \bar{K}_4)$ peuvent être montrer d'une façon similaire. ■

3.5 Réalisation minimale

3.5.1 D'une représentation d'état vers une représentation entrées-sorties : La matrice de Transfert

On considère le système,

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = G\tilde{x}(t) + H\tilde{u}(t), \\ \tilde{y}(t) = K\tilde{x}(t), \end{cases} \tag{3.22}$$

avec,

$$G = I_n \otimes A + F^T \otimes I_n,\ H = I_n \otimes B,\ K = I_n \otimes C \text{ et } \tilde{E} = I_n \otimes E.$$

En appliquant la transformée de Laplace à la première équation où la condition initiale est supposée nulle i.e. $\tilde{x}(t_0) = 0$.

$$L(\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t)) = L(G\tilde{x}(t) + H\tilde{u}(t))$$

en utilisant les propriétés de la TL,

$$\tilde{E}sX(s) = GX(s) + HU(s)$$

qui est équivalante à

$$X(s) = [\tilde{E}s - G]^{-1}HU(s)$$

pour certain $s \in \mathbb{C}$.

De même, en appliquant la TL à l'équation de la sortie :

$$\begin{aligned} L(\tilde{y}(t)) &= L(K\tilde{x}(t)) \\ Y(s) &= KX(s) \end{aligned}$$

Et en résolvant les équations par rapport à $Y(s)$, il vient,

$$Y(s) = K[\tilde{E}s - G]^{-1}HU(s),$$

On obtient alors la relation entrés-sorties :

$$Y(s) = R(s)U(s), \tag{3.23}$$

$R(s)$ est appelée la matrice de transfert.

Remarque 3.1 *Le concept de matrice de transfert permet de représenter le comportement dynamique du système de manière algèbrique.*

3.5.2 Réalisation minimale

Définition 3.4 *On appelle réalisation d'une matrice de transfert $R(s)$, toute représentation d'état $(\tilde{E}, G, H, K)$ telle que :*

$$R(s) = K[\tilde{E}s - G]^{-1}H. \tag{3.24}$$

La réalisation $(\tilde{E}, G, H, K)$ est minimale si et seulement si elle est contrôlabe et observable.

La fonction de transfert du système singulier (3.22) est égale seulement à la matrice de transfert de sous-système contrôlable et observable (réalisation minimale),

$$R(s) = K[\tilde{E}s - G]^{-1}H = \bar{K}_2[\bar{E}_{22}s - \bar{G}_{22}]^{-1}\bar{H}_2. \tag{3.25}$$

Preuve. En utilisant (3.19) et (3.20) on peut écrire,

$$\begin{aligned}
R(s) &= K[\tilde{E}s - G]^{-1}H = K\ \bar{Q}\bar{Q}^{-1}[\tilde{E}s - G]^{-1}\bar{P}^{-1}\bar{P}H \\
&= K\ \bar{Q}[\bar{P}(\tilde{E}s - G)\bar{Q}]^{-1}\bar{P}H \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \bar{K}_2 & 0 & \bar{K}_4 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \bar{E}_{11}s - \bar{G}_{11} & \bar{E}_{12}s - \bar{G}_{12} & \bar{E}_{13}s - \bar{G}_{13} & \bar{E}_{14}s - \bar{G}_{14} \\ 0 & \bar{E}_{22}s - \bar{G}_{22} & 0 & \bar{E}_{24}s - \bar{G}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{E}_{33}s - \bar{G}_{33} & \bar{E}_{34}s - \bar{G}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{E}_{44}s - \bar{G}_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \bar{K}_2 & 0 & \bar{K}_4 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} [\bar{E}_{11}s - \bar{G}_{11}]^{-1} & * & * & * \\ 0 & [\bar{E}_{22}s - \bar{G}_{22}]^{-1} & 0 & * \\ 0 & 0 & [\bar{E}_{33}s - \bar{G}_{33}]^{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & [\bar{E}_{44}s - \bar{G}_{44}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \bar{K}_2[\bar{E}_{22}s - \bar{G}_{22}]^{-1}\bar{H}_2.
\end{aligned}$$

$*$ désigne certains sous-matrices sans importance dans ces considérations. ■

Chapitre 4

Algorithme de la décomposition de Kalman

Dans ce chapitre, nous donnerons l'algorithme qui permettra de déterminer une décomposition de Kalman étendue pour les systèmes de Lyapunov et un exemple numérique qui on peut le considérer comme un exemple académique.

4.1 Algorithme de la décomposition de Kalman

Etant donnée une représentation d'état

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)F + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

1/Transformer le système sous forme d'un système LTI

$E \leftarrow I \otimes E;$

$A \leftarrow I \otimes A;$

$F \leftarrow F^T \otimes I;$

$H \leftarrow I \otimes B;$

$K \leftarrow I \otimes C;$

2/ $G \leftarrow A + F;$

3/ Si $\det(E) \neq 0$

$G \leftarrow E^{-1} * G;$

$H \leftarrow E^{-1} * H;$

3.1/Calculer la matrice de contrôlabilité

$$\varphi \leftarrow \left[H \ GH \cdots\cdots G^{n^2-1}H \right];$$

3.2/Calculer la dimension du sous espace de contrôlabilité $\Re_c$:

$n_c \leftarrow rang(\varphi);$

3.3/Calculer la matrice d'observabilité

$$O \leftarrow \begin{bmatrix} K \\ KG \\ \vdots \\ KG^{n^2-1} \end{bmatrix};$$

3.4/Calculer la dimension du sous espace de non observabilité $\Re_{\bar{O}}$:

$n_{\bar{o}} \leftarrow n^2 - rang(O);$

4.1/ Si n_c est moins que n^2 et $n_{\bar{o}} = 0$

On construit la matrice de transformation Q

$$Q \leftarrow [v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{n_c}, Q_{n^2-n_c}];$$

En utilisant la matrice de transformation, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{G} &\leftarrow Q^{-1}GQ\ ; \\ \bar{H} &\leftarrow Q^{-1}H\ ; \\ \bar{K} &\leftarrow KQ\ ; \end{aligned}$$

Finsi

4.2/ Si n_c est égal n^2 et $n_{\bar{o}} \neq 0$

$G \leftarrow G^T;$

$W \leftarrow H;$

$H \leftarrow K^T;$

$K \leftarrow W^T;$

Aller à (4.1) ;

$$
\begin{aligned}
\bar{G} &\leftarrow \bar{G}^T \ ; \\
W &\leftarrow \bar{H}; \\
\bar{H} &\leftarrow \bar{K}^T \ ; \\
\bar{K} &\leftarrow W^T \ ;
\end{aligned}
$$

Finsi

4.3/ Si $n_c < n^2$ et $n_{\bar{o}} \neq 0$

Donner une base de $\Re_{c\bar{O}} = \Re_c \cap \Re_{\bar{O}}$;

On construit la matrice de transformation Q

$$Q \leftarrow [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4];$$

En utilisant la matrice de transformation, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\bar{G} &\leftarrow Q^{-1}GQ \ ; \\
\bar{H} &\leftarrow Q^{-1}H \ ; \\
\bar{K} &\leftarrow KQ \ ;
\end{aligned}
$$

Finsi

Sinon

5.1/ Calculer $\det[Es - A]$;

Si $\det[Es - A] \neq 0$

Calculer la forme de Kronecker-Weierstrass ;

Aller à (3.1) ;

Finsi

Finsi

Fin algorithme

4.1.1 Exemple

Avec les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nous déroulons le programme sous Matlab,

G =

0 1 0 0

0 1 0 0

1 0 1 1

0 1 0 2

H =

1 0 0 0

1 0 0 0

0 0 1 0

0 0 1 0

K =

1 -1 0 0

0 0 1 -1

n =

4

CO =

Columns 1 through 15

1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0

1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0

0 0 1 0 1 0 2 0 3 0 4 0 7 0 8

0 0 1 0 1 0 2 0 3 0 4 0 7 0 8

Column 16

0

0

0

0

O =

1 -1 0 0

0 0 1 -1

0 0 0 0

1 -1 1 -1

0 0 0 0

1 -1 1 -1

0 0 0 0

1 -1 1 -1

nc =

2

no =

2

Une base de E=ker(O)

E=[1 0 ;1 0 ;0 1 ;0 1]

E =

1 0

1 0

0 1

0 1

R =

0 1

0 1

1 0

1 0

k =

4

l =

2

Q=[1 0 0 0 ;1 0 1 0 ;0 1 0 1 ;0 1 0 0]

Q =

1 0 0 0

1 0 1 0

0 1 0 1

0 1 0 0

G1 =

1 0 1 0

1 2 1 0

0 0 0 0

0 0 -1 1

H1=

1 0 0 0

0 0 1 0

0 0 0 0

0 0 0 0

K1=

0 0 -1 0

0 0 0 1

Comentaires finaux

- La dimension du sous espace de contrôlabilité est nulle car, $\dim \Re_c = n_c - n_{c\bar{O}} = 2 - 2 = 0$.

- La dimension du sous espace de non observabilité est nulle car, $\dim \Re_{\bar{O}} = n_{\bar{O}} - n_{c\bar{O}} = 2 - 2 = 0$.

- Le système est décomposé en deux sous systèmes,

un sous système contrôlable et non observable donnée par :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

et un sous système non contrôlable et observable donnée par,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Conclusion et perspectives

Tout au long de ce travail, nous avons montré que le famous théorème de décomposition de Kalman peut être étendu aux systèmes de Lyapunov singuliers en temps continu. Lors de cette étude, nous avons donné la solution du système. Des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité et l'observabilité ont été établis. A l'issu de ce travail, de nombreuses perspectives s'offrent à nous, parmis,

- L'étude de la stabilité.
- L'extension des résultats obtenus aux cas bidimensionnel.
- D'autres études pour les systèmes non linéaires.

Bibliographie

[1] P. J. Antsaklis, and, A. N. Michel, *A linear systems primer*, Birkhauser, 2007.

[2] B.V. Appa Rao, M.S.N. Murty, *Controllability and observability of Lyapunov systems*, Ranich University Mathematical Journal 2005, vol. 32, pp. $55 - 65$.

[3] D. Arzelier, *Représentation et analyse des sytèmes linéaires*, Notes de cours, Version 6, 2010.

[4] K. Aström, and, R. Murray, *Feedback Systems : An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2008.

[5] B. Broxson, *The Kronecker product*, UNF Thesis, 2006.

[6] S.D. Chatterji, *Cours d'analyse* 3 *: Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.

[7] C. T. Chen, *Linear system theory and design*, Oxford University press, 1999.

[8] L. Dai, *Singular Control System*, Volume 118 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, New York, 1989.

[9] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Tome 1 et Tome 2, 1966.

[10] A. Gryson, *Minimimisation d'énergie sous contraintes : Applications en algèbre linéaire et en contrôle linéaire*, Thèse de Doctorat, Disipline : Mathématiques appliquées, 2009.

[11] E. Hendricks, O. Jannerup, and P. Sorensen, *Linear Systems Control- Deterministic and Stochastic Methods*, Springer, 2010.

[12] L. Jaulin, *Commande par espace d'état*, Octobre 2007.

[13] T. Kaczorek, *Vectors and matrices in automation and electrotechnics*, Wydawnictow Naukowo-Techiczne, Warszawa, 1998.

[14] T. Kaczorek, *Decomposition of singular linear systems*, Przeglad Elektrotechniczny, R. LXXIX (2/2003), pp. 53 – 58.

[15] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall, 1980.

[16] M.S.N. Murty, B.V. Appa Rao and G. Suresh Kumar, *Controllability, observability, and realizability of matrix Lyapunov systems*, Bull. Kaream Math. Soc, vol. 43, pp. 149 – 159, 2006.

[17] B. Marx, *Constribution à la commande et au diagnostic des systèmes algébro-différentiels linéaires*, Thèse de Doctorat, Option : Automatique et Productique, Institut national polytechmique de Grenoble, 2004.

[18] J. R. Magnus , *Linear Structures*, Oxford University Press, 1988.

[19] J. R. Magnus et H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, 2^{nd} edition, Wiley, 1999.

[20] K. Ogeta, *Modern control engineering*, 5^{th} edition, Pearson, 2010.

[21] E. Trélat, T, Haberkorn, *Cours d'Automatique*, Master de Mathématique, Université d'Orléans, premier trimestre.

[22] M. Zerrougui, *Obsevation et commande des systèmes singuliers non linéaires*, Thèse de Doctorat, Option : Automatique, Université de Nancy, 2011.