

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

En vue d'obtenir le diplôme de Mémoire de

MASTER

Option : ANALYSE FONCTIONNEL

Présenté par : Mlle Amina ASSOUS
Mlle Wissam SEHLELOU

L'étude d'un opérateur de Volterra

Président	M	U. MOSTAGANEM.
Examineur	M	U. MOSTAGANEM.
Encadreur	Mme SAIDANI	U. MOSTAGANEM.

Année universitaire : 2015-2016

Table des matières

Introduction	1
1 RAPPELS	2
1.1 Espace de Hilbert	2
1.1.1 Produit scalaire	2
1.1.2 Suite de Cauchy	3
1.1.3 Suite convergente	3
1.1.4 Espace complet	3
1.2 Opérateur sur un espace de Hilbert	4
1.2.1 Opérateur borné	4
1.2.2 Valeur propre et vecteur propre	5
1.2.3 La projection orthogonale :	8
2 OPERATEUR DE VOLTERRA	9
2.1 Opérateur de Volterra	9
3 Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique	14
4 L'opérateur $V^* \circ V$ et équations différentielles	23
Conclusion	ii
Bibliographie	ii

Dédicace

Au meilleur des pères

A ma très chère mamann, affable, honorable, aimable, tu présentes pour moi le symbole de la beauté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et prier pour moi.

A mon très cher papa, rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consenti pour mon éducation et ma formation.

A mes chères sœurs, pour leur amour et leur incontestable appui.

A ma chérie Amina, pour tous les instants inoubliables que j'ai passés avec toi.

A mes chers collègues, je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des frères, sœurs et des amis sur que je peux compter.

A toute les membres de ma famille petits et grands.

Je dédie ce travail à toutes les personnes chères à mon cœur.

de toute ma gratitude et mon amour.

Wissam SEHLELOU

Dédicace

C'est un grand plaisir que je dédie ce modeste travail de fin étude à tous mes proches

Particulièrement :

A ma très chère mère pour tout bienfaits, sa tendresse, ses sages conseils dont j'ai

Toujours bénéficié.

A mon cher adoré père, pour sa patience, ses encouragements, son soutien moral et financier qu'il a consisté depuis ma naissance jusqu'à ce jour.

A ma chère belle sœur Nawal et à mon petit frère Mohamed. .

A mon binôme et fidèle amie Wissam et à tous mes meilleurs amis.

Je le dédie aussi à ma grande mère et aux familles : Assous, Benamara.

Amina ASSOUS

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le bon Dieu, notre créateur de nos avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur Madame SAIDANI qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses orientations du début à la fin de ce travail.

Nous tenons également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner ce travail.

Nos remerciements vont aussi à tous les enseignants du département mathématiques, qui ont participé à notre formation.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Wissam SEHLELOU

AMINA ASSOUS

Résumé

Nous nous intéressons dans ce mémoire à démontrer quelques propriétés de l'opérateur de Volterra et l'opérateur $V^* \circ V$ (la composition d'un opérateur de Volterra et son adjoint) et à déterminer son spectre ponctuel, puis, nous développons l'opérateur $V^* \circ V$ en série trigonométrique qui nous permet de montrer l'utilité de l'opérateur de Volterra pour étudier l'équation différentielle avec les conditions de Sturm- Liouville.

INTRODUCTION

La théorie spectrale a pour origine d'une part la généralisation aux espaces de dimension infinie des théorèmes de réduction des endomorphismes dans les espaces de dimension finie et, d'autre part, des origines liées aux équations aux dérivées partielles.

La théorie spectrale des opérateurs est particulièrement utile et importante dans l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, un des buts premiers de l'étude d'un opérateur est la détermination de son spectre, qui est la généralisation en dimension infinie de l'ensemble des valeurs propres d'une matrice. Ceci permet de résoudre complètement des problèmes d'évolution en mécanique, physique, etc.

Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs, qui traite les endomorphismes continus d'un espace vectoriel normé. Cette théorie est surtout développée dans le cas des espaces de Hilbert.

L'objectif de ce travail est d'étudier les différentes propriétés de l'opérateur de Volterra et l'opérateur $V^* \circ V$ (la composition d'un opérateur de Volterra et son adjoint) ainsi leurs utilité pour étudier l'équation différentielle avec les conditions de Sturm- Liouville.

Pour détailler notre travail, nous avons scindé ce mémoire en quatre chapitres.

Dans Le **premier chapitre**, nous avons rappelé tous les outils nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Nous définissons les espaces de Hilbert, opérateur borné, adjoint d'un opérateur etc.

Le **deuxième chapitre** est une introduction à la notion de l'opérateur de Volterra. Nous commençons par la définition de cet opérateur sur un espace de Hilbert en précisant son adjoint puis quelques propriétés de l'opérateur $V^* \circ V$ (la composition d'un opérateur de Volterra et son adjoint).

Le **troisième chapitre** a pour but de déterminer un développement en série trigonométrique de l'opérateur $V^* \circ V$ (la composition d'un opérateur de Volterra et son adjoint) en

utilisant une suite orthonormée totale de l'espace de Hilbert dont l'existence est montrée par le théorème d'approximation de Weierstrass.

Dans **Le quatrième chapitre et le dernier**, nous utilisons les outils construits jusque-là pour étudier l'équation différentielle avec les conditions de Sturm- Liouville, en établissant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit solution. Nous relient les vecteurs propres de l'opérateur $V^* \circ V(f)$ aux solutions d'une telle équation différentielle.

Ce travail est achevé par une bibliographie.

RAPPELS

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, les différents éléments de la théorie des opérateurs et quelques connaissances acquises sur les séries et les types de la convergence.

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Produit scalaire

Définition 1.1.1 Soit H un \mathbb{k} -espace vectoriel (\mathbb{k} est un corps complexe ou réel). Un produit scalaire sur H noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire, hermitienne et définie positive de $H \times H$ dans \mathbb{k}

- **Sesquilinéaire** : pour tout $x, y, z \in H$ et $\lambda \in \mathbb{k}$:

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

et

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

- **Hermitienne** : $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$, pour tout $x, y \in H$.

• *Définie positive* : pour tout $x \in H$

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

et

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_H.$$

Définition 1.1.2 On appelle norme sur H noté $\|\cdot\|_H$, toute forme de H dans \mathbb{R}^+ tel que :

$$i) \forall x \in H, \|x\|_H = 0 \Leftrightarrow x = 0_H,$$

$$ii) \forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\|_H = |\lambda| \|x\|_H,$$

$$iii) \forall x, y \in H, \|x + y\|_H \leq \|x\|_H + \|y\|_H.$$

Remarque 1.1.1 Pour tout produit scalaire sur H , on peut associer la norme

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}.$$

1.1.2 Suite de Cauchy

Définition 1.1.3 Soient H un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} est un corps complexe ou réel) muni d'une norme $\|\cdot\|_H$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans H . La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \geq N_0 : \|x_n - x_m\|_H < \varepsilon.$$

1.1.3 Suite convergente

Définition 1.1.4 On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs dans H est convergente vers $x \in H$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_0 : \|x_n - x\|_H < \varepsilon.$$

1.1.4 Espace complet

Définition 1.1.5 Soit H un \mathbb{K} -espace vectoriel normé. H est dit complet si toute suite de Cauchy de H est convergente dans H .

Définition 1.1.6 Un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace de Hilbert si et seulement si il est complet pour la norme induite par le produit scalaire.

Définition 1.1.7 Soit H un espace de Hilbert, on dit que les vecteurs x et y de H sont orthogonaux et on écrit $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle_H = 0$

Définition 1.1.8 Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de vecteurs de H , on dit que la suite est orthogonale si les vecteurs x_n sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si $\langle x_m, x_n \rangle_H = 0$ lorsque $m \neq n$, on dit que c'est une suite orthonormée si de plus pour tout n on a $\|x_n\|_H = 1$.

1.2 Opérateur sur un espace de Hilbert

Définition 1.2.1 Soient H et F deux espaces de Hilbert. Un opérateur A de H dans F est une transformation linéaire $A : D(A) \subset H \rightarrow F$ telle que $D(A)$ est l'ensemble des vecteurs $x \in H$ pour lesquels il existe une image $y \in F$.

On appelle $\text{Ker}(A)$ noyau de l'opérateur A le sous espace de H défini par :

$$\text{Ker}(A) = \{x \in D(A) \text{ tel que } Ax = 0\}.$$

et on appelle $\text{Im}(A)$ image de l'opérateur A le sous espace de F défini par :

$$\text{Im}(A) = \{y \in F \text{ tel que } y = Ax, x \in D(A)\}.$$

On note par $\mathcal{L}(H, F)$ l'espace vectoriel des opérateurs de H dans F .

1.2.1 Opérateur borné

Définition 1.2.2 Soient H et F deux espaces de Hilbert. Un opérateur A de H dans F est dit borné si et seulement si

$$\sup_{x \in H} \|A(x)\|_F < \infty.$$

Remarque 1.2.1 On note l'espace des opérateurs bornés de $\mathcal{L}(H, F)$ par $B(H, F)$ qui est un espace vectoriel sur lequel on définit la norme d'opérateurs

$$\begin{aligned} \|A\|_{op} &= \sup_{x \in H} \|A(x)\|_F \\ &= \inf \{M > 0 : \|A(x)\|_F \leq M\|x\|_H\}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.3 Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(E, F)$. $T^* \in \mathcal{B}(F, E)$ est dit opérateur adjoint de T si et seulement si pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

Définition 1.2.4 Soient E et F deux espaces de Hilbert et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs de $\mathcal{B}(E, F)$, on définit les trois types de convergences suivantes :

1) **Convergence en norme**

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en norme vers l'opérateur T si et seulement si

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{B}(E, F)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ et on écrit } T_n \rightrightarrows T,$$

2) **Convergence forte**

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers l'opérateur T si et seulement si

$$\|T_n(x) - T(x)\|_F \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall x \in E \text{ et on écrit } T_n \xrightarrow{s} T,$$

3) **Convergence faible**

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers l'opérateur T si et seulement si

$$\langle T_n(x), y \rangle \rightarrow \langle T(x), y \rangle, \forall x \in E, \forall y \in F.$$

1.2.2 Valeur propre et vecteur propre

Définition 1.2.5 Soient E un espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E)$. On appelle valeur propre de T tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $(T - \lambda Id)$ n'est pas injectif, autrement dit, s'il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0$, tel que :

$$Tx = \lambda x$$

Le vecteur x est alors appelé un vecteur propre de T correspondant à la valeur propre λ .

Quelques résultats d'analyse

On se propose maintenant de faire le point sur quelques propriétés des séries et les types de la convergence des séries utilisés dans notre travail.

Définition 1.2.6 *Séries Trigonométrique* : On appelle série trigonométrique toute série dont le terme général est de la forme :

$$u_n = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

où (a_n) et (b_n) désignent deux suites de nombres réels ou complexes.

Remarque 1.2.2 Si les séries $\sum_n |a_n|$ et $\sum_n |b_n|$ sont convergentes, la série trigonométrique $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement convergente sur \mathbb{R} .

Définition 1.2.7 Une partie D d'un espace topologique X est dite dense dans X si sa fermeture \bar{D} coïncide avec X .

Une partie G de H est dite dense dans H si

$$\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in G; \|g - h\| < \varepsilon$$

ou d'une manière équivalente si tout h de H est limite d'une suite d'éléments g_n de G :

$$\|g_n - h\| \longrightarrow 0.$$

Exemple 1.2.1 L'ensemble \mathbb{Q} des rationnels est dense dans \mathbb{R} pour la topologie usuelle.

Théorème 1.2.1 de Weierstrass (approximation par des polynômes) [6]

Pour toute application f continue sur l'intervalle compact $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynômes $(p_n)_n$ convergeant uniformément vers f .

La convergence normale d'une série

Définition 1.2.8 Soit $\left(\sum_n f_n\right)$ une série de fonctions définies sur E et $\|f_n\|_E = \sup_{x \in E} \{|f_n(x)|\}$.

On dit que la série de fonctions $\left(\sum_n f_n\right)$ est normalement convergente sur E lorsque la série

numérique $\left(\sum_n \|f_n\|_E\right)$ est convergente.

La convergence uniforme d'une série :

Définition 1.2.9 soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$. On dit que $\sum_n f_n$ converge uniformément vers la fonction f sur E ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E$$

$$\left(n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon \right)$$

or la convergence simple est donnée par

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$\left(n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon \right)$$

Remarque 1.2.3 Si une série $\sum_n f_n$ est normalement convergente alors elle converge uniformément.

Dérivation de série de fonction :

Théorème 1.2.2 [6] Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ tel que $U_n \in C^1([a, b])$, si la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ converge au moins au $x_0 \in [a, b]$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} U'_n$ converge uniformément sur ce segment alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ converge uniformément sur $[a, b]$ et la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ est un élément de $C^1([a, b])$, de plus

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} U'_n(x).$$

Suite orthonormé totale :

Définition 1.2.10 Soit H un espace de Hilbert séparable, une famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset H$ est totale si l'espace vect $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans H .

Définition 1.2.11 Une famille orthonormée totale d'un espace de Hilbert est appelée une base hilbertienne.

1.2.3 La projection orthogonale :

Définition 1.2.12 Deux éléments x et $y \in H$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle_H = 0$. Soit $M \subset H$ un sous-ensemble de H . On dit qu'un élément $x \in H$ est orthogonal à M si x est orthogonal à chaque élément de M . Un sous-ensemble $N \subset H$ est orthogonal à M si chaque élément de N est orthogonal à M . On appelle le complément orthogonal de M l'ensemble M^\perp de tous les éléments de H qui sont orthogonaux à M .

Si M est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H , la projection orthogonale ou simplement projection sur M est l'opérateur borné défini par $Px = y$ pour tout $x \in H$ où $x = y + z$ est l'unique façon d'écrire x avec $y \in M$ et $z \in M^\perp$. Toute projection P vérifie $P^2 = P$ et si $P \neq 0$, alors $\|P\| = 1$.

OPERATEUR DE VOLTERRA

On introduit dans ce chapitre un opérateur de Volterra noté V , puis à l'aide de son adjoint, on étudie alors un opérateur $V^* \circ V$ (la composition d'un opérateur de Volterra et son adjoint) autant qu'un opérateur symétrique défini positif dans un espace vectoriel euclidien de dimension infinie en déterminant son spectre, et on relie les vecteurs propres de l'opérateur $V^* \circ V$ aux solutions d'une équation différentielle. On termine ce chapitre par un théorème qui caractérise les valeurs propres de ce type d'opérateurs.

2.1 Opérateur de Volterra

Définition 2.1.1 Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) g(x) dx. \quad (2.1.1)$$

On note $\|f\|_E = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire. On définit l'opérateur V comme suit

$$V \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ f \mapsto V(f) \end{array}$$

tel que

$$V(f) \begin{array}{l} [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto V(f)(x) = \int_0^x f(t) dt \end{array} \quad (2.1.2)$$

L'opérateur V est appelé opérateur de Volterra.

Lemme 2.1.1 *L'adjoint de l'opérateur de Volterra est donné par*

$$V^*(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \quad (2.1.3)$$

pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Preuve

En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont deux primitives de f , montrons que pour tous f, g dans E

$$\langle V(f), g \rangle = \langle f, V^*(g) \rangle.$$

Soient $(f, g) \in E^2$,

$$\langle V(f), g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} V(f)(x) g(x) dx$$

Par intégration par parties, nous obtenons :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} V(f)(x) g(x) dx = [-V(f)(x) V^*(g)(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) V^*(g)(x) dx.$$

Il en résulte que :

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad \langle V(f), g \rangle = \langle f, V^*(g) \rangle$$

Lemme 2.1.2 *L'opérateur $V^* \circ V$ est symétrique défini positif et ses valeurs propres sont positifs.*

Preuve

D'après la propriété de symétrie du produit scalaire, nous avons pour tout $(f, g) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \langle g, V^*(V(f)) \rangle &= \langle V(g), V(f) \rangle \\ &= \langle V(f), V(g) \rangle \\ &= \langle f, V^*(V(g)) \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle V^* \circ V(f), g \rangle = \langle f, V^* \circ V(g) \rangle$$

d'où $V^* \circ V$ est un opérateur symétrique.

De plus, d'après la lemme 2.1.1

$$\begin{aligned}\langle V^* \circ V(f), f \rangle &= \langle V(f), V(f) \rangle \\ &= \|V(f)\|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

et si nous avons

$$\langle V^* \circ V(f), f \rangle = 0$$

alors $V(f)$ est nulle, donc sa dérivée, qui est la fonction f est nulle, ainsi l'opérateur symétrique $V^* \circ V$ est défini positif.

Soit λ une valeur propre de l'opérateur $V^* \circ V$ (qui existe par la symétrie de l'opérateur), il existe alors f non nulle de E telle que $V^* \circ V(f) = \lambda f$, alors

$$\begin{aligned}\langle V^* \circ V(f), f \rangle &= \lambda \langle f, f \rangle \\ &= \lambda \|f\|^2,\end{aligned}$$

comme les deux quantités $\langle V^* \circ V(f), f \rangle$ et $\|f\|^2$ sont strictement positifs, alors $\lambda > 0$, ceci achève la preuve.

Le théorème suivant donne une relation entre les vecteurs propres de l'opérateur $V^* \circ V$ et les solutions d'une équation différentielle d'ordre 2.

Théorème 2.1.1 *Soient $E = \mathcal{C} [0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini par la formule (2.1.1), l'opérateur V défini par la formule (2.1.2), λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ . Alors f_λ est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$ avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(0) = 0$.*

Preuve Comme

$$V^* \circ V(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$$

et $V^*(V(f_\lambda))$ est de classe C^2 , alors f_λ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et en dérivant deux fois, on obtient

$$\lambda f_\lambda'' = -f_\lambda,$$

d'où f_λ est solution sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0,$$

f_λ étant continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ alors f_λ'' l'est aussi et donc f_λ est de classe C^2 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. De plus,

$$\lambda f_\lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) = V^* (V (f_\lambda)) \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

et

$$\lambda f_\lambda' (0) = -V (f_\lambda) (0) = 0,$$

d'où

$$f_\lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \text{ et } f_\lambda' (0) = 0.$$

Par suite la démonstration est complète.

On termine ce chapitre par une caractérisation des valeurs propres de l'opérateur $V^* \circ V$:

Théorème 2.1.2 Soient $E = \mathcal{C} [0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini par la formule (2.1.1), l'opérateur V défini par la formule (2.1.2). Alors λ une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Preuve

Si λ est une valeur propre $V^* \circ V$, alors, d'après le lemme 2.1.2 et le théorème 2.1.1, nous avons $\lambda > 0$ et f_λ (le vecteur propre associé) vérifie

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{\lambda} y = 0 \\ y \left(\frac{\pi}{2} \right) = y' (0) = 0. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

donc

$$\begin{cases} f_\lambda'' + \frac{1}{\lambda} f_\lambda = 0 \\ f_\lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) = f_\lambda' (0) = 0 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

L'équation différentielle (2.1.5) du second ordre à coefficients constants a pour équation caractéristique $r^2 + \frac{1}{\lambda} = 0$, de racines $r = \pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}}$ ($\lambda > 0$). Une base de solutions de l'équation différentielle (2.1.5) est formée des fonctions :

$$x \longmapsto \cos \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right) \text{ et } x \longmapsto \sin \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right). \quad (2.1.6)$$

La solution général de l'équation est définie par

$$f_\lambda (x) = \alpha \cos \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right) + \mu \sin \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad (\alpha, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.1.7)$$

donc

$$f_\lambda \in \text{vect} \left(x \longrightarrow \cos \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x \right), x \longrightarrow \sin \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x \right) \right).$$

En dérivant (2.1.7), nous obtenons

$$f'_\lambda(x) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \sin \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right) + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \cos \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

La condition initiale $f'_\lambda(0) = 0$ donne donc $\mu = 0$, d'où

$$f_\lambda(x) = \alpha \cos \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

donc

$$f_\lambda \in \text{vect} \left(x \longrightarrow \cos \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x \right) \right)$$

La condition initiale $f_\lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$, nous obtenons

$$f_\lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}, \forall n \in \mathbb{Z},$$

il existe donc, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$, posons pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $g_n(x) = \cos((2n+1)x)$, donc

$$\begin{aligned} V(g_n)(x) &= \int_0^x \cos((2n+1)t) dt \\ &= \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V^* \circ V(g_n)(x) &= \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1} dt \\ &= \lambda \cos((2n+1)x), \end{aligned}$$

donc $V^* \circ V(g_n) = \lambda g_n$ alors λ est une valeur propre de $V^* \circ V$. Conclusion, les valeurs propres de $V^* \circ V$ sont les $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$ et l'espace propre associé à chaque λ , est la droite vectorielle engendrée par g_n .

Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

Dans cette partie, nous nous tenterons à déterminer en théorème 3.0.3 un développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique. En utilisant une suite orthonormée totale dont l'existence est montrée par le théorème de Weierstrass trigonométrique.

Nous considérons l'espace vectoriel G des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, \pi]$, muni du produit scalaire défini pour tout f, g dans G par :

$$\langle f, g \rangle_G = \int_0^\pi f(t) g(t) dt. \quad (3.0.1)$$

Nous notons $\|f\|_G = \sqrt{\langle f, f \rangle_G}$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous définissons la fonction $c_n \in G$ par la formule $c_n(t) = \cos(nt)$ et on note $F_n = \text{Vect}(c_0, c_1, \dots, c_n)$ le sous-espace vectoriel de G engendré par $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$. Nous notons également P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n .

La détermination effective de la série trigonométrique nécessite quelques calculs, pour cela nous commençons par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 3.0.3 *Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto p(\cos(t))$ définie sur $[0, \pi]$ appartient à F_n .*

Preuve

Soit P est un polynôme de degré n défini par

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{k}$$

Donc

$$p(\cos(t)) = a_0 + a_1 \cos(t) + a_2 \cos^2(t) + \dots + a_n \cos^n(t), \quad a_i \in \mathbb{k} \quad (3.0.2)$$

puisque, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous espaces vectoriels de G , il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n(t) = \cos^n(t)$ définit un élément de F_n .

Soit $t \in [0, \pi]$, alors :

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \Leftrightarrow 2 \cos t = e^{it} + e^{-it},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2^n \cos^n(t) &= (e^{it} + e^{-it})^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(2k-n)}. \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

De même

$$\begin{aligned} 2^n \cos^n(t) &= (e^{it} + e^{-it})^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-2k)}. \end{aligned} \quad (3.0.4)$$

De l'équation (3.0.3) et (3.0.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} 2^n \cos^n(t) + 2^n \cos^n(t) &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(2k-n)} + \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-2k)} \\ 2^{n+1} \cos^n(t) &= \sum_{k=0}^n C_n^k [e^{i(n-2k)} + e^{-i(n-2k)}] \\ &= 2 \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(n-2k). \end{aligned}$$

La parité de \cos affirme que

$$\cos^n(t) = \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(n-2k) \right) \in F_n,$$

donc $h_n \in F_n$ et puisque F_n est un sous-espace vectoriel, alors $p(\cos(t)) \in F_n$, ceci achève la preuve du lemme.

Lemme 3.0.4 *Il existe une suite de nombres réels strictement positifs $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit orthonormée totale.*

Preuve

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle c_n, c_m \rangle_G &= \int_0^\pi \cos(nt) \cos(mt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)] dt. \end{aligned}$$

i) Si $n \neq m$, $\langle c_n, c_m \rangle_G = 0$,

ii) Si $n = m \neq 0$,

$$\langle c_n, c_n \rangle_G = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2nt) + 1) dt = \frac{\pi}{2}.$$

iii) Si $n = m = 0$,

$$\langle c_0, c_0 \rangle_G = \pi.$$

Alors, si $n = m \neq 0$: $\|c_n\|_G = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et si $n = m = 0$: $\|c_0\|_G = \sqrt{\pi}$, posons $\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ pour $n \geq 1$, et $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, alors la suite $(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormée. Pour montrer que $(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale, il suffit de montrer que $Vect(\alpha_n c_n)$ dense dans G pour la norme de $\|\cdot\|_G$

Soit $f \in G$, comme

$$\|f\|_G \leq \sqrt{\pi} \|f\|_\infty,$$

il suffit de montrer que f est une limite uniforme d'une suite de $Vect(\alpha_n c_n)$. Posons $g = f \circ \arccos = f(\arccos)$ qui est continue sur $[-1, 1]$, d'après le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réels qui converge vers g uniformément sur $[-1, 1]$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N un entier naturel tel que : $\forall n \geq N; \forall x \in [-1, 1]$

$$|g(x) - P_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \quad (3.0.5)$$

en remplaçant x par $\cos y$, (3.0.5) devient

$$\begin{aligned} \forall n \geq N; \forall y \in [0, \pi], \\ |g(\cos y) - P_n(\cos y)| &= |f(y) - P_n(\cos y)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \geq N;$$

$$\sup_{y \in [0, \pi]} |f(y) - P_n(\cos y)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}.$$

f est alors limite uniforme sur $[0, \pi]$ d'une suite de $\text{vect}(h_n, n \in \mathbb{N}) \subset \text{vect}(c_n, n \in \mathbb{N})$, d'après le lemme 3.0.3. Finalement, $\text{vect}(c_n, n \in \mathbb{N})$ dense dans G , pour la norme de la convergence uniforme. En utilisant la définition de la norme de G , nous obtenons

$$\|f - P_n(\cos)\|_G \leq \sqrt{\pi} \|f - P_n(\cos)\|_\infty$$

$$\leq \varepsilon,$$

ce qui implique que $\text{vect}(\alpha_n c_n, n \in \mathbb{N})$ dense dans G , pour la norme de la convergence $\|\cdot\|_G$, alors la suite $(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale totale.

Lemme 3.0.5 *Soit P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n . Alors pour tout $f \in G$, $\|f - P_{F_n}(f)\|_G$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Si, de plus $(P_{F_n}(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction g , alors $g = f$.*

Preuve

Soient P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n et $f \in G$. D'après la définition de la projection orthogonale, nous avons

$$\|f - P_{F_n}(f)\|_G = \inf_{g \in F_n} \|f - g\|_G$$

par suite, pour tout $g \in F_n$,

$$\|f - P_{F_n}(f)\|_G \leq \|f - g\|_G. \quad (3.0.6)$$

En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p un polynôme de degré N , tel que

$$\|f - p(\cos)\|_\infty \leq \varepsilon$$

de même que la preuve de le lemme 3.0.3, nous avons

$$\|f - p(\cos)\|_G \leq \varepsilon \quad (3.0.7)$$

d'après le lemme 3.0.3, $p(\cos) \in F_N$, mais si $n \geq N$, alors $F_N \subset F_n$, d'où

$$\|f - P_{F_n}(f)\|_G \leq \|f - P_{F_N}(f)\|_G \quad (3.0.8)$$

de plus (3.0.6) affirme que

$$\|f - P_{F_N}(f)\|_G \leq \|f - p(\cos)\|_G. \quad (3.0.9)$$

De (3.0.7), (3.0.8) et (3.0.6), nous obtenons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq N$

$$\|f - P_{F_n}(f)\|_G \leq \varepsilon,$$

d'où $\|f - P_{F_n}(f)\|_G$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Nous supposons maintenant que $(P_{F_n}(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction g , puisque chaque $P_{F_n}(f)$ est continue sur $[0, \pi]$, g l'est aussi, donc $g \in G$, par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|g - P_{F_n}(f)\|_G \leq \sqrt{\pi} \|g - P_{F_n}(f)\|_\infty$$

la suite $(P_{F_n}(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors vers g pour la norme $\|\cdot\|_G$, alors par unicité de la limite : $f = g$. Ceci achève la preuve du lemme.

Lemme 3.0.6 *Pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, soit la fonction g_x sur $[0, \pi]$ définie par la formule :*

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x, t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \end{cases} \quad (3.0.10)$$

Alors

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t) = g_x(t), \quad \forall t \in [0, \pi].$$

En particulier, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{\pi}{2} - \max(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t).$$

Preuve

Pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $t \in [0, \pi]$, nous avons

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x, t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (3.0.11)$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x, t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \max(x, \pi - t) - \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \end{cases} \quad (3.0.12)$$

C'est clair que g_x est continue sur $[0, \pi]$, donc $g_x \in G$. Nous avons

$$\begin{aligned} P_{F_n}(g_x) &= \sum_{k=0}^n \langle g_x, \alpha_k c_k \rangle_G \alpha_k c_k \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \langle g_x, c_k \rangle_G c_k. \end{aligned} \quad (3.0.13)$$

Il reste à calculer $\langle g_x, c_k \rangle_G$

$$\begin{aligned} \langle g_x, c_k \rangle_G &= \int_0^\pi g_x(t) \cos(kt) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t) \cos(kt) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi g_x(\pi - t) \cos(kt) dt \end{aligned} \quad (3.0.14)$$

Posons $u = \pi - t$, alors

$$\begin{aligned} - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi g_x(\pi - t) \cos(kt) dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 g_x(u) \cos(k(\pi - u)) du \\ &= (-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}}^0 g_x(u) \cos(k(u)) du \end{aligned}$$

d'où (3.0.14) devient

$$\begin{aligned} \langle g_x, c_k \rangle_G &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t) \cos(kt) dt + (-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}}^0 g_x(t) \cos(kt) dt \\ &= \left(1 - (-1)^k\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t) \cos(kt) dt. \end{aligned}$$

Remarquons que $\langle g_x, c_{2k} \rangle_G = 0$. En utilisant (3.0.11), nous avons

$$\langle g_x, c_{2k+1} \rangle_G = 2 \left[\int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos((2k+1)t) dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos((2k+1)t) dt \right].$$

Nous avons

$$\int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos((2k+1)t) dt = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x)$$

et pour $\int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos((2k+1)t) dt$, l'intégration par partie donne

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos((2k+1)t) dt \quad (3.0.15)$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x) + \frac{1}{2k+1} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin((2k+1)t) dt \quad (3.0.16)$$

une deuxième intégration par partie de $\int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin((2k+1)t) dt$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin((2k+1)t) dt &= \frac{\pi}{2} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - x \sin((2k+1)x) - (2k+1) \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \cos((2k+1)t) dt \end{aligned} \quad (3.0.17)$$

En remplaçant (3.0.17) dans (3.0.16)

$$\begin{aligned} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos((2k+1)t) dt &= -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x) \\ &\quad + \frac{1}{2k+1} \left(\frac{\pi}{2} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - x \sin((2k+1)x) - (2k+1) \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \cos((2k+1)t) dt\right) \\ &= -\frac{\pi}{2(2k+1)} \sin((2k+1)x) + \\ &\quad \frac{x}{2k+1} \sin((2k+1)x) + \frac{\pi}{2(2k+1)} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \frac{x}{2k+1} \sin((2k+1)x) - \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \cos((2k+1)t) dt \\ &= \frac{\pi}{2(2k+1)} \left[\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin((2k+1)x) \right] \\ &\quad - \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \cos((2k+1)t) dt \end{aligned} \quad (3.0.19)$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
 \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \cos((2k+1)t) dt &= \left[\frac{1}{2k+1} t \sin((2k+1)t) \right]_x^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k+1} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin((2k+1)t) dt \\
 &= \frac{1}{2k+1} \left[\frac{\pi}{2} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) - x \sin((2k+1)x) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{(2k+1)^2} \left[\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) - \cos((2k+1)x) \right]. \quad (3.0.20)
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\langle g_x, c_{2k+1} \rangle_G = \frac{2}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x); \quad \langle g_x, c_{2k} \rangle_G = 0.$$

Donc $\forall t \in [0, \pi]$:

$$P_{F_n}(g_x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t).$$

La série $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t)$ converge normalement, donc uniformément alors par application de le lemme 3.0.4, la suite $(P_{F_n}(g_x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers g_x uniformément sur $[0, \pi]$.

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t) = g_x(t), \quad \forall t \in [0, \pi].$$

En particulier, pour tout $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{\pi}{2} - \max(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t).$$

Ceci achève la preuve.

Le théorème suivant contient l'écriture de $V^* \circ V(f)(x)$ en série trigonométrique.

Théorème 3.0.3 Soient $E = \mathcal{C} [0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini par la formule (2.1.1), l'opérateur V défini par la formule (2.1.2) et $f \in E$. Alors pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $V^* \circ V(f)(x)$

admet un développement en série trigonométrique de type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \cos((2n+1)x)$ où

$$a_n(f) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) f(t) dt.$$

Preuve

Nous allons démontrer le théorème en deux étapes :

1. Montrons que $V^* \circ V(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - \max(x, t)) f(t) dt$. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, en utilisant (2.1.2) et (2.1.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} V^* \circ V(f)(x) &= \int_x^{\frac{\pi}{2}} V f(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} V f\left(\frac{\pi}{2}\right) - x V f(x) - \int_x^{\frac{\pi}{2}} t f(t) dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(t) dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x, t)\right) f(t) dt. \end{aligned}$$

2. Calculons les termes $a_n(f)$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \cos((2n+1)x)$.

Utilisant alors le lemme 3.0.6, nous obtenons

$$V^* \circ V(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t) f(t) dt.$$

f étant continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc bornée sur ce segment, la série à l'intérieur de l'intégrale est alors normalement et uniformément convergente pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, d'où

$$\begin{aligned} V^* \circ V(f)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2} f(t) dt \right) \cos((2n+1)x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \cos((2n+1)x), \end{aligned}$$

avec

$$a_n(f) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) f(t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'opérateur $V^* \circ V$ et équations différentielles

Dans cette partie, nous utilisons les outils construits jusque-là pour étudier le lien qui existe entre les solutions de l'équation différentielle au conditions de Sturm-Liouville et les valeurs propre de $V^* \circ V$, en établissant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit solution. Ceci permet de construire une solution dans un cas (mais nous n'abordons pas la question de son unicité), de trouver une infinité de solutions dans un autre cas, et on termine par un dernier cas où il n'y a pas de solution.

Soient $h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle

$$(S) \begin{cases} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.0.1)$$

Nous définissons $\varphi_n \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la formule :

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos((2n+1)t) \quad (4.0.2)$$

Avant de résoudre l'équation (S), nous commençons par donner une relation entre la suite $(\varphi_n)_n$ et les valeurs propres de l'opérateur $V^* \circ V$:

Lemme 4.0.7 *Soit $\varphi_n \in E$ défini par la formule (4.0.2). Alors pour tout $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$*

$$\langle V^* \circ V(f), \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2} \langle f, \varphi_n \rangle. \quad (4.0.3)$$

Preuve

En utilisant le théorème 3.0.3 et la relation (2.1.1), nous avons pour tout $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \langle V^* \circ V(f), \varphi_n \rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} V^* \circ V(f)(t) \varphi_n(t) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) \cos((2m+1)t) \cos((2n+1)t) dt \end{aligned}$$

avec

$$a_m(f) = \frac{4}{\pi(2m+1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2m+1)t) f(t) dt.$$

Et comme la série $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) \cos((2m+1)t) \cos((2n+1)t)$ de fonctions continues converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors

$$\begin{aligned} \langle V^* \circ V(f), \varphi_n \rangle &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2m+1)t) \cos((2n+1)t) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_n(f) \frac{\pi}{4}; \end{aligned}$$

car si $m \neq n$, nous avons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2m+1)x) \cos((2n+1)t) dt = 0,$$

et si $n = m$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2m+1)x) \cos((2n+1)t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle V^* \circ V(f), \varphi_n \rangle &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_n(f) \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} \langle f, \varphi_n \rangle. \end{aligned}$$

La preuve du lemme est achevée.

Dans le théorème qui suit, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit solution de l'équation (S). En utilisant le développement en série trigonométrique de l'opérateur $V^* \circ V$, nous démontrons le rôle de ce dernier pour établir l'expression de cette solution.

Théorème 4.0.4 Soient $h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in E$. Alors g est une solution de l'équation différentielle (4.0.1) si et seulement si $g = \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) \langle g, \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle \quad (4.0.4)$$

$$\text{et } g = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad (4.0.5)$$

pour tout $\varphi_n \in E$ définie par (4.0.2).

Preuve

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi_n \in E$ définie par (4.0.2). Supposons que g est une solution de (S) alors :

$$\begin{cases} g'' + \lambda g + h = 0, \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.0.6)$$

par passage à la primitive tenant compte de $g'(0) = 0$, l'équation (4.0.6) devient

$$g' + \lambda V(g) + V(h) = 0$$

puis à la primitive tenant compte de $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on obtient

$$g - \lambda (V^* \circ V(g)) - (V^* \circ V(h)) = 0,$$

donc $g = \lambda (V^* \circ V(g)) + (V^* \circ V(h))$.

Réciproquement si $g - \lambda (V^* \circ V(g)) - (V^* \circ V(h)) = 0$ alors $g \in \mathcal{C}^2$. En dérivant, on obtient :

$$g' - \lambda (V^* \circ V(g))' - (V^* \circ V(h))' = 0$$

en dérivant encore une fois, nous obtenons

$$g'' - \lambda (V^* \circ V(g))'' - (V^* \circ V(h))'' = 0$$

donc,

$$\begin{cases} g'' + \lambda g + h = 0 \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g'(0) = 0 \end{cases}$$

d'où g est une solution de S.

De plus,

$$\langle g, \varphi_n \rangle = \lambda \langle V^* \circ V(g), \varphi_n \rangle + \langle V^* \circ V(h), \varphi_n \rangle. \quad (4.0.7)$$

En utilisant alors le lemme précédent 4.0.7, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle V^* \circ V(g), \varphi_n \rangle &= \frac{1}{(2n+1)^2} \langle g, \varphi_n \rangle \\ \text{et } \langle V^* \circ V(h), \varphi_n \rangle &= \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle \\ \langle g, \varphi_n \rangle &= \lambda \frac{1}{(2n+1)^2} \langle g, \varphi_n \rangle + \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle \\ \Rightarrow \left(1 - \lambda \frac{1}{(2n+1)^2}\right) \langle g, \varphi_n \rangle &= \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle, \end{aligned} \quad (4.0.8)$$

d'où la relation (4.0.4). Le théorème 3.0.3 et (4.0.7) nous donnent

$$\begin{aligned} g &= \lambda(V^* \circ V(g)) + (V^* \circ V(h)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n(g) + a_n(h)) \cos((2n+1)t) \end{aligned}$$

Or d'après (4.0.2) et (4.0.8), nous avons

$$\begin{aligned} \lambda a_n(g) + a_n(h) &= \lambda \frac{4}{\pi (2n+1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \cos((2n+1)t) dt + \frac{4}{\pi (2n+1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \cos((2n+1)t) dt \\ &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi} (2n+1)^2} \langle g, \varphi_n \rangle + \frac{2}{\sqrt{\pi} (2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle \\ &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi} (2n+1)^2} \langle g, \varphi_n \rangle + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) \langle g, \varphi_n \rangle \end{aligned}$$

Finalement

$$g = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos((2n+1)t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \langle g, \varphi_n \rangle,$$

d'où la preuve.

En précisant la nature de scalaire λ , nous obtenons une autre représentation de la solution en fonction de la fonction h et λ .

Théorème 4.0.5 Soient $h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si λ n'est pas égal au carré d'un entier impair alors la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

est normalement convergente, de plus c'est une solution de l'équation différentielle (4.0.1), pour tout $\varphi_n \in E$, définie par (4.0.2).

Preuve

En effet, Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz sur E muni de son produit scalaire, nous avons

$$\left| \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n(t) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \right| \|h\|_E.$$

et comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \right| \|h\|_E$ est convergente alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle_E \varphi_n$ converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Un raisonnement comme celui appliqué à g dans Le théorème 4.0.4, permet de dire que $h = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle h, \varphi_n \rangle_E \varphi_n$ avec convergence normale et uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Nous avons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$ ainsi que la série de ses dérivées terme à terme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-(2n+1)}{((2n+1)^2 - \lambda)} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \langle h, \varphi_n \rangle \sin((2n+1)x)$ et la série de ses dérivées secondes terme à terme

$$\begin{aligned} g''(x) &= - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{((2n+1)^2 - \lambda)} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \langle h, \varphi_n \rangle \cos((2n+1)x) \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{((2n+1)^2 - \lambda)} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n; \end{aligned}$$

sont des séries de fonctions de classe C^2 aussi normalement convergentes sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et nous avons

$$\begin{aligned} g''(x) + \lambda g(x) &= - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{((2n+1)^2 - \lambda)} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= -h \end{aligned}$$

alors : $g''(x) + \lambda g(x) + h = 0$ de plus $g'(0) = 0$ et $g(\frac{\pi}{2}) = 0$, ainsi g est une solution de S , d'où la preuve demandée.

Remarque 4.0.1 Si λ est égal au carré d'un entier impair c'est à dire il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = (2p+1)^2$, alors l'équation S n'admet aucune solution si $\langle h, \varphi_p \rangle \neq 0$ et admet une infinité de solutions si $\langle h, \varphi_p \rangle = 0$.

Preuve

Supposons que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = (2p + 1)^2$, alors si $\langle h, \varphi_p \rangle \neq 0$ on a d'après (4.0.4)

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{(2p + 1)^2}{(2p + 1)^2}\right) \langle g, \varphi_p \rangle &= \frac{1}{(2p + 1)^2} \langle h, \varphi_p \rangle \\ \Rightarrow 0 &= \frac{1}{(2p + 1)^2} \langle h, \varphi_p \rangle \end{aligned}$$

donc nécessairement $\langle h, \varphi_p \rangle = 0$. Par suite, si $\langle h, \varphi_p \rangle \neq 0$, la relation (4.0.4) n'est pas vérifiée donc l'équation S n'admet donc pas de solution.

De plus, si $\langle h, \varphi_p \rangle = 0$, alors dans ce cas $\langle g, \varphi_p \rangle$ peut prendre une valeur arbitraire et dans ce cas S possède une infinité de solutions par exemple la fonction $g(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq p}}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$ définit une solution de S , et par conséquent pour tout réel a , la fonction

$$g_a(x) = g(x) + a \cos(2p + 1)x$$

est aussi une solution de (S) comme elle vérifie la condition $g_a = \lambda V^* \circ V(g_a) + V^* \circ V(h)$ du théorème 4.0.4. L'équation (S) admet alors une infinité de solutions. En effet, on a

$$\begin{aligned} V(g_a)(x) &= \int_0^x g_a(t) dt \\ &= \int_0^x g(t) dt + \int_0^x a \cos(2p + 1)(t) dt \\ &= V(g)(x) + \frac{a}{(2p + 1)} \sin(2p + 1)x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V^* \circ V(g_a)(x) &= V^*V(g)(x) + \frac{a}{(2p + 1)} V^*(\sin(2p + 1))(x) \\ &= V^*V(g)(x) + \frac{a}{(2p + 1)} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(2p + 1)(t) dt \\ &= V^*V(g)(x) + \frac{a}{(2p + 1)^2} \cos(2p + 1)(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda V^* \circ V(g_a)(x) + V^* \circ V(h)(x) &= \lambda V^* \circ V(g)(x) + V^* \circ V(h)(x) \\ &\quad + \frac{\lambda a}{(2p + 1)^2} \cos(2p + 1)(x) \end{aligned}$$

en remplaçant la valeur de λ et $\lambda V^* \circ V(g)(x) + V^* \circ V(h)(x)$ par $g(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda V^* \circ V(g_a)(x) + V^* \circ V(h)(x) &= g(x) + a \cos(2p+1)x \\ &= g_a(x)\end{aligned}$$

CONCLUSION

Le sujet de ce mémoire rentre dans le cadre de la théorie des opérateurs, dont l'objectif principal est de réaliser une étude sur l'opérateur de Volterra.

Lors de préparation de ce manuscrit, nous avons essayé de traiter quelques propriétés de cette classe d'opérateurs de différentes façons :

Sur le plan topologique, nous avons calculé l'adjoint de l'opérateur de Volterra, la composition de cet opérateur et son adjoint et nous avons traité les propriétés de l'opérateur composé telle que : la symétrie, la positivité...

Sur le plan analytique, nous avons tenté à développer la composition de l'opérateur de Volterra et son adjoint en série trigonométrique via une suite orthonormée totale dont l'existence est montrée par le théorème de Weierstrass.

Sur le plan spectral, nous avons calculé le spectre ponctuel de l'opérateur composé de l'opérateur de Volterra et son adjoint, en reliant les vecteurs propres de l'opérateur aux solutions d'une équation différentielle.

Les résultats discutés dans ce mémoire mettent en jeu de l'algèbre euclidienne, des équations différentielles, de la topologie et des séries de fonctions, ce qui assure une bonne couverture du programme de mathématiques.

Bibliographie

- [1] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. Masson (1983).
- [2] Bryan P. Rynne and Martin, Linear Functional Analysis, Second Edition, 2008.
- [3] Christian MARGARIA, Espace de Hilbert et operateur, septembre 1986.
- [4] Francis Nier, Dragos Iftimie, Introduction à la Topologie, Licence de Mathématiques, Université de Rennes 1
- [5] A. KOLMOGOROV, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, juin 1994.
- [6] Kada ALLAB, Éléments d'Analyse, Fonction d'une variable réelle – 1er & 2e années d'université, éditeur ELLIPSES.