

**UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L' INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE**

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité :Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème :
Matrices opérationnelles de dérivation fractionnaire des ondelettes
de Jacobi d'indice (0,2)

Présenté par :
LEKHAL Zohra

Soutenu le 09/06/2014.

Les membres de jury

Mr	AMIR Abdessamad	Président	MAB	U. MOSTAGANEM.
MME	ABLAOUI Naima	Examineur	MAA	U. MOSTAGANEM.
Mr	BAHRI Sidi Mohamed	Encadreur	MCA	U. MOSTAGANEM.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à mes parents qui m'ont tant soutenu pour que ce travail soit à la hauteur.

À mes frères et mes soeurs pour toute leur compréhension et encouragements dans la réalisation de ce travail qu'ils trouvent l'expression de ma gratitude et ma grande affection.

Je dédie également à toutes mes copines qui m'ont comblé d'amour et d'encouragement et aux étudiants de ma promotion 2014 M.C.O.

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu, Dieu m'a donné la volonté, le courage, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie monsieur **BAHRI Sidi Mohamed**, qui, en tant que mon encadreur, était toujours à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Mes plus sincères remerciements à ... d'avoir bien voulu présider mon jury et ... d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens à remercier également mes professeurs et enseignants d'avoir été présent, de m'avoir énormément appris par la qualité de leurs savoir qu'ils m'ont prodigués.

Je voudrais remercier aussi les employeurs de l'université, mes ami(e)s et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	4
1.1 Dérivation Fractionnaire	4
1.1.1 Historique	4
1.1.2 Définition de l'espace C_μ et l'espace C_μ^m	5
1.1.3 Opérateur d'intégration fractionnaire	5
1.1.4 Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo	5
1.2 Polynômes de Jacobi	7
1.2.1 Equation de Jacobi	7
1.2.2 Diverses définitions d'un polynôme de Jacobi	8
1.2.3 propriétés	10
1.2.4 Dérivée d'un polynôme de Jacobi	12
1.3 Ondelettes de Jacobi d'indice $(0, 2)$	13
1.3.1 Historique ondelettes	13
1.3.2 Définitions	13
1.3.3 Condition pour qu'une fonction soit une ondelette-mère	14
1.3.4 Ondelettes de Jacobi d'indice (α, β)	16
1.3.5 Ondelettes de Jacobi d'indice $(0, 2)$	16
1.3.6 Fonction d'approximation dans la base des ondelettes de Jacobi d'indice (α, β)	18
1.3.7 Fonction d'approximation dans la base des ondelettes de Jacobi d'indice $(0, 2)$	19
2 Matrices opérationnelles de dérivation fractionnaire	20
2.1 Matrice de dérivation	20
2.2 Dérivée n ^{ieme}	22
2.2.1 Exemples d'application	22
2.2.2 1 ^{er} exemple :	23
2.3 Matrice de dérivation fractionnaire	25
2.3.1 Exemple pour le calcul de D^α avec α fractionnaire	27

3 Applications	30
3.1 Problèmes de BAGLEY-TORVIK avec valeurs aux limites	30
3.2 Exemples Numériques	32
3.2.1 Exemple 1	32
3.2.2 Exemple 2	33
Conclusion	34
Bibliographie	35

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, on introduit une nouvelle méthode numérique basée sur la matrice opérationnelle de dérivation fractionnaire des ondelettes de Jacobi.

Cette méthode est basée sur deux approches, la première utilise la matrice opérationnelle de dérivation D ([10]),

où

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = D\psi(t)$$

avec $\psi(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)]$, $n \in \mathbb{N}$ et les coefficients de ce vecteur forment une base orthogonales dans $L^2([0, 1])$ et la deuxième approche consiste à utiliser la matrice opérationnelle d'intégration P ([16]),

où

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau = P\psi(t)$$

Ces matrices permettent de réduire un problème de valeur aux limites en un système d'équations algébriques.

Afin d'accomplir au mieux cette étude, le mémoire est structuré en trois chapitres en plus de l'introduction et de la conclusion générale.

On commence dans le premier chapitre par des préliminaires pour rappeler quelques définitions et propriétés concernant la dérivation fractionnaire, les polynômes de Jacobi et la théorie des ondelettes .

Nous définirons la dérivée fractionnaire d'une fonction de classe C_μ , au sens de CAPUTO qui possède certaines propriétés : la dérivée d'une constante est nulle, la commutativité de la composée, la propriété de Semi-groupe.

Sachant que nous allons appliquer cet opérateur, essentiellement à des polynômes, nous n'avons développé que, l'exemple de la dérivée fractionnaire d'une fonction monôme .

Ensuite, on introduira quelques notions de base relatives aux polynômes de Jacobi avec une variété de définitions et de formules que nous utiliserons chacune pour simplifier un calcul précis.

Le dernier rappel concerne les ondelettes .

Après une introduction générale sur les ondelettes et quelques exemples illustrés par des graphes, on développera, en particulier, les ondelettes de Jacobi et comment approcher une fonction par des séries d'ondelettes de Jacobi .

Le deuxième chapitre concerne l'objet principal de notre travail qui est la construction d'une matrice opérationnelle de dérivation et plus généralement de dérivation fractionnaire des ondelettes de Jacobi d'indice $(0, 2)$, on introduira une procédure calculatoire pour les constituer.

Enfin, on consacre le dernier chapitre à la mise en pratique de cette procédure pour la résolution de quelques problèmes différentiels d'ordre entier et d'ordre fractionnaire, notamment du type BAGLEY-TORVIK .

Cette procédure est la réduction d'un système intégro-différentiel à un système linéaire d'équations algébriques .

Des exemples concrets seront traités pour montrer l'efficacité de cette méthode .

Préliminaires

1.1 Dérivation Fractionnaire

1.1.1 Historique

Les premières réflexions sur la dérivation fractionnaire remontent à la fin du 17^{ème} siècle . C'est en 1695 plus précisément que commença à germer l'idée de la dérivée d'ordre non entier. Dans les célèbres correspondances entre LEIBNITZ , L'HOSPITAL et BERNOULLI ,L'HOSPITAL posa la question "quelle serait la demi dérivée de la fonction "x" ?"

Réponse de Leibnitz : "c'est un paradoxe dont on tirera , un jour , d'utiles conséquences ". Presque deux siècles plus tard, apparurent les premières définitions de RIEMANN et LIOUVILLE puis de CAPUTO, mais avec des "ambigüités" qui furent bien plus tard levées par la théorie des Distributions .

Cette notion n'est pas un caprice de mathématicien "coupeur de cheveu en quatre" mais découle d'une motivation scientifique naturelle ; un exemple simple de mécanique des fluides montre comment l'intégrale d'ordre un-demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne (Loi de Fourier).

De même, un intérêt particulier pour la dérivée fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommages et des caoutchoucs et toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit : VISCOELASTIQUE .

DIFFERENTES APPROCHES DE LA DERIVATION FRACTIONNAIRE :

- La limite du taux d'accroissement d'une fonction se généralise sous la forme de la formule de GRUNWALD -LETNIKOV (analyse numérique)

- Formules de RIEMANN-LIOUVILLE et de CAPUTO

- Les transformations de FOURIER et de LAPLACE associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(i\omega)^\alpha$ avec α non entier.

Cependant, il n'y avait pas d'équivalences entre ces différentes définitions .

Heureusement, cette incohérence a été dissipée par la théorie des Distributions .

1.1.2 Définition de l'espace C_μ et l'espace C_μ^m

- Soit f une fonction réelle de la variable (strictement positive) x et μ un réel.
- On dit, selon [11], que f est de classe C_μ s'il existe un réel p , $(p)\mu$, et une fonction $f_1 \in C([0, +\infty[)$ tels que $f(x) = x^p f_1(x)$.
- De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $(f \in C_\mu^m)$ si $(f \in C_\mu)$.

1.1.3 Opérateur d'intégration fractionnaire

Définition :

Soit f une fonction de classe C_1^1 et α un réel strictement positif. L'intégrale d'ordre α de f est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathfrak{S}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

où \mathfrak{S}^α représente l'opérateur d'intégration d'ordre α .

Propriété :

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \mathfrak{S}^\alpha \mathfrak{S}^\beta f = \mathfrak{S}^\beta \mathfrak{S}^\alpha f = \mathfrak{S}^{\alpha+\beta} f$$

(preuves [3].)

1.1.4 Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo

Soit m un entier naturel et α un réel tel que $m-1 < \alpha \leq m$ et soit f une fonction de classe C_1^m .

La dérivée d'ordre α de f est définie pour tout x strictement positif par :

$$D^\alpha f(x) = \mathfrak{S}^{m-\alpha} f^{(m)}(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \quad (1.1.1)$$

Exemple

On considère la fonction monôme f définie par :

$$f(x) = x^\beta ; \beta \in \mathbb{N}$$

Sa dérivée d'ordre α est donnée par :

$$D^\alpha(x^\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \leq [\alpha] \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta > [\alpha] \end{cases} \quad (1.1.2)$$

où $[\alpha]$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à α

Abrégé de Solution :

$$\begin{aligned}
 D^\alpha f(x) &= \mathfrak{S}^{m-\alpha} D^m f(x) = \mathfrak{S}^{m-\alpha} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} x^{\beta-m} \right] \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} \mathfrak{S}^{m-\alpha} [x^{\beta-m}] \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} \times \frac{\Gamma(1+\beta-m)}{\Gamma(m-\alpha+\beta-m+1)} x^{m-\alpha+\beta+m} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}
 \end{aligned}$$

Théorème : (composition des opérateurs D^α et \mathfrak{S}^α)

Soit f une fonction de classe C_μ ($\mu \geq -1$) et m un entier naturel et α un réel tel que $m-1 < \alpha \leq m$; alors, pour tout x strictement positif, on a

$$D^\alpha \mathfrak{S}^\alpha f(x) = f(x) \quad (1.1.3)$$

$$\mathfrak{S}^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \quad (1.1.4)$$

Preuve :

1) On a d'après la définition précédente(1.1.3)

$$D^\alpha \mathfrak{S}^\alpha f = (\mathfrak{S}^{m-\alpha} D^m) \mathfrak{S}^\alpha f$$

or

$$D^m = \mathfrak{S}^{-m}$$

donc

$$\begin{aligned}
 D^\alpha \mathfrak{S}^\alpha f &= \mathfrak{S}^{m-\alpha} \mathfrak{S}^{-m} \mathfrak{S}^\alpha f \\
 &= \mathfrak{S}^{m-\alpha-m+\alpha} f
 \end{aligned}$$

d'après la propriété de semi-groupe(1.1.3)

$$\mathfrak{S}^\alpha \mathfrak{S}^\beta = \mathfrak{S}^{\alpha+\beta}$$

donc

$$D^\alpha \mathfrak{S}^\alpha f = \mathfrak{S}^0 f$$

Et, puisque

$$\mathfrak{S}^0 = I$$

alors,

$$D^\alpha \mathfrak{S}^\alpha f = f$$

2) D'après la définition (1.1.1), on a :

$$\mathfrak{S}^\alpha D^\alpha f(x) = \mathfrak{S}^\alpha \mathfrak{S}^{m-\alpha} D^m f(x)$$

$$= \mathfrak{S}^m D^m f(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x (x-t)^{m-1} f^{(m)}(t) dt$$

Après un développement de Taylor de f d'ordre m , on obtient

$$\mathfrak{S}^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

1.2 Polynômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi [7] sont des solutions de l'équation différentielle de Jacobi, Ce sont les polynômes orthogonaux les plus simples, leur intervalle d'orthogonalité est $[-1, 1]$ et leur fonction poids est $w^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

1.2.1 Equation de Jacobi

On appelle équation de Jacobi l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \quad (1.2.1)$$

1.2.2 Diverses définitions d'un polynôme de Jacobi

Polynômes de Jacobi shiftés

On définit le polynôme de Jacobi $J_m^{\alpha,\beta}$, pour tout entier naturel m sur l'intervalle $[-1, 1]$ et pouvant être général via la formule de récurrence suivante :

$$J_m^{\alpha,\beta}(t) = \frac{(\alpha+\beta+2n-1)[\alpha^2-\beta^2+t(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)]}{2n(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+n)} J_{m-1}^{\alpha,\beta}(t) \\ - \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\alpha+\beta+2n)}{n(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+n)} J_{m-2}^{\alpha,\beta}(t), m = 2, 3, \dots$$

où

$$J_0^{\alpha,\beta}(t) = 1$$

et

$$J_1^{\alpha,\beta}(t) = \frac{\alpha + \beta + 2}{2}t + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

En introduisant le changement de variable suivant $t = 2x - 1$, pour utiliser ses polynômes sur l'intervalle $x \in [0, 1]$, nous définissons les polynômes de Jacobi translétés (ou shiftés) notés $\widehat{J}_m^{\alpha,\beta}$:

$$\widehat{J}_m^{\alpha,\beta}(x) = J_m^{\alpha,\beta}(2x - 1)$$

et donc,

$$\widehat{J}_m^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\alpha+\beta+2n-1)[\alpha^2-\beta^2+t(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)]}{2n(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+n)} \widehat{J}_{m-1}^{\alpha,\beta}(2x - 1) \\ - \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\alpha+\beta+2n)}{n(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+n)} \widehat{J}_{m-2}^{\alpha,\beta}(2x - 1), m = 2, 3, \dots \\ \widehat{J}_0^{\alpha,\beta}(x) = 1$$

$$\widehat{J}_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha + \beta + 2}{2}(2x - 1) + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

la condition d'orthogonalité des polynôme de Jacobi shifté est donnée par

$$\int_0^1 \widehat{J}_m^{\alpha,\beta}(x) \widehat{J}_n^{\alpha,\beta}(x) w^{(\alpha,\beta)}(x) dx = h_n \delta_{nm}$$

où δ_{nm} représente le symbole de Kronecker avec

$$w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$$

et

$$h_n = \begin{cases} \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & n = m \end{cases}$$

et

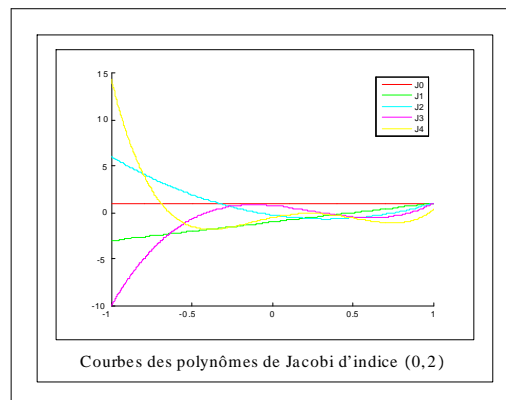
$$\left\langle \widehat{J}_m^{\alpha,\beta}(x), \widehat{J}_m^{\alpha,\beta}(x) \right\rangle_{w^{\alpha,\beta}} = 1$$

Définition 1.2.1 *Formule de récurrence*

$$J_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)(\alpha^2 - \beta^2) + x\Gamma(2n + \alpha + \beta + 3)}{\Gamma(2n + \alpha + \beta)2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)} J_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{2(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}{2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)} J_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (1.2.2)$$

Exemple 1.2.1 *Les 5 premiers polynômes de Jacobi d'indice(0,2)*

$$\begin{aligned} J_0^{(0,2)}(x) &= 1 \\ J_1^{(0,2)}(x) &= 2x - 1 \\ J_2^{(0,2)}(x) &= \frac{30}{8}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4} \\ J_3^{(0,2)}(x) &= 20x^3 - \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{6} \\ J_4^{(0,2)}(x) &= \frac{70}{48}x^4 - \frac{21}{2}x^3 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{19647}{12288} \end{aligned}$$



Définition 1.2.2 *La formule de RODRIGUES*

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{(n+\alpha)} (1+x)^{(n+\beta)} \right] \quad (1.2.3)$$

On l'utilisera, notamment, pour prouver l'orthogonalité .

Définition 1.2.3 *Expression analytique*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(n+\alpha)!(n+\beta)!}{k!(n-k+\alpha)!(k+\beta)!} (x-1)^k (x+1)^{n-k} \quad (1.2.4)$$

Cette définition est pratique pour la dérivation du vecteur ondelettes de Jacobi.

1.2.3 propriétés

On définit la famille des polynômes de Jacobi $J_n^{(\alpha, \beta)}$ d'indice (α, β) comme étant la famille des polynômes orthogonaux pour le poids $w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, J_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n J_n^{(\beta, \alpha)}(x)$$

En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(\beta+1)}$$

Orthogonalité :

Le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[x]$ est :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

En particulier pour les polynômes de Jacobi, on a :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \langle J_n^{\alpha, \beta}, J_m^{\alpha, \beta} \rangle = \int_{-1}^1 J_n^{\alpha, \beta}(t) J_m^{\alpha, \beta}(t) w^{\alpha, \beta}(t) dt$$

et la norme euclidienne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|J_n^{\alpha, \beta}\| = (\langle J_n^{\alpha, \beta}, J_n^{\alpha, \beta} \rangle_{w^{\alpha, \beta}})^{1/2}$$

Théorème 1.2.1 *Les polynômes de Jacobi forme une famille orthogonale sur $[-1, 1]$ tel que*

$$\int_{-1}^1 J_i^{\alpha, \beta}(t) J_j^{\alpha, \beta}(t) w^{\alpha, \beta}(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & i = j \end{cases}$$

Preuve · Si $i \neq j$ on a :

$$\langle J_i^{\alpha,\beta}, J_j^{\alpha,\beta} \rangle_{w^{\alpha,\beta}} = 0$$

En effet, d'après la définition du produit scalaire :

$$\langle J_i^{\alpha,\beta}, J_j^{\alpha,\beta} \rangle_{w^{\alpha,\beta}} = \int_{-1}^1 J_i^{\alpha,\beta}(x) J_j^{\alpha,\beta}(x) w^{\alpha,\beta}(x) dx$$

et d'après la relation (1.2.3) on a

$$\begin{aligned} \langle J_i^{\alpha,\beta}, J_j^{\alpha,\beta} \rangle_{w^{\alpha,\beta}} &= \frac{(-1)^i (-1)^j}{2^i i! 2^j j!} \int_{-1}^1 \left((1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^i}{dx^i} \left[(1-x)^{i+\alpha} (1+x)^{i+\beta} \right] \right) \\ &\quad \left((1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^j}{dx^j} \left[(1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} \right] \right) \left((1-x)^\alpha (1+x)^\beta \right) dx \\ \langle J_i^{\alpha,\beta}, J_j^{\alpha,\beta} \rangle_{w^{\alpha,\beta}} &= \frac{(-1)^i (-1)^j}{2^i i! 2^j j!} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (1-x)^{i+\alpha} (1+x)^{i+\beta} \right) \left(\frac{d^j}{dx^j} (1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} \right) \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \frac{(-1)^i (-1)^j}{2^i i! 2^j j!} \int_{-1}^1 \left(\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (1-x)^{i+\alpha} (1+x)^{i+\beta} \right) \left(\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} (1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} \right) dx \end{aligned}$$

Comme 1 et -1 sont des racines alors ce qui est entre crochets est nul , et ainsi

$$\langle J_i^{\alpha,\beta}, J_j^{\alpha,\beta} \rangle_{w^{\alpha,\beta}} = -\frac{(-1)^i (-1)^j}{2^i i! 2^j j!} \int_{-1}^1 \left(\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (1-x)^{i+\alpha} (1+x)^{i+\beta} \right) \left(\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} (1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} \right) dx$$

Si on reitère i fois cette intégration par parties, on obtient

$$\langle J_i^{\alpha,\beta}, J_j^{\alpha,\beta} \rangle_{w^{\alpha,\beta}} = (-1)^i \int_{-1}^1 (1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} \left(\frac{d^{j+i}}{dx^{j+i}} (1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} \right) dx$$

Or $i \neq j$, et supposons que $i > j$

Alors $\frac{d^{j+i}}{dx^{j+i}} (1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} = 0$ (dérivée $(i+j)$ ^{ème} d'un polynôme de degré $2j$ et $i+j > 2j$)

Donc

$$\langle J_i^{\alpha,\beta}, J_j^{\alpha,\beta} \rangle_{w^{\alpha,\beta}} = 0 \text{ pour } i \neq j$$

· Si $i = j$

$$\begin{aligned} \langle J_i^{\alpha,\beta}, J_j^{\alpha,\beta} \rangle_{w^{\alpha,\beta}} &= \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \left[J_j^{\alpha,\beta} \right]^2 dx \\ &= \frac{(-1)^j}{2^j j!} \int_{-1}^1 \frac{d^j}{dx^j} \left((1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} \right) J_j^{\alpha,\beta} dx \\ &= \frac{(-1)^{2j}}{2^j j!} \int_{-1}^1 (1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} \frac{d^j}{dx^j} J_j^{\alpha,\beta} dx \\ &= \frac{\Gamma(2j + \alpha + \beta + 1)}{2^{2j} j! \Gamma(j + \alpha + \beta + 1)} \int_{-1}^1 (1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} dx \end{aligned}$$

On utilise le changement de variable $(1+x) = 2y$, $dx = 2dy$

Alors $1-x = 1 - (2y-1) = 2-2y$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^{j+\alpha} (1+x)^{j+\beta} dx &= 2^{2j+\alpha+\beta+1} \int_0^1 (y)^{j+\beta+1-1} (1+y)^{j+\alpha+1-1} dy \\ &= 2^{2j+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(j+\beta+1) \Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(2j+\alpha+\beta+2)} \end{aligned}$$

donc

$$\|J_i^{\alpha,\beta}\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(i+\alpha+1) \Gamma(i+\beta+1)}{(2i+\alpha+\beta+1) i! \Gamma(i+\alpha+\beta+1)}$$

1.2.4 Dérivée d'un polynôme de Jacobi

En définit le polynôme de Jacobi $J_n^{\alpha,\beta}$, $n \in \mathbb{N}$ sur $[-1, 1]$.

Le dérivée de $J_n^{\alpha,\beta}$ est définie par

$$\frac{d}{dx} (J_n^{\alpha,\beta}(x)) = \frac{1}{2} (n+\alpha+\beta+1) J_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) \quad (1.2.5)$$

On particulier, pour tout entier n positif, on a les égalités suivantes, la dérivée d'un polynôme de Jacobi d'indice $(0, 2)$

$$J_n^{(0,2)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(j + \frac{3}{2} \right) \left[1 - (-1)^{n-j} \frac{(j+1)(j+2)}{(n+1)(n+2)} \right] J_j^{(0,2)}(x) \quad (1.2.6)$$

1.3 Ondelettes de Jacobi d'indice (0, 2)

1.3.1 Historique ondelettes

D'un point de vue ETYMOLOGIQUE, les ondelettes portent bien leur nom : petite onde (voir allures des courbes).

Jean Morlet est le "pionnier" des ondelettes.

Vers 1975, et au cours de sondages des couches géologiques pour détecter des nappes de pétrole, ce géophysicien a créé des petites fonctions mathématiques ayant des propriétés intéressantes pour ses objectifs.

Au cours des années 1980, les travaux de Morlet sur les signaux sismiques débouchèrent sur la transformée en ondelettes.

Les outils et méthodes classiques d'ANALYSE de FOURIER s'étant avérés inadaptés, il présenta (en 1983) un algorithme d'analyse et de synthèse par ondelettes, des signaux où se mêlent des phénomènes d'échelles très différentes : ce sont les bases de la transformée en ondelettes continue (en une dimension) reposant sur la représentation de carré intégrable du groupe affine de translations et dilatations $(ax + b)$ ([8]).

Dès 1985, c'est l'émergence de cette théorie dont on citera quelques étapes et les domaines d'utilisation :

-1985 découverte d'une base orthogonale d'ondelettes par YVES MEYER.

-1987 introduction de l'analyse multirésolution (décomposition en détails et approximations du signal) par S.Mallat.

-Théorie des filtres miroirs en quadratique.

-Mécanique des fluides (Turbulence, Fractales, E.D.P).

-1990 : extension de la théorie aux dimensions 2 puis N quelconque (opérateur de rotation).

-Traitement d'images par ondelettes et compressions (Mallat et Daubechies)

1.3.2 Définitions

Les ondelettes constituent une famille de fonctions générées par translation et par dilatation d'une seule fonction appelée "Ondelette-Mère". ([9] et [11])

Quand le paramètre de dilatation a et celui de translation b varient continûment, l'expression générale de ces ondelettes, générées par l'ondelette-mère Ψ est :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1.3.1)$$

où a et b sont des réels et $a \neq 0$

· Si $|a| < 1$ alors on dit que l'ondelette est contractée, c'est à dire qu'elle s'adapte aux discontinuités du signal (phénomènes de petites tailles) et donc aux hautes fréquences.

· Si $|a| > 1$ l'ondelette est dilatée, elle analyse les grandes échelles donc les petites fréquences.

Ceci étant pour le cas continu, on va maintenant passer au cas discret ([12]).

On discrétise les valeurs de a et b telles que : $a = a_0^{-j}$, $b = kb_0 a_0^{-j}$ avec $a_0 > 1$, $b_0 > 0$ et n et k des entiers naturels définis pour la discrétisation de l'intervalle considéré, nous obtenons la famille des ondelettes discrètes suivante

$$\psi_{jk}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \psi(a_0^j t - kb_0)$$

L'ensemble de ces ondelettes forme une base orthogonale de $L_2(\mathbb{R})$.

En particulier si $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$, alors les ψ_{jk} forment une base orthonormale ; c'est-à-dire $\langle \psi_{jk}, \psi_{l,n} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{kn}$ (δ représente le symbole de Kronecker).

1.3.3 Condition pour qu'une fonction soit une ondelette-mère

Il suffit qu'elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\Psi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\Psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|} < \infty.$$

Pour les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, il suffit simplement que $\hat{\Psi}$ soit de moyenne nulle, c'est-à-dire

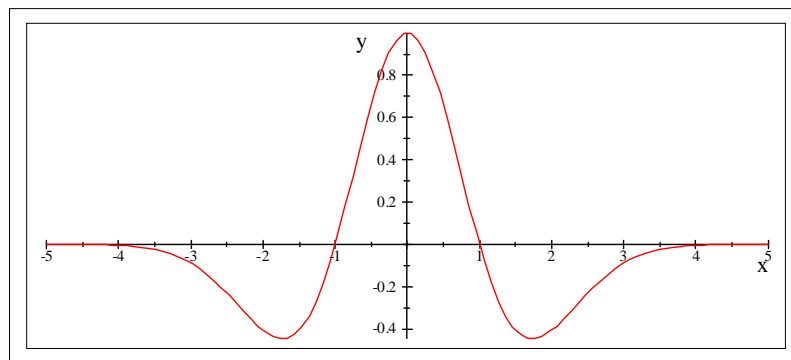
$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}(\xi) d\xi = 0.$$

On peut aussi imposer des conditions de régularité telles que la décroissance et la convergence vers 0, à l'infini.

Exemples d'ondelettes :

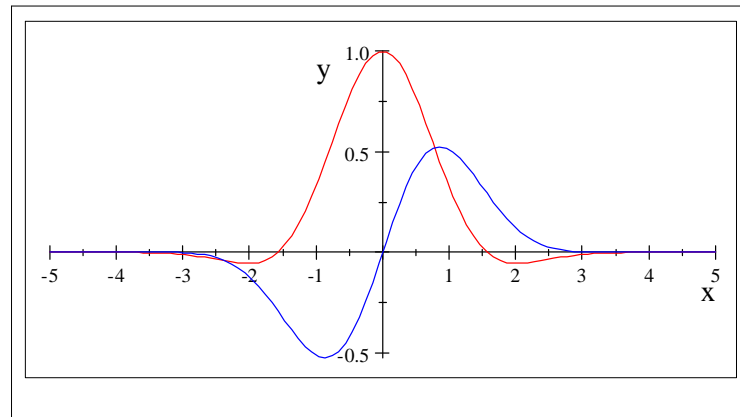
·Chapeau Mexicain

$$\Psi(x) = (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$$



·Ondelette de Morlet

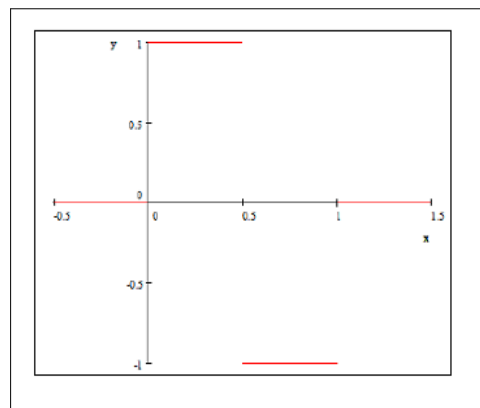
$$\Psi(x) = e^{i\omega_0 x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



la courbe en bleu représente la partie imaginaire et la rouge la partie réelle

·Ondelette de HAAR

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Remarque :

L'idée de base consiste à "jouer de l'accordéon" avec l'ondelette-mère pour lui faire prendre toutes les "tailles" (échelles) possibles à chaque instant t , et ensuite les combiner pour produire un "morceau" .

1.3.4 Ondelettes de Jacobi d'indice (α, β)

Elles sont générées à partir d'un polynôme de Jacobi shiftés $\widehat{J}_m^{\alpha, \beta}(x)$.

Les ondelettes de Jacobi sont définies sur $[0, 1]$ par

$$\psi_{n,m}^{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_m}} 2^{\frac{k+1}{2}} \widehat{J}_m^{\alpha, \beta}(2^{k+1}x - 2n + 1) & \text{si } \frac{n}{2^k} \leq x \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.3.2)$$

avec

$$h_n = \begin{cases} \frac{2^{(\alpha+\beta+1)} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & m = n \end{cases}$$

où n et k sont des entiers positifs tels que $n = 0, 1, \dots, 2^{k-1}$ représente le nombre de niveau de la décomposition.

et $m = 0, 1, \dots, M$ est le degré du polynôme de Jacobi.

Le coefficient $\frac{1}{\sqrt{h_m}}$ assure la normalisation.

L'ensemble des ondelettes de Jacobi forme une base orthonormale de $L^2([0, 1])_{w_n}$.

1.3.5 Ondelettes de Jacobi d'indice (0, 2)

Calculons la famille d'ondelette de Jacobi d'indice (0, 2)

D'après (1.3.2), on a

$$\psi_{n,m}^{0,2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_m}} 2^{\frac{k+1}{2}} \widehat{J}_m^{0,2}(2^{k+1}x - 2n + 1) & \text{si } \frac{n}{2^k} \leq x \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases}$$

Prenons $k = 1$ et $M = 2$

$m = 0, 1, \dots, M$ donc $m = 0$ ou 1 ou 2

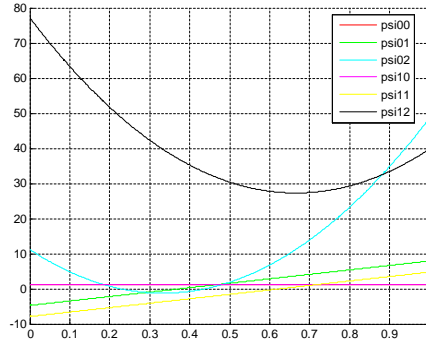
$n = 0, \dots, 2^{k-1}$ donc $n = 0$ ou 1

D'où les $\psi_{n,m}^{0,2}$ sont : $\psi_{0,0}^{0,2}, \psi_{0,1}^{0,2}, \psi_{0,2}^{0,2}, \psi_{1,0}^{0,2}, \psi_{1,1}^{0,2}, \psi_{1,2}^{0,2}$

Calculons les :

$$\begin{aligned} \psi_{0,0}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_0}} 2\widehat{J}_0^{0,2}(4x-1) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{0,0}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_1}} 2\widehat{J}_1^{0,2}(4x-1) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(8x-3) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_2}} 2\widehat{J}_2^{0,2}(4x-1) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}(60x^2 - 40x + 6) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_0}} 2\widehat{J}_0^{0,2}(4x-3) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_1}} 2\widehat{J}_1^{0,2}(4x-3) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(8x-5) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_2}} 2\widehat{J}_2^{0,2}(4x-3) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{0,2}(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}(60x^2 - 80x + \frac{165}{4}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases} \end{aligned}$$

Courbe des $\psi_{n,m}^{0,2}$ (composantes du vecteur ondelettes de base de Jacobi) :



Famille ondelettes de Jacobi d'indice
(0,2)

1.3.6 Fonction d'approximation dans la base des ondelettes de Jacobi d'indice (α, β)

Toute fonction f de $L^2 [0, 1]$, peut s'écrire en séries d'ondelettes de Jacobi comme suit ([12]) :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \psi_{nm}^{\alpha, \beta}(x) \quad (1.3.3)$$

Avec

$C_{nm} = \langle f, \psi_{nm}^{\alpha, \beta} \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans l'espace $L^2 ([0, 1])_{w_n}$.

Pour des raisons de calcul numérique, la série (1.3.3), doit être troncquée pour trouver la série finie suivante

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M C_{nm} \psi_{nm}^{\alpha, \beta}(x) = C^T \Psi(x) \quad (1.3.4)$$

où

$$C = [C_{0,0}, C_{0,1}, \dots, C_{0,M}, \dots, C_{2^k-1,0}, C_{2^k-1,1}, \dots, C_{2^k-1,M}]^T$$

et

$$\Psi(x) = [\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,M}, \dots, \psi_{2^k-1,0}, \psi_{2^k-1,1}, \dots, \psi_{2^k-1,M}]^T$$

est le vecteur d'ondelettes de Jacobi .

1.3.7 Fonction d'approximation dans la base des ondelettes de Jacobi d'indice (0, 2)

Soit $f(x) = x$, pour tout $x \in [0, 1]$ calculons les coefficients de f dans la base ondelette :

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M C_{nm} \psi_{nm}^{0,2}(x) = C^T \Psi(x).$$

Dans notre exemple on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^1 \sum_{m=0}^2 C_{nm} \psi_{nm}^{\alpha,\beta}(x) \quad (*)$$

Il nous reste donc à calculer les $C_{n,m}$

$$\begin{aligned} C_{0,0} &= \left\langle x, \psi_{0,0}^{0,2} \right\rangle = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{16} & \text{sur } [0, 1/2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ C_{0,1} &= \left\langle x, \psi_{0,1}^{0,2} \right\rangle = \begin{cases} \frac{-\sqrt{10}}{48} & \text{sur } [0, 1/2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ C_{0,2} &= \left\langle x, \psi_{0,2}^{0,2} \right\rangle = \begin{cases} \frac{\sqrt{14}}{96} & \text{sur } [0, 1/2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ C_{1,0} &= \left\langle x, \psi_{1,0}^{0,2} \right\rangle = \begin{cases} \frac{3\sqrt{6}}{16} & \text{sur } [0, 1/2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ C_{1,1} &= \left\langle x, \psi_{1,1}^{0,2} \right\rangle = \begin{cases} -\frac{11\sqrt{10}}{48} & \text{sur } [1/2, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ C_{1,2} &= \left\langle x, \psi_{1,2}^{0,2} \right\rangle = \begin{cases} \frac{595\sqrt{14}}{192} & \text{sur } [1/2, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

Et, en remplaçant les C_{nm} dans (*), on trouvera la décomposition voulue .

Matrices opérationnelles de dérivation fractionnaire

Dans ce chapitre on introduit une nouvelle méthode pour dériver la matrice opérationnelle d'ondelettes de Jacobi (dérivation et dérivation fractionnaire) ([11] et [10]).

2.1 Matrice de dérivation

Theorème

Soit $\Psi(t)$ le vecteur d'ondelettes de Jacobi d'indice $(0, 2)$ définie par la relation (1.3.3). La dérivée de $\Psi(t)$ peut s'exprimer par :

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = D\Psi(t) \quad (2.1.1)$$

où D est la matrice carrée $2^k(M+1)$ opérationnelle de dérivation définie par :

$$D = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & \\ & & 0 \\ 0 & & 0 & F \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

où F est la matrice $(M+1) \times (M+1)$, définie par

$$\frac{d}{dt}(\psi_{n,m}^{0,2}(t)) = \begin{cases} 2^{k-1} \sum_{\substack{s=1 \\ (m+s)\text{pair}}}^m \sqrt{2m+3} \sqrt{2s+1} \left[1 - (-1)^{m-s+1} \frac{s(s+1)}{(m+1)(m+2)} \right] \psi_{n,s-1}^{0,2}(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Preuve

On utilise le polynôme de Jacobi tronqué sur $[0, 1]$, qui définit le vecteur $\Psi(t)$ par la relation (1.3.2), est :

$$\psi_{n,m}^{0,2}(t) = \frac{1}{\sqrt{h_m}} 2^{\frac{k+1}{2}} \widehat{J_m^{0,2}}(2^k t - n) \chi_{[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]} \quad (2.1.4)$$

où $m = 0, 1, \dots, M$
 et $n = 0, 1, \dots, 2^{k-1}$
 telque

$$h_m = \frac{8}{2m + 3}$$

et $\chi_{[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]}$ est la fonction caractéristique définie par :

$$\chi_{[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{n}{2^k} \leq t \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dérivons par rapport à t :

$$\frac{d}{dt}(\psi_{n,m}^{0,2}(t)) = 2^{\frac{k+1}{2}} \frac{\sqrt{2m+3}}{2\sqrt{2}} 2^k \widehat{J_m^{0,2}}'(2^k t - n) \chi_{[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]} \quad (2.1.5)$$

La fonction $\chi_{[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]}$ étant nulle en dehors de l'intervalle $[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]$, son expression en ondelettes de Jacobi ne comporte que les éléments de la base de Jacobi dans $\Psi(t)$ qui sont non-nuls dans l'intervalle $[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]$, et qui sont :

$\psi_i(t)$ pour $i = n(M+1) + 1, n(M+1) + 2, \dots, (n+1)(M+1)$.

Ainsi selon (2.1.1), le développement en ondelettes de Jacobi s'écrit

$$\frac{d}{dt}(\psi_{n,m}^{\alpha,\beta}(t)) = \sum_{i=n(M+1)+1}^{(n+1)(M+1)} a_i \psi_i^{\alpha,\beta}(t)$$

Ceci implique que la matrice opérationnelle D est une matrice-bloc comme définie dans l'énoncé du théorème .

De plus, on a :

$$\frac{d}{dt} \widehat{J_0^{0,2}}(t) = 0$$

Si on remplace $\widehat{J}_m^{0,2}(2^k t - n)$ de la relation (2.1.5) par son expression donnée par la relation (1.2.6) du dérivée d'un polynôme de Jacobi, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi_{n,m}^{0,2}(t)) &= 2^{\frac{k+1}{2}} \frac{\sqrt{2m+3}}{2\sqrt{2}} 2^k \sum_{\substack{j=0 \\ (j+m)\text{impair}}}^{m-1} \left(j + \frac{3}{2}\right) \left[1 - (-1)^{m-j} \frac{(j+1)(j+2)}{(m+1)(m+2)}\right] \widehat{J}_j^{0,2}(2^k t - n) \chi_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]} \\ \frac{d}{dt}(\psi_{n,m}^{0,2}(t)) &= 2^{\frac{k+1}{2}} \frac{\sqrt{2m+3}}{2\sqrt{2}} 2^{k-1} \sum_{\substack{j=0 \\ (j+m)\text{impair}}}^{m-1} (\sqrt{2j+3})^2 \left[1 - (-1)^{m-j} \frac{(j+1)(j+2)}{(m+1)(m+2)}\right] \widehat{J}_j^{0,2}(2^k t - n) \chi_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]} \\ \frac{d}{dt}(\psi_{n,m}^{0,2}(t)) &= \sqrt{2m+3} 2^{k-1} \sum_{\substack{j=0 \\ (j+m)\text{impair}}}^{m-1} \frac{(\sqrt{2j+3})^2}{2\sqrt{2}} 2^{\frac{k+1}{2}} \left[1 - (-1)^{m-j} \frac{(j+1)(j+2)}{(m+1)(m+2)}\right] \widehat{J}_j^{0,2}(2^k t - n) \chi_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]} \\ \frac{d}{dt}(\psi_{n,m}^{0,2}(t)) &= 2^{k-1} \sum_{\substack{j=0 \\ (j+m)\text{impair}}}^{m-1} \sqrt{2m+3} \sqrt{2j+3} \left[1 - (-1)^{m-j} \frac{(j+1)(j+2)}{(m+1)(m+2)}\right] \psi_{n,j}^{0,2}(t) \\ \frac{d}{dt}(\psi_{n,m}^{0,2}(t)) &= 2^{k-1} \sum_{\substack{s=1 \\ (s+m)\text{pair}}}^m \sqrt{2m+3} \sqrt{2s+1} \left[1 - (-1)^{m-s+1} \frac{s(s+1)}{(m+1)(m+2)}\right] \psi_{n,s-1}^{0,2}(t) \end{aligned}$$

2.2 Dérivée n^{ième}

corollaire

Pour tout entier naturel n , la dérivée n^{ième} du vecteur ondelettes de Jacobi s'écrit

$$\frac{d^n \Psi(t)}{dt} = D^n \Psi(t) \quad (2.2.1)$$

où D^n est la puissance n^{ième} de la matrice D

2.2.1 Exemples d'application

Pour nous familiariser avec la matrice D définie par (2.1.1), traitons quelques exemples numériques .

On rappelle que

$$D = \begin{bmatrix} F & 0 & & 0 \\ 0 & F & & \\ & & F & \\ 0 & & & F & 0 \\ & & & 0 & F \end{bmatrix}$$

où F est une matrice $(M+1) \times (M+1)$

$$\frac{d}{dt}(\psi_{n,m}^{0,2}(t)) = \begin{cases} 2^{k-1} \sum_{\substack{s=1 \\ (m+s)\text{pair}}}^m \sqrt{2m+3}\sqrt{2s+1} \left[1 - (-1)^{m-s+1} \frac{s(s+1)}{(m+1)(m+2)} \right] \psi_{n,s-1}^{0,2}(t) \\ 0 \end{cases} \quad \text{sinon} \quad (2.2.2)$$

2.2.2 1^{er} exemple :

Prenons $M = 2$ et $k = 0$

D sera donc une matrice 3×3 ; $s = 1, \dots, m$; $m = 1, \dots, 2$

Calculons ses éléments :

pour $n = 1, s = 2, k = 0, m = 2$

$$\frac{d}{dt}(\psi_{1,2}(t)) = \frac{3}{4}\sqrt{35}\psi_{1,1}(t)$$

pour $s = 1, m = 1$

$$\frac{d}{dt}(\psi_{1,1}(t)) = \frac{2}{3}\sqrt{15}\psi_{1,0}(t)$$

Les autres éléments sont tous nuls .

D'où

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}\sqrt{35} & 0 \end{bmatrix}$$

2^{eme} exemple :

Pour $k = 1$ et $M = 1$, D est une matrice carrée d'ordre $2^k(M+1) = 2(2) = 4$

Le bloc F est une matrice 2×2

et $s = 1, m = 1$

$$\frac{d}{dt}(\psi_{2,1}(t)) = \frac{4}{3}\sqrt{15}\psi_{1,0}(t)$$

la matrice F est

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4\sqrt{15}}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

et par conséquent

$$D = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4\sqrt{15}}{3} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4\sqrt{15}}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

3^{eme} exemple :

$k = 2$ et $M = 2$

D est une matrice carrée d'ordre $2^2(2 + 1) = 12$;

F est 3×3 :

$n = 2$, $m = 1$ ou 2 , $s = 1$ ou 2 mais $(m + s)$ pair

on calcule donc :

pour $n = 2, m = 1, s = 1$

$$\frac{d}{dt}(\psi_{2,1}(t)) = \frac{8}{3}\sqrt{15}\psi_{2,0}(t)$$

et les autres sont nuls .

pour $n = 2, m = 2, s = 2$

$$\frac{d}{dt}(\psi_{2,2}(t)) = 3\sqrt{35}\psi_{2,1}(t)$$

d'où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{3}\sqrt{15} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{35} & 0 \end{pmatrix}$$

Et par conséquent :

$$D = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{8\sqrt{15}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{35} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{8\sqrt{15}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{35} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{8\sqrt{15}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{35} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{8\sqrt{15}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{35} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{8\sqrt{15}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{35} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

En appliquant l'opérateur D^α , on a :

$$D^\alpha \Psi_p(t) = 2^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{\frac{2m+3}{8}} \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{m-i} \binom{i}{j} \binom{m-i}{l} \quad (2.3.5)$$

$$\times \left[\frac{m!(m+2)!2^{k(j+l)} (-1)^{m-j-l} (n+1)^{i-j} (n-1)^{m-i-l}}{i!((m-i)!)^2 (i+2)!} \right] D^\alpha t^{(j+l)} \chi_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]}$$

Posons :

$$f_{j,l}(t) = D^\alpha \left[t^{(j+l)} \chi_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]} \right] \quad \text{pour } j = 0, \dots, i; l = 0, \dots, m-i$$

On a alors :

$$D^\alpha \Psi_p(t) = 2^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{\frac{2m+3}{8}} \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{m-i} \binom{i}{j} \binom{m-i}{l} \quad (2.3.6)$$

$$\times \left[\frac{m!(m+2)!2^{k(j+l)} (-1)^{m-j-l} (n+1)^{i-j} (n-1)^{m-i-l}}{i!((m-i)!)^2 (i+2)!} \right] f_{j,l}(t)$$

Par application de la dérivée D^α selon (1.1.2), on a :

$$f_{j,l}(t) = D^\alpha \left[t^{(j+l)} \chi_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]} \right] = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_{\frac{n}{2^k}}^t \left[\frac{\frac{d^n t^{(j+l)}}{dt^n}}{(t-x)^{\alpha+1-N}} \right] dx \chi_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} \left[\frac{\frac{d^n t^{(j+l)}}{dt^n}}{(t-x)^{\alpha+1-N}} \right] dx \chi_{\left[\frac{n}{2^k}, 1\right]} \quad (2.3.7)$$

$$\text{pour } j = 0, \dots, i, l = 0, \dots, m-i$$

Approchons les fonctions $f_{j,l}(t)_{\substack{j=0,\dots,i \\ l=0,\dots,m-i}}$ par des ondelettes de Jacobi :

$$f_{j,l}(t) = \sum_{q=1}^{2^k(M+1)} b_{jlq} \psi_q \quad \text{où } b_{jlq} = \langle f_{j,l}(t), \psi_q(t) \rangle \quad (2.3.8)$$

En remplaçant $f_{j,l}(t)$ par cette expression dans la relation (2.3.6) précédente et en permutant l'ordre des series, on a :

$$D^\alpha \psi_p(t) = 2^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{\frac{2m+3}{8}} \frac{1}{2^m} \sum_{q=1}^{2^k(M+1)} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{m-i} b_{jlq} \binom{i}{j} \binom{m-i}{l} \quad (2.3.9)$$

$$\times \left[\frac{m!(m+2)!2^{k(j+l)} (-1)^{m-j-l} (n+1)^{i-j} (n-1)^{m-i-l}}{i!((m-i)!)^2 (i+2)!} \right] \psi_q(t)$$

2.3.1 Exemple pour le calcul de D^α avec α fractionnaire

Rappelons que :

D^α est une matrice $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$

et son $(p, q)^{ième}$ élément est donné par (2.3.2).

Prenons $k = 0$ et $M = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ d'où $[\alpha] = 1$

$D^{\frac{1}{2}}$ est une matrice 2×2

et son $(p, q)^{ième}$ élément est :

$$(D^\alpha)_{pq} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2m+3}{8}} \frac{\sqrt{2}}{2^m} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{m-i} b_{jil} \binom{i}{j} \binom{m-i}{l} \frac{m!(m+2)!2^{k(j+l)}(-1)^{m-j-l}(n+1)^{i-j}(n-1)^{m-i-l}}{i!((m-i)!)^2(i+2)!} & \text{si } p = 2 \\ 0 & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Il est clair que, dans ce cas, $p = 1$ ou 2 ; et on sait que $m = 0$ ou 1

Les éléments de $D^{\frac{1}{2}}$ sont : $(D^{\frac{1}{2}})_{1,1}$, $(D^{\frac{1}{2}})_{1,2}$, $(D^{\frac{1}{2}})_{2,1}$, $(D^{\frac{1}{2}})_{2,2}$.

Calculons -les :

Si $p = 1$ alors $D_{pq} = 0$ donc $D_{1,1}^{\frac{1}{2}}$ et $D_{1,2}^{\frac{1}{2}}$ sont nuls

Si $p = 2$ et sachant que $p = nM + (m+1)$, alors on aura : $2 = nM + (m+1)$

d'où $2 = n + (m+1)$

c'est-à-dire $n + m = 1$

or $n = 0, \dots, 2^{k-1}$ c'est-à-dire dans ce cas $n = 0$

donc $m = 1$

$$\begin{aligned} D_{2,1}^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{1-i} b_{jil} \binom{i}{j} \binom{1-i}{l} \frac{(-1)^{1-j-l} 1! (1+2)! 2^0 (0+1)^{i-j} (0-1)^{1-i-l}}{i!((1-i)!)^2(i+2)!} \right] \\ D_{2,1}^{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{5}}{4} \left[b_{001} \binom{0}{0} \binom{1}{0} \frac{(-1)^1 3!}{2!} + b_{011} \binom{0}{0} \binom{1}{1} \frac{3!}{2!} + b_{001} \binom{1}{0} \binom{0}{0} \frac{(-1)^1 3!}{3!} \right. \\ &\quad \left. + b_{101} \binom{1}{1} \binom{0}{0} \frac{1!3!}{3!} \right] \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} [3b_{011} + b_{101}] \end{aligned}$$

Il nous reste à calculer b_{011} et b_{101} qui sont les q^{emes} coefficients de l'approximation, en ondelettes de Jacobi, des fonctions

$$f_{j,l}(t) = D^{\frac{1}{2}}(t^{(j+l)})x_{[0,1]} \quad \text{pour } j = 0 \text{ ou } 1 \text{ et } l = 0 \text{ ou } 1$$

c'est -à-dire

$$b_{011} = \langle f_{0,1}(t), \psi_1^{0,2}(t) \rangle_{w^{0,2}} = \langle D^{\frac{1}{2}}t, \psi_1^{0,2}(t) \rangle_{w^{0,2}} = \left\langle \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}, \psi_1^{0,2}(t) \right\rangle_{w^{0,2}}$$

et

$$b_{101} = \langle f_{1,0}(t), \psi_1^{0,2}(t) \rangle_{w^{0,2}} = \langle D^{\frac{1}{2}}t, \psi_1^{0,2}(t) \rangle_{w^{0,2}} = \left\langle \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}, \psi_1^{0,2}(t) \right\rangle_{w^{0,2}}$$

Calculons $\psi_1^{0,2}(t)$

$$\begin{aligned} \psi_1^{0,2}(t) &= \psi_1^{0,2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{5}}} \sqrt{2} J_1^{0,2}(t) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1) \end{aligned}$$

Et ainsi b_{011} et b_{101}

$$\begin{aligned} b_{011} &= \left\langle \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1) \right\rangle_{w^{0,2}} = \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1) (1+t)^2 dt = \frac{40\sqrt{5}}{63\sqrt{\pi}} \\ b_{101} &= \left\langle \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1) \right\rangle_{w^{0,2}} = \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1) (1+t)^2 dt = \frac{40\sqrt{5}}{63\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} D_{2,1}^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{5} \left[\frac{30\sqrt{5}}{63\sqrt{\pi}} + \frac{10\sqrt{5}}{63\sqrt{\pi}} \right] \\ D_{2,1}^{\frac{1}{2}} &= \frac{200}{63\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2,2}^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{1-i} b_{jil2} \binom{i}{j} \binom{1-i}{l} \frac{(-1)^{1-j-l} 1! (1+2)! 0^0 (0+1)^{i-j} (0-1)^{1-i-l}}{i! ((1-i)!)^2 (i+2)!} \right] \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} \left[b_{002} \binom{0}{0} \binom{1}{0} \frac{(-1) 3! (-1)^1}{2!} + b_{012} \binom{0}{0} \binom{1}{1} \frac{3!}{2!} \right. \\ &\quad \left. + b_{102} \binom{1}{0} \binom{0}{0} \frac{(-1) 3!}{3!} + b_{102} \binom{1}{1} \binom{0}{0} \frac{1! (3)!}{3!} \right] \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} [3b_{012} + b_{102}] \end{aligned}$$

Calculons b_{012} et b_{102} : $b_{012} = \langle f_{0,1}(t), \psi_2^{0,2}(t) \rangle = \langle D^{\frac{1}{2}}t, \psi_2^{0,2}(t) \rangle = \langle \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}, \psi_2^{0,2}(t) \rangle$

Il reste à calculer $\psi_2^{0,2}(t)$

On a $p = 2$ donc $2 = (n)(1) + (m + 1)$ d'où $n + m = 1$ or $n = 0$ donc $m = 1$

Donc

$$\psi_2^{0,2}(t) = \psi_1^{0,2}(t) = \psi_{0,1}^{0,2}(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1)$$

Et ainsi b_{012} et b_{102}

$$b_{012} = \left\langle \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1) \right\rangle_{w^{0,2}} = \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1) (1 + t)^2 dt = \frac{40\sqrt{5}}{63\sqrt{\pi}}$$

$$b_{102} = \left\langle \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1) \right\rangle_{w^{0,2}} = \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{5}}{2} (2t - 1) (1 + t)^2 dt = \frac{40\sqrt{5}}{63\sqrt{\pi}}$$

donc

$$D_{2,2}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \left[\frac{30\sqrt{5}}{63\sqrt{\pi}} + \frac{10\sqrt{5}}{63\sqrt{\pi}} \right]$$

$$D_{2,2}^{\frac{1}{2}} = \frac{200}{63\sqrt{\pi}}$$

Enfin

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{200}{63\sqrt{\pi}} & \frac{200}{63\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}$$

Applications

Dans le but de montrer la grande importance de la matrice opérationnelle de dérivation, nous allons l'appliquer à résoudre des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire avec conditions aux limites .

Ces problèmes sont choisis à cause de la forme bornée de leurs solutions .

On comparera, ensuite, les résultats obtenus par cette procédure avec les solutions analytiques .

3.1 Problèmes de BAGLEY-TORVIK avec valeurs aux limites

La forme générale d'un tel problème[1] du second ordre est :

$$\begin{cases} A_0 D^2 y(t) + A_1 D^{\frac{3}{2}} y(t) + A_2 y(t) = f(t) & t \in [0, T] \\ y(0) = \alpha_0 \quad \text{et} \quad y(T) = \alpha_1 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où $(A_0 \neq 0)$, A_1, A_2, α_0 et α_1 sont des constantes $y \in L_1 [0, T]$. Rappelons que le symbole $D^{\frac{3}{2}}$ définit l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de CAPUTO.

L'existence et l'unicité de la solution exacte ont été prouvées par PODLUBNY([3]).

Dans ce chapitre, nous allons utiliser une méthode de résolution basée sur les développements en base d'ondelettes de Jacobi d'indice $(0, 2)$ et sur les matrices opérationnelles de dérivation et de dérivation fractionnaire, établies dans le chapitre 2, pour réduire le système différentiel (3.1.1) à un système linéaire d'équations algébriques .

On approche les fonctions $y(t)$ et $f(t)$ par des développements en base d'ondelettes de Jacobi $(0, 2)$

$$\begin{cases} y(t) = C^T \Psi(t) \\ f(t) = G^T \Psi(t) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

où

$$C = \left[c_{0,0}, c_{0,1}, \dots, c_{0,M}; \dots, c_{2,M}; c_{1,0}, \dots, c_{(2^k-1),0}, c_{(2^k-1),1}, \dots, c_{(2^k-1),M} \right]^T$$

est le vecteur inconnu G un vecteur donné par la décomposition de f en base d'ondelettes de Jacobi d'indice $(0, 2)$.

En vertu des résultats précédents (théorèmes (2.1.1) et (2.1.2) + corollaire (2.2.1)), on a :

$$\begin{cases} D^2 y(x) = C^T D^{(2)} y(x) \\ D^{\frac{3}{2}} y(x) = C^T D^{(\frac{3}{2})} \Psi(x) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

On remplace dans la 1^{ère} équation du problème initial

$$\left[A_0 C^T D^{(2)} + A_1 C^T D^{(\frac{3}{2})} + A_2 C^T \right] \Psi(x) = G^T \Psi(x) \quad (3.1.4)$$

Posons

$$R_m(x) = \left[A_0 C^T D^{(2)} + A_1 C^T D^{(\frac{3}{2})} + A_2 C^T \right] \Psi(x)$$

On génère $(2^k(M+1) - 2)$ équations linéaires, et en appliquant

$$\langle R_{2^k(M+1)}(x), \psi_j(x) = 0 \rangle \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, 2^k(M+1) - 2 \quad (3.1.5)$$

et, en considérant les conditions aux limites (données dans l'énoncé initial du problème), on a :

$$\begin{cases} y(0) = C^T \Psi(0) = \alpha_0 \\ y(1) = C^T \Psi(1) = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{on a pris } T = 1. \quad (3.1.6)$$

et ainsi on a généré $2^k(M+1)$ équations linéaires dont les inconnues sont les composantes du vecteur C .

En utilisant la relation (2.3.9) donnant $D^\alpha \Psi_p(t)$ (dans la preuve du théorème établi au chapitre précédent) pour le vecteur C , on obtiendra une approximation de la solution $y(x)$.

3.2 Exemples Numériques

3.2.1 Exemple 1

On se propose de résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} Dy(t) + \sqrt{\pi}D^{\frac{1}{2}}y(t) + y(t) = 1 + 2\sqrt{t} + t \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Approchons la solution comme suit :

$$y(t) = C^T \Psi(t)$$

Déterminons, d'abord, $\Psi(t)$, pour cela, prenons $k = 0$ et $M = 1$ d'où $n = 0, \dots, 2^{k-1}$ c'est-à-dire dans notre cas $n = 0$ et $m = 0, \dots, M$ c'est-à-dire dans notre cas $m = 0$ ou 1 donc

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}(t) \\ \psi_{0,1}(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$\psi_{0,0}(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\psi_{0,1}(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{2}(2t - 1) & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La 1^{ère} équation du système(*) devient

$$C^T D \Psi(t) + \sqrt{\pi} C^T D^{\frac{1}{2}} \Psi(t) = 1 + 2\sqrt{t} + t$$

Le polynôme de Jacobi approprié à ce cas, est $J_2^{(0,2)}(x) = \frac{30}{8}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$.
En utilisant les conditions aux limites, on arrive au système, suivant :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}C_{0,0} + \frac{\sqrt{5}}{2}C_{0,1} = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}C_{0,0} - \frac{\sqrt{5}}{2}C_{0,1} = 0 \end{cases}$$

La solution est $C^T = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right]$.

Et ainsi la solution du problème (*) est

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(2t - 1) \end{bmatrix} = t$$

Remarque : on peut facilement vérifier que c'est la solution exacte, en utilisant les matrices opérationnelles de dérivation, calculées plus tôt et qu'on rappelle ici

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{200}{63\sqrt{\pi}} & \frac{200}{63\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}$$

3.2.2 Exemple 2

Soit le problème

$$\begin{cases} D^2 y(t) + D^{\frac{3}{2}} y(t) + y(t) = t^2 + 4\sqrt{\frac{t}{\pi}} + 2 \\ y(0) = 0 \\ y(5) = 25 \end{cases} \quad (**)$$

La solution exacte de ce problème est $y(t) = t^2$

En effet, les conditions initiales sont trivialement vérifiées.

D'autre part

$$y''(t) = 2$$

et

$$D^{\frac{3}{2}} y(t) = D^{\frac{3}{2}} t^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2+1-\frac{3}{2})} t^{2-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}}$$

On sait que

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2! = 2$$

et

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Donc

$$D^{\frac{3}{2}} y(t) = 4\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Et par conséquent la 1^{ère} équation du problème (**) est vérifiée .

On peut, aussi résoudre ce problème en appliquant la méthode décrite dans notre étude précédente(chapitre3).

En prenant $M = 2$ et $k = 1$, On obtiendra $2^k (M + 1) = 2^1 (2 + 1) = 6$ équations linéaires dont l'inconnue est

$C^T = [C_{0,0}; C_{0,1}; C_{0,2}; C_{1,0}; C_{1,1}; C_{1,2}]$, en procédant d'une manière analogue à un exemple précédents.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons étudié une méthode numérique pour la réduction des systèmes différentiels fractionnaires à des systèmes linéaires d'équations algébriques, pour étudier l'efficacité de cette méthode de résolution basée sur la matrice opérationnelle de dérivation fractionnaire des ondelettes de Jacobi d'indice $(0, 2)$.

Bibliographie

- [1] Al Mdallal et Al (BAGLEY-TORVIK Equation).2010 and (colocation shooting method for solving fractional boundary value problems)
- [2] Bahri.S.M (U.A.B Mostaganem) Cours (conférences) sur les ondelettes . 2013 .
- [3] Dahmani Z (Cours de calcul FRACTIONNAIRE Master I et II MCO 2012-2013) Université AB Mostaganem.
- [4] R-Hajmohammedi(Optimal controle of nonlinéar systems via the sine-cosine wavelets).2011
- [5] S.Mallat (multi-résolution représentations and wavelets PHD theisis ;school of engineering and applied science. University of pensylvania 1989)
- [6] Stéphane Mallat (Une Exploration des signaux en ondelettes) PARIS 2000 .
- [7] S.Mallat (Polynômes de legendre et ondelettes).Paris 2000
- [8] J.Martinez -P.Gajan-A.Strzelecki . (Analyse temps-fréquence .Ondelettes) 1994.
- [9] Y.Meyer (ondelettes et opérateurs vol.I.Hermanu 1989).
- [10] F.Mohammadi ,M.M Hosseini Yazd University Iran (A new legndre wavelet opratio-nal matrix of derivative and its application in solving the singular ordinary differntial equations).2011
- [11] F.Mohammadi or M.M.Hosseini and Syed Tauseef Mohyu.Din .(A new operational matrix for legendre wavelets and its applications for solving fractional order boundary values problems).2011
- [12] Mujeeb Ur Rehman , Rahmat Alikhan(The legendre wavelet methode for Solving frac-tional differential equations)2011.
- [13] R.Murrenzi : (ondelettes multidimonsionnelles et applications à l'analyse d'images. Uni-versité de louvain 1990).
- [14] Nagma Irfan and S.Kapoor(Quick Glance on different Wavelets and their opérational matrix properties)2011
- [15] Razzaghi and Yousefi (Legendre wavelets operational matrix of integration .Int.journal.syst.science).
- [16] M.RAZZAGHI,S.YOUSEFI, The Legendre wavelet opérational matrix of integra-tion_ International Jornal of Systeme Sience 32, 2001,495-5002.

- [17] CONOU Jean Louis(Méthodes spectrales et polynôme de Jacobi d'indice $(0,2)$).
- [18] Polynômes orthogonaux et polynômes Macadonald(université de QUéBec à Montréal)
- [19] MEGUENNI. A, Matrice opérationnelle de dérivation fractionnaire des ondelettes de Legendre(Mémoire de Master en Mathématiques) Juin 2013.