Thèse

Présentée à

L'université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis

Par

Hammou Houari

Pour obtenir le diplôme de
doctorat en Mathématiques.

PROBLEME AUX LIMITES SINGULIER A COEFFICIENTS OPERATEURS

Soutenue : le 29/10/2013

Devant le jury :

Président	**Benharrat BELAIDI**	**Professeur, Université de Mostaganem**
Examinateurs	**Rabah LABBAS**	**Professeur, Université du Havre**
	Aissa AIBECHE	**Professeur, Université de Sétif**
	Mustapha CHEGGAG	**M.C.A, ENP d'Oran**
Directeurs de thèse	**Stéphane MAINGOT**	**Professeur, Université du Havre**
	Ahmed MEDEGHRI	**Professeur, Université de Mostaganem**

Table des matières

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire de Mathématiques pures et appliquées à l'université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis.

J'ai le plaisir de remercier infiniment le Professeur Belaidi Benharrat qui a bien voulu présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement le Professeur Rabah Labbas de m'avoir inspiré ce thème de recherche, pour ses conseils précieux et pour avoir accepté d'être membre de ce jury.

Le Professeur Aissa Aibeche et Monsieur Mustapha Cheggag, maitre de conférences de classe A, ont accepté de faire partie du jury de cette thèse ; je leur exprime ma gratitude et mes remerciements.

J'exprime ma profonde reconnaissance à mes directeurs de thèse, les Professeurs Stéphane Maingot et Ahmed Medeghri pour leurs aides précieuses, leurs encouragements permanents et leurs conseils judicieux.

Je remercie également l'ensemble de mes collègues et particulièrement les membres de l'équipe de recherche Equations Différentielles Abstraites (EDA).

Je voudrai aussi exprimer ma grande affection à toute ma famille, en particulier, mes parents, mes soeurs et mon frère, pour leur présence continue et leur soutien indéfectible.

Enfin, je remercie infiniment toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et qui m'ont soutenu.

Introduction

Le but de ce travail est l'étude d'une équation différentielle abstraite de type elliptique de second ordre de la forme :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in [0,1[, \tag{1}$$

avec les conditions aux limites non locales

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}, \end{array} \right. \tag{2}$$

où A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs $D(A), D(B)$ et $D(H)$ dans X (un espace de Banach complexe) ,$u_0, u_{1,0} \in X$ et f est une fonction à valeurs dans X .

La motivation de cette étude réside dans le fait que de larges classes de problèmes régis par des équations aux dérivées partielles peuvent se mettre sous la forme (1)-(2), avec un bon choix de X, A,B et H.

Après avoir défini précisément les types de solutions cherchées pour le problème (1)-(2), on s'intéressera à l'existence et l'unicité de ces solutions dans deux cadres fonctionnels distincts :

– le cadre höldérien : $f \in C^{\theta}([0,1]; X)$ avec $0 < \theta < 1$,
– le cadre L^p : $f \in L^p(0,1; X)$ où $1 < p < \infty$.

Dans les deux cadres, la méthode consiste à construire une formule explicite de représentation de la solution sous des hypothèses adéquates sur les opérateurs A, B et H (on utilise pour cela, la méthode de la réduction de l'ordre de S. G. Krein [18]). L'analyse de cette représentation permet de caractériser la régularité de la solution en fonction des données $u_0, u_{1,0}$. Les techniques utilisées reposent sur la théorie des semi-groupes analytiques, des puissances fractionnaires d'opérateurs et des espaces d'interpolation.

Dans le cadre höldérien, on applique en particulier les travaux de Sinestrari [28] sur les semi-groupes analytiques généralisés (c'est-à-dire que le domaine du générateur n'est pas nécessairement dense dans X).

Dans le cadre $L^p(0,1; X)$, afin d'obtenir des résultats sans plus de régularité sur le second membre f, on suppose que l'espace de Banach X possède la propriété UMD. On utilise ici notamment le Théorème de Dore-Venni [8], pour la classe des opérateurs BIP (Bounded Imaginary Powers). Si X n'est pas un espace UMD, des résultats positifs peuvent néanmoins, être obtenus en imposant une régularité supplémentaire : $f \in W^{\theta,p}(0,1; X)$ où $W^{\theta,p}(0,1; X)$ est un sous espace de $L^p(0,1; X)$. Dans ce cas, on met à contribution la théorie des sommes de Da Prato-Grisvard [7].

Historique

Beaucoup d'auteurs ont étudié des problèmes aux limites avec des conditions non locales, citons par exemple :

- les travaux pionniers de T. Carleman [4] Carleman, J.D. Tamarkin [30] ainsi que ceux de A.V. Bitsadze et A. A. Samarskii [3], qui présentent des problèmes elliptiques venant de la théorie du plasma.
- la monographie d'A.L. Skubachevskii [29] qui fournit des détails bibliographiques sur les problèmes elliptiques à conditions aux limites non locales.
- l'article de Y. Wang [32] qui traite le cas d'une équation elliptique non linéaire avec les conditions aux limites non locales.

Dans le cadre des équations différentielles opérationnelles elliptiques, de tels problèmes ont été également considérés en étudiant la coercitivité et la propriété de Fredholm, voir S. Yakubov [31] et plus récemment A. Favini et Y. Yakubov[12], [13], B.A. Aliev et S. Yakubov [1].

Plan

Le travail est composé de 6 chapitres.

1er Chapitre. Il est consacré à des rappels sur les outils mathématiques utilisés dans le mémoire. On donne certains résultats classiques sur les semi-groupes, les espaces d'interpolation, les espaces de Hölder, les intégrales de Dunford, les puissances fractionnaires ainsi que les principaux théorèmes de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cas des espaces de Banach quelconques (Da Prato-Grisvard [7]) et dans le cas des espaces de Banach UMD (Dore-Venni [8]).

2ème Chapitre. Il concerne le cas $B = 0$ dans le cadre hölderien, et est divisé en 3 sections.

1ère Section : on s'intéresse à l'étude de l'équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in [0,1[, \tag{3}$$

avec les conditions aux limites non locales

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{4}$$

où $f \in C^{\theta}([0,1];X)$ avec $0 < \theta < 1$.

Nos hypothèses sur les deux opérateurs A et H sont :

$$[0,+\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \sup_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \tag{H1}$$

(on en déduit que $Q = -(-A)^{\frac{1}{2}}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé)

$$D(Q) \subset D(H), \tag{H2}$$

$$\forall \zeta \in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta, \tag{H3}$$

$$0 \in \rho(\Lambda), \tag{H4}$$

où $\Lambda = -2HQe^{Q} + I - e^{2Q} \in \mathcal{L}(X)$.

On considère différents types de solutions :
– une solution semi-classique du problème *(3)-(4)* est une solution

$$u \in C\left([0,1]\,;X\right) \cap C^2\left([0,1[;X\right) \cap C\left([0,1[;D(A)\right).$$

Elle satisfait la propriété de régularité maximale si $u \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ et $u'', Au \in C^\theta\left([0,1-\varepsilon];X\right)$ pour tout $\varepsilon \in]0,1[$.

– une solution semi-stricte du problème *(3)-(4)* est une solution semi-classique du problème *(3)-(4)*, qui vérifie de plus $u \in C^1\left([0,1]\,,X\right) \cap C\left([0,1]\,,D(Q)\right)$. Elle satisfait la propriété de régularité maximale si $u', Qu \in C^\theta\left([0,1]\,,X\right)$.

– une solution stricte du problème *(3)-(4)* est une solution

$$u \in C^2\left([0,1];X\right) \cap C\left([0,1];D(A)\right).$$

Elle satisfait la propriété de régularité maximale si $u'', Au \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$.

– On donne alors une représentation formelle de la solution dont l'analyse nous permet d'obtenir le principal résultat de cette section :

Théorème : *sous les hypothèses (H1)∼(H4), supposons que* $u_0, u_{1,0} \in D\left(A\right)$ *et*

$$f \in C^\theta\left([0,1]\,,X\right) \text{ avec } \theta \in \left]0,1\right[.$$

Alors :

1. *Il existe une solution semi-classique u du problème (3)-(4) si et seulement si*

$$Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}.$$

2. *Il existe une solution semi-classique u du problème (3)-(4) ayant la propriété de régularité maximale si et seulement si* $Au_0 - f\left(0\right) \in D_A\left(\theta/2,+\infty\right)$.

3. *Il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)} \\ HQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q) \text{ et} \\ QHQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] \in \overline{D\left(A\right)}, \end{cases}$$

   où $\mathfrak{I}_f := Q\int_0^1 e^{sQ}\left(f\left(s\right) - f\left(0\right)\right)ds$.

4. *Il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) ayant la propriété de régularité maximale si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f\left(0\right) \in D_A\left(\theta/2,+\infty\right) \\ HQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] \in D\left(Q\right) \text{ et} \\ QHQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] \in D_A\left(\theta/2,+\infty\right). \end{cases}$$

5. *Il existe une solution stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)} \\ HQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(A) \text{ et} \\ Q^2HQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f\left(1\right)\right] \in \overline{D\left(A\right)}. \end{cases}$$

6. *Il existe une solution stricte u du problème (3)-(4)ayant la propriété de régularité maximale si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{l} Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty) \\ HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D(A) \text{ et} \\ Q^2HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] - [Au_{1,0} - f(1)] \in D_A(\theta/2, +\infty). \end{array}\right.$$

De plus, dans les 6 cas u est unique.
L'hypothèse (2.5), délicate à vérifier est traitée dans les 2 sections suivantes.

2ème section

Nous étudions le cas particulier $H = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$. Donc on traite le problème

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ \alpha u'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{array}\right. \tag{5}$$

On a alors notamment le résultat suivant :
Théorème : *Sous (H1), on suppose que* $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$f \in C^\theta([0,1], X) \text{ avec } \theta \in]0,1[.$$

Alors :

1. *il existe une solution semi-stricte unique u du problème (5) si et seulement si*
$$Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}.$$
2. *il existe une solution semi-stricte unique u du problème (5) ayant la propriété de régularité maximale si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty)$.
3. *il existe une solution stricte unique u du problème (5) si et seulement si*
$$\left\{\begin{array}{l} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f \in D(Q) \text{ et} \\ \alpha Q[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] - [Au_{1,0} - f(1)] \in \overline{D(A)}. \end{array}\right.$$

3ème section

On considère $\omega_0 \geqslant 0$ fixé. On introduit un paramètre spectral $\omega \geqslant \omega_0$ afin de fournir des résultats pour H général satisfaisant (2.5). Nous considérons le problème

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}. \end{array}\right. \tag{6}$$

Les hypothèses sur les opérateurs sont *(2.2)∼(2.4)* où A est remplacé par $A - \omega_0 I$.
En posant $\mathfrak{I}_f := Q\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))\,ds$, on obtient le théorème suivant :
Théorème : *On suppose (2.28)∼(2.30), supposons que* $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$f \in C^\theta([0,1], X) \text{ avec } \theta \in]0,1[.$$

Il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que *pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$

1. *Il existe une solution semi-classique u_ω du problème (6) si et seulement si*

$$Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}.$$

2. *Il existe une solution semi-stricte u_ω du problème (6) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \\ HQ_\omega^{-1}[Au_0 - f(0) + \Im_f] \in D(Q) \text{ et} \\ Q_\omega HQ_\omega^{-1}[Au_0 - f(0) + \Im_f] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

3. *Il existe une solution stricte u_ω du problème (6) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \\ HQ_\omega^{-1}[A_\omega u_0 - f(0) + \Im_f] \in D(A) \text{ et} \\ Q_\omega^2 HQ_\omega^{-1}[A_\omega u_0 - f(0) + \Im_f] - [A_\omega u_{1,0} - f(1)] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

De plus, dans les 3 cas u est unique.

Remarque 0.1 *On obtient aussi des résultats de régularité maximale pour (5) et (6).*

3ème Chapitre. Il concerne le cas $B = 0$ dans le cadre L^p, et est divisé en 3 sections.
Comme au Chapitre 2, **dans la première section** , on s'intéresse au Problème

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad \text{p. p. } x \in [0,1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{7}$$

où A, H sont des opérateurs linéaires fermés de domaine $D(A), D(H)$ dans un espace de Banach complexe X , $u_0, u_{1,0} \in X$ et f est une fonction à valeurs dans X.

On s'intéressera à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de solutions de ce problème lorsque le second membre f appartient à un espace de Banach $L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$.

mais $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < +\infty$.

Ici les hypothèses sont

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{8}$$

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X : [0,+\infty[\subset \rho(A) \text{ et} \\ \exists C > 0, \forall \lambda \geqslant 0 : \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R} : (-A)^{is} \in L(X) \text{ et } \exists C \geqslant 1, \theta_A \in]0,\pi[\\ \left\|(-A)^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_A|s|}, \end{cases} \tag{10}$$

$$\forall \zeta \in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta, \tag{11}$$

$$D(Q) \subset D(H), \tag{12}$$

et

$$0 \in \rho(\Lambda), \tag{13}$$

où $\Lambda = -2HQe^Q + I - e^{2Q} \in \mathcal{L}(X)$.

Dans le cadre L^p, de manière analogue au cadre höldérien, on considère différents types de solutions :

– une solution semi-stricte du problème *(7)* est une solution qui vérifie pour tout $\varepsilon \in]0,1[$

$$u \in W^{2,p}(0,1-\varepsilon;X) \cap L^p(0,1-\varepsilon;D(A)) \cap W^{1,p}(0,1;X),$$

– une solution stricte du problème *(7)* est une solution

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)).$$

On donne alors une représentation formelle de la solution dont l'analyse nous permet d'obtenir le principal résultat de cette section :

Théorème : *On suppose (8)∼(13). Soient $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0,1,X)$. Alors le problème (3.1) admet une solution semi-stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ u_0 - Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ} f(s)\,ds \in D(HQ) \\ u_{1,0} - HQ\left(u_0 - Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ} f(s)\,ds\right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}. \end{cases} \tag{14}$$

De plus, dans ce cas u est unique et donnée par la formule de représentation (3.14) avec une décomposition de la forme $u = u_R + u_S$, où

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))$,
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

2ème section : Nous étudions le cas particulier $H = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$. Donc on traite le problème

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ \alpha u'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{15}$$

On a alors notamment le résultat suivant :

Théorème : *Sous les hypothèses (8)∼(10)) Soient $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0,1,X)$. Alors*

le problème (15) admet une solution semi-stricte u si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}, \\ u_{1,0} - \alpha Q\left(u_0 - Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ} f(s)\,ds\right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}. \end{cases} \tag{16}$$

De plus, dans ce cas u est unique et donnée par la formule de représentation (3.14) avec une décomposition de la forme $u = u_R + u_S$, où

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))$,
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

3ème section : On fixe $\omega_0 > 0$, pour $\omega > 0$ (assez grand) on étudie le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{17}$$

Posons

$$A_{\omega_0} = A - \omega_0 I.$$

On suppose que

$$X \text{ est un espace } UMD \tag{K1}$$

et que

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X : [0, +\infty[\subset \rho(A_{\omega_0}) \text{ et} \\ \exists C > 0, \forall \lambda \geqslant 0 : \left\| (A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{K2}$$

De plus on fera l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R} : (-A_{\omega_0})^{is} \in L(X) \text{ et } \exists C \geqslant 1, \theta_{A_{\omega_0}} \in]0, \pi[\\ \left\| (-A_{\omega_0})^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_{A_{\omega_0}}|s|}, \end{cases} \tag{K3}$$

$$\forall \zeta \in D(H) : A_{\omega_0}^{-1} H\zeta = HA_{\omega_0}^{-1}\zeta \tag{K5}$$

et

$$D(Q) \subset D(H). \tag{K6}$$

Le théorème principal de cette section est :

Théorème : *On suppose (K1)* $\sim$ *(K6) . Soient* $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ *et* $f \in L^p(0,1,X)$. *Alors il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$: Pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

u est une solution solution semi stricte du problème (17) si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ u_0 - Q_\omega^{-1} \int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\, ds \in D(HQ_\omega) \\ u_{1,0} - HQ_\omega \left(u_0 - Q_\omega^{-1} \int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\, ds \right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \end{cases}$$

De plus dans ce cas u admet une décomposition de la forme $u_\omega = u_{\omega,R} + u_{\omega,S}$, *où* $u_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))$ et $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

Remarque 0.2 *On a trouvé deux types de conditions :*

1. la première est de comportement lié à H et A de forme globale.

2. la deuxième condition est de comportement local lié uniquement à A.

Les 2 chapitres suivants consistent à généraliser à l'équation différentielle abstraite complète du second ordre (1)-(2), les résultats trouvés dans le troisième chapitre

Le quatrième chapitre concerne **Le cas où B génère un groupe :** Dans la première section on étudie le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \ x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{18}$$

avec $u_0, u_{1,0} \in X$ (X est un espace de Banach complexe), $f \in L^p(0,1,X)$. A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexe X.

Nos hypothèses sont

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{19}$$

et pour les opérateurs A et B

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X \\ \mathbb{R}_+ \subset \rho(A - B^2) \text{ et } \exists C > 0 : \\ \forall \lambda \geqslant 0, \ \left\| (\lambda I + B^2 - A)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \ (B^2 - A)^{is} \in L(X) \text{ et } \exists \theta \in]0,\pi[\\ \text{tel que } \left\| e^{-\theta|s|} (B^2 - A)^{is} \right\|_{L(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{21}$$

$$\exists \lambda_0 \in \rho(H) : (\lambda_0 I - H)^{-1} \left(A - B^2\right)^{-1} = \left(A - B^2\right)^{-1} (\lambda_0 I - H)^{-1}, \tag{22}$$

$$B \text{ génère un groupe fortement continu } e^{\cdot B} \text{ dans } X, \tag{23}$$

$$D\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \subset D(B) \cap D(H) \text{ et } Bu_0 \in D(H), \tag{24}$$

$$0 \in \rho(\Pi) \tag{25}$$

où

$$\Pi = -2e^B HPe^P + I - e^{2P} \text{ avec } P = -\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le résultat principal de ce chapitre est :

Théorème : *Sous les hypothèses (19) $\sim$ (25), on considère* $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ *et* $f \in L^p(0,1,X)$. *Alors*

u est une solution semi stricte du problème (3.21) si et seulement si

$$\begin{cases} (P+B)\,u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sP}e^{sB}f(s)\,ds \in D(H) \\ \left(u_{1,0} - H\left((P+B)\,u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sP}e^{sB}(s)\,ds\right)\right) \in \left(D\left(B^2-A\right),X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \\ 3.u_0 \in \left(D\left(B^2-A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}. \end{cases}$$

De plus dans ce cas u admet une décomposition $u = u_R + u_S$, où

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))\,, u_R' \in L^p(0,1,D(B))$
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

Pour la deuxième section on ajoute le paramètre spectal dans l'équation complète et on enlève la dernière hypothèse. On montre alors que l'opérateur $\Pi_\omega = -2e^B H P_\omega e^{P_\omega} + I - e^{2P_\omega}$ admet un inverse borné.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude de l'équation différentielle abstraite complète du second ordre (1)-(2), pour $L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$, dans le cadre commutatif :

$$\forall \xi \in D(B)\,, B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1}\xi = \left(B^2 - A_\omega\right)^{-1} B\xi.$$

Dans la première étape on a étudié le problème avec L et M : On considère alors le problème abstrait :

$$\begin{cases} u''(x) + (L-M)\,u'(x) - LMu(x) = f(x)\,, \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{26}$$

où u_0,$u_{1,0} \in X$; $f \in L^p(0,1,X)$ et L, M ,sont deux opérateurs linéaires fermés dans X (X étant un espace de Banach complexe) de domaine $D(L)$ et $D(M)$ et H est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(H)$.

On donne une représentation explicite de la solution du problème (26) en utilisant les techniques de A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H.Tanabe et A. Yagi voir [10]

Nos hypothèses sont : les suivantes.

Sur l'espace X :

$$X \text{ est un espace } UMD. \tag{h1}$$

Sur les opérateurs L et M :

$$\begin{cases} i)\ D(L) = D(M) \\ \\ ii)\ D(ML) = D(LM)\,, \end{cases} \tag{h2}$$

$$ML = LM, \tag{h3}$$

$$\exists \theta_L, \theta_M \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: (-L) \in BIP\left(\theta_L, X\right), (-M) \in BIP\left(\theta_M, X\right), \tag{h4}$$

$$(L+M)^{-1} \in L(X), \tag{h5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \lambda \in \rho(M), \ \forall \xi \in D(H) \\ \\ (M-\lambda I)^{-1} \xi \in D(H) \text{ et } H(M-\lambda I)^{-1} \xi = (M-\lambda I)^{-1} H\xi, \end{array}\right. \tag{h6}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \lambda \in \rho(L), \ \forall \xi \in D(H) \\ \\ (L-\lambda I)^{-1} \xi \in D(H) \text{ et } H(L-\lambda I)^{-1} \xi = (L-\lambda I)^{-1} H\xi, \end{array}\right. \tag{h7}$$

$$D(L) \subset D(H), \tag{h8}$$

et

$$0 \in \rho(\Lambda), \tag{h9}$$

où $\Lambda = -H(L+M)e^L - e^{M+L} + I$.

On obtient le résultat suivant.

Théorème : *On suppose (h1) $\sim$ (h9). Soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0,1,X)$, alors u est une solution semi-stricte du problème (26) si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{l} 1. \left\{\begin{array}{l} \left(Mu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sL} f(s)\, ds\right) \in D(H) \\ u_{1,0} - H\left(Mu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sL} f(s)\, ds\right) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \end{array}\right. \\ 2. \ u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p} \end{array}\right.$$

de plus dans ce cas u admet une décomposition $u = u_R + u_S$, avec

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1,D(ML)), u_R' \in L^p(0,1,D(L-M))$
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

Dans la deuxième étape on étudie le problème (1)-(2), en remplaçant respectivement M et L par

$$M_\omega = -B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } L_\omega = B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}},$$

et sous des hypothèses *(5.15) $\sim$ (5.24)* sur M_ω et L_ω (détaillées au chapitre 5, section 2), on a obtenu le résulat suivant.

Théorème : *On suppose (5.15) $\sim$ (5.24), soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0,1,X)$, Alors u_ω est une solution semi-stricte du problème (5.14) si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{l} 1. \left\{\begin{array}{l} \left(M_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sL_\omega} f(s)\, ds\right) \in D(H) \\ \left(u_{1,0} - \ H\left(M_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sL_\omega} f(s)\, ds\right)\right) \in \left(D\left(B^2 - A\right), X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \end{array}\right. \\ 2. \ u_0 \in \left(D\left(B^2 - A\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p}. \end{array}\right.$$

De plus dans ce cas u admet une décomposition $u_\omega = u_{\omega,R} + u_{\omega,S}$, avec

1. $u_{\omega,R} \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1,D(A)), u'_R \in L^p(0,1,D(B))$
2. $u_{\omega,S} \in W^{1,p}(0,1,X)$.

Dans le sixième chapitre : on donne des exemples où on applique les résultats précédents.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre on donne quelques définitions, théorèmes, et notions utilisées dans ce travail.

Nous considérons X un espace de Banach complexe.

1.1 Opérateurs fermés

1. Un opérateur linéaire A (de domaine de définition $D(A)$) dans X est un opérateur linéaire fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que

$$x_n \to x \text{ et } Ax_n \to y,$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

2. On dit que A est fermable si et seulement s'il admet une extention fermée, c-à-d pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ vérifiant

$$x_n \to 0 \text{ et } Ax_n \to y,$$

on a $y = 0$.

1.2 Semi-groupes

Définition 1.1 *Soit $(G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ une famille d'opérateurs linéaires continus dans X. On dit que cette famille forme un semi-groupe si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(0) = I$.
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}_+, G(t+s) = G(t)G(s)$.

Si, dans la définition ci-dessus, $\mathbb{R}_+$ est remplacé par $\mathbb{R}$, alors on dit que la famille $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ constitue un groupe.

1.2.1 Semi-groupe fortement continu

On dit que le semi-groupe $(G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est fortement continu (et on le note C_0 semi-groupe) si et seulement si pour tout $x \in X$; l'application

$$\begin{array}{rccc} G(t)x : & \mathbb{R}_+ & \to & X \\ & t & \to & G(t)x \end{array}$$

est continue i.e : $\forall x \in X$; $\lim\limits_{t\to 0} \|G(t)x - x\|_X = 0$.

1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.2 *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, l'opérateur linéaire A défini par :*

$$D(A) = \{\varphi \in X \ ; \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \ \textit{existe}\},$$

et

$$A\varphi = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}.$$

1.2.3 Semi-groupe différentiable

Définition 1.3 *Un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ dans X est dit différentiable pour $t > t_0$ si $\forall \varphi \in X$, la fonction $t \to G(t)\varphi$ est différentiable pour $t > t_0$. Le semi-groupe est différentiable si $t_0 = 0$.*

1.2.4 Semi-groupe analytique

Définition 1.4 *Soit X un espace de Banach complexe, et soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\ \varphi_1 < \arg\ z < \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$. Une famille $(G(z))_{z\in\Delta} \subset \mathcal{L}(X)$ constitue un semi-groupe dans X, si elle vérifie les conditions*

$$\begin{cases} i)\ G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2) \ \textit{pour}\ z_1, z_2 \in \Delta \\ ii)\ G(0) = I_E \\ iii)\ \lim\limits_{z\to 0, z\in\Delta} G(z)x = x,\ \forall x \in X \\ iv)\ \textit{l'application}\ z \in \Delta\backslash\{0\} \to G(z)\varphi \in X \ \textit{est holomorphe pour tout}\ \varphi \in X. \end{cases}$$

Proposition 1.1 *Soit $(G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un C_0 semi-groupe différentiable de générateur infinitésimal Λ. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, our tout $x \in X$:*

1. *$\forall t \in]0, +\infty[, G(t)x \in D(\Lambda^n)$.*
2. *$t \to G(t)x$ est n fois différentiable sur $]0, +\infty[$ et*

$$\forall t \in]0, +\infty[,\ G^{(n)}(t)x = \Lambda^n G(t)x.$$

3. *$\forall t \in]0, +\infty[, G^{(n)}(t) \in \mathcal{L}(X)$.*
4. *$t \to G^{(n)}(t)$ est différentiable (donc continu) de $]0, +\infty[$ dans $\mathcal{L}(X)$.*

Theorème 1.1 *Soit Λ le générateur infinitésimal d'un C_0semi-groupe $(G(t))_{z\in\overline{S}_\phi}$ uniformement borné sur X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *Il existe $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $C \geq 0$ tels que*

$$\left\{\rho(\Lambda) \supset S_{\frac{\pi}{2}+\delta} \ \textit{et}\ \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\delta}\ ,\ \| (\Lambda - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\ \lambda\ |}\right\}.$$

2. $(G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un* C_0 *semi-groupe différentiable avec pour tout* $t > 0$

$$G(t) \in \mathcal{L}(X, D(\Lambda)),$$

et

$$\exists\ M > 0 : \|\ \Lambda G(t)\ \|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{t}.$$

3. *Il existe* $\phi \in]0, \pi[$ *tel que* $(G(t))_{z\in\overline{S}_\phi}$ *soit prolongeable en* $(G(t))_{z\in\overline{S}_\phi}$ *semi-groupe sur* X, *analytique dans* S_ϕ, *uniformément borné dans* $\overline{S_\phi}$.

1.2.5 Semi-groupe analytique généralisé

Soit Q un opérateur linéaire dans X de domaine non nécessairement dense tel que

$$\begin{cases} \rho(Q) \supset S_{w,\delta} = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{w\}\} \text{ tel que } \mid \arg(\lambda - w) \mid < \frac{\pi}{2} + \delta\} \\ \text{et } \sup\limits_{\lambda\in S_{w,\delta}} \|(\lambda - w)(\lambda I - Q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases}$$

où $w \in \mathbb{R}$ et $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Remarque 1.1 *En fixant* $r > 0$, $\delta_0 \in]0, \delta[$ *alors* $(e^{xQ})_{x\geq 0}$ *est défini par*

$$e^{xQ} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{\lambda x}(\lambda I - Q)^{-1} d\lambda \ \textit{si } x > 0 \\ I \ \textit{si } x = 0, \end{cases}$$

ou γ est le bord de $S_{w,\delta_0}\backslash B(0, r)$ orientée négativement.

On dit dans ce cas que $(e^{xQ})_{x\geq 0}$ est un semi-groupe généralisé et $(e^{xQ})_{x\geq 0}$ n'est pas supposé un semi-groupe fortement continu (voir E. Sinestrari [48], A.Lunardi [41]).

1.3 Espaces d'interpolation

Définition 1.5 *Soit* X *un espace de Banach. Pour* $p \in [1, +\infty[$, *on note par* $L^P_*(\mathbb{R}_+, X)$, *l'espace de Banach des fonctions* f *fortement mesurables définies pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *à valeurs dans* X *et telles que*

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^P_X \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{P}} = \|f\|_{L^P_*(\mathbb{R}_+,X)} < +\infty.$$

Si $p = +\infty$, on définit

$$L^\infty_*(\mathbb{R}_+, X) = \{f : \mathbb{R}_+ \to X \text{ est fortement mesurable et } \sup_{0<t<+\infty} \|f(t)\|_X < \infty\}.$$

Soient $E_0,$ E_1 deux espaces de Banach, tels que $E_0 \subset E_0 \cap E_1 \subset E_0 +\ E_1$ et $E_1 \subset E_0 \cap E_1 \subset E_0 +\ E_1$.

Pour l'espace d'interpolation $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ on a les définitions équivalentes suivantes

Définition 1.6 *On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta,p}$, $0 < \theta < 1$, $p \in [1, +\infty]$ si, et seulement si,*

$$\begin{cases} i)\ \forall t > 0, \exists u_0(t) \in E_0, \exists u_1(t) \in E_1 \text{ tels que } x = u_0(t) + u_1(t), \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0) \text{ et } t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1). \end{cases}$$

Définition 1.7 *On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ si, et seulement s'il existe une fonction $u : \mathbb{R}_+ \to E_0 \cap E_1$ telle que*

$$\begin{cases} i)\ x = \int_0^\infty u(s) \frac{ds}{s}, \\ ii)\ t^{-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0) \text{ et } t^{1-\theta} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1). \end{cases}$$

Theorème 1.2 ***Définition 1.8*** *On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ si, et seulement si il existe une fonction $u : \mathbb{R} \to E_0 \cap E_1$ telle que*

$$\begin{cases} i)\ x = \int_{\mathbb{R}} u(y) dy, \\ ii)\ e^{-\theta y} u \in L^p(\mathbb{R}, E_0),\ e^{(1-\theta) y} u \in L^p(\mathbb{R}, E_1). \end{cases}$$

Définition 1.9 (définition discrète) *On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ si ,et seulement si,*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z} : x = v_n + w_n, \text{ avec } v_n \in E_0, w_n \in E_1. \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| e^{-\theta n} v_n \right\|_{E_0}^p < \infty,\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| e^{(1-\theta) n} w_n \right\|_{E_1}^p < \infty. \end{cases}$$

1.4 Théorème des traces

Theorème 1.3 *On dit que x appartient à $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ si, et seulement si, il existe une fonction $u : \mathbb{R}_+ \to E_0$ telle que*

$$\begin{cases} i)\ t^\theta u \in L_*^p(E_0)\ , \\ ii)\ t^\theta u' \in L_*^p(E_1)\ , \\ iii)\ x = u(0),\ \text{trace de } u \text{ en } 0. \end{cases}$$

Définition 1.10 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$, muni de sa norme du graphe :*

$$\forall x \in D(A); \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X,$$

On pose alors, en suivant les notations de P. Grisvard

$$D_A(\theta; p) = (D(A); X)_{1-\theta,p}$$

où $p \in [1; +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta; p)$ ainsi

Theorème 1.4 *Soient $p \in [1; +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.*

1. *Supposons que* $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ *et qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\forall \lambda > 0, \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

alors

$$D_A(\theta;p) = \left\{ x \in X : t^{\theta} A \left(A - tI \right)^{-1} x \in L_*^p \left(\mathbb{R}_+; X \right) \right\}, \text{ si } p \neq +\infty$$

$$D_A(\theta;+\infty) = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \left\| t^{\theta} A \left(A - tI \right)^{-1} x \right\|_X \leqslant C < +\infty \right\},$$

et

$$\|x\|_{D_A(\theta;+\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t>0} \left\| t^{\theta} A \left(A - tI \right)^{-1} x \right\|_X .$$

Voir P. Grisvard [14].

2. *Si* A *génère un semi-groupe fortement continu et borné dans* X

$$D_A(\theta;p) = \left\{ x \in X : t^{-\theta} A \left(e^{tA} - I \right) x \in L_*^p \left(\mathbb{R}_+; X \right) \right\}.$$

Voir J. L. Lions [22].

3. *Si* A *génère un semi-groupe analytique borné dans* X*, alors*

$$D_A(\theta;p) = \left\{ x \in X : t^{1-\theta} A e^{tA} x \in L_*^p \left(\mathbb{R}_+; X \right) \right\}.$$

1.5 Puissances complexes

Soient X un espace de Banach complexe et A un opérateur linéaire positif de domaine $D(A)$ tel que la resolvante de A

$$\rho(A) \supset \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq 0\} \text{ et } \forall \lambda > 0 \ \left\| (A + \lambda)^{-1} \right\| \leq \frac{M}{(1 + \lambda)}.$$

Pour un opérateur linéaire positif on peut définir A^Z pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On a les propriétes suivantes :

A.1 Soit $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z < 0,\ m,\ n \in \mathbb{N}, m > n + \operatorname{Re} z > 0$. Alors $\forall x \in X$ on a

$$A^Z x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n+z)\Gamma(m-n-z)} \int_{\mathbb{R}^+} t^{z+n-1} (A(A+t)^{-1})^m A^{-n} x dt$$

et l'intégrale converge absolument.

A.2 La fonction $z \to A^Z$ est holomorphe de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ dans $\mathcal{L}(X)$.

A.3 Si $m \in \mathbb{N}, m \geq 2, z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} w \in z < m$, alors $D(A^m)$ est dense dans $D(A^Z)$.

A.4 Soient w, z des nombres complexes tels que $\operatorname{Re} w < 0 < \operatorname{Re} z$.Alors

$$A^w A^Z \subseteq A^{w+Z} \subseteq A^Z \ A^w.$$

Si de plus $\operatorname{Re}(w+z) \neq 0$,Alors $A^{w+Z} = A^Z A^w$.

A.5 Soit $\gamma \in \mathbb{R}^+, x \in D(A^\gamma)$. Alors $z \to A^Z x$ est holomorphe dans $\operatorname{Re} z < \gamma$.

A.6 Supposons que $A^{is} \in \mathcal{L}(X)$,avec$s \in \mathbb{R}$, Alors

i Si $\operatorname{Re} w < 0$et w+z=is, alors $A^{w+Z} = A^Z A^w = A^w A^Z$.

ii Si $\operatorname{Re} w < 0$, alors $A^w A^{is} = A^{is} A^w = A^{w+is}$.

iii Si $\operatorname{Re} w \geq 0$, alors $A^{is} A^w \subseteq A^{w+is} \subseteq A^w A^{is}$. Si $\operatorname{Re} w > 0$, Alors le deuxième inclusion devient égalité.

A.7 Si $0 < \operatorname{Re} z < 1$, Alors

$$\left\|A^{-Z}\right\| \leq M(\cosh(\pi \ \operatorname{Im} z) + \frac{\sinh(\pi \mid \operatorname{Im} z \mid)}{\sin(\pi \operatorname{Im} z)}).$$

A.8 Soit $A^{is} \in \mathcal{L}(X)$,avec $s \in \mathbb{R}$. Pour $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ fixé , on pose

$$\sum\nolimits_{\varphi} = \{\rho e^{i\theta}; \rho > 0, \pi - \varphi < \theta < \pi + \varphi\}.$$

Alors $A^{Z+iS} \to A^{iS}, z \to 0, z \in \sum_{\varphi}$ pour la topologie forte de$\mathcal{L}(X)$.

A.9 Soit $\Delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}, \Delta_1 = \overline{\Delta} \cap (i\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Supposons que $\sup\limits_{z \in \Delta} \left\|A^Z\right\| < +\infty$.Alors

$$\forall w \in \Delta_1, A^w \in \mathcal{L}(X),$$

et $A^Z \to A^w$ lorsque $z \to w, z \in \Delta$, pour la topologie forte de $\mathcal{L}(X)$.

A.10 Si $T \in \mathcal{L}(X)$,et$(A - \lambda I)^{-1} T = T(A - \lambda I)^{-1}$pour $\lambda \in \rho(A)$,Alors

i $TA^Z = A^Z T$ pour $\operatorname{Re} z < 0$.

ii $TA^Z \subseteq A^Z T$ pour $\operatorname{Re} z \geq 0$.

A.11 D'après (A.10) on déduit que $A^Z B^w = B^w A^Z$ lorsque $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} < 0$ si

$(A - \lambda)^{-1}$et $(B - \mu)^{-1}$ commutent . Si on suppose que A^{is}et B^{it}sont bornés pour $s, t \in \mathbb{R}$, alors l'inégalité peut être vraie pour $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} \leq 0$.Si on prend l'opérateur inverse on a l'inégalité pour $\min\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} > 0$.

1.6 Théorie des sommes d'opérateurs

On rappelle dans la suite les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach quelconques.
Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X ; de domaine respectifs $D(A)$ et $D(B)$. On s'intéresse alors à l'équation

$$Au + Bu = g, \tag{1.1}$$

où g est un vecteur donné de X :
L'opérateur somme $L = A + B$ est défini par

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B) \\ Lu = Au + Bu \text{ si } u \in D(L), \end{cases}$$

et (1.1) s'écrit encore

$$Lu = g. \tag{1.2}$$

Une solution stricte de (1.1) est un élément $u \in D(L)$ satisfaisant (1.1). L'idéal est de trouver une telle solution lorsque g est quelconque dans X, mais ce n'est pas toujours possible ; on introduit donc une nouvelle notion :

u est une solution forte de (1.1) si et seulement s' il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $D(L)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Lu_n = g, \tag{1.3}$$

Evidemment, une solution stricte de (1.1) est une solution forte de (1.1). La notion de solution forte est donc plus faible (mais le terme de solution faible ne sera pas utilisé ici, il est en général réservé aux solutions variationnelles, la notion de solution forte correspond plutôt à une solution distribution).

Notons que si L est fermé les deux notions de solution stricte et forte sont équivalentes, mais la somme de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermée.

D'autre part si l'on suppose que L est fermable et si on note $\overline{L}$ sa fermeture (i.e. $\overline{L}$ est la plus petite extension fermée de L) alors (1.3) équivaut à

$$u \in D(\overline{L}) \text{ et } \overline{L}u = g.$$

Enfin dans le cas où L est fermable, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout g de X, il existe une solution forte de (1.1).
2. $0 \in \rho(\overline{L})$.

Et si L est fermé les propositions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout g de X, il existe une solution stricte de (1.1).
2. $0 \in \rho(L)$.

Dans ce contexte, on comprend l'importance de trouver des conditions raisonnables sur les opérateurs A et B, qui assurent que L est fermable (voir fermé) et que $0 \in \rho(\overline{L})$.

Les deux théorèmes de G. Da Prato et P. Grisvard, énoncés plus loin, répondent positivement à ce problème sur les sommes d'opérateurs sous des conditions adéquates.

1.6.1 Théorie des sommes d'opérateurs de Da Prato et Grisvard.

Notation 1.1 *On suppose qu'il existe $r > 0$ et un angle $\theta \in]0,\pi]$: On note le secteur S_θ par*

$$S_\theta = \{z : |z| \geqslant r \text{ et } |\arg(z)| < \pi - \theta\}.$$

Les hypothèses sur A et B

On suppose que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses de base suivantes (dites de Da Prato et Grisvard [14] :

Parabolicité-ellipticité :

$$(DP.1)\begin{cases} \exists r, C_A, C_B, \theta_A, \theta_B \in \left]0, \pi\right[: \\ i)\ \rho(A) \supset S_{\theta_A} = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| \geqslant r \text{ et } |\arg(z)| < \pi - \theta_A\}, \\ \forall z \in S_{\theta_A}, \left\| (A - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_A}{|z|}. \\ ii)\ \rho(B) \supset S_{\theta_B} = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| \geqslant r \text{ et } |\arg(z)| < \pi - \theta_B\}, \\ \forall z \in S_{\theta_B}, \left\| (B - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_B}{|z|}. \\ iii)\ \theta_A + \theta_B < \pi \\ iv)\ \overline{D(A) + D(B)} = X. \end{cases}$$

Commutativité au sens des résolvantes :

$$(DP.2)\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(-A), \forall \mu \in \rho(-B) \\ (A + \lambda I)^{-1}(B + \mu I)^{-1} = (B + \mu I)^{-1}(A + \lambda I)^{-1}, \end{cases}$$

$$(DP.3) \quad \sigma(A) \cap \sigma(-B) = \varnothing$$

où $\sigma(A)$ (resp $\sigma(-B)$) désigne le spectre de A (resp de $(-B)$) et $\rho(-A)$, $\rho(-B)$ leurs ensembles résolvants.

La première hypothèse est dite d'ellipticité-parabolicité, la deuxième indique le cadre commutatif.

Theorème 1.5 *(Da Prato-Grisvard, [7])*
On pose

$$S : u \to -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (B - zI)^{-1}(A + zI)^{-1} g dz,$$

où Γ est une courbe sectorielle séparant les spectres de A et $(-B)$ et demeurant dans $\rho(A) \cap \rho(-B)$.

Cet opérateur linéaire continu S défini par une intégrale de Dunford provenant naturellement de l'extension de la formule de Cauchy dans le cadre opérationnel, vérifie les propriétés :

1. *$\forall u \in D(A) \cap D(B)$ on a $S(Au + Bu) = u$,*
2. *$\forall v \in D(A) + D(B)$ on a*
$$S(v) \in D(A) \cap D(B),$$
et
$$A(S(v)) + B(S(v)) = v.$$
3. *Pour $v \in D_A(\theta, p) + D_B(\theta, p), \theta \in \left]0, 1\right[, p \in \left[1, +\infty\right[$, on a*
$$Sv \in D(L) \text{ et } L(Sv) = v.$$
4. *L est fermable et $\left(\overline{L}\right)^{-1} = S$ ($\overline{L}$ est la fermeture de $A + B$), de plus :*
$$(D(L); E)_{\theta,p} = (D(A); E)_{\theta,p} \cap (D(B); E)_{\theta,p}.$$

1. La fonction u est alors l'unique solution forte de (1.1).

Theorème 1.6 *Sous les hypothèses $(DP1) \sim (DP3)$ et pour $\theta \in \left]0, 1\right[, p \in \left[1, +\infty\right[$, on a*

1. *Si $g \in D_B(\theta, p)$ alors $u \in D(L)$ et $Au, Bu \in D_B(\theta, p)$.*
2. *Si $g \in D_A(\theta, p)$ alors $u \in D(L)$ et $Au, Bu \in D_A(\theta, p)$.*

1.6.2 Théorie des sommes d'opérateurs de Dore et Venni

On veut résoudre le problème suivant $Au+Bu=g$ où $g \in X$, et A, B sont deux opérateurs linéaires fermés dans X. On suppose que X est un espace $U.M.D$ .Le théorème de Dore-Venni montre que sous certaines hypothèses sur les opérateurs A et B on peut montrer que $A+B$ est un opérateur fermé, à inverse borné .

Espaces U.M.D :

Soient $P \in]1,\infty[$ et $\varepsilon \in]0,1[$.
On considère que l'opérateur $H_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R},X))$ tel que

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R},X), (H_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\varepsilon<|s|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds, \text{ p.p.} x \in \mathbb{R}.$$

Si pour tout $f \in L^p(\mathbb{R},X)$ donné,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R},X),$$

alors cette limite est notée Hf et appelée la transformée de Hilbert de f sur $L^p(\mathbb{R},X)$.

Définition 1.11 *X est appelé un espace U.M.D, s'il existe $p \in]1,+\infty[$ tel que pour tout $f \in L^P(\mathbb{R},X)$,*

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon f$ existe dans $L^p(\mathbb{R},X)$.
Dans ces conditions

$$\begin{array}{rcl} H & : & L^p(\mathbb{R},X) \to L^p(\mathbb{R},X) \\ f & \to & Hf = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon f, \end{array}$$

et d'après le théorème de Banach Steinhaus, un élément de $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R},X))$, appelé la transformée de Hilbert sur $L^p(\mathbb{R},X)$.

1.6.3 Hypothèses :

On suppose que Aet B vérifient ;

$$\textbf{(D-V1)}\begin{cases} i)\rho(A) \supset]-\infty,0] \text{ et } \exists M_A>0 : \forall \lambda \geq 0, \|(A+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_A/(1+\lambda), \\ ii)\rho(B) \supset]-\infty,0] \text{ et } \exists M_B>0 : \forall \lambda \geq 0, \|(B+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_B/(1+\lambda), \\ \overline{D(A)} = \overline{D(B)} = X. \end{cases}$$

$$\textbf{(D-V2)}\{\forall \lambda \in \rho(-A), \forall \mu \in \rho(-B) : (A+\lambda)^{-1}(B+\mu)^{-1} = (B+\mu)^{-1}(A+\lambda)^{-1}$$

$$\textbf{(D-V3)}\begin{cases} i)\forall s \in \mathbb{R},\ A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists\ K_1>0,\ \theta_A>0 : \forall s \in \mathbb{R}, \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K_1 e^{|s|\theta_A} \\ ii)\forall s \in \mathbb{R}, B^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists\ K_2>0,\ \theta_B>0 : \forall s \in \mathbb{R}, \|B^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K_2 e^{|s|\theta_B} \\ iii)\theta_A+\theta_B<\pi. \end{cases}$$

On note par $Bip(X,\theta)$ (Bounded imaginary power) : l'ensemble des opérateurs sectoriels sur X , vérifiant **(D-V1), (D-V2)** et **(D-V3).**

Theorème 1.7 *Si X est un espace UMD et les hypothèses* ***(D-V1),(D-V2)*** *et* ***(D-V3)*** *sont vérifiées, Alors l'opérateur $L = A + B$ est fermé et $L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, et on a*

$$L^{-1} = \int_{\gamma} \frac{A^{-1}B^{-1}}{\sin\ \pi z} dz$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ et orientée de $\infty\ e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vers $\infty\ e^{i\frac{\pi}{2}}$.

1.7 Espaces de Hölder

Définition 1.12 *Soient X un espace de Banach complexe et $C([0,1], X)$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans X, muni de la norme*

$$\|f\|_{C(X)} = \max_{t\in[0,1]} \|f(t)\|_X .$$

On considère, pour $0 < \theta < 1$, l'espace

$$C^{\theta}([0,1], X) = \left\{ f \in C([0,1], X) \,/ \sup_{t-s\neq 0} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^{\theta}} < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{\theta}(X)} = \|f\|_{C(X)} + \sup_{t-s\neq 0} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^{\theta}}.$$

Cet espace est un espace de Banach appelé espace hölderien d'ordre θ.

Lemme 1.1 *$\exists C > 0$ ne dépendant que de γ tel que pour tout $\xi > 0$ on a*

$$\forall\alpha\ \left]0,1\right[, \quad \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z \pm \xi|\,|z|^{\alpha}} \leqslant \frac{C}{\xi^{\alpha}}.$$

Chapitre 2

Cadre höldérien

2.1 Etude du problème (2.1)

2.1.1 Position du problème et hypothèses

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in [0,1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où X est un espace complexe de Banach , $f \in C^\theta([0,1];X)$ avec $0 < \theta < 1$, $u_0, u_{1,0} \in X$, A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans X et H est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(H)$.

Nos hypothèses sur les opérateurs A et H sont :

$$[0,+\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \sup_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty; \tag{2.2}$$

cette hypothése implique que $Q = -(-A)^{\frac{1}{2}}$,est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé non fortement continu en zéro., voir Balakrishnan [2] pour le cas A est à domaine dense et C. Martinez , M. Sanz [26] autrement.

$$D(Q) \subset D(H), \tag{2.3}$$

$$\forall \zeta \in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta, \tag{2.4}$$

$$0 \in \rho(\Lambda), \tag{2.5}$$

où $\Lambda = -2HQe^Q + I - e^{2Q}$ qui est bien défini sur X et appartient à $\mathcal{L}(X)$.

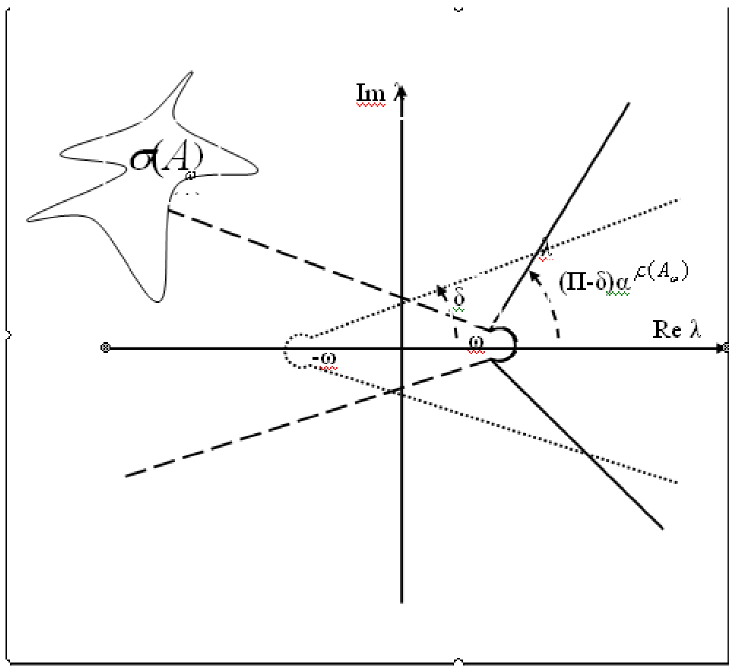
Cet opérateur Λ est dans un certain sens le «déterminant» du problème (2.1)

Remarque 2.1

1. *Sous les hypthèses (2.2)∼(2.4) on a, pour tout $\zeta \in D(H), \lambda \in \rho(A), \mu \in \rho(Q)$ et $x \geqslant 0$*

$$\begin{cases} (\lambda I - A)^{-1} H\zeta = H(\lambda I - A)^{-1}\zeta \\ (\mu I - Q)^{-1} H\zeta = H(\mu I - Q)^{-1}\zeta \\ He^{xQ}\xi = e^{xQ}H\xi. \end{cases}$$

2. *Sous l'hypothèse (2.2), il existe* $\varepsilon_A > 0$, $\beta_A \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $\rho(A)$ *contient un domaine sectoriel*
$$S_{\varepsilon_A,\beta_A} = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg(z)| < \beta_A\} \cup B(0,\varepsilon_A),$$
avec
$$\exists M_{\beta_A} > 0 : \forall z \in S_{\varepsilon_A,\beta_A}, \quad \left\|(A - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M_{\beta_A}}{1+|z|}.$$
De plus $\rho(-A) \supset \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg(z)| > \pi - \beta_A\}$, *donc, on obtient*
$$\rho\left((-A)^{\frac{1}{2}}\right) \supset \left\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg(z)| > \frac{\pi - \beta_A}{2}\right\}.$$
et en posant $\beta_Q = \dfrac{\pi + \beta_A}{2}$ *on obtient*
$$\rho(Q) \supset \left\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg(z)| < \beta_Q\right\}.$$
voir le shéma



Nous chercherons 3 types de solutions du problème (2.1) :

– une solution semi-classique du problème (2.1) est une fonction u telle que
$$u \in C([0,1];X) \cap C^2([0,1[;X) \cap C([0,1[;D(A)),$$
et qui satisfait (2.1) ; de plus nous disons que cette solution semi-classique satisfait la propriété de régularité maximale si
$$\begin{cases} u \in C^\theta([0,1];X) \text{ et} \\ u'', Au \in C^\theta([0,1-\varepsilon];X) \text{ pour tout } \varepsilon \in]0,1[. \end{cases} \tag{2.6}$$

– une solution semi-stricte du problème (2.1)est une solution semi-classique du problème (2.1), de plus elle vérifie $u \in C^1([0,1], X) \cap C([0,1], D(Q))$. Nous dirons que cette solution semi-stricte vérifie la propriété de régularité maximale si elle satisfait (2.6) :

$$u', Qu \in C^\theta([0,1], X). \tag{2.7}$$

– une solution stricte u du problème (2.1) est une fonction u telle que

$$C^2([0,1]; X) \cap C([0,1]; D(A)),$$

et qui vérifie (2.1) cette solution stricte satisfait la propriété de régularité maximale si

$$u'', Au \in C^\theta([0,1]; X). \tag{2.8}$$

Quand $H = 0$, on sait que, sous l'hypothèse (2.2), le problème (2.1) a une solution stricte u si et seulement si $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ et

$$f(0) - Au_0,\ f(1) - Au_{1,0} \in \overline{D(A)}.$$

De plus u vérifie la propriété de régularité maximale si et seulement si $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ et

$$f(0) - Au_0,\ f(1) - Au_{1,0} \in D_A(\theta/2, +\infty),$$

voir R. Labbas [20].

Noter qu'un cas particulier du problème (2.1), celui où $H = \alpha I$, a été étudié par Labbas-Maingot (voir le [21]). Ces auteurs ont utilisé une méthode directe basée sur les techniques des intégrales de Dunford pour établir une formule de représentation de la solution.

Dans ce travail, une formule de représentation du problème (2.1) est trouvée en utilisant les semigroupes analytiques, les puissances fractionnaires d'opérateurs ainsi que la méthode de réduction de l'ordre de Krein [18].

2.1.2 Semi-groupe analytique généralisé

Comme dans [11], pages 975-977, nous rappelons ici la définition d'un semigroupe analytique généralisé (voir E. Sinestrari [28], A. Lunardi [25])) et de quelques résultats classiques [6], [7] et le [28]

Soit L un opérateur linéaire dans X tel que

$$\begin{cases} \rho(L) \supset S_{\mu,\delta} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mu\} \ / \ |\arg(\lambda - \mu)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \in S_{\mu,\delta}} \|(\lambda - \mu)(\lambda I - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ceci indique exactement que L est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique généralisé $\left(e^{xL}\right)_{x \geq 0}$, dans le sens où L n'est pas supposé à domaine dense .

2.1.3 Quelques résultats

Proposition 2.1 *Soit L un opérateur générateur d'un semi-groupe analytique généralisé $\left(e^{xL}\right)_{x\geq 0}$.*

1. *Soit $\varphi \in X$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (a) $e^{\cdot L}\varphi \in C\left([0,1];X\right)$.
   (b) $\varphi \in \overline{D\left(L\right)}$.
2. *Soit $\theta \in \left]0,1\right[, g \in C^{\theta}\left([0,1];X\right), \varphi \in X$. Posons*

$$S(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)L}g\left(s\right)ds, \quad x \in [0,1].$$

   Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes
   (a) $S \in C^1\left([0,1];X\right) \cap C\left([0,1];D\left(L\right)\right)$.
   (b) $\varphi \in D\left(L\right)$ et $g\left(0\right) + L\varphi \in \overline{D\left(L\right)}$.

On rappelle que pour un opérateur P dans X qui vérifie $\rho(P) \supset \left]0,+\infty\right[$ et

$$\exists C > 0, \forall \lambda > 0, \quad \left\|(P-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

nous définissons l'espace d'interpolation $D_P\left(\theta,+\infty\right)$ par

$$D_P\left(\theta,+\infty\right) = \left\{x \in X : \sup_{t>0}\left\|t^{\theta}P\left(P-tI\right)^{-1}x\right\| < +\infty\right\}.$$

Proposition 2.2 *Soient $\theta \in \left]0,1\right[$ et L un opérateur générateur d'un semi-groupe analytique généralisé $\left(e^{xL}\right)_{x\geq 0}$.*

1. *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (a) $e^{\cdot L}\varphi \in C^{\theta}\left([0,1];X\right)$.
   (b) $\varphi \in D_L\left(\theta,+\infty\right)$.
2. *Soit $g \in C\left([0,1];X\right)$ et $\varphi \in X$. Posons*

$$S(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)L}g\left(s\right)ds, \quad x \in [0,1].$$

   Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes
   (a) $S \in C^{1,\theta}\left([0,1];X\right) \cap C^{\theta}\left([0,1];D\left(L\right)\right)$.
   (b) $g \in C^{\theta}\left([0,1];X\right)$, $\varphi \in D\left(L\right)$ et $g\left(0\right) + L\varphi \in D_L\left(\theta,+\infty\right)$.
3. *Soit $g \in C^{\theta}\left([0,1];X\right)$. Alors*

$$L\int_0^1 e^{sL}\left(g\left(s\right)-g\left(0\right)\right)ds \in D_L\left(\theta,+\infty\right).$$

Pour ces deux propositions voir E. Sinestrari [28].

Notation 2.1 *Soient g et h deux fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans X et $\theta \in]0,1[$. Nous écrivons*

$$g \simeq_\theta h$$

si

$$g - h \in C^\theta\left([0,1]; X\right).$$

En utilisant la proposition 2.2 on obtient

Proposition 2.3 *Soit $g \in C^\theta\left([0,1]; X\right), \varphi \in D(L)$ et posons*

$$S(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)L} g(s)\, ds,\ x \in [0,1];$$

alors

$$LS(\cdot) \simeq_\theta e^{\cdot L}\left(L\varphi + g(0)\right).$$

2.1.4 Représentation de la solution

On suppose (2.2)∼(2.5) et que u est une solution semi-classique du problème (2.1). Puisque $u \in C([0,1[; D(A))$ on a $u_0 = u(0) \in D(A)$. Dans la suite, nous supposons que $u_{1,0} \in D(A)$.

Lemme 2.1 *On a*

$$u(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + I_x + J_x, \quad x \in [0,1],$$

où $\xi_0, \xi_1 \in X$ et

$$I_x = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \text{ et } J_x = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\, ds. \tag{2.9}$$

Preuve. Soit $\varepsilon \in]0,1[$, et posons $u_{1-\varepsilon} = u(1-\varepsilon)$. Alors u est une solution stricte dans $[0, 1-\varepsilon]$ du problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), & x \in]0, 1-\varepsilon[\\ u(0) = u_0 \\ u(1-\varepsilon) = u_{1-\varepsilon}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Pour $x \in [0, 1-\varepsilon]$ posons

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[u(x) + Q^{-1}u'(x)\right] et z(x) = \frac{1}{2}\left[u(x) - Q^{-1}u'(x)\right],$$

alors

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{2}\left(u'(x) + Q^{-1}u''(x)\right) y'(x) = Qy(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ z'(x) \ = \frac{1}{2}\left(u'(x) - Q^{-1}u''(x)\right) = -Qz(x) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(x), \end{cases}$$

ainsi,il existe $\xi_0, \xi_{1,\varepsilon} \in X$ tels que

$$\begin{cases} y(x) = e^{xQ}\xi_0 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \\ z(x) = e^{(1-\varepsilon-x)Q}\xi_{1,\varepsilon} + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^{1-\varepsilon} e^{(s-x)Q} f(s)\, ds, \end{cases}$$

notons que ξ_0 ne dépend pas de ε puisque

$$\xi_0 = y(0) = \frac{1}{2}\left[u(0) + Q^{-1}u'(0)\right].$$

Donc, pour $x \in [0, 1-\varepsilon]$

$$u(x) = y(x) + z(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-\varepsilon-x)Q}\xi_{1,\varepsilon} + I_x + J_x^\varepsilon, \tag{2.11}$$

où I_x, J_x sont définis dans (2.9) et

$$\begin{aligned} J_x^\varepsilon &= \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^{1-\varepsilon} e^{(s-x)Q} f(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}\chi_{[x,1-\varepsilon]}(s) f(s)\, ds \end{aligned}$$

donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J_0^\varepsilon = J_0.$$

On prend $x = 1-\varepsilon$ dans (2.11) on obtient

$$\xi_{1,\varepsilon} = u(1-\varepsilon) - e^{(1-\varepsilon)Q}\xi_0 - I_{1-\varepsilon},$$

et alors

$$\xi_1 := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\xi_{1,\varepsilon} = u(1) - e^Q\xi_0 - I_1 \in X.$$

finalement quand $\varepsilon \to 0^+$, (2.11) on trouve

$$u(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + I_x + J_x, \quad x \in [0, 1[.$$

■

Pour obtenir la représentation finale de u, il suffit de trouver ξ_0 et ξ_1 et cela, en tenant compte des données $u_0, u_{1,0}, f$ et A.

D'abord, notons que, si $u(0) = u_0 \in D(A) = D(Q^2)$, donc

$$Qu_0 \in D(Q) \subset D(H). \tag{2.12}$$

En utilisant proposition 2.2, assertion 3, on peut écrire

$$\begin{aligned} QJ_0 &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))\, ds + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{sQ} f(0)\, ds \\ &= \frac{1}{2}Q^{-1}\left(Q\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))\, ds + e^Q f(0) - f(0)\right), \end{aligned}$$

et donc

$$QJ_0 \in D(Q) \subset D(H). \tag{2.13}$$

De plus, on a pour $x \in [0,1[$

$$u'(x) = Qe^{xQ}\xi_0 - Qe^{(1-x)Q}\xi_1 + QI_x - QJ_x,$$

ainsi

$$\begin{cases} u(0) = \xi_0 + e^{Q}\xi_1 + J_0 \\ u(1) = e^{Q}\xi_0 + \xi_1 + I_1 \\ u'(0) = 2Q\xi_0 - Qu_0, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} H(2Q\xi_0 - Qu_0) + e^{Q}\xi_0 + \xi_1 + I_1 = u_{1,0} \\ \xi_0 + e^{Q}\xi_1 + J_0 = u_0, \end{cases}$$

ce qui peut être écrit, en utilisant (2.12) et (2.13) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \left(-2HQe^{Q} + I - e^{2Q}\right)\xi_1 = u_{1,0} - HQu_0 + 2HQJ_0 - e^{Q}u_0 + e^{Q}J_0 - I_1 \\ \xi_0 + e^{Q}\xi_1 + J_0 = u_0, \end{cases}$$

Puisque $\Lambda = -2HQe^{Q} + I - e^{2Q}$ a un inverse borné on obtient

$$\xi_1 = \Lambda^{-1}u_{1,0} - \Lambda^{-1}HQu_0 + 2\Lambda^{-1}HQJ_0 - e^{Q}\Lambda^{-1}u_0 + e^{Q}\Lambda^{-1}J_0 - \Lambda^{-1}I_1,$$

et

$$\begin{aligned} \xi_0 &= u_0 - e^{Q}\Lambda^{-1}u_{1,0} + e^{Q}\Lambda^{-1}HQu_0 - 2e^{Q}\Lambda^{-1}HQJ_0 + e^{2Q}\Lambda^{-1}u_0 \\ &\quad -e^{2Q}\Lambda^{-1}J_0 + e^{Q}\Lambda^{-1}I_1 - J_0. \end{aligned}$$

Finalement, u est donnée par

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xQ}e^{Q}\varphi_0 + e^{(1-x)Q}e^{Q}\varphi_1 \\ &\quad +e^{xQ}(u_0 - J_0) + I_x \\ &\quad +e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}(u_{1,0} - HQu_0 + 2HQJ_0 - I_1) + J_x, \end{aligned} \tag{2.14}$$

où

$$\begin{cases} \varphi_0 = \Lambda^{-1}HQu_0 - \Lambda^{-1}u_{1,0} - 2\Lambda^{-1}HQJ_0 + e^{Q}\Lambda^{-1}u_0 - e^{Q}\Lambda^{-1}J_0 + \Lambda^{-1}I_1 \\ \varphi_1 = \Lambda^{-1}J_0 - \Lambda^{-1}u_0, \end{cases}$$

Pour simplifier la représentation (2.14) on montre d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.2

1. Il existe $W \in \mathcal{L}(X)$ tel que$WQ^{-1} = Q^{-1}W$ et

$$\Lambda^{-1} = I - W \text{ avec } W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(Q^k\right).$$

2. On a

$$\begin{cases} J_0 = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s) - f(0)\right) ds + \frac{1}{2}Q^{-2}e^{Q}f(0) - \frac{1}{2}Q^{-2}f(0) \\ I_1 = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(1-s) - f(1)\right) ds + \frac{1}{2}Q^{-2}e^{Q}f(1) - \frac{1}{2}Q^{-2}f(1). \end{cases}$$

Preuve. Pour l'assertion1, nous écrivons

$$\Lambda = -2HQe^{Q} + I - e^{2Q} = I + V,$$

où $V = -2HQe^{Q} - e^{2Q} \in \mathcal{L}(X)$. Il est clair que $VQ^{-1} = Q^{-1}V$, de plus puisque Q génère un semi-groupe analytique généralisé, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$e^{Q} \in L\left(X, D\left(Q^{m}\right)\right),$$

ainsi

$$V(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(Q^{k}\right),$$

donc $W := \Lambda^{-1}V \in \mathcal{L}(X)$, $WQ^{-1} = Q^{-1}W$ et

$$W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(Q^{k}\right).$$

Nous concluons en notant que

$$(I - W)\Lambda = \Lambda(I - W) = \Lambda - V = I.$$

Pour l'assertion 2, il suffit de voir que pour tout $g \in C^{\theta}([0,1];X)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{sQ}g(s)\,ds &= \int_0^1 e^{sQ}\left(g(s) - g(0)\right) ds + \int_0^1 e^{sQ}g(0)\,ds \\ &= \int_0^1 e^{sQ}\left(g(s) - g(0)\right) ds + e^{Q}Q^{-1}g(0) - Q^{-1}g(0). \end{aligned}$$

■

Maintenant, en utilisant (2.14) et Lemme 2.2, on peut écrire

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xQ}e^{Q}\varphi_0 + e^{(1-x)Q}e^{Q}\varphi_1 - \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-2}e^{Q}f(0) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}Q^{-2}e^{Q}f(1) \\ &\quad -e^{(1-x)Q}W\left(u_{1,0} - HQu_0 + 2HQJ_0 - I_1\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^{-2}e^{Q}f(1) + e^{(1-x)Q}HQ^{-1}e^{Q}f(0) \\ &\quad +e^{xQ}\left(u_0 + \frac{1}{2}Q^{-2}f(0)\right) + I_x - \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s) - f(0)\right) ds \\ &\quad +e^{(1-x)Q}\left(-HQu_0 - HQ^{-1}f(0) + u_{1,0} + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)\right) + J_x \\ &\quad +e^{(1-x)Q}\left(H\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s) - f(0)\right) ds\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\left(Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(1-s) - f(1)\right) ds\right). \end{aligned}$$

Posons pour $\psi \in X$ et $g \in C^{\theta}([0,1];X)$

$$S(x,\psi,g) = e^{xQ}\psi + \int_0^x e^{(x-s)Q} g(s)\,ds,$$

on peut réarranger les termes de u pour obtenir la décomposition

$$u = u_R + v + w, \tag{2.15}$$

avec la partie régulière u_R sur $[0,1]$ donnée par

$$\begin{aligned} u_R(x) &= e^{xQ}e^{Q}\varphi_0 + e^{(1-x)Q}e^{Q}\varphi_1 - \frac{1}{2}e^{xQ}e^{Q}Q^{-2}f(0) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}e^{Q}\Lambda^{-1}Q^{-2}f(1) \\ &\quad -e^{(1-x)Q}W\left(u_{1,0} - HQu_0 + 2HQJ_0 - I_1\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}e^{Q}Q^{-2}f(1) + e^{(1-x)Q}e^{Q}HQ^{-1}f(0), \end{aligned} \tag{2.16}$$

les termes qui donnent le comportement près de 0

$$\begin{aligned} v(x) &= S\left(x, u_0 + \frac{1}{2}Q^{-2}f(0), \frac{1}{2}Q^{-1}f\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s) - f(0)\right)ds, \end{aligned} \tag{2.17}$$

et celui au sujet du comportement non local dans 0 et 1

$$\begin{aligned} & w(x) \\ &= S\left(1-x, \Psi, \frac{1}{2}Q^{-1}f(1-.)\right) \\ &\quad +e^{(1-x)Q}H\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s) - f(0)\right)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(1-s) - f(1)\right)ds, \end{aligned} \tag{2.18}$$

où on a posé $\Psi = -HQu_0 - HQ^{-1}f(0) + u_{1,0} + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)$.

(Notons que puisque $u_0 \in D(A)$ alors $HQu_0 = -HQ^{-1}Au_0$ est bien défini).

2.1.5 Résultats de régularité

Pour étudier la régularité de la solution nous avons besoin de quelques lemmes techniques. Si

$$g \in C^{\theta}([0,1], X), \varphi \in X, \varkappa \in D_Q(\theta,+\infty), \psi \in D(Q), \widetilde{\psi} \in D\left(Q^2\right),$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} S(\cdot,\varphi+\varkappa,g) \simeq_\theta S(\cdot,\varphi,g) \\ QS\left(\cdot,\psi+Q^{-1}\varkappa,g\right) \simeq_\theta QS(\cdot,\psi,g) \\ Q^2S\left(\cdot,\widetilde{\psi}+Q^{-2}\varkappa,g\right) \simeq_\theta Q^2S\left(\cdot,\widetilde{\psi},g\right), \end{array} \right. \tag{2.19}$$

$$QS\left(\cdot,\psi,g\right)\simeq_{\theta}e^{\cdot Q}\left(Q\psi+g\left(0\right)\right),\tag{2.20}$$

$$\mathfrak{I}_{g}:=Q\int_{0}^{1}e^{sQ}\left(g\left(s\right)-g\left(0\right)\right)ds\in D_{Q}\left(\theta,+\infty\right),\tag{2.21}$$

et

$$e^{\cdot Q}Q\int_{0}^{1}e^{sQ}\left(g\left(s\right)-g\left(0\right)\right)ds\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right),\tag{2.22}$$

(voir Propositions 2.2 et 2.3).

Lemme 2.3 *On suppose (2.2)∼(2.5). Soit* $f\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right],X\right)$ *et* $u_0\in D\left(A\right)$*. Alors*

1. $u_R, Au_R\in C^{\infty}\left(\left[0,1\right],X\right)$.
2. $v\in C^{2}\left(\left]0,1\right],X\right)\cap C\left(\left]0,1\right],D\left(A\right)\right)$.
3. $Av\simeq_{\theta}e^{\cdot Q}\left[Au_0-f\left(0\right)\right]$ *et donc*

$$\begin{cases} Av\in C\left(\left[0,1\right];X\right)\Leftrightarrow Au_0-f\left(0\right)\in\overline{D\left(A\right)}\\ Av\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right)\Leftrightarrow Au_0-f\left(0\right)\in D_A\left(\theta/2,+\infty\right).\end{cases}$$

Preuve.

1. Pour tout $\varphi\in X$ on a $e^{Q}\varphi, W\varphi\subset\bigcap_{k=1}^{+\infty}D\left(Q^{k}\right)$ nous déduisons que

$$\begin{cases} e^{\cdot Q}e^{Q}\varphi, e^{\cdot Q}W\varphi\in C^{\infty}\left(\left[0,1\right],X\right)\text{ et}\\ -Q^{2}e^{\cdot Q}e^{Q}\varphi, -Q^{2}e^{\cdot Q}W\varphi\in C^{\infty}\left(\left[0,1\right],X\right),\end{cases}$$

   donc $u_R\in C^{\infty}\left(\left[0,1\right],X\right)$ et $Au_R=-Q^{2}u_R\in C^{\infty}\left(\left[0,1\right],X\right)$.

2. Evident, puisque pour $\varphi\in X$ et $x>0$ on a $e^{xQ}\varphi\subset\bigcap_{k=1}^{+\infty}D\left(Q^{k}\right)$.

3. Puisque $A=-Q^{2}$, on a

$$Av=QS\left(\cdot,-Qu_0-\frac{1}{2}Q^{-1}f\left(0\right),-\frac{1}{2}f\right)+\frac{1}{2}e^{\cdot Q}Q\int_{0}^{1}e^{sQ}\left(f\left(s\right)-f\left(0\right)\right)ds,$$

   alors, de (2.20) et (2.22) on obtient

$$\begin{aligned} Av &\simeq_{\theta} QS\left(\cdot,-Qu_0-\frac{1}{2}Q^{-1}f\left(0\right),\frac{1}{2}f\right)\\ &\simeq_{\theta} e^{\cdot Q}\left(Q\left(-Qu_0-\frac{1}{2}Q^{-1}f\left(0\right)\right)-\frac{1}{2}f\left(0\right)\right)\\ &\simeq_{\theta} e^{\cdot Q}\left[Au_0-f\left(0\right)\right].\end{aligned}$$

■

Lemme 2.4 *On suppose (2.2)∼(2.5). Soit* $f\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right],X\right)$ *et* $u_0,u_{10}\in D\left(A\right)$*. Alors*

1. $w\in C^{2}\left(\left[0,1\right[,X\right)\cap C\left(\left[0,1\right[,D\left(A\right)\right)$.

2. $w \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q} HQ^{-1}\left(Au_0 - f(0)\right)$ *et donc*

$$\begin{cases} w \in C\left([0,1], X\right) \Leftrightarrow HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right] \in \overline{D(A)} \\ w \in C^\theta\left([0,1], X\right) \Leftrightarrow HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right] \in D_A\left(\theta/2, +\infty\right). \end{cases}$$

3. $w\left([0,1]\right) \subset D(Q) \Longleftrightarrow HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q)$.

4. En supposant $HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q)$ *on obtient*

$$Qw \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q} QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right],$$

et donc

$$\begin{cases} w', Qw \in C\left([0,1], X\right) \Leftrightarrow QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in \overline{D(A)} \\ w', Qw \in C^\theta\left([0,1], X\right) \Leftrightarrow QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D_A\left(\theta/2, +\infty\right). \end{cases}$$

5. $w\left([0,1]\right) \subset D(Q^2) \Longleftrightarrow HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q^2)$.

6. En supposant $HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q^2)$ *on obtient*

$$Q^2 w \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(Q^2 HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right]\right),$$

et donc

$$\begin{cases} Aw \in C\left([0,1], X\right) \text{ si et seulement si} \\ Q^2 HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] \in \overline{D(A)}. \\ \\ Aw \in C^\theta\left([0,1], X\right) \text{ si et seulement si} \\ Q^2 HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] \in D_A\left(\theta/2, +\infty\right). \end{cases}$$

Preuve. Posons $\widetilde{f} = f(1-\cdot)$ et notons que $HQ^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ on a

$$w(x) = S\left(1 - x, \psi_0, \frac{1}{2}Q^{-1}\widetilde{f}\right),$$

où

$$\begin{aligned} \psi_0 &= HQ^{-1}Au_0 - HQ^{-1}f(0) + u_{1,0} + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1) + HQ^{-1}\mathfrak{I}_f - \frac{1}{2}Q^{-2}\mathfrak{I}_{\widetilde{f}}. \\ &= HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] + u_{1,0} + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1) - \frac{1}{2}Q^{-2}\mathfrak{I}_{\widetilde{f}}. \end{aligned}$$

1. Puisque pour $\varphi \in X$ et $x \in [0,1[$ on a $e^{(1-x)Q}\varphi \subset \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} D\left(Q^k\right)$.
2. D'après (2.21), $\psi_0 = HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right] + \varkappa_0$ avec $\varkappa_0 \in D_Q\left(\theta, +\infty\right)$. Ainsi, de (2.19), on obtient

$$\begin{aligned} w &\simeq_\theta S\left(1 - \cdot, HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right], \frac{1}{2}Q^{-1}\widetilde{f}\right) \\ &\simeq_\theta QS\left(1 - \cdot, Q^{-1}HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right], \frac{1}{2}Q^{-2}\widetilde{f}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} w &\simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right] + \frac{1}{2}Q^{-2}\widetilde{f}(0)\right). \\ &\simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q} HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right]. \end{aligned}$$

3. $w([0,1[) \subset D(Q)$. De plus $w(1) \in D(Q)$ si et seulement si

$$\psi_0 = HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] + u_{1,0} + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1) - \frac{1}{2}Q^{-2}\mathfrak{I}_{\widetilde{f}} \in D(Q),$$

ainsi

$$w(1) \in D(Q) \quad \Leftrightarrow \quad HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q).$$

4. De (2.19), (2.20) et (2.22), on obtient

$$\begin{aligned} Qw &\simeq_\theta QS\left(1-\cdot, HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right], \frac{1}{2}Q^{-1}\widetilde{f}\right) \\ &\simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] + \frac{1}{2}Q^{-1}\widetilde{f}(0)\right) \\ &\simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right], \end{aligned} \tag{2.23}$$

De plus pour $g \in C^\theta([0,1],X), \psi \in D(Q)$ on a

$$S'(\cdot,\psi,g) = QS(\cdot,\psi,g) + g,$$

donc

$$\begin{cases} Qw \in C([0,1],X) \Leftrightarrow w' \in C([0,1],X) \\ Qw \in C^\theta([0,1],X) \Leftrightarrow w' \in C^\theta([0,1],X). \end{cases}$$

Alors (2.23) fournit les équivalences désirées.

5. Voir assertion 3

6. De (2.19), (2.20) et (2.22), on obtient

$$\begin{aligned} Q^2w &\simeq_\theta Q^2S\left(1-\cdot, \psi_0, \frac{1}{2}Q^{-1}\widetilde{f}\right) \\ &\simeq_\theta QS\left(1-\cdot, Q\psi_0, \frac{1}{2}\widetilde{f}\right) \\ &\simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(Q^2HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right]\right), \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} & Q(Q\psi_0) + \frac{1}{2}\widetilde{f}(0) \\ = \; & Q^2HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \\ & + Q^2u_{1,0} + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\mathfrak{I}_{\widetilde{f}} + \frac{1}{2}\widetilde{f}(0) \\ = \; & Q^2HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] - \frac{1}{2}\mathfrak{I}_{\widetilde{f}}. \end{aligned}$$

■

Lemme 2.5 *Supposons (2.2)∼(2.5). Soit $f \in C^\theta([0,1],X)$ et $u_0, u_{1,0} \in D(A)$.*

1. *Si $H \in \mathcal{L}(X)$ alors $Qw \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}H\left[Au_0 - f(0)\right]$.*

2. Si $H \in \mathcal{L}(X)$ avec $H(X) \subset D(Q)$ alors $QH \in \mathcal{L}(X)$ et

$$Q^2 w \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q} \left(QH \left[Au_0 - f(0) \right] - \left[Au_{1,0} - f(1) \right] \right).$$

Preuve.

1. Ici $HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] = Q^{-1}H\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q)$ alors, du Lemme 2.4, assertion 4, nous déduisons

$$\begin{aligned} Qw &\simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q} QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \\ &\simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q} H\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right], \end{aligned}$$

et de (2.21) on a $e^{(1-\cdot)Q} H\mathfrak{I}_f = He^{(1-\cdot)Q}\mathfrak{I}_f \in C^\theta([0,1];X)$ qui donne le résultat.

2. Puisque si $QH \in \mathcal{L}(X)$ alors

$$HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] = Q^{-2}QH\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q^2),$$

et du Lemme 2.4, assertion 6, nous déduisons

$$\begin{aligned} Q^2 w &\simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(Q^2 HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right]\right) \\ &\simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(QH\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right]\right) \end{aligned}$$

et de (2.21) on a $e^{(1-\cdot)Q}QH\mathfrak{I}_f = QHe^{(1-\cdot)Q}\mathfrak{I}_f \in C^\theta([0,1];X)$ ce qui donne le résultat.

■

Ces deux derniers cas correspondent, par exemple, aux opérateurs 2.2 $H = \alpha I$ et $H = -\alpha Q^{-1}$ ($\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \operatorname{Re}\alpha \geq 0$) qui seront étudiés par la suite.

Lemme 2.6 *On suppose (2.2)∼(2.5) et soit $u_0, u_{1,0} \in D(A)$.*

1. Si $f \in C^\theta([0,1], D(Q))$ alors

$$w([0,1]) \subset D(Q) \iff HQ^{-1}Au_0 \in D(Q),$$

et si $HQ^{-1}Au_0 \in D(Q)$ on a

$$Qw \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right].$$

2. Si $f \in C^\theta([0,1], D(Q^2))$ alors

$$w([0,1]) \subset D(Q^2) \iff HQ^{-1}Au_0 \in D(Q^2),$$

et si $HQ^{-1}Au_0 \in D(Q^2)$ on a

$$Q^2 w \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(Q^2 HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right]\right).$$

Preuve.

1. Ici $f(0) \in D(Q)$ et
$$Q\mathfrak{I}_f = Q\int_0^1 e^{sQ}\left(Qf(s) - Qf(0)\right)ds \in D_Q(\theta, +\infty),$$
alors, du Lemme 2.4, assertion 3, on obtient
$$\begin{array}{rcl} w([0,1]) \subset D(Q) & \Leftrightarrow & HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D(Q) \\ & \Leftrightarrow & HQ^{-1}Au_0 - Q^{-1}HQ^{-1}[Qf(0) + Q\mathfrak{I}_f] \in D(Q) \\ & \Leftrightarrow & HQ^{-1}Au_0 \in D(Q). \end{array}$$
Maintenant, si $HQ^{-1}Au_0 \in D(Q)$, Lemme 2.4, assertion 4,
$$Qw \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}QHQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f],$$
et nous concluons en notant que
$$e^{(1-\cdot)Q}QHQ^{-1}\mathfrak{I}_f = HQ^{-1}e^{(1-\cdot)Q}Q\mathfrak{I}_f \in C^\theta([0,1];X).$$

2. Ici $f(0) \in D(Q^2)$ et
$$Q^2\mathfrak{I}_f = Q\int_0^1 e^{sQ}\left(Q^2f(s) - Q^2f(0)\right)ds \in D_Q(\theta, +\infty),$$
alors, du Lemme 2.4, assertion 5, on obtient
$$\begin{array}{rcl} w([0,1]) \subset D(Q^2) & \Leftrightarrow & HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D(Q^2) \\ & \Leftrightarrow & HQ^{-1}Au_0 \in D(Q^2). \end{array}$$
Maintenant, si $HQ^{-1}Au_0 \in D(Q^2)$, Lemme 2.4, assertion 6 :
$$Q^2w \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(Q^2HQ^{-1}[Au_0 - f(0)] + Q^2HQ^{-1}\mathfrak{I}_f - [Au_{1,0} - f(1)]\right),$$
et on conclue en notant que
$$e^{(1-\cdot)Q}Q^2HQ^{-1}\mathfrak{I}_f = HQ^{-1}e^{(1-\cdot)Q}Q^2\mathfrak{I}_f \in C^\theta([0,1];X).$$

■

Par les arguments similaires, nous pouvons prouver le lemme suivant.

Lemme 2.7 *On suppose (2.2)∼(2.5) et* $u_0, u_{10} \in D(A)$. *Si* $H \in \mathcal{L}(X)$ *et* $f \in C^\theta([0,1], D(Q))$ *alors*
$$w([0,1]) \subset D(Q^2) \Longleftrightarrow HAu_0 \in D(Q),$$
et si $HAu_0 \in D(Q)$ *on a*
$$Q^2w \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(QH[Au_0 - f(0)] - [Au_{1,0} - f(1)]\right).$$

2.1.6 Résultats principaux

Theorème 2.1 *On suppose(2.2)$\sim$(2.5), supposons que $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ et*

$$f \in C^{\theta}([0,1], X) \text{ avec } \theta \in]0,1[.$$

Alors :

1. *Il existe une solution semi-classique u du problème (2.1) si et seulement si*

$$Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)},$$

2. *il existe une solution semi-classique u du problème (2.1) ayant la propriété de régularité maximale (2.6) si et seulement si*

$$Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty),$$

3. *il existe une solution semi-stricte u du problème (2.1) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \\ HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D(Q) \text{ et} \\ QHQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in \overline{D(A)}, \end{cases}$$

4. *il existe une solution semi-stricte u du problème (2.1) ayant la propriété de régularité maximale (2.6)-(2.7) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty) \\ HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D(Q) \text{ et} \\ QHQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D_A(\theta/2, +\infty), \end{cases}$$

5. *il existe une solution stricte u du problème (2.1) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \\ HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D(A) \text{ et} \\ Q^2HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] - [Au_{1,0} - f(1)] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

6. *il existe une solution stricte u du problème (2.1) ayant la propriété de régularité maximale (2.8) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty) \\ HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D(A) \text{ et} \\ Q^2HQ^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] - [Au_{1,0} - f(1)] \in D_A(\theta/2, +\infty). \end{cases}$$

De plus, dans les 6 cas u est unique et donnée par

$$u = u_R + v + w,$$

où u_R, v, w sont définies dans 2.16),(2.17) et (2.18).

Preuve. Pour les assertions 1 et 2, nous remarquons d'abord de la section 2.1.4 , s'il y a une solution semi-classique u du problème (2.1) alors$u$ est uniquement déterminé par $u = u_R + v + w$. On conclut en appliquant les lemmes 2.3 et 2.4 et notons que, puisque $u'' + Au = f$, alors

$$\begin{cases} Au \in C\left([0,1], X\right) \Leftrightarrow u'' \in C\left([0,1], X\right) \\ Au \in C^\theta\left([0,1], X\right) \Leftrightarrow u'' \in C^\theta\left([0,1], X\right). \end{cases}$$

Les assertions 3∼6 sont similairement prouvées. ∎

Nous étudions maintenant quelques situations où plus de régularité est donnée sur H ou f ce qui nous permet d'éviter les conditions sur $\mathfrak{I}_f$.

Corollary 2.1 *On suppose (2.2)∼(2.5). Soit* $f \in C^\theta\left([0,1], X\right)$ *et* $u_0, u_{10} \in D(A)$.

1. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *alors : il existe une solution semi-stricte* u *du problème (2.1) si et seulement si*
$$Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}.$$
2. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *avec* $H(X) \subset D(Q)$ *alors : il existe une solution stricte* u *du problème (2.1) si et seulement si*
$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \text{ et} \\ QH\left[Au_0 - f(0)\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$
3. *Supposons que* $f \in C^\theta\left([0,1], D(Q)\right)$*alors : il existe une solution semi-stricte* u *du problème (2.1) si et seulement si*
$$Au_0 \in D(QHQ^{-1}) \cap \overline{D(A)} \text{ et } QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right] \in \overline{D(A)}.$$
4. *Supposons que* $f \in C^\theta\left([0,1], D(Q^2)\right)$ *alors : il existe une solution stricte* u *du problème (2.1) si et seulement si*
$$\begin{cases} Au_0 \in D(Q^2HQ^{-1}) \cap \overline{D(A)} \text{ et} \\ Q^2HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$
5. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *et* $f \in C^\theta\left([0,1], D(Q)\right)$ *alors : il existe une solution stricte unique* u *du problème (2.1) si et seulement si*
$$Au_0 \in \overline{D(A)} \cap D(QH) \text{ et } \left[Au_{1,0} - f(1)\right] - QH\left[Au_0 - f(0)\right] \in \overline{D(A)}.$$

Preuve. Pour les assertion 1 et 2, on applique les lemmes 2.3 et 2.5, notons que

$$\left[Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \text{ et } H\left[Au_0 - f(0)\right] \in \overline{D(A)}\right] \Longleftrightarrow \left[Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}\right].$$

Pour l'assertion 3, on utilise les lemmes 2.3, 2.6 et

$$f(0) \in D(Q) \subset \overline{D(A)},$$

qui donnent

$$\left[Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \text{ et } HQ^{-1}Au_0 \in D(Q^2)\right] \Longleftrightarrow Au_0 \in D(QHQ^{-1}) \cap \overline{D(A)}.$$

Les assertions 4 et 5 sont similairement traitées. ∎

Dans le corollaire précédent, nous obtiendrons, pour chaque cas, la régularité maximale de la solution u si on remplace $\overline{D(A)}$ par $D_A(\theta/2, +\infty)$.

2.2 Cas particulier du Problème (2.1)

Nous étudions d'abord le cas particulier $H = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ donc on considère le problème

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ \alpha u'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{2.24}$$

La difficulté principale est l'hypothèse (2.5) et nous avons besoin de quelques résultats de calcul fonctionnel.

Ici, notre principale hypothèse sur A est

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur fermé dans } X, \ \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\text{ et} \\ \text{pour tout } \theta \in]0,\pi[, \ \sup\limits_{\lambda \in S_\theta} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{2.25}$$

où $S_\theta := \{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : |\arg z| < \theta\}$. Puisque $H = \alpha I$ alors

$$\Lambda = I - 2\alpha Q e^Q - e^{2Q},$$

nous devons étudier les fonctions F, G définies par

$$\begin{cases} F(z) = 1 + G(z) \\ G(z) = 2\alpha z e^{-z} - e^{-2z}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

D'abord nous fixons $\varepsilon_0 > 0$ telque $B(0, 4\varepsilon_0^2) \subset \rho(A)$.

Lemme 2.8 *Posons $S = S_{\pi/4}$, on obtient :*

1. *F, G sont des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{S}$.*
2. *$x > 0$ implique $|F(x)| > 0$.*
3. $\lim\limits_{\operatorname{Re} z \to +\infty, \ z \in \overline{S}} 2\alpha z e^{-z} + e^{-2z} = 0$ *et alors*
   (a) *il existe $x_0 > 0$ tel que $z \in \overline{S}$ et $\operatorname{Re} z \geqslant x_0$ implique que*
   $$2 \geq |F(z)| \geq 1/2.$$
   (b) *F est bornée sur $\overline{S}$.*
4. *Il existe $\theta_0 \in]0, \pi/4[$ tel que $F(z)$ n'est pas nulle sur*
   $$\Sigma_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \varepsilon_0 \ \text{ et } \ |\arg(z)| \leq \theta_0\},$$
   et $\min\limits_{z \in \Sigma_0} |F(z)| = r > 0.$

Preuve.

1. Evident
2. On a, pour $x > 0$
   $$\operatorname{Re} F(x) = \left(1 - e^{-2x}\right) + 2 (\operatorname{Re} \alpha) x e^{-x} > 0.$$

3. Nous écrivons pour $z \in \overline{S}$

$$\begin{aligned}\left|2\alpha z e^{-z}+e^{-2z}\right| &\le 2\left|\alpha\right|\left|z\right|e^{-\operatorname{Re}z}+e^{-2\operatorname{Re}z}\\ &\le 2\sqrt{2}\left|\alpha\right|(\operatorname{Re}z)\,e^{-\operatorname{Re}z}+e^{-2\operatorname{Re}z}.\end{aligned}$$

4. On a $|F(z)| \ge 1/2$ pour

$$z\in\Sigma_1=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z\ge x_0 \text{ et } |\arg(z)|<\pi/4\}.$$

De plus F est une fonction holomorphe sur un voisinage de

$$\Sigma_2=\{z\in\mathbb{C}:\varepsilon_0\ge\operatorname{Re}z\ge x_0 \text{ et } |\arg(z)|\le\pi/4\},$$

ainsi, sur Σ_2, F a tout au plus un nombre fini de zéros (qui ne sont pas sur le l'axe réel , voir assertion 2). Donc, on peut trouver $\theta_0 \in]0,\pi/4]$, assez petit tel que F est non nulle sur

$$\Sigma_2=\{z\in\mathbb{C}:\varepsilon_0\ge\operatorname{Re}z\ge x_0 \text{ and } |\arg(z)|\le\theta_0\}.$$

De plus

$$\min_{z\in\Sigma_0}|F(z)|=\min\left(\min_{z\in\Sigma_2}|F(z)|,1/2\right)>0.$$

■

On pose pour $z\in\Sigma_0$

$$\Psi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}.$$

Lemme 2.9 *Sous 'l'hypothèse (2.25), l'opérateur* $\Lambda = I - 2\alpha Q e^{Q} - e^{2Q}$ *admet un inverse borné et* $\Lambda^{-1} = I - \Psi(-Q)$.

Preuve. On choisit $\theta \in]0,\theta_0[$ tel que $\sigma(-Q)\subset S_\theta\backslash B(0,2\varepsilon_0)$. On note que G est une fonction holomorphe et bornée sur un voisinage de $S_\theta\backslash B(0,2\varepsilon_0)$. De plus,il existe $\sigma>0$ tel que

$$|\Psi(z)|=O\left(|z|^{-\sigma}\right) \text{ quand } z\to+\infty, z\in S_\theta\backslash B(0,2\varepsilon_0).$$

Ainsi on peut définir $\Psi(-Q)$ et aussi $G(-Q)$ (voir par exemple [15], la section 2.5.1, p. 45, la remarque 2.5.1 et la fig. 6 P. 46).

On a aussi $\Lambda = I + G(-Q)$ et

$$\begin{aligned}(I-\Psi(-Q))\Lambda &= (1-\Psi)(-Q)\circ(1+G)(-Q)\\ &= [(1-\Psi)(1+G)](-Q)\\ &= \left(1-\frac{G}{1+G}\right)(1+G)(-Q)\\ &= 1(-Q)\\ &= I.\end{aligned}$$

De même $\Lambda(I-\Psi(-Q)) = I$. ■

Si on suppose (2.25), $f \in C^{\theta}([0,1],X)$, $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ et considère $H = \alpha I$ ($\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \operatorname{Re}\alpha \ge 0$) alors, du lemme précédent les hypothèses (2.2)~(2.5) sont vérifiées et on peut appliquer les propositions 2.1, 2.2 et le corollaire 2.1, assertion 1, pour obtenir :

Theorème 2.2 *Sous (2.25), on suppose que* $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$f \in C^{\theta}([0,1], X) \ \text{ avec } \theta \in]0,1[.$$

Alors :

1. *il existe une solution semi-stricte unique u du problème (2.24) si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$,
2. *il existe une solution semi-stricte unique u du problème (2.24) ayant la régularité (2.6)-(2.7) si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty)$.
3. *il existe une solution stricte unique u du problème (2.24) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ Au_0 - f(0) + \Im_f \in D(Q) \ \text{ et} \\ \alpha Q[Au_0 - f(0) + \Im_f] - [Au_{1,0} - f(1)] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Remarque 2.2 *Soit* $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \operatorname{Re}\alpha \geq 0$.

1. *Par les mêmes techniques nous pouvons considérer* $H = -\alpha Q$ *sous l'hypothèse (2.25), on peut étudier les fonctions* $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ *definies par*

$$\widetilde{F}(z) = 1 + \widetilde{G}(z), \quad \widetilde{G}(z) = -2\alpha z^2 e^{-z} - e^{-2z}$$

et on peut montrer que $\Lambda = I + 2\alpha Q^2 e^{Q} - e^{2Q}$ *admet uninverse borné*

$$\Lambda^{-1} = I - \frac{\widetilde{G}}{1+\widetilde{G}}(-Q),$$

alors (2.2)∼(2.5) sont vérifiées et donc on peut appliquer Théorème 2.1.

2. *Noter que nous pouvons également résoudre le problème*

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in [0,1[\\ u(0) = u_0 \\ -\alpha u'(0) + Qu(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{2.26}$$

puisque on peut écrire la deuxième condition aux limites :

$$-\alpha Q^{-1} u'(0) + u(1) = Q^{-1} u_{1,0},$$

ici $H = -\alpha Q^{-1}$, $\Lambda = I + 2\alpha e^{Q} - e^{2Q} \in \mathcal{L}(X)$ *et, en supposant (2.25), on peut appliquer le corollaire 2.5 assertion 2.*

2.3 Problème avec un paramètre spectral

Afin de fournir des résultats pour H général satisfaisant (2.5), nous considérerons un certain nombre positif grand ω et le problème

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{2.27}$$

2.3.1 Etude du problème (2.27)

En fixant $\omega_0 \geq 0$ et en posant, pour $\omega \geq \omega_0$

$$A_\omega = A - \omega I,$$

alors le Problème (2.27) est le Problème (2.1) avec A remplacé par A_ω.

Nos hypothèses principales sur les opérateurs sont

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ [0, +\infty[\subset \rho\left(A_{\omega_0}\right) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda \left(A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{2.28}$$

cette hypothèse implique que $Q_{\omega_0} = -\left(-A_{\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, est un générateur infnitésimal d'un semi-groupe analytique generalisé sur X.

$$\forall \zeta \in D(H) : A_{\omega_0}^{-1} H \zeta = H A_{\omega_0}^{-1} \zeta, \tag{2.29}$$

$$D\left(Q_{\omega_0}\right) \subset D\left(H\right). \tag{2.30}$$

Remarque 2.3

1. *L'hypothèse (2.28) implique que pour $\omega \geq \omega_0$*

$$\begin{cases} A_\omega \textit{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \\ [\omega_0 - \omega, +\infty[\subset \rho\left(A_\omega\right) \textit{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant \omega_0 - \omega} \left\| \left(\lambda + \omega - \omega_0\right) \left(A_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{2.31}$$

mais

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda \left(A_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sup_{\lambda \geqslant \omega_0 - \omega} \left\| \left(\lambda + \omega - \omega_0\right) \left(A_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)},$$

ainsi, pour tout $\omega \geq \omega_0$, $Q_\omega = -\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}$,est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé sur X. Notons que

$$\begin{aligned} c_0 &= \sup_{\lambda \geqslant \omega_0 - \omega} \left\| \left(\lambda + \omega - \omega_0\right) \left(A_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \sup_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda \left(A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \end{aligned}$$

et alors c_0 ne dépend pas de ω.

2. *L'hypothèse (2.29) implique que $\omega \geq \omega_0$*

$$\forall \lambda \geqslant \omega_0 - \omega, \forall \zeta \in D(H), \quad \left(\lambda I - A_\omega\right)^{-1} H \zeta = H \left(\lambda I - A_\omega\right)^{-1} \zeta,$$

Lemme 2.10 *On suppose (2.28) $\sim$ (2.30), alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que, pour $\omega \geqslant \omega^*$, l'opérateur $\Lambda_\omega = -2HQ_\omega e^{Q_\omega} + I - e^{2Q_\omega}$ admet un inverse borné.*

Preuve. On peut écrire $\Lambda_\omega = I - T_\omega$ avec $T_\omega = 2HQ_\omega e^{Q_\omega} + e^{2Q_\omega}$. Donc, pour montrer que l'opérateur Λ_ω a un inverse borné, il suffit de montrer que $\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$.

En utilisant le lemme p. 103 dans G. Dore et S. Yakubov [9], on a

$$\begin{cases} \exists c > 0 \text{ et } k > 0 : \\ \left\|Q_\omega^3 e^{Q_\omega}\right\|_{L(X)} \leq ce^{-k\sqrt{\omega}} \text{ et } \left\|e^{2Q_\omega}\right\|_{L(X)} \leq ce^{-k\sqrt{\omega}}. \end{cases} \tag{2.32}$$

De plus

$$\begin{aligned} \left\|Q_{\omega_0}^2 Q_\omega^{-2}\right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\|A_{\omega_0} A_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left\|(A - \omega_0 I)(A - \omega I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left\|(A - \omega I - (\omega_0 - \omega) I)(A - \omega I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left\|I - (\omega_0 - \omega)(A - \omega I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 1 + c_0, \end{aligned}$$

et, puisque $HQ_{\omega_0}^{-2}$ est borné,alors

$$\begin{aligned} \|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\|2HQ_{\omega_0}^{-2} Q_{\omega_0}^2 Q_\omega^{-2} Q_\omega^3 e^{Q_\omega} + e^{2Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 2\left\|HQ_{\omega_0}^{-2}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\|Q_{\omega_0}^2 Q_\omega^{-2}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\|Q_\omega^3 e^{2Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)} + \left\|e^{2Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 2\left\|HQ_{\omega_0}^{-2}\right\|_{\mathcal{L}(X)} (1 + c_0) \left\|Q_\omega^3 e^{2Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)} + \left\|e^{2Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)}, \end{aligned}$$

et de (2.32) il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$

$$\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

■

On peut maintenant résoudre le Problème (2.27)

Theorème 2.3 *On suppose (2.28)∼(2.30), supposons que* $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$f \in C^\theta([0,1], X) \text{ avec } \theta \in]0,1[.$$

Pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

1. *il existe une solution semi-classique* u_ω *du problème (2.27) si et seulement si*

$$Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)},$$

2. *il existe une solution semi-stricte* u_ω *du problème (2.27) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \\ HQ_\omega^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D(Q) \text{ et} \\ Q_\omega HQ_\omega^{-1}[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in \overline{D(A)}, \end{cases}$$

3. *il existe une solution stricte* u_ω *du problème (2.27) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \\ HQ_\omega^{-1}[A_\omega u_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] \in D(A) \text{ et} \\ Q_\omega^2 HQ_\omega^{-1}[A_\omega u_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f] - [A_\omega u_{1,0} - f(1)] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

De plus, dans les 3 cas, u est unique et donnée par $u_\omega = u_{\omega,R}+v_\omega+w_\omega$ *où* $u_{\omega,R}, v_\omega, w_\omega$ *sont définies dans (2.16),(2.17) et (2.18) et on remplace* A, Q, Λ *par* $A_\omega, Q_\omega, \Lambda_\omega$ *respectivement.*

Preuve. Soit $\omega \geqslant \omega^*$. Noter que si on remplace A par.A_ω alors le problème (2.27) correspond au problème (2.1), les hypothèses (2.28) $\sim$ (2.30) correspondent aux (2.2) $\sim$ (2.5), en effet du lemme 2.10, les hypothèses (2.28) $\sim$ (2.30) impliquent (2.5). Alors, il suffit d'appliquer le théorème 2.1 avec A remplacé par A_ω.Notons que $\overline{D\left(A_\omega\right)} = \overline{D\left(A\right)}, D(Q_\omega) = D(Q)$ et

$$A_\omega u_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A_\omega\right)} \Longleftrightarrow Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}.$$

■

Remarque 2.4 *Dans le théorème 2.3, nous obtiendrons, dans chaque cas, la régularité maximale de la solution* u_ω *si on remplace* $\overline{D\left(A\right)}$ *par* $D_A\left(\theta/2, +\infty\right)$*.*

2.3.2 Cas particulier du Problème (2.27)

On considère ici $H = \alpha\left(Q_{\omega_0}\right)^\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\left\{0\right\}$ et $\beta \in]-\infty, 1]$. Ainsi le problème (2.27) devient

$$\begin{cases} u''\left(x\right) + Au\left(x\right) - \omega u\left(x\right) = f\left(x\right), \quad x \in]0,1[\\ u\left(0\right) = u_0 \\ u\left(1\right) + \alpha\left(Q_{\omega_0}\right)^\beta u'\left(0\right) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Si on suppose (2.28) , (2.29) et (2.30) vérifiées on peut appliquer le théorème 2.3 (de plus $H \in \mathcal{L}(X)$ si $\beta \in]-1, 0]$ et $H \in \mathcal{L}(X)$ avec $H(X) \subset D(Q)$ pour $\beta \in]-\infty, -1]$. Dans ces cas nous pouvons appliquer le corollaire2.5). Par exemple si $\beta = 0$ nous obtenons le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''\left(x\right) + Au\left(x\right) - \omega u\left(x\right) = f\left(x\right), \quad x \in]0,1[\\ u\left(0\right) = u_0 \\ u\left(1\right) + \alpha u'\left(0\right) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{2.34}$$

Chapitre 3

Cadre $\mathbf{L}^p$

3.1 Etude du problème

3.1.1 Position du problème et hypothèses

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \text{p. p. } x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{3.1}$$

L'hypothèse géométrique sur l'espace est

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{3.2}$$

et pour les opérateurs on suppose que

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X : [0,+\infty[\subset \rho(A) \text{ et} \\ \exists C > 0, \forall \lambda \geqslant 0 : \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R} : (-A)^{is} \in L(X) \text{ et } \exists C \geqslant 1, \theta_A \in]0,\pi[\\ \left\|(-A)^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_A|s|}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$D(Q) \subset D(H), \tag{3.5}$$

$$\forall \zeta \in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta, \tag{3.6}$$

et

$$0 \in \rho(\Lambda), \tag{3.7}$$

où $\Lambda = -2HQe^Q + I - e^{2Q}$ qui est bien défini sur X et appartient à $\mathcal{L}(X)$.

3.1.2 Conséquences des hypothèses

1. Grâce à A.V.Balakrishnan [2], l'hypothèse (3.3) implique que
$$Q := -\left(-A\right)^{\frac{1}{2}},$$
est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné $\left(e^{xQ}\right)_{x\geqslant 0}$ dans X.
2. Puisque l'égalité
$$\left(\left(-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\beta} = \left(-A\right)^{\frac{\beta}{2}},$$
est vraie pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, on en déduit à partir de (3.4) que
$$-Q = \left(-A\right)^{\frac{1}{2}} \in BIP\left(\frac{\theta_A}{2}, X\right),$$
et en particulier que
$$\exists C \geqslant 1 : \left\|\left(\left(-A\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\frac{\theta_A}{2}|s|},$$
(voir Haase [15], proposition 2.18. p. 64.)
3. On sait que
$$\left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{2},1} \subset D\left(\left(-A\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$
voir P.Grisvard [14], p. 667, pour $\theta_1 < \theta_2$ et $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$ on a
$$\left(D\left(A\right), X\right)_{\theta_1, p_1} \subset \left(D\left(A\right), X\right)_{\theta_2, p_2},$$
voir P. Grisvard [14], p. 674, donc
$$\left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} \subset \left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{2},1} \subset D\left(\left(-A\right)^{\frac{1}{2}}\right) = D(Q).$$
4. Vu (3.3), (3.5), (3.6) on a
$$\forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \geqslant 0 : \left(A - \lambda I\right)^{-1} H\zeta = H\left(A - \lambda I\right)^{-1}\zeta.$$

3.1.3 Lemmes techniques

Lemme 3.1 *Soit $f \in L^p\left(0,1,X\right), 1 < p < +\infty$. Sous les hypothèses (3.2), (3.3) et (3.4) on a*

1. $x \to F\left(x,f\right) = Q\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)Q} f\left(s\right) ds \in L^p\left(0,1,X\right).$

2. $x \to K\left(x,f\right) = Q\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)Q} f\left(s\right) ds \in L^p\left(0,1,X\right).$

3. $x \to T(x,f) = Q\int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s)\, ds \in L^p(0,1,X)$.

Preuve. Pour la première assertion on va appliquer le théorème de Dore et Venni [8], à l'étude du problème

$$\begin{cases} v'(x) - Qv(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in (0,1), \\ v(0) = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

alors , puisque X est un espace UMD et Q est un opérateur linéaire fermé dans X, vérifiant les hypothèses du théorème de Dore et Venni, alors pour tout $f \in L^p(0,1,X)$, le problème (3.8) admet une solution unique stricte v telle que

$$v \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1,D(Q)),$$

avec

$$v(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds, \text{ p.p. } x \in (0,1),$$

et donc

$$Qv : x \to Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \in L^p(0,1,X).$$

L'assertion 2 découle de la première car en posant $t = 1 - s$ on obtient

$$\begin{aligned} K(x,f) &= Q\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\, ds \\ &= Q\int_0^{1-x} e^{(1-x-t)Q} f(1-t)\, dt \\ &= F(1-x, f(1-\cdot)), \end{aligned}$$

donc $K(\cdot,f) = x \to F(1-x, f(1-.)) \in L^p(0,1,X)$

Pour l'assertion 3, on écrit

$$\begin{aligned} T(x,f) &= Q\int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s)\, ds \\ &= Q\int_0^x e^{(x+s)Q} f(s)\, ds + Q\int_x^1 e^{(x+s)Q} f(s)\, ds \\ &= Q\int_0^x e^{(x-s)Q} e^{2sQ} f(s)\, ds + e^{2xQ} Q\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\, ds \\ &= F\left(x, e^{2.Q} f\right) + e^{2xQ} K(x,f) \in L^p(0,1,X), \end{aligned}$$

donc $T(\cdot,f) = x \to F\left(x, e^{2.Q} f\right) + e^{2xQ} K(x,f) \in L^p(0,1,X)$ ■

Lemme 3.2 *Supposons que l'hypothèse (3.3) est réalisée et soit $p \in]1, +\infty[$. Alors*

1. $Ae^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1,X)$ *si et seulement si* $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
2. $Qe^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1,X)$ *si et seulement si* $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.

Preuve. On rappelle que si $m \in \mathbb{N}^*$ et C génère un semi-groupe analytique alors

$$\phi \in (D(C^m), X)_{\frac{1}{mp},p}$$

si et seulement si

$$C^m e^{\cdot C}\phi \in L^p(0,1,X),$$

en effet

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\|C^m e^{xC}\phi\right\|^p dx &= \int_0^1 x^{m.\frac{1}{mp}p} \left\|C^m e^{xC}\phi\right\|^p \frac{dx}{x} \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \left\|x^{m.\left(1-\left(1-\frac{1}{mp}\right)\right)} C^m e^{xC}\phi\right\|^p \frac{dx}{x} \\
&\leqslant K\|\phi\|_{(D(C^m),X)_{\frac{1}{mp},p}},
\end{aligned}$$

(voir H. Triebel [17], Théorème p. 96).

Ainsi, $Ae^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1,X)$ si et seulement si

$$\varphi \in \left(D\left(Q^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

De même $Qe^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1,X)$ si et seulement si

$$\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}.$$

On conclut en utilisant les propriétés de réitération de Lions-Peetre [23] :

$$\begin{aligned}
(D(Q), X)_{\frac{1}{p},p} &= (X, D(Q))_{1-\frac{1}{p},p} \\
&= \left(X, D\left(Q^2\right)\right)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \\
&= (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.
\end{aligned}$$

■

Corollary 3.1 *Soit $f \in L^p(0,1,X)$, $1 < p < +\infty$. Sous les hypothèses (3.2), (3.3) et (3.4) on a*

$$\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}.$$

Preuve. Vu le 3. du Lemme 3.1, on a

$$Qe^{\cdot Q}\int_0^1 e^{sQ}f\left(s\right)ds\in L^p\left(0,1,X\right),$$

donc en appliquant le Lemme 3.2

$$\int_0^1 e^{sQ}f\left(s\right)ds\in\left(D\left(A\right),X\right)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}.$$

■

Lemme 3.3 *Sous les hypothèses (3.2)∼(3.6), pour tout* $\xi\in D\left(H\right)$ *et* $x\geqslant 0$, *on a l'égalité suivante*

$$He^{xQ}\xi=e^{xQ}H\xi.$$

Preuve. On sait que si l'opérateur G génère un semi-groupe analytique $\left(e^{xG}\right)_{x\geqslant 0}$ alors

$$\forall x\geqslant 0,\ e^{xG}=\lim_{n\to+\infty}\left(I-\frac{xG}{n}\right)^{-n}$$

(voir T. Kato [19] page 481) et ainsi, en supposant les hypothèses (3.2)∼(3.6) et pour $x>0$ et $\xi\in D\left(H\right)$ (le cas $x=0$ est évident) on obtient

$$\begin{aligned} He^{xQ}\xi &= \lim_{n\to+\infty}H\left(I-\frac{xQ}{n}\right)^{-n}\xi \\ &= \lim_{n\to+\infty}H\left(\frac{n}{x}\right)^{n}\left(\frac{n}{x}I-Q\right)^{-n}\xi \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{x}\right)^{n}\left(\frac{n}{x}I-Q\right)^{-n}H\xi \\ &= e^{xQ}H\xi. \end{aligned}$$

■

3.1.4 Représentation de la solution

Définition 3.1 *Une solution semi-stricte du problème (3.1) est une fonction* u *qui, pour tout* $\varepsilon\in]0,1[$, *à la régularité suivante*

$$u\in W^{2,p}\left(0,1-\varepsilon;X\right)\cap L^p\left(0,1-\varepsilon;D(A)\right)\cap W^{1,p}\left(0,1;X\right),$$

et qui vérifie (3.1)

Notons que $u\in W^{1,p}\left(0,1;X\right)$ *donc*

$$u\in C\left([0,1];X\right),$$

et que, pour tout $\varepsilon\in]0,1[$, $u\in W^{2,p}\left(0,1-\varepsilon;X\right)$ *donc*

$$u\in C^1\left([0,1[;X\right).$$

Lemme 3.4 *Si u est une solution semi-stricte du problème (3.1) alors il existe $\xi_0, \xi_{1,\varepsilon} \in X$ tels que*

$$u(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + I_x + J_x, \quad x \in [0,1], \tag{3.9}$$

avec

$$I_x = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\,ds \text{ et } J_x = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\,ds. \tag{3.10}$$

Preuve. u est la solution de ce problème singulier alors u est donc solution stricte sur $(0, 1-\varepsilon)$ du problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \ x \in [0, 1-\varepsilon] \\ u(0) = u_0 \\ u(1-\varepsilon) = u_{1,0}^{\varepsilon}, \end{cases}$$

On pose, pour $x \in [0, 1-\varepsilon]$

$$\begin{cases} v(x) = -Q^{-1}u'(x) \\ y_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(u(x) - v(x)) \\ z_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(u(x) + v(x)), \end{cases}$$

et comme pour le lemme 2.1 , il existe $\xi_0, \xi_{1,\varepsilon} \in X$ tels que

$$u(x) = y(x) + z(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-\varepsilon-x)Q}\xi_{1,\varepsilon} + I_x + J_x^{\varepsilon},$$

avec

$$I_x = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\,ds \text{ et } J_x^{\varepsilon} = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^{1-\varepsilon} e^{(s-x)Q} f(s)\,ds.$$

De la même manière qu'au lemme 2.1, on peut passer à la limite quand x tend vers 1^- pour obtenir

$$u(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + I_x + J_x, \quad x \in [0,1],$$

avec

$$I_x = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\,ds \text{ et } J_x = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\,ds.$$

■

Lemme 3.5 *Si u est une solution semi-stricte du problème (3.1) alors*

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xQ}(u_0 - J_0) + I_x \\ &\quad + e^{xQ}e^{Q}\overline{u_0} \\ &\quad - e^{(1-x)Q}\left(\Lambda^{-1}I_1\right) + J_x \\ &\quad + e^{(1-x)Q}e^{Q}\overline{u_{1,0}} + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}HQe^{Q}u_0 \\ &\quad + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}(u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J_0)), \end{aligned} \tag{3.11}$$

où I_x et J_x sont données par (2.9) et

$$\begin{cases} \overline{u_0} = e^{Q}\Lambda^{-1}u_0 - \Lambda^{-1}u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J_0) - e^{Q}\Lambda^{-1}J_0 + \Lambda^{-1}I_1 \\ \overline{u_{1,0}} = \Lambda^{-1}(J_0 - u_0). \end{cases}$$

Preuve. Rappelons que u est une solution semi-stricte du problème *(3.1)* donc

$$\begin{cases} u \in C([0,1];X) \cap C^1([0,1[;X) \\ u'(0) \in D(H) \\ u(0) = u_0 \text{ et } Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases}$$

de plus elle vérifie (3.9, d'où, on peut écrire, comme au Lemme 2.1, pour $x \in [0,1[$

$$u'(x) = Qe^{xQ}\xi_0 - Qe^{(1-x)Q}\xi_1 + QI_x - QJ_x,$$

et en déduire que

$$\begin{cases} u(0) = \xi_0 + e^Q\xi_1 + J_0 \\ u(1) = e^Q\xi_0 + \xi_1 + I_1 \\ u'(0) = 2Q\xi_0 - Qu_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

De plus $u'(0) = 2Q\xi_0 - Qu_0 \in D(H)$, donc $Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}$ devient

$$\begin{cases} H(2Q\xi_0 - Qu_0) + e^Q\xi_0 + \xi_1 + I_1 = u_{1,0} \\ \xi_0 + e^Q\xi_1 + J_0 = u_0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} H\left(Qu_0 - 2QJ_0 - 2Qe^Q\xi_1\right) + e^Q\left(u_0 - J_0 - e^Q\xi_1\right) + \xi_1 + I_1 = u_{1,0} \\ \xi_0 = u_0 - J_0 - e^Q\xi_1, \end{cases}$$

or, puisque $2Qe^Q\xi_1 \in D(Q) \subset D(H)$, on a

$$Qu_0 - 2QJ_0 \in D(H), \tag{3.13}$$

et

$$\begin{cases} \xi_1 = \Lambda^{-1}u_{1,0} - \Lambda^{-1}I_1 - \Lambda^{-1}e^Q(u_0 - J_0) - \Lambda^{-1}H(Qu_0 - 2QJ_0) \\ \xi_0 = u_0 - J_0 - e^Q\left(\Lambda^{-1}u_{1,0} - \Lambda^{-1}I_1 - \Lambda^{-1}e^Q(u_0 - J_0) - \Lambda^{-1}H(Qu_0 - 2QJ_0)\right), \end{cases}$$

d'où le résultat. ■

Afin de simplifier la représentation on rappelle que

$$\Lambda^{-1} = I - W,$$

où $W \in L(X)$ et $W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(Q^k\right)$.

Lemme 3.6 *Si u est une solution semi-stricte du problème (3.1) alors*

$$\begin{aligned} u(x) &= S(x, u_0 - J_0, f) \\ &\quad + S(1-x, u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J_0), f(1-\cdot)) \\ &\quad + R(x), \end{aligned} \tag{3.14}$$

avec

$$S(x,\varphi,f) = e^{xQ_\omega}\varphi + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)\,ds,$$

et

$$\begin{aligned} R(x) &= e^{(1-x)Q}e^Q\overline{u_{1,0}} - e^{(1-x)Q}I_1e^{(1-x)Q}WI_1 \\ &\quad + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}HQe^Qu_0 \\ &\quad - e^{(1-x)Q_\omega}\left(Wu_{1,0} - WHQ(u_0 - 2J_0)\right) \\ &\quad + e^{xQ}e^Q\overline{u_0}. \end{aligned}$$

3.1.5 Régularité de la solution

Proposition 3.1 *Supposons (3.2) ∼(3.4). Soient* $f, g \in L^p(0,1;X)$, $(1 < p < +\infty)$, $\varphi, \psi \in X$ *et* $\varepsilon > 0$. *Alors*

1. $Q^2 S(\cdot, \varphi, f) \in L^p(0,1;X)$ *si et seulement si* $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
2. $QS(\cdot, \varphi, f) \in L^p(0,1;X)$ *si et seulement si* $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.
3. $Q^2 S(\cdot, \varphi, f) + Q^2 S(1-\cdot, \psi, g) \in L^p(0,1;X)$ *si et seulement si* $\varphi, \psi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
4. $QS(\cdot, \varphi, f) + QS(1-\cdot, \psi, g) \in L^p(0,1;X)$ *si et seulement si* $\varphi, \psi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$
5. $Q^2 S(\cdot, \varphi, f) + Q^2 S(1-\cdot, \psi, g) \in L^p(0,1-\varepsilon;X)$ *si et seulement si* $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
6. $Q^2 S(\cdot, \varphi, f) + Q^2 S(1-\cdot, \psi, g) \in L^p(0,1-\varepsilon;X)$ *et*
$$QS(\cdot, \varphi, f) + QS(1-\cdot, \psi, g) \in L^p(0,1;X)$$
si et seulement si $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$ *et* $\psi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$

Preuve.

1. On a
$$Q^2 S(x, \varphi, f) = Q^2 e^{xQ}\varphi + \frac{1}{2}Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds, \text{ p. p. } x \in (0,1),$$
or, voir le Lemme 3.1
$$x \to \frac{1}{2}Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \in L^p(0,1;X),$$
et donc, vu le 1. du Lemme 3.2
$$\begin{aligned} Q^2 S(\cdot, \varphi, f) \in L^p(0,1;X) &\iff Q^2 e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X) \\ &\iff \varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}. \end{aligned}$$
2. De même vu le 2. du Lemme 3.2,
$$\begin{aligned} QS(\cdot, \varphi, f) \in L^p(0,1;X) &\iff Qe^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X) \\ &\iff \varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}. \end{aligned}$$
3. De même $Q^2 S(\cdot, \varphi, f) + Q^2 S(1-\cdot, \psi, g) \in L^p(0,1;X)$ si et seulement si
$$Q^2 e^{\cdot Q}\varphi + Q^2 e^{1-\cdot Q}\psi \in L^p(0,1;X),$$
si et seulement si
$$\varphi, \psi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$
4. On a $Q^2 S(\cdot, \varphi, f) + Q^2 S(1-\cdot, \psi, g) \in L^p(0,1-\varepsilon;X)$ si et seulement si
$$Q^2 S(\cdot, \varphi, f) \in L^p(0,1-\varepsilon;X),$$
si et seulement si $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$.

5. Même raisonnement qu'au 4.
6. Se déduit de 4. et 5.

■

Proposition 3.2 *Supposons (3.2) ∼(3.4). Soient* $f \in L^p(0,1;X)$, $(1 < p < +\infty)$ *alors* $J_0 = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds$ *vérifie*

$$J_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}\,.$$

Preuve. On a $J_0 \in D(Q)$ et vu le Corollaire 3.1

$$\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}\,.$$

■

Theorème 3.1 *On suppose (3.2)∼(3.7) . Soient* $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ *et* $f \in L^p(0,1,X)$. *Alors*

Le Problème (3.1) admet une solution semi-stricte u si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ u_0 - Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds \in D(HQ) \\ u_{1,0} - HQ\left(u_0 - Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds\right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \end{cases} \tag{3.15}$$

De plus, dans ce cas u est unique et donnée par la formule de représentation (3.14) avec une décomposition de la forme

$$u = u_R + u_S,$$

où

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))$,
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

Preuve. Si (3.1) admet une solution semi-stricte u alors, d'après (3.13) du Lemme 3.5 on a

$$u_0 - Q_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sQ_\omega}f(s)\,ds \in D(HQ),$$

et, vu le Lemme 3.6, u s'écrit

$$u(x) = S(x, u_0 - J_0, f) + S(1-x, u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J_0), f(1-\cdot)) + R(x),$$

avec

$$S(x,\varphi,f) = e^{xQ_\omega}\varphi + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)\,ds,$$

et

$$\begin{aligned} R(x) &= e^{(1-x)Q}e^{Q}\overline{u_{1,0}} - e^{(1-x)Q}I_1 e^{(1-x)Q}WI_1 + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}HQe^{Q}u_0 \\ &\quad - e^{(1-x)Q_\omega}\left(Wu_{1,0} - WHQ\left(u_0 - 2J_0\right)\right) + e^{xQ}e^{Q}\overline{u_0}. \end{aligned}$$

Mais pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, à la régularité suivante

$$Q^2 u \in L^p\left(0, 1-\varepsilon; X\right) \text{ et } Qu \in L^p\left(0,1;X\right),$$

or $Q^2 R \in L^p(0,1;X)$ donc, en posant

$$\begin{aligned} w(x) &= u(x) - R(x) \\ &= S\left(x, u_0 - J_0, f\right) + S\left(1-x, u_{1,0} - HQ\left(u_0 - 2J_0\right), f\left(1-\cdot\right)\right), \end{aligned}$$

on a

$$Q^2 w \in L^p\left(0, 1-\varepsilon; X\right) \text{ et } Qw \in L^p\left(0,1;X\right),$$

et vu le 6. de la Proposition 3.1

$$u_0 - J_0 \in \left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} \text{ et } u_{1,0} - HQ\left(u_0 - 2J_0\right)\left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p},$$

d'où, d'après la Proposition 3.2

$$u_0 \in \left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} \text{ et } u_{1,0} - HQ\left(u_0 - 2J_0\right)\left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p},$$

c'est-à-dire (3.30). ■

3.2 Cas particulier du Problème

Nous étudions d'abord le cas particulier $H = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \operatorname{Re}\alpha \geq 0$ donc on a

$$\begin{cases} u''\left(x\right) + Au\left(x\right) = f\left(x\right), \quad x \in \left]0,1\right[\\ u\left(0\right) = u_0 \\ \alpha u'\left(0\right) + u\left(1\right) = u_{1,0}. \end{cases}$$

On suppose que

$$X \text{ est } UMD \tag{3.16}$$

La difficulté principale est l'hypothèse (2.5) et nous avons besoin de quelques résultats de calcul fonctionnel.

Nos hypothèses sur A :

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur fermé dans } X,\ \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\text{ et} \\ \text{pour tout } \theta \in]0,\pi[,\ \sup\limits_{\lambda \in S_\theta} \left\| \lambda\left(A - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{3.17}$$

où $S_\theta := \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg z| < \theta\}$.

De plus on fera l'hypothèse suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall s \in \mathbb{R} : (-A)^{is} \in L(X) \text{ et } \exists C \geqslant 1, \theta_A \in]0, \pi[\\ \left\| (-A)^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_A |s|}, \end{array} \right. \tag{3.18}$$

puisque $H = \alpha I$ alors

$$\Lambda = I - 2\alpha Q e^{Q} - e^{2Q},$$

nous devons étudier les fonctions F, G définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} F(z) = 1 + G(z) \\ G(z) = 2\alpha z e^{-z} - e^{-2z}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{array} \right.$$

3.2.1 Lemmes techniques

D'abord nous fixons $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B(0, 4\varepsilon_0^2) \subset \rho(A)$.

Lemme 3.7 *Posons $S = S_{\pi/4}$, on obtient :*

1. *F, G sont des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{S}$.*
2. *$x > 0$ implique $|F(x)| > 0$.*
3. *$\lim\limits_{\operatorname{Re} z \to +\infty,\ z \in \overline{S}} 2\alpha z e^{-z} + e^{-2z} = 0$ et alors*
   (a) *il existe $x_0 > 0$ tel que $z \in \overline{S}$ et $\operatorname{Re} z \geqslant x_0$ implique que*
   $$2 \geq |F(z)| \geq 1/2.$$
   (b) *F est borné sur $\overline{S}$.*
4. *Il existe $\theta_0 \in]0, \pi/4[$ tel que $F(z)$ est non nulle sur*
   $$\Sigma_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \varepsilon_0 \text{ et } |\arg(z)| \leq \theta_0\},$$
   et $\min\limits_{z \in \Sigma_0} |F(z)| = r > 0$.

Preuve.

1. Evident.
2. On a, pour $x > 0$
   $$\operatorname{Re} F(x) = \left(1 - e^{-2x}\right) + 2 (\operatorname{Re} \alpha)\, x e^{-x} > 0.$$
3. Nous écrivons juste pour $z \in \overline{S}$
   $$\begin{aligned} \left|2\alpha z e^{-z} + e^{-2z}\right| &\leq 2 |\alpha| \, |z| \, e^{-\operatorname{Re} z} + e^{-2 \operatorname{Re} z} \\ &\leq 2\sqrt{2} \, |\alpha| \, (\operatorname{Re} z) \, e^{-\operatorname{Re} z} + e^{-2 \operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

4. On a $|F(z)| \geq 1/2$ pour

$$z \in \Sigma_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x_0 \text{ et } |\arg(z)| < \pi/4\}.$$

De plus F est une fonction holomorphe sur un voisinage de

$$\Sigma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon_0 \geq \operatorname{Re} z \geq x_0 \text{ et } |\arg(z)| \leq \pi/4\},$$

ainsi, sur Σ_2, F a au plus un nombre fini de zéros (qui ne sont pas sur le l'axe réel , voir assertion 2). Donc, on peut trouver $\theta_0 \in]0, \pi/4]$, assez petit tel que F est non nulle sur

$$\Sigma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon_0 \geq \operatorname{Re} z \geq x_0 \text{ and } |\arg(z)| \leq \theta_0\}.$$

De plus

$$\min_{z\in\Sigma_0} |F(z)| = \min\left(\min_{z\in\Sigma_2} |F(z)|, 1/2\right) > 0.$$

■

On pose pour $z \in \Sigma_0$

$$\Psi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}.$$

Lemme 3.8 *Sous les hypothèses (3.17),(3.18) l'opérateur* $\Lambda = I - 2\alpha Q e^Q - e^{2Q}$ *admet un inverse borné et* $\Lambda^{-1} = I - \Psi(-Q)$.

Preuve. On choisi $\theta \in]0, \theta_0[$ tel que $\sigma(-Q) \subset S_\theta \backslash B(0, 2\varepsilon_0)$. On note que G est une fonction holomorphe et bornée sur un voisinage de $S_\theta \backslash B(0, 2\varepsilon_0)$. De plus,il existe $\sigma > 0$ tel que

$$|\Psi(z)| = O\left(|z|^{-\sigma}\right) \text{ quand } z \to +\infty, z \in S_\theta \backslash B(0, 2\varepsilon_0).$$

Ainsi on peut définir $\Psi(-Q)$ et aussi $G(-Q)$ (voir par exemple [15], section 2.5.1, p. 45, en même temps que la remarque 2.5.1 et la fig. 6, le P. 46).

On a aussi $\Lambda = I + G(-Q)$ et

$$\begin{aligned}
(I - \Psi(-Q))\,\Lambda &= (1 - \Psi)(-Q) \circ (1 + G)(-Q) \\
&= [(1 - \Psi)(1 + G)](-Q) \\
&= \left(1 - \frac{G}{1 + G}\right)(1 + G)(-Q) \\
&= 1\,(-Q) \\
&= I.
\end{aligned}$$

Similaire $\Lambda\,(I - \Psi(-Q)) = I$. ■

Si on suppose (3.16), (2.25)et (3.18), $f \in L^p(0, 1, X)$, $u_0, u_{1,0} \in X$ et considère $H = \alpha I$ ($\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\}, \operatorname{Re} \alpha \geq 0$) alors, grâce au Lemme précédent les hypothèses (3.3)$\sim$(3.7) sont vérifiées, ce qui nous permet d'obtenir le théorème suivant.

3.2.2 Régularité de la solution

Theorème 3.2 *Sous les hypothèses (3.16), (3.17) et (3.18) Soient* $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ *et* $f \in L^p(0,1,X)$. *Alors*

Le Problème (3.1) admet une solution semi-stricte u si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}, \\ u_{1,0} - \alpha Q\left(u_0 - Q^{-1}\int\limits_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds\right) \in (D(A),X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}. \end{cases} \tag{3.19}$$

De plus, dans ce cas u est unique et donnée par la formule de représentation (3.14) avec une décomposition de la forme

$$u = u_R + u_S,$$

où

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))$,
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

Remarque 3.1 *Soit* $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \operatorname{Re}\alpha \geq 0$.

1. *Par les mêmes techniques nous pouvons considérer* $H = -\alpha Q$ *sous les hypothèses (3.16), (3.17) et (3.18), on peut étudier les fonctions* $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ *definies par*

$$\widetilde{F}(z) = 1 + \widetilde{G}(z), \quad \widetilde{G}(z) = -2\alpha z^2 e^{-z} - e^{-2z}$$

et on peut montrer que $\Lambda = I + 2\alpha Q^2 e^Q - e^{2Q}$ *admet un inverse borné*

$$\Lambda^{-1} = I - \frac{\widetilde{G}}{1+\widetilde{G}}(-Q),$$

alors (3.3)∼(3.7) sont vérifiées et donc on peut appliquer le théorème suivant

Theorème 3.3 *Sous les hypothèses (3.16),(3.17) et (3.18) Soient* $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ *et* $f \in L^p(0,1,X)$. *Alors*

Le Problème (3.1) admet une solution semi-stricte u si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p} \\ u_0 - Q^{-1}\int\limits_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds \in D(A) \\ u_{1,0} - \alpha Q^2\left(u_0 - Q^{-1}\int\limits_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds\right) \in (D(A),X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \end{cases} \tag{3.20}$$

De plus, dans ce cas u est unique et donnée par la formule de représentation (3.14) avec une décomposition de la forme

$$u = u_R + u_S,$$

où

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))$,
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

3.3 Problème avec un paramètre spectral

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), & \omega > 0, x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{3.21}$$

où A et H sont des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexe X et $u_0, u_{1,0}$ sont des éléments donnés dans X et $f \in L^p(0,1,X)$.

3.3.1 Hypothèses

On suppose que

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{3.22}$$

et qu'il existe $\omega_0 > 0$ (ω_0 fixé). On pose pour tout $\omega \geqslant \omega_0$

$$A_\omega = A - \omega I,$$

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ [0,+\infty[\subset \rho(A_{\omega_0}) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{3.23}$$

De plus on fera l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R} : (-A_{\omega_0})^{is} \in L(X) \text{ et } \exists C \geqslant 1, \theta_{A_{\omega_0}} \in]0,\pi[\\ \left\| (-A_{\omega_0})^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_{A_{\omega_0}}|s|}, \end{cases} \tag{3.24}$$

et

$$\forall \zeta \in D(H) : A_{\omega_0}^{-1} H\zeta = HA_{\omega_0}^{-1}\zeta, \tag{3.25}$$

$$D(Q) \subset D(H). \tag{3.26}$$

3.3.2 Conséquences des hypothèses

1. L'hypothèse (3.23) exprime l'ellipticité du problème (3.21), voir Krein [18]. On en déduit, pour $\omega \geq \omega_0$, que

$$\begin{cases} A_\omega \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \\ [\omega_0 - \omega, +\infty[\subset \rho(A_\omega) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \end{cases} \tag{3.27}$$

car

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sup_{\lambda \geqslant \omega_0 - \omega} \left\| (\lambda + \omega - \omega_0)(A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)},$$

2. Ainsi, pour tout $\omega \geq \omega_0$, $Q_\omega = -\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}$,est un générateur infnitésimal d'un semi-groupe analytique generalisé sur X. Notons que

$$\begin{aligned} c_0 &= \sup_{\lambda \geqslant \omega_0 - \omega} \left\| \left(\lambda + \omega - \omega_0\right)\left(A_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \sup_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda \left(A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)}, \end{aligned}$$

et alors c_0 ne dépend pas de ω.

3. Pour $\omega \geqslant \omega_0$ on a

$$\left(D\left(A\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} = \left(D\left(A_\omega\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p,\ p \in [1,+\infty[}.$$

4. Grâce à J. Prüss-H. Sohr [27], Theorem 2 p.437, l'hypothèse (3.24) implique que pour $\omega \geqslant \omega_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall s \in \mathbb{R} : \left(-A_\omega\right)^{is} \in L\left(X\right) \text{ et } \exists C \geqslant 1, \theta_A \in \left]0, \pi\right[\\ \left\| \left(-A_\omega\right)^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant C e^{\theta_A |s|}, \end{array} \right. \tag{3.28}$$

la constante C étant indépendante de ω.

5. Puisque l'égalité

$$\left(\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)^\beta = \left(-A_\omega\right)^{\frac{\beta}{2}},$$

est vraie pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, on en déduit à partir de (3.28) que

$$\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}} \in BIP\left(\frac{\theta_A}{2}, X\right),$$

et en particulier que

$$\exists C \geqslant 1 : \left\| \left(\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant C e^{\frac{\theta_A}{2}|s|},$$

(voir Haase [15], Proposition 2.18, p. 64).

6. On sait que pour tout $\omega \geqslant \omega_0$

$$\left(D\left(A_\omega\right), X\right)_{\frac{1}{2},1} \subset D\left(\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

voir P. Grisvard [14], p. 667, mais pour $\theta_1 < \theta_2$ et $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$ on a

$$\left(D\left(A\right), X\right)_{\theta_1, p_1} \subset \left(D\left(A\right), X\right)_{\theta_2, p_2},$$

voir P. Grisvard [14], p. 674, donc

$$\left(D\left(A_\omega\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} \subset \left(D\left(A_\omega\right), X\right)_{\frac{1}{2},1} \subset D\left(\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Notation 3.1 *On pose*

$$Q_\omega = -\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.3.3 Lemme technique

Lemme 3.9 *On suppose (3.22) $\sim$ (3.26), alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que, pour $\omega \geqslant \omega^*$, l'opérateur*

$$\Lambda_\omega = -2HQ_\omega e^{Q_\omega} + I - e^{2Q_\omega},$$

admet un inverse borné.

Preuve. On peut écrire $\Lambda_\omega = I - T_\omega$ avec $T_\omega = 2HQ_\omega e^{Q_\omega} + e^{2Q_\omega}$. Donc, pour montrer que l'opérateur Λ_ω a un inverse borné, il suffit de montrer que $\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$.

En utilisant le Lemme p. 103 dans G. Dore et S. Yakubov [9], on a

$$\begin{cases} \exists c > 0 \text{ et } k > 0 : \\ \left\| Q_\omega^3 e^{Q_\omega} \right\|_{L(X)} \leq ce^{-k\sqrt{\omega}} \text{ et } \left\| e^{2Q_\omega} \right\|_{L(X)} \leq ce^{-k\sqrt{\omega}}. \end{cases} \tag{3.29}$$

De plus

$$\begin{aligned} \left\| Q_{\omega_0}^2 Q_\omega^{-2} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| A_{\omega_0} A_\omega^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left\| (A - \omega_0 I)(A - \omega I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left\| (A - \omega I - (\omega_0 - \omega) I)(A - \omega I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left\| I - (\omega_0 - \omega)(A - \omega I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 1 + c_0, \end{aligned}$$

et, puisque $HQ_{\omega_0}^{-2}$ est borné,alors

$$\begin{aligned} \|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| 2HQ_{\omega_0}^{-2} Q_{\omega_0}^2 Q_\omega^{-2} Q_\omega^3 e^{Q_\omega} + e^{2Q_\omega} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 2 \left\| HQ_{\omega_0}^{-2} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| Q_{\omega_0}^2 Q_\omega^{-2} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| Q_\omega^3 e^{2Q_\omega} \right\|_{\mathcal{L}(X)} + \left\| e^{2Q_\omega} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 2 \left\| HQ_{\omega_0}^{-2} \right\|_{\mathcal{L}(X)} (1 + c_0) \left\| Q_\omega^3 e^{2Q_\omega} \right\|_{\mathcal{L}(X)} + \left\| e^{2Q_\omega} \right\|_{\mathcal{L}(X)}, \end{aligned}$$

et de (3.29) donc il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$

$$\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

■

On peut maintenant résoudre Problème (3.21).

3.3.4 Régularité de la solution

Theorème 3.4 *On suppose (3.22)$\sim$(3.26) . Soient $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0,1,X)$. Alors il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$:pour tout $\omega \geqslant \omega^*$le problème (3.21) admet une solution semi-stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ u_0 - Q_\omega^{-1} \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\, ds \in D(HQ_\omega) \\ u_{1,0} - HQ_\omega \left(u_0 - Q_\omega^{-1} \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\, ds \right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}. \end{cases} \tag{3.30}$$

De plus, dans ce cas u est unique et donnée par la formule de représentation (3.14) avec une décomposition de la forme

$$u_\omega = u_{\omega,R} + u_{\omega,S},$$

où

1. $u_{\omega,R} \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))$,
2. $u_{\omega,S} \in W^{1,p}(0,1,X)$.

Remarque 3.2 *On a trouvé deux types de conditions :*

1. *la première est de comportement local lié uniquement à A.*
2. *la deuxième condition est de comportement lié à H et A de forme globale.*

Chapitre 4

Problème aux limites singulier pour une équation générale complète dans un espace UMD : cas B génère un groupe

4.1 Problème aux limites

4.1.1 Position du problème et hypothèses

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \qquad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $u_0, u_{1,0} \in X$ (X est un espace de Banach complexe), $f \in L^p(0,1,X)$. De plus, A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés sur X.

Nos hypothèses sont

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{4.2}$$

et pour les opérateurs B et $B^2 - A$

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X \\ \mathbb{R}+ \subset \rho\left(A - B^2\right) \text{ et } \exists C > 0 : \\ \forall \lambda \geqslant 0, \ \left\| \left(\lambda I + B^2 - A\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \ \left(B^2 - A\right)^{is} \in L(X) \text{ et } \exists \theta \in]0,\pi[\\ \text{tel que } \left\| e^{-\theta|s|} \left(B^2 - A\right)^{is} \right\|_{L(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$H\left(A - B^2\right)^{-1} = \left(A - B^2\right)^{-1} H, \tag{4.5}$$

$$B \text{ génère un groupe fortement continu } \left(e^{xB}\right)_{x \in \mathbb{R}} \text{ dans } X, \tag{4.6}$$

$$D\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}} \subset D(B)\cap D(H) \text{ et } Bu_0 \in D(H), \tag{4.7}$$

$$0 \in \rho(\Pi), \tag{4.8}$$

où $\Pi = -2e^B HPe^P + I - e^{2P}$ avec $P = -\left(B^2-A\right)^{\frac{1}{2}}$.

4.1.2 Représentation de la solution

Sous les hypothèses (4.2)∼(4.8), on donne une Représentation de la solution du problème (4.1) en partant de la formule de représentation (3.11) de la solution u du problème (3.1). Les méthodes sont en un sens similaires à celles dévlppées pour le théorème du chapitre 3, avec des complications techniques dues à B .

Remarque 4.1 *Si $f \in L^p(0,1,X)$, alors $e^{\cdot B} f \in L^p(0,1,X)$ avec $1<p<\infty$.*
En effet, puisque nous avons, la propriété du semi-groupe

$$\exists C>0, \exists \beta \geqslant 0 : \forall x \geqslant 0, \left\|e^{xB}\right\| \leqslant Ce^{x\beta}$$

et donc pour $x \in [0,1]$ on a

$$\left\|e^{xB} f(x)\right\| \leqslant Ce^{x\beta}\left\|f(x)\right\|.$$

Sous l'hypothèse de groupe (4.6) et l'hypothèse de commutativité au sens des résolvantes suivante

$$(H)\begin{cases} \forall x \in [0,1], \forall \mu \in \rho(B) \\ \forall y \in D(A), A(B-\mu I)^{-1} y = (B-\mu I)^{-1} Ay, \end{cases}$$

il est possible de ramener l'étude du problème (4.1) à celle du problème suivant

$$\begin{cases} v''(x) + (A-B^2)v(x) = g(x) & x \in (0,1) \\ v(0) = u_0 \\ e^B Hv'(0) + v(1) = e^B\left(u_{1,0} + HBu_0\right), \end{cases} \tag{4.9}$$

où

$$g(x) = e^{xB} f(x), \quad x \in (0,1).$$

Proposition 4.1 *On suppose que les hypothèses (4.2)∼(4.8) et (H) sont réalisées et que $f \in L^p(0,1,X)$, avec $1<p<\infty$. Si v est une solution semi-stricte du problème (4.9) satisfaisant*

$$v \in W^{2,p}(0,1-\varepsilon;X) \cap L^p\left(0,1-\varepsilon;D(A-B^2)\right) \cap W^{1,p}(0,1;X),$$

alors u définie par

$$u(x) = e^{-xB} v(x), x \in (0,1),$$

est une solution semi-stricte du problème (4.1)

Preuve. Soit $x \in [0,1[$, on suppose que

$$u(x) = e^{-xB} v(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) &= e^{-xB}\big(\big(B^2 v(x) - 2Bv'(x) + v''(x)\big) + 2B(-Bv(x) + v'(x)) + Av(x)\big) \\ &= e^{-xB}\big(v''(x) - B^2 v(x) + Av(x)\big) \\ &= e^{-xB}\big(v''(x) + \left(A - B^2\right) v(x)\big) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

de plus $u(0) = v(0) = u_0$ et

$$\begin{aligned} u(1) + Hu'(0) &= e^{-B} v(1) + H(-Bu_0 + v'(0)) \\ &= e^{-B}\left(e^B(u_{1,0} + HBu_0) - e^B Hv'(0)\right) + H(-Bv(0) + v'(0)) \\ &= u_{1,0}. \end{aligned}$$

■

La solution du problème (4.9) est donnée par

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{xP} e^P \overline{u_0} + e^{(1-x)P} e^P \overline{u_{1,0}} \\ &\quad + \frac{1}{2} P^{-1} \int_0^x e^{(x-s)P} e^{sB} f(s)\, ds + \frac{1}{2} P^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)P} e^{sB} f(s)\, ds \\ &\quad - \frac{1}{2} P^{-1} \int_0^1 e^{((1-x)+(1-s))P} e^{sB} f(s)\, ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \Pi^{-1} P^{-1} \int_0^1 e^{(x+s)P} e^{sB} f(s)\, ds \\ &\quad e^{xP} u_0 + \Pi^{-1} e^{(1-x)P} e^B u_{1,0} \\ &\quad - e^{(1-x)P} \Pi^{-1} e^B H\left((P + B) u_0 - 2PJ_0\right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} P = -\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \\ \overline{u_0} = -e^B \Pi^{-1} H(Pu_0 - 2PJ_0) - \Pi^{-1} u_{1,0} + e^P \Pi^{-1} u_0 - e^P \Pi^{-1} PJ_0 + \Pi^{-1} I_1 \\ \overline{u_{1,0}} = \Pi^{-1} J_0 - \Pi^{-1} u_0 \\ I_1 = \frac{1}{2} P^{-1} \displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)P} e^{sB} f(s)\, ds \\ J_0 = \frac{1}{2} P^{-1} \displaystyle\int_0^1 e^{sP} e^{sB} f(s)\, ds. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} u_R(x) = \overline{r}(x) + \overline{S_1}(x) + \overline{S_2}(x) \\ u_S = \overline{S_3}(x), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \overline{r}(x) = e^{-xB}\left(e^{xP}e^{P}\overline{u_0} + e^{(1-x)P}e^{P}\overline{u_{1,0}}\right) \\ \overline{S_1}(x) = e^{-xB}\left(e^{xP}u_0\right) + e^{-xB}(\frac{1}{2}P^{-1}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)P}e^{sB}f(s)\,ds \\ \overline{S_2}(x) = \frac{1}{2}P^{-1}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)P}e^{sB}f(s)\,ds \\ -\frac{1}{2}P^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{((1-x)+(1-s))P}e^{sB}f(s)\,ds - \frac{1}{2}\Pi^{-1}P^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{(x+s)P}e^{sB}f(s)\,ds) \\ \overline{S_3}(x) = e^{-xB}e^{(1-x)P}\Pi^{-1}\left(u_{1,0} - H\left((P+B)u_0 - 2PJ_0\right)\right). \end{cases}$$

4.1.3 Régularité de la solution

Theorème 4.1 *On suppose que les hypothèses (4.2)∼(4.8) et (H) sont réalisées et que* $f \in L^p(0,1,X)$ *,avec* $1 < p < \infty$*. Pour tout* $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ *on a :*

u est une solution semi-stricte du problème (3.21) si et seulement si

$$\begin{cases} (P+B)u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sP}e^{sB}f(s)\,ds \in D(H) \\ \left(u_{1,0} - H\left((P+B)u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sP}e^{sB}(s)\,ds\right)\right) \in \left(D\left(B^2-A\right),X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \\ u_0 \in \left(D\left(B^2-A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

de plus dans ce cas, u admet une décomposition $u = u_R + u_S$ *où*

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A)), u_R' \in L^p(0,1,D(B))$
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

Preuve. Soient $u_0 \in \left(D\left(B^2-A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}$. Si

$$u_0 \in \left(D\left(B^2-A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p} \Leftrightarrow P^2e^{\cdot P}u_0, P^2e^{(1-.)P}u_{1,0} \in L^p(0,1,X),$$

nous avons

$$v_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p\left(0,1,D\left(B^2-A\right)\right),$$

donc

$$\left(B^2-A\right)v_R \in L^p(0,1,X),$$

et puisque

$$u_R(.) = e^{-xB}v_R(.)$$

cela implique que

$$\left(B^2-A\right)u_R(.) = e^{-(.)B}\left(B^2-A\right)v_R(.) \in L^p(0,1,X).$$

D'autre part

$$\begin{cases} B^2v_R(.) = B^2e^{xP}e^{P}\overline{u_0} + B^2e^{(1-x)P}e^{P}\overline{u_{1,0}} \\ +\frac{1}{2}B^2P^{-1}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)P}f(s)\,ds + \frac{1}{2}B^2P^{-1}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)P}f(s)\,ds \\ -\frac{1}{2}B^2P^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{((1-x)+(1-s))P}f(s)\,ds - \frac{1}{2}B^2\Pi^{-1}P^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{(x+s)P}f(s)\,ds \\ +B^2e^{xP}u_0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} B^2 v_R(.) = B^2 P^{-2} e^{xP} P^2 e^P \overline{u_0} + B^2 P^{-2} e^{(1-x)P} P^2 e^P \overline{u_{1,0}} \\ +\frac{1}{2} B^2 P^{-2} \left(P \int_0^x e^{(x-s)P} f(s)\, ds + P \int_x^1 e^{(s-x)P} f(s)\, ds \right) \\ -\frac{1}{2} B^2 P^{-2} \left(P \int_0^1 e^{((1-x)+(1-s))P} f(s)\, ds + \Pi^{-1} P \int_0^1 e^{(x+s)P} f(s)\, ds \right) \\ +B^2 P^{-2} \left(P^2 e^{xP} u_0 \right), \end{cases}$$

et puisque $B^2 P^{-2} \in L(X)$ et que P génère un semi-groupe analytique, en appliquant le lemme 3.1, on obtient

$$B^2 v_R \in L^p(0,1,X),$$

alors

$$A u_R \in L^p(0,1,X).$$

On a

$$\begin{cases} u_R' = e^{-(.)B} \left(-B v_R + v_R' \right) \\ u_R'' = e^{-(.)B} \left(B^2 v_R - 2B v_R' + v_R'' \right), \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} &B v_R'(x) = BP e^{xP} e^P \overline{u_0} - BP e^{(1-x)P} e^P \overline{u_{1,0}} \\ &+\frac{1}{2} B \left(\int_0^x e^{(x-s)P} f(s)\, ds - \int_x^1 e^{(s-x)P} f(s)\, ds \right) \\ &-\frac{1}{2} B \left(\Pi^{-1} \int_0^1 e^{(x+s)P} f(s)\, ds - \int_0^1 e^{((1-x)+(1-s))P} f(s)\, ds \right) \\ &+BP e^{xP} u_0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &B v_R'(x) = BP^{-1} \left(e^{xP} P^2 e^P \overline{u_0} - e^{(1-x)P} P^2 e^P \overline{u_{1,0}} \right) \\ &+\frac{1}{2} BP^{-1} \left(P \int_0^x e^{(x-s)P} f(s)\, ds - P \int_x^1 e^{(s-x)P} f(s)\, ds \right) \\ &-\frac{1}{2} BP^{-1} \left(\Pi^{-1} P \int_0^1 e^{(x+s)P} f(s)\, ds - P \int_0^1 e^{((1-x)+(1-s))P} f(s)\, ds \right) \\ &+BP^{-1} P^2 e^{xP} u_0, \end{aligned}$$

et puisque $BP^{-1} \in L(X)$ et en utilisant le lemme 3.1 on obtient

$$B v_R' \in L^p(0,1,X).$$

Alors

$$B u_R' = e^{-(.)B} \left(-B^2 v_R + B v_R' \right) \in L^p(0,1,X),$$

et

$$u_R'' = e^{-(.)B} \left(B^2 v_R - 2B v_R' + v_R'' \right) \in L^p(0,1,X),$$

soit

$$u_R \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A)),\, u_R' \in L^p(0,1,D(B)).$$

On a supposé que $(P+B)\, u_0 - 2PJ_0 \in D(H)$ donc, pour u_S on applique le lemme 3.2 on obtient

$$u_S = e^{-xB} e^{(1-x)P} \Pi^{-1} \left(u_{1,0} - H\left((P+B)\, u_0 - 2PJ_0 \right) \right) \in W^{1,p}(0,1,X),$$

si et seulement si

$$\left(u_{1,0} - H\left(\left(P + B\right) u_0 - 2PJ_0\right)\right) \in \left(D\left(B^2 - A\right), X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.$$

■

4.2 Problème aux limites avec un paramètre ω

4.2.1 Position du problème et hypothèses

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u''\left(x\right) + 2Bu'\left(x\right) + Au\left(x\right) - \omega u\left(x\right) = f\left(x\right) & \omega > 0, x \in \left]0,1\right[\\ u\left(0\right) = u_0 \\ Hu'\left(0\right) + u\left(1\right) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{4.10}$$

avec $u_0, u_{1,0} \in X$ (X est un espace de Banach complexe), $f \in L^p\left(0,1,X\right)$ et A, B, H sont des opérateurs linéaires fermés sur X.

On suppose que

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{4.11}$$

et pour les opérateurs B et $B^2 - A$

$$\begin{cases} \exists\omega_0 \geqslant 0 : B^2 - A_{\ \omega_0} \text{est un opérateur linéaire fermé dans } X \\ \mathbb{R}_+ \subset \rho\left(A_{\ \omega_0} - B^2\right) \text{ et } \exists C > 0 : \\ \forall\lambda \geqslant 0, \quad \left\|\left(\lambda I + B^2 - A_{\ \omega_0}\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\begin{cases} \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \ \left(B^2 - A_{\ \omega_0}\right)^{is} \in L\left(X\right) \text{ et } \exists\theta \in \left]0,\pi\right[\\ \text{tel que } \left\|e^{-\theta|s|}\left(B^2 - A_{\ \omega_0}\right)^{is}\right\|_{L(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} H \text{ est un opérateur linéaire fermé} \\ : \lambda_0 \in \rho\left(H\right), \end{cases} \tag{4.14}$$

$$H\left(A_{\ \omega_0} - B^2\right)^{-1} = \left(A_{\ \omega_0} - B^2\right)^{-1} H \tag{4.15}$$

$$B \text{ génère un groupe fortement continu dans } X, \tag{4.16}$$

$$D\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \subset D\left(B\right) \cap D\left(H\right) \text{ et } Bu_0 \in D\left(H\right). \tag{4.17}$$

4.2.2 Conséquences des hypothèses

On pose

$$A_\omega = A - \omega I, \ \omega > 0.$$

1. L'hypothèse (4.12) se traduit sur $B^2 - A_\omega$ la forme

$$\left\{\begin{array}{l} B^2 - A_\omega \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X \\ [\omega_0 - \omega, +\infty[\subset \rho\left(A - B^2_\omega\right) \text{ et } \exists C > 0 : \\ \forall \lambda \geqslant (\omega_0 - \omega)\,, \ \left\|(\lambda I + B^2 - A_\omega)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + \lambda + \omega}. \end{array}\right. \tag{4.18}$$

2. Pour $\omega \geqslant 0$ grâce à A.V. Balakrishnan [2], l'hypothèse (4.12) implique que

$$P_\omega = -\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}},$$

est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique

$$\left(e^{xP_\omega}\right)_{x \geqslant 0} \text{ dans } X.$$

3. Pour $\omega \geqslant 0$ on a

$$\left(D\left(B^2 - A_\omega\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} = \left(D\left(B^2 - A\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p}.$$

4.2.3 Représentation de la solution

Lemme 4.1 *Sous les hypothèses (4.11) $\sim$ (4.17). Alors $\exists \omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour $\omega \geqslant \omega^*$ considérons l'opérateur linéaire*

$$\Pi_\omega = -2e^B H P_\omega e^{P_\omega} + I - e^{2P_\omega}$$

admet un inverse borné.

Preuve. On peut écrire

$$\Pi_\omega = \left(-2e^B H P_\omega e^{P_\omega}\left(I - e^{2P_\omega}\right)^{-1} + I\right)\left(I - e^{2P_\omega}\right),$$

pour montrer que Π_ω admet un inverse borné, il suffit de montrer que

$$\left\|-2e^B H P_\omega e^{P_\omega}\left(I - e^{2P_\omega}\right)^{-1}\right\|_{L(X)} < 1,$$

pour $\left(I - e^{2P_\omega}\right)^{-1}$ est borné car $\left\|e^{2P_\omega}\right\|_{L(X)} < 1$. On pose

$$\begin{aligned} T_\omega &= -2e^B H P_\omega e^{P_\omega}\left(I - e^{2P_\omega}\right)^{-1} \\ &= -2e^B H P_{\omega_0}^{-1} P_{\omega_0} P_\omega^{-1} P_\omega^2 e^{P_\omega}\left(I - e^{2P_\omega}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

d'après Dore et Yakubov [9] on a

$$\exists c_1 > 0 \text{ et } k > 0 : \left\|P_\omega^2 e^{P_\omega}\right\|_{L(X)} < c_1 e^{-k\sqrt{\omega}},$$

et pour $\left(I - e^{2P_\omega}\right)^{-1}$ on a $\left(I - e^{2P_\omega}\right)^{-1}$est borné donc

$$\exists c_2 > 0 : \left\|\left(I - e^{2P_\omega}\right)^{-1}\right\|_{L(X)} < c_2,$$

e^B est borné donc

$$\exists c_3 > 0 : \left\| e^B \right\|_{L(X)} < c_3,$$

et pour $HP_{\omega_0}^{-1}$, comme H est fermé et $P_{\omega_0}^{-1}$ est borné qui est inversible et défini sur X, alors $HP_{\omega_0}^{-1}$ est borné donc

$$\exists c_4 > 0 : \left\| HP_{\omega_0}^{-1} \right\|_{L(X)} < c_4,$$

et pour $P_{\omega_0} P_\omega^{-1}$ on a

$$\begin{aligned}
P_{\omega_0} P_\omega^{-1} &= \left(B^2 - A_{\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\
&= \left(\left(B^2 - A_{\omega_0}\right)\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left(B^2 - A_{\omega_0}\right)\left(B^2 - A_{\omega_0} + (\omega - \omega_0) I\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(I - (\omega - \omega_0)\left(B^2 - A_{\omega_0} + (\omega - \omega_0) I\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

donc on a

$$\exists M > 0 : \left\| P_{\omega_0} P_\omega^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \left(1 + C\frac{(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + C)^{\frac{1}{2}},$$

alors

$$\left\| T_\omega \right\|_{L(X)} \leqslant c_1 c_2 c_3 c_4 (1 + M)^{\frac{1}{2}} e^{-k\sqrt{\omega}} < 1, \text{ pour } \omega \text{ assez grand.}$$

On remplace P par P_ω dans la représentation de la solution du problème (4.1), alors la solution du problème (4.10) s'ecrit sous la forme

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-xB}\left(e^{xP_\omega} e^{P_\omega} \overline{\overline{u_0}} + e^{(1-x)P_\omega} e^{P_\omega} \overline{\overline{u_{1,0}}}\right) \\
&\quad + e^{-xB}\left(\frac{1}{2} P_\omega^{-1} \int_0^x e^{(x-s)P_\omega} f(s)\, ds + \frac{1}{2} P_\omega^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)P_\omega} f(s)\, ds\right) \\
&\quad - e^{-xB} \frac{1}{2} P_\omega^{-1} \int_0^1 e^{((1-x)+(1-s))P_\omega} f(s)\, ds \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{-xB} \Pi_\omega^{-1} P_\omega^{-1} \int_0^1 e^{(x+s)P_\omega} f(s)\, ds \\
&\quad + e^{-xB}\left(e^{xP_\omega} u_0 + \Pi_\omega^{-1} e^{(1-x)P_\omega} u_{1,0}\right) \\
&\quad + e^{-xB} e^{(1-x)P_\omega}\left(2\Pi_\omega^{-1} H P_\omega J_0 - \Pi_\omega^{-1} H (P_\omega + B) u_0\right)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases}
\overline{\overline{u_0}} = e^B \Pi_\omega^{-1} H P_\omega u_0 - \Pi_\omega^{-1} u_{1,0} - 2e^B \Pi_\omega^{-1} H P_\omega J_0 + e^{P_\omega} \Pi_\omega^{-1} u_0 - e^{P_\omega} \Pi_\omega^{-1} P_\omega J_0 + \Pi_\omega^{-1} I_1^\omega \\
\overline{\overline{u_{1,0}}} = \Pi_\omega^{-1} J_0 - \Pi_\omega^{-1} u_0 \\
I_1^\omega = \frac{1}{2} P_\omega^{-1} \displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)P_\omega} f(s)\, ds \\
J_0^\omega = \frac{1}{2} P_\omega^{-1} \displaystyle\int_0^1 e^{sP_\omega} f(s)\, ds.
\end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} u_R(x) = e^{-xB}\left(e^{xP_\omega}e^{P_\omega}\overline{\overline{u_0}} + e^{(1-x)P_\omega}e^{P_\omega}\overline{\overline{u_{1,0}}}\right) \\ +e^{-xB}\left(\frac{1}{2}P_\omega^{-1}\int_0^x e^{(x-s)P_\omega}f(s)\,ds + \frac{1}{2}P_\omega^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)P_\omega}f(s)\,ds\right) \\ -e^{-xB}\frac{1}{2}P_\omega^{-1}\int_0^1 e^{((1-x)+(1-s))P_\omega}f(s)\,ds \\ -\frac{1}{2}e^{-xB}\Pi_\omega^{-1}P_\omega^{-1}\int_0^1 e^{(x+s)P_\omega}f(s)\,ds \\ +e^{-xB}\left(e^{xP_\omega}u_0\right) \\ u_S(x) = -e^{-xB}e^{(1-x)P}\Pi_\omega^{-1}\left(u_{1,0} + H\left((P_\omega+B)u_0 - 2P_\omega J_0^\omega\right)\right), \end{cases}$$

où u_R est la partie régulière et u_S est la partie singulière. ■

4.2.4 Régularité de la solution

Theorème 4.2 *Sous les hypothèses (4.11) $\sim$ (4.17), Pour tout $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0,1,X)$. Alors $\exists \omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour $\omega \geqslant \omega^*$:*

u_ω est une solution semi stricte du problème (3.21) si et seulement si

$$\begin{cases} 1. \begin{cases} \left((P_\omega+B)u_0 - \int_0^1 e^{sP_\omega}f(s)\,ds\right) \in D(H) \\ u_{1,0} + H\left((P_\omega+B)u_0 - \int_0^1 e^{sP_\omega}f(s)\,ds\right) \in \left(D\left(B^2-A\right), X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \end{cases} \\ 2.\ u_0 \in \left(D\left(B^2-A\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

de plus dans ce cas u admet une décomposition $u_\omega = u_{\omega,R} + u_{\omega,S}$ où

1. *$u_{\omega,R} \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A)), u'_R \in L^p(0,1,D(B))$.*
2. *$u_{\omega,S} \in W^{1,p}(0,1,X)$.*

Chapitre 5

Problème aux limites singulier pour une équation générale complète dans un espace UMD : approche L et M

5.1 Problème aux limites

5.1.1 Position du problème et hypothèses

On considère le problème abstrait suivant :

$$\begin{cases} u''(x) + (L-M)\, u'(x) - LMu(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{5.1}$$

où u_0,$u_{1,0} \in X$; $f \in L^p(0,1,X)$ et L, M sont deux opérateurs linéaires fermés dans X (X est un espace de Banach complexe) de domaine $D(L)$ et $D(M)$ et H est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(H)$.

Nos hypothèses sont :

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{5.2}$$

et pour les opérateurs L et M

$$\begin{cases} i)\ D(L) = D(M) \\ \\ ii)\ D(ML) = D(LM), \end{cases} \tag{5.3}$$

$$ML = LM, \tag{5.4}$$

$$\exists \theta_L, \theta_M \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: (-L) \in BIP(\theta_L, X), (-M) \in BIP(\theta_M, X), \tag{5.5}$$

$$(L+M)^{-1} \in L(X). \tag{5.6}$$

Sur M en lien avec H

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(M), \ \forall \xi \in D(H) \\ \\ (M-\lambda I)^{-1}\xi \in D(H) \ \text{ et } H(M-\lambda I)^{-1}\xi = (M-\lambda I)^{-1} H\xi, \end{cases} \tag{5.7}$$

Sur L en lien avec H

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(L), \ \forall \xi \in D(H) \\ \\ (L-\lambda I)^{-1}\xi \in D(H) \ \text{ et } H(L-\lambda I)^{-1}\xi = (L-\lambda I)^{-1} H\xi, \end{cases} \tag{5.8}$$

et

$$D(L) \subset D(H), \tag{5.9}$$

en plus des hypothèses précédentes, on ajoute cette hypothèse :

$$0 \in \rho(\Lambda),$$

où

$$\Lambda = -H(L+M)e^{L} - e^{M+L} + I. \tag{5.10}$$

On rappelle le résulat suivant

Theorème 5.1 *(A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi)*
Sous les hypothèses (5.2) $\sim$ (5.6) et pour $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$, le problème

$$\begin{cases} u''(x) + (L-M)u'(x) - LMu(x) = f(x), \quad x \in \,]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{5.11}$$

admet une solution unique u satisfaisant

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(ML)), \ u' \in L^p(0,1;D(L-M)),$$

si et seulement si

$$u_0, u_{1,0} \in (D(ML), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

(Cette solution sera appelée la solution stricte du problème (5.11), voir [10]).

5.1.2 Conséquences des hypothèses

Remarque 5.1

1. *Suite à l'hypothèse (5.5) on déduit que L et M génèrent des semi-groupes analytiques dans X (voir J. Prüss-H. Sohr [27], Theorem 2, page 437).*

$$\left(e^{xL}\right)_{x\geqslant 0}, \ \left(e^{xM}\right)_{x\geqslant 0}.$$

2. *En utilisant une fois encore J. Prüss-H. Sohr [27] (Theorem 4, page 443) et l'hypothèse (5.5), on obtient*

$$-(L+M) \in BIP(\theta, X), \ \textit{avec } \theta = \max(\theta_M, \theta_L),$$

si $\theta_M \neq \theta_L$.

3. *A partir des remarques précédentes, on déduit que*
$$\forall x \geqslant 0,\ e^{xL}e^{xM} = e^{x(M+L)}.$$
4. *De l'hypothèse (5.5) et grâce au corollaire 2. p. 433 dans* [47]*, on a*
$$L\left(L+M\right)^{-1} \text{ et } M\left(L+M\right)^{-1} \in L\left(X\right).$$
5. *L'hypothèse (5.3) est équivalente à*
$$\begin{cases} i)\ D\left(L\right) = D\left(M\right) \\ \\ ii)\ D\left(L^2\right) = D\left(M^2\right). \end{cases}$$
6. *Pour* $C = L$ *ou* M *et pour* $\theta_1 \leq \theta_2$ *et pour* $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$, *on a*
$$\left(D\left(C^2\right), X\right)_{\theta_1, p_1} \subset \left(D\left(C^2\right), X\right)_{\theta_2, p_2}$$
$$\left(D\left(C^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p}, p} \subset \left(D\left(C^2\right), X\right)_{\frac{1}{2}, 1} \subset D\left(C\right).$$

5.1.3 Lemmes techniques

Lemme 5.1 *Sous les hypothèses (5.2) ∼(5.8), on a pour* $x \geqslant 0$ *l'égalité suivante*
$$\forall \xi \in D\left(H\right) : He^{x(M+L)}\xi = e^{x(M+L)}H\xi.$$

Preuve. On sait que si l'opérateur C génère un semi-groupe analytique
$$\left(e^{xC}\right)_{x \geqslant 0},$$
alors
$$\forall x \geqslant 0, e^{xC} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{xC}{n}\right)^{-n},$$
voir T.Kato [19] page 481. Donc sous l'hypothèse (5.7) et pour tout $x > 0$ (le cas $x = 0$ est direct) on obtient
$$\begin{aligned} He^{xM}\xi &= \lim_{n \to +\infty} H\left(1 - \frac{xM}{n}\right)^{-n} \xi \\ &= \lim_{n \to +\infty} H\left(\frac{n}{x}\right)^n \left(\frac{n}{x} - M\right)^{-n} \xi \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{x}\right)^n \left(\frac{n}{x} - M\right)^{-n} H\xi \\ &= e^{xM}H\xi, \end{aligned}$$
de la même façon et sous (5.8) on montre que
$$\forall x \geqslant 0 : He^{xL}\xi = e^{xL}H\xi,$$
finalement, en utilisant 3 de la remarque précédente, on obtient pour tout $x \geqslant 0$ et $\xi \in D\left(H\right)$
$$He^{x(M+L)}\xi = e^{x(M+L)}H\xi.$$

■

Lemme 5.2 *Sous les hypothèses (5.2) $\sim$ (5.6), pour $g \in L^p(0,1,X)$ avec $1 < p < \infty$ et $C = L$ ou M, on a les résultats suivants :*

1. $x \to T(x,g,C) = C\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)C} g(s)\,ds \in L^p(0,1,X)$.
2. $x \to T(1-x, g(1-.), C) = C\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)C} g(s)\,ds \in L^p(0,1,X)$.
3. $x \to \mathcal{F}(x,g,C) = LM(L+M)^{-1}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)C} g(s)\,ds \in L^p(0,1,X)$.
4. $x \to \mathcal{F}(1-x, g(1-.), C) = LM(L+M)^{-1}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)C} g(s)\,ds \in L^p(0,1,X)$.
5. $x \to \mathcal{L}(x,g,C) = LM(L+M)^{-1} e^{xC}\displaystyle\int_0^1 e^{s(L+M-C)} g(s)\,ds \in L^p(0,1,X)$.

Preuve. Les deux premières assertions sont obtenues directement en utilisant le Théorème de Dore -Venni [8] pour le problème

$$\begin{cases} u'(x) + Cu(x) = g(x) \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Pour la troisième assertion nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x,g,C) &= LM(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)C} g(s)\,ds \\ &= (L+M-C)(L+M)^{-1} C\int_0^x e^{(x-s)C} g(s)\,ds, \end{aligned}$$

et puisque

$$(L+M-C)(L+M)^{-1} \in L(X),$$

on a

$$\mathcal{F}(.,g,C) \in L^p(0,1,X).$$

L'assertion 4 est une conséquence de l'assertion précédente.

Pour la cinquième assertion on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x,g,C) &= LM(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{s(L+M-C)} g(s)\,ds \\ &= LM(L+M)^{-1} e^{xC}\int_0^x e^{s(L+M-C)} g(s)\,ds \\ &\quad + LM(L+M)^{-1} e^{xC}\int_x^1 e^{s(L+M-C)} g(s)\,ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x,g,C) &= LM(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)C}e^{s(L+M)}g(s)\,ds \\
&\quad + LM(L+M)^{-1}e^{xC}e^{x(L+M-C)}\int_0^{1-x} e^{(1-x-s)(L+M-C)}g(s)\,ds \\
&= F\left(x,e^{\cdot(L+M)}g,C\right) \\
&\quad + e^{x(L+M)}F\left(1-x,g(1-.),(L+M-C)\right),
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}(x,g,C)\in L^p(0,1,X),$$

car $e^{\cdot(L+M)}$ est borné donc dans $L^p(0,1,X)$. ■

Lemme 5.3 *Soient $m\in\mathbb{N}^*, p\in\,]1,+\infty[$. Alors p.p $x\in(0,1)$ on a*

$$x\to C^m e^{xC}\varphi\in L^p(0,1,X),$$

si et seulement si

$$\varphi\in\left(D\left(C^m\right),X\right)_{\frac{1}{mp},p},$$

où $C=L$ ou M.(voir Triebel [17], Theorem p. 96).

5.1.4 Représentation de la solution

Si $(L+M)^2$ est un scalaire strictement positif, alors la solution générale de

$$u''(x)+(L-M)u'(x)-LMu(x)=0,\quad x\in\,]0,1[,$$

s'écrit

$$u(x)=e^{xM}y_0+e^{-xL}y_1=e^{xM}\xi_0+e^{(1-x)L}\xi_1,$$

où

$$y_0=\xi_0 \text{ et } y_1=e^{L}\xi_1.$$

En supposant que ξ_0 et ξ_1 sont des fonctions vectorielles de la variable x et en utilisant la méthode de la variation de la constante, on obtient une solution formelle de l'équation

$$u''(x)+(L-M)u'(x)-LMu(x)=f,\quad x\in\,]0,1[,$$

donnée par

$$u(x)=e^{xM}\xi_0+e^{(1-x)L}\xi_1+I_x+J_x, \tag{5.12}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned}
I_x &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)\,ds \\
J_x &= (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)\,ds.
\end{aligned}\right. \tag{5.13}$$

Remarque 5.2 *Supposons que u est une solution stricte sur $[0,1-\varepsilon]$ du Problème (5.1). Alors*

1. $u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
2. $u_0 \in D(M)$ *car*

$$\begin{aligned} u_0 &\in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ &= \left(X, D\left(M^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} \\ &= (X, D(M))_{2-\frac{1}{p},p} \\ &= (X, D(M))_{1+\left(1-\frac{1}{p}\right),p} \subset D(M). \end{aligned}$$

3. *u admet une représentation du type (5.12) avec (5.13). Il reste à déterminer ξ_0, ξ_1, alors sachant que $u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}$. En utilisant les conditions aux limites on a*

$$\begin{cases} u(0) = \xi_0 + e^L\xi_1 + J_0 \\ u(1) = e^M\xi_0 + \xi_1 + I_1 \\ u'(0) = M\xi_0 - Le^L\xi_1 - LJ_0, \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \xi_0 = u_0 - e^L\xi_1 - J_0 \\ u'(0) = M\xi_0 - Le^L\xi_1 - LJ_0, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} u'(0) &= M\left(u_0 - e^L\xi_1 - J_0\right) - Le^L\xi_1 - LJ_0 \\ &= Mu_0 - (M+L)e^L\xi_1 - (M+L)J_0, \end{aligned}$$

puisque $u'(0) \in D(H)$ et

$$(M+L)e^L\xi_1 \in D(L) \subset D(H),$$

donc il est nécessaire que

$$(Mu_0 - (M+L)J_0) \in D(H).$$

Finalement

$$\begin{cases} \xi_0 = u_0 - e^{L}\xi_1 - J_0 \\ \\ Hu'(0) + u(1) \\ = H\left(Mu_0 - (M+L)e^{L}\xi_1 - H(M+L)J_0\right) + e^{M}\xi_0 + \xi_1 + I_1 = u_{1,0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\xi_0 = Mu_0 - Me^{L}\xi_1 - MJ_0 \\ \\ H(Mu_0 - (M+L)J_0) - H(M+L)e^{L}\xi_1 + e^{M}\left(u_0 - e^{L}\xi_1 - J_0\right) + \xi_1 + I_1 \\ = u_{1,0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_0 = u_0 - e^{L}\xi_1 - J_0 \\ \\ H(Mu_0 - (M+L)J_0) - H(M+L)e^{L}\xi_1 + e^{M}\left(u_0 - e^{L}\xi_1 - J_0\right) + \xi_1 + I_1 \\ = u_{1,0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_0 = u_0 - e^{L}\xi_1 - J_0 \\ \\ \left(-H(L+M)e^{L} + I - e^{M+L}\right)\xi_1 \\ = u_{1,0} - H(Mu_0 - (L+M)J_0) - e^{M}u_0 + e^{M}J_0 - I_1, \end{cases}$$

et puisque $\Lambda = -H(L+M)e^{L} + I - e^{M+L}$ *de domaine* X *admet un inverse borné, alors*

$$\begin{cases} \xi_0 = u_0 - e^{L}\Lambda^{-1}\left(u_{1,0} - H(Mu_0 - (L+M)J_0) - e^{M}u_0 + e^{M}J_0 - I_1\right) - J_0 \\ \\ \xi_1 = \Lambda^{-1}\left(u_{1,0} - H(Mu_0 - (L+M)J_0) - e^{M}u_0 + e^{M}J_0 - I_1\right), \end{cases}$$

donc la solution s'écrit

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xM}\left(u_0 - e^{L}\Lambda^{-1}\left(u_{1,0} - H(Mu_0 - (M+L)J_0) - e^{M}u_0 + e^{M}J_0 - I_1\right) - J_0\right) \\ &\quad + e^{(1-x)L}\Lambda^{-1}\left(u_{1,0} - H(Mu_0 - (L+M)J_0) - e^{M}u_0 + e^{M}J_0 - I_1\right) \\ &\quad + (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)\,ds \\ &\quad + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)\,ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xM}u_0 + e^{xM}e^{L}\overline{u_0} + e^{(1-x)L}e^{M}\overline{u_{1,0}} - e^{xM}J_0 \\ &\quad + e^{(1-x)L}\Lambda^{-1}u_{1,0} - e^{(1-x)L}\left(\Lambda^{-1}H(Mu_0 - (L+M)J_0)\right) - e^{(1-x)L}\Lambda^{-1}I_1 \\ &\quad + (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)\,ds \\ &\quad + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)\,ds, \end{aligned}$$

avec
$$\begin{cases} \overline{u_0} = \Lambda^{-1}\left(u_{1,0} - H\left(Mu_0 - (M+L)\,J_0\right) - e^M u_0 + e^M J_0 - I_1\right) \\ \\ \overline{u_{1,0}} = \Lambda^{-1}J_0 - \Lambda^{-1}u_0. \end{cases}$$

4. *La représentation de la solution est donc donnée par*

$$u(x) = \overline{S}(x) + R\left(x, \overline{u_0}, M\right) + R\left(1-x, \overline{u_{1,0}}, L\right),$$

où pour tout $\varphi \in X$ *et* $x \in (0,1)$

$$\begin{cases} R(x,\varphi,C) = e^{xC}e^{x(L+M-C)}\varphi \\ \\ \overline{S}(x) = e^{xM}u_0 + (L+M)^{-1}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)\,ds \\ -e^{(1-x)L}\Lambda^{-1}\left(u_{1,0} - H\left(Mu_0 - (L+M)\,J_0\right)\right) + (L+M)^{-1}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)\,ds \\ -e^{xM}(L+M)^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds \\ -\Lambda^{-1}e^{(1-x)L}(L+M)^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)\,ds. \end{cases}$$

Lemme 5.4 *Il existe* $W \in \mathcal{L}(X)$ *tel que* $W(M+L)^{-1} = (M+L)^{-1}W$ *et*

$$\Lambda^{-1} = I - W \text{ avec } W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left((M+L)^k\right).$$

où $\Lambda = -H(L+M)e^L - e^{M+L} + I$.

Preuve. Nous écrivons

$$\Lambda = -H(L+M)e^L - e^{M+L} + I = I + V,.$$

où $V = -H(L+M)e^L - e^{M+L} \in \mathcal{L}(X)$. Il est clair que

$$V(M+L)^{-1} = (M+L)^{-1}V,$$

de plus, puisque $M+L$ génère un semigroupe analytique généralisé, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$e^{M+L} \in L\left(X, D\left((M+L)^m\right)\right),$$

ainsi

$$V(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left((M+L)^k\right),$$

donc $W := \Lambda^{-1}V \in \mathcal{L}(X)$, $W(M+L)^{-1} = (M+L)^{-1}W$ et

$$W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left((M+L)^k\right).$$

Nous concluons en notant que

$$(I-W)\,\Lambda=\Lambda\,(I-W)=\Lambda-V=I.$$

■

En utilisant le lemme 5.4 on obtient que

$$\begin{aligned} u(x) &= \overline{S}(x)+R(x,\overline{u_0},M)+R(1-x,\overline{u_{1,0}},L) \\ &\quad -e^{(1-x)L}W\left(u_{1,0}+H\left(Mu_0-(L+M)\,J_0\right)\right) \\ &\quad +e^{(1-x)L}\left(u_{1,0}+\left(H\left(Mu_0-(L+M)\right)J_0\right)\right). \end{aligned}$$

Lemme 5.5 *Supposons (5.2) $\sim$ (5.10). Pour $\varphi\in X, f\in L^p(0,1,X)$, et $C=L$ ou M, on obtient*

$$LMR(x,\varphi,C)\,,L^2R(x,\varphi,C)\,,M^2R(x,\varphi,C)\in L^p(0,1,X)\,.$$

Preuve. Pour $C=L$ ou M et $\varphi\in X$, on a

$$e^{(L+M-C)}\varphi\in D\left(L^2\right)=D\left(M^2\right)=D\,(ML)\,,$$

et donc pour presque tout $x\in(0,1)$

$$\begin{aligned} LMR(x,\varphi,C) &= MLe^{xC}e^{x(L+M-C)}\varphi \\ &= e^{xC}MLe^{x(L+M-C)}\varphi, \end{aligned}$$

ainsi $LMR(x,\varphi,C)$ est borné et appartient à $L^p(0,1,X)$. Il en est de même pour $L^2R(x,\varphi,C)$ et $M^2R(x,\varphi,C)$. ■

Lemme 5.6 *Supposons que les hypothèses (5.2) $\sim$ (5.10) sont réalisées .*
Soit $f\in L^p(0,1,X)$, alors

$$LM\overline{S}(.)\in L^p(0,1,X)\,.$$

Preuve. Soient $f\in L^p(0,1,X)$, on a pour p tout $x\in(0,1)$

$$LM\overline{S}(x)=LM\,(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)\,ds$$

$$+LM\,(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)\,ds$$

$$-LMe^{xM}\,(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds$$

$$-LM\Lambda^{-1}e^{(1-x)L}\,(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)\,ds,$$

pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned} LM\left(L+M\right)^{-1}\int_{0}^{x}e^{(x-s)M}f\left(s\right)ds &= L\left(L+M\right)^{-1}\ M\int_{0}^{x}e^{(x-s)M}f\left(s\right)ds \\ &= L\left(L+M\right)^{-1}\ T\left(x,f,M\right), \end{aligned}$$

et puisque $L\left(L+M\right)^{-1}$ est borné et en utilisant le lemme 4.2 assertion 1, alors

$$LM\left(L+M\right)^{-1}\int_{0}^{x}e^{(x-s)M}f\left(s\right)ds\in L^{p}\left(0,1,X\right),$$

et pour le deuxième terme, on a

$$\begin{aligned} LM\left(L+M\right)^{-1}\int_{x}^{1}e^{(s-x)L}f\left(s\right)ds &= M\left(L+M\right)^{-1}L\int_{x}^{1}e^{(s-x)L}f\left(s\right)ds \\ &= M\left(L+M\right)^{-1}T\left(1-x,f\left(1-.\right),L\right), \end{aligned}$$

et puisque $M\left(L+M\right)^{-1}$ est borné et en utilisant le lemme 4.2, assertion 2, alors

$$LM\left(L+M\right)^{-1}\int_{x}^{1}e^{(s-x)L}f\left(s\right)ds\in L^{p}\left(0,1,X\right),$$

pour le troisième terme, on a

$$\begin{aligned} LMe^{xM}\left(L+M\right)^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}f\left(s\right)ds &= LM\left(L+M\right)^{-1}e^{xM}\int_{0}^{1}e^{sL}f\left(s\right)ds \\ &= \mathcal{L}\left(x,f,M\right), \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 4.2 assertion 5, alors

$$LMe^{xM}\left(L+M\right)^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}f\left(s\right)ds\in L^{p}\left(0,1,X\right),$$

pour le cinquième terme, on a

$$\begin{aligned} & LM\Lambda^{-1}e^{(1-x)L}\left(L+M\right)^{-1}\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}f\left(s\right)ds \\ = \ & \Lambda^{-1}LM\left(L+M\right)^{-1}e^{(1-x)L}\left(L+M\right)^{-1}\int_{0}^{1}e^{sM}f\left(1-s\right)ds \\ = \ & \Lambda^{-1}\mathcal{L}\left(x,f\left(1-.\right),M\right), \end{aligned}$$

et Λ^{-1} est borné, en utilisant le lemme 4.2 assertion 5, alors

$$LM\Lambda^{-1}e^{(1-x)L}\left(L+M\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f\left(s\right)ds\in L^p\left(0,1,X\right).$$

■

On écrit

$$u=u_R+u_S,$$

où u_R est la partie régulière de u et u_S est la partie singulière de u avec

$$\begin{cases} u_R=\overline{S}\left(.\right)+R\left(.,\overline{u_0},M\right)+R\left(1-.,\overline{u_{1,0}},L\right) \\ +e^{xM}u_0-e^{(1-x)L}W\left(u_{1,0}+H\left(Mu_0-\left(L+M\right)J_0\right)\right) \\ \\ u_S=e^{(1-x)L}\left(u_{1,0}+H\left(Mu_0-\left(L+M\right)J_0\right)\right), \end{cases}$$

Lemme 5.7 *Supposons que les hypothèses (5.2) $\sim$ (5.8) sont réalisées. Alors pour $C=L$ ou M et $\lambda_0\in\rho\left(C\right)$*

$$X\rightarrow\left(C-\lambda_0 I\right)Ce^{xC}\phi\in L^p\left(0,1,X\right),$$

si et seulement si

$$\phi\in\left(D\left(C^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p.}$$

Preuve. On suppose que pour $\lambda_0\in\rho\left(C\right)$

$$\left(C-\lambda_0 I\right)Ce^{\cdot C}\phi\in L^p\left(0,1,X\right),$$

on peut écrire

$$C^2e^{xC}\phi=\left(C-\lambda_0 I\right)Ce^{xC}\phi+\lambda_0\left(C-\lambda_0 I\right)^{-1}\left(C-\lambda_0 I\right)Ce^{xC}\phi,$$

et puisque $\left(C-\lambda_0 I\right)^{-1}\in L\left(X\right)$, on en déduit que

$$C^2e^{\cdot C}\in L^p\left(0,1,X\right),$$

en utilisant lemme 4.3, alors

$$\phi\in\left(D\left(C^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Pour la réciproque, on suppose que

$$\phi\in\left(D\left(C^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p},$$

on a

$$\left(C-\lambda_0 I\right)Ce^{\cdot C}\phi=C^2e^{xC}\phi-\lambda_0 Ce^{\cdot C}\phi,$$

il suffit de montrer que $Ce^{\cdot C}\in L^p\left(0,1,X\right)$ et puisque

$$\phi\in\left(D\left(C^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p.}\subset\left(D\left(C^2\right),X\right)_{\frac{1}{2},1}\subset D\left(C\right),$$

alors

$$Ce^{\cdot C}\phi=e^{\cdot C}C\phi\in L^p\left(0,1,X\right).$$

■

Proposition 5.1 *Sous les hypothèses (5.2) $\sim$ (5.10)* , $u_0, u_{1,0} \in X$ *et* $f \in L^p(0,1,X)$, *alors*

$$LMu_R \in L^p(0,1,X),$$

si et seulement si

$$u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Preuve. Nous avons

$$LMu_R = LMS(.) + LMR(., \overline{u_0}, M) + LMR(1-., \overline{u_{1,0}}, L) + LMe^{xM}u_0,$$

d'après le lemme 4.4 et le lemme 4.5 on a

$$LMS(.) + LMR(., \overline{u_0}, M) + LMR(1-., \overline{u_{1,0}}, L) \in L^p(0,1,X),$$

alors

$$LMu_R \in L^p(0,1,X),$$

si et seulement si

$$LMe^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X).$$

On choisi $\lambda_0 \in \rho(L)$, $\lambda_1 \in \rho(M)$, on peut écrire

$$LMe^{xM}u_0 = L(M - \lambda_1 I)^{-1}(M - \lambda_1 I)Me^{xM}u_0,$$

en utilisant le lemme 4.6 et puisque $M(L-\lambda_0 I)^{-1}$, $L(M-\lambda_1 I)^{-1}$ sont bornés, on a

$$LMe^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X),$$

si et seulement si

$$u_0 \in \left(D\left(L^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p.} = \left(D\left(M^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p.} = (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

■

Lemme 5.8 *Sous les hypothèses (5.2) $\sim$ (5.10),* $u_0, u_{1,0} \in X$ *et* $f \in L^p(0,1,X)$, *alors*

$$(L-M)u_R' \in L^p(0,1,X),$$

si et seulement si

$$(L-M)Me^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X).$$

Preuve. On calcule u_R'

$$\begin{aligned} u_R'(x) &= Me^{xM}u_0 + M(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)\,ds \\ &\quad -L(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)\,ds - Me^{xM}(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds \\ &\quad +L\Lambda^{-1}e^{(1-x)L}(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)\,ds \\ &\quad +Me^{xM}e^{L}\overline{u_0} - Le^{(1-x)L}e^{M}\overline{u_{1,0}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(L-M)\,u_R'(x) &= (L-M)\,Me^{xM}u_0 + (L-M)\,M\,(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)\,ds \\
&\quad -(L-M)\,L\,(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)\,ds \\
&\quad -(L-M)\,Me^{xM}\,(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL} f(s)\,ds \\
&\quad +(L-M)\,L\Lambda^{-1}e^{(1-x)L}\,(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)\,ds \\
&\quad +(L-M)\,Me^{xM}e^{L}\overline{u_0} - (L-M)\,Le^{(1-x)L}e^{M}\overline{u_{1,0}} \\
&= (L-M)\,Me^{xM}u_0 + \sum_{i=1}^{5} I_i.
\end{aligned}$$

Pour I_1, on a

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= (L-M)\,M\,(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)\,ds \\
&= (L-M)\,(L+M)^{-1}\,M\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)\,ds \\
&= (L-M)\,(L+M)^{-1}\,T(x,f,M)
\end{aligned}$$

et puisque $(L-M)\,(L+M)^{-1}$ est borné et en utilisant lemme 4.2 assertion 1, on obtient

$$I_1(.) \in L^p(0,1,X).$$

Pour I_2, on a

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= (L-M)\,L\,(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)\,ds \\
&= (L-M)\,(L+M)^{-1}\,L\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)\,ds \\
&= (L-M)\,(L+M)^{-1}\,T(1-x,f(1-.),L),
\end{aligned}$$

et puisque $(L-M)\,(L+M)^{-1}$ est borné et en utilisant lemme 4.2 assertion 2, on obtient

$$I_2(.) \in L^p(0,1,X).$$

Pour I_3, on a

$$\begin{aligned} I_3(x) &= (L-M)\,Me^{xM}(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds \\ &= LMe^{xM}(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds - M^2e^{xM}(L+M)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds \\ &= F\left(x, e^{\cdot(L+M)}g, M\right) - ML^{-1}ML(L+M)^{-1}e^{xM}\int_0^1 e^{sL}f(s)\,ds, \\ &= F\left(x, e^{\cdot(L+M)}g, M\right) - ML^{-1}\mathcal{L}(x,g,M), \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 4.2 assertion 3 et assertion 4, on obtient

$$I_3(.) \in L^p(0,1,X).$$

I_4 se traite comme I_3.
pour I_5, on a

$$\begin{aligned} I_5(x) &= (L-M)\,Me^{xM}e^{L}\overline{u_0} - (L-M)\,Le^{(1-x)L}e^{M}\overline{u_{1,0}} \\ &= \left(LM-M^2\right)R(x,\overline{u_0},M) + \left(LM-L^2\right)R(1-x,\overline{u_{1,0}},L) \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 4.4 on obtient

$$I_5(.) \in L^p(0,1,X),$$

alors on a

$$(L-M)\,u'_R(x) \in L^p(0,1,X),$$

si et seulement si

$$(L-M)\,Me^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X),$$

■

Proposition 5.2 *Sous les hypothèses (5.2) $\sim$ (5.10), alors*

$$u_s \in W^{1,p}(0,1;x)$$

si et seulement si

$$u_{1,0} - H(Mu_0 - (L+M)J_0) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.$$

Preuve. Puisque $u_s \in W^{1,p}(0,1;x)$, alors on a

$$u'_S(x) = Le^{(1-x)L}(u_{1,0} - H(Mu_0 - (L+M)J_0) \in L^p(0,1,X)),$$

en utilisant le lemme 4.3 assertion 2 on obtient le résultat . ■

5.1.5 Régularité de la solution

Theorème 5.2 *On suppose (5.2) $\sim$ (5.10). Soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0,1,X)$, Alors u est une solution semi-stricte du problème (5.1) si et seulement si*

$$\begin{cases} 1. \begin{cases} \left(Mu_0 - \int_0^1 e^{sL} f(s)\, ds \right) \in D(H) \\ \left(u_{1,0} - H\left(Mu_0 - \int_0^1 e^{sL} f(s)\, ds \right)\right) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \end{cases} \\ 2.\ u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

de plus dans ce cas u admet une décomposition $u = u_R + u_S$ avec

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1,D(ML)), u_R' \in L^p(0,1,D(L-M))$
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,X)$.

Remarque 5.3 *On a trouvé deux types de conditions : 1. la première est de comportement lié à H ,M et L de forme globale.*

2. la deuxième condition est de comportement local lié uniquement à LM

Preuve. En utilisant la proposition 4.1 et le lemme 4.7 on obtient

$$u_R \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1,D(ML)), u_R' \in L^p(0,1,D(L-M))$$

si et seulement si

$$\begin{cases} MLe^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X) \\ (L-M)\, Me^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X), \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} MLe^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X) \\ M^2 e^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X). \end{cases}$$

On a montré que

$$MLe^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X) \Leftrightarrow u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

On fait la même démonstration pour montrer que

$$M^2 e^{xM}u_0 \in L^p(0,1,X) \Leftrightarrow u_0 \in (D(ML), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

■

5.2 Résolution du problème aux limites avec un paramètre spectral

On pose

$$A_\omega = A - \omega I,\ \omega > 0$$

et on considère le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + A_\omega u(x) = f(x),\ x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{5.14}$$

avec $u_0, u_{1,0} \in X$ (X est un espace de Banach complexe), $f \in L^p(0,1,X)$. A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés sur X.

Nos hypothèses sont

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{5.15}$$

et pour les opérateurs B et $B^2 - A$

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X \\ : \mathbb{R}_- \subset \rho(B^2 - A) \text{ et } \exists C > 0 : \\ \forall \lambda \geqslant 0,\ \left\| (\lambda I + B^2 - A)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{5.16}$$

$$B \text{ génère un semi-groupe fortement continu.} \tag{5.17}$$

$$D\left((B^2 - A)^{\frac{1}{2}} \right) \subset D(B), \tag{5.18}$$

$$\forall y \in D(B),\ B\left(B^2 - A\right)^{-1} y = \left(B^2 - A\right)^{-1} By \tag{5.19}$$

Pour les opérateurs $M_\omega = -B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} \forall \omega > 0, \forall s \in \mathbb{R} : (-M_\omega)^{is} \in L(X) \text{ et } \exists C > 1, \\ \\ \exists \theta_{M_\omega} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[:\ \left\| (-M_\omega)^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_{M_\omega}|s|}. \end{cases} \tag{5.20}$$

Pour les opérateurs $L_\omega = B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} \forall \omega > 0, \forall s \in \mathbb{R} : (-L_\omega)^{is} \in L(X) \text{ et } \exists C > 1, \\ \\ \exists \theta_{L_\omega} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[:\ \left\| (-L_\omega)^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_{L_\omega}|s|}. \end{cases} \tag{5.21}$$

Pour l'opérateur H

$$\begin{cases} H \text{ est un opérateur linéaire fermé} \\ \exists \lambda_0 : \lambda_0 \in \rho(H), \end{cases} \tag{5.22}$$

Sur H en lien avec A et B

$$\begin{cases} (\lambda_0 I - H)^{-1}(B^2 - A)^{-1} = (B^2 - A)^{-1}(\lambda_0 I - H)^{-1} \\ \forall x \in D(B), (\lambda_0 I - H)^{-1} x \in D(B) \text{ et } (\lambda_0 I - H)^{-1} Bx = B(\lambda_0 I - H)^{-1} x, \end{cases} \tag{5.23}$$

$$D\left((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D(H). \tag{5.24}$$

Remarque 5.4

1. *Vu que X est un espace UMD et donc réflexif, le domaine $D(B^2 - A)$ est dense dans X (voir Haase [15], Proposition 2.1.1. p. 18-19).*
2. *Pour $\omega > 0$, l'hypothèse (5.16) implique que l'opérateur*
$$-\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}$$
génère un semi-groupe analytique $\left(e^{-x\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right)_{x \geqslant 0}$ dans X et
$$(L_\omega + M_\omega)^{-1} = -2\left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}} \in L(X)$$
3. *Grâce à J. Prüss-H. Sohr [27](Theorem 2, p. 437), les hypothèses (5.20) et (5.21) impliquent que pour $\omega \geqslant \omega_0$*
$$-(L_\omega + M_\omega) = 2\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}} \in BIP(\theta, X), \text{ avec } \theta = \max(\theta_{M_\omega}, \theta_{L_\omega}).$$

Lemme 5.9 *Sous les hypothèses (5.16) $\sim$ (5.19) et pour $\omega > 0$ on a les propriétés suivantes*

$$\begin{cases} D\left((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D(B) \\ \forall \xi \in D(B),\ B(B^2 - A_\omega)^{-\frac{1}{2}}\xi = (B^2 - A_\omega)^{-\frac{1}{2}} B\xi. \end{cases}$$

Preuve. On utilise l'intégrale de Dunford pour l'opérateur $(B^2 - A_\omega)^{-\frac{1}{2}}$ et pour $\omega > 0$ on obtient

$$\begin{aligned} B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} B\left(\lambda I - \left(B^2 - A_\omega\right)\right)^{-1}\xi d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\left(\lambda I - \left(B^2 - A_\omega\right)\right)^{-1} B\xi d\lambda \\ &= \left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}} B\xi. \end{aligned}$$

Ici γ est un courbe sectorielle adéquate entourant le spectre de $B^2 - A_\omega$. ∎

Définition 5.1 *Si P, Q sont deux opérateurs linéaires dans l'espace X tels que*

$$D(P) \subset D(Q) \text{ et } P = Q \text{ sur } D(P),$$

alors on écrit $P \subset Q$.

Lemme 5.10 *Supposons que (5.16) $\sim$ (5.19) sont vérifiées. Alors on a*

1. $D(L_\omega) = D(M_\omega) = D\left((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right).$
2. $D(L_\omega^2) = D(M_\omega^2) = D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega M_\omega) = D(B^2 - A).$
3. $M_\omega L_\omega = L_\omega M_\omega \subset -A.$
4. $(L_\omega - M_\omega) \subset 2B.$

Voir [5]

Lemme 5.11 *Sous les hypothèses (5.20) $\sim$ (5.23). Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. $\begin{cases} \forall \omega \geqslant 0, \lambda \in \rho(M_\omega), \forall \xi \in D(H), H(M_\omega - \lambda I)^{-1}\xi = (M_\omega - \lambda I)^{-1} H\xi, \\ \forall \omega \geqslant 0, \lambda \in \rho(L_\omega), \forall \xi \in D(H), H(L_\omega - \lambda I)^{-1}\xi = (L_\omega - \lambda I)^{-1} H\xi. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \forall \omega \geqslant 0, , \forall \xi \in D(M_\omega) = D(L_\omega) : (\lambda_0 I - H)^{-1} M_\omega \xi = M_\omega (\lambda_0 I - H)^{-1}\xi, \\ \forall \omega \geqslant 0, , \forall \xi \in D(M_\omega) = D(L_\omega) : (\lambda_0 I - H)^{-1} L_\omega \xi = L_\omega (\lambda_0 I - H)^{-1}\xi. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \forall \xi \in D(B^2 - A) : (\lambda_0 I - H)^{-1} A\xi = A(\lambda_0 I - H)^{-1}\xi, \\ \forall \xi \in D\left((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right) : (\lambda_0 I - H)^{-1} B\xi = B(\lambda_0 I - H)^{-1}\xi. \end{cases}$

Voir [5]

Lemme 5.12 *Sous l'hypothèse (5.16),* $\exists \omega^* > 0$ *telque pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$ *l'opérateur*

$$I - e^{L_\omega + M_\omega},$$

admet un inverse borné.

Preuve. On a

$$e^{L_\omega + M_\omega} = e^{-2\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}} = e^{-2\left(B^2 - A + \omega I\right)^{\frac{1}{2}}},$$

alors en utilisant le résultat de Dore et Yakubov, on obtient

$$\exists c, k > 0 : \left\| e^{L_\omega + M_\omega} \right\| \leqslant c e^{-2k\sqrt{\omega}},$$

et pour ω grand

$$\left\| e^{L_\omega + M_\omega} \right\| < 1/2,$$

c'est à dire

$$\exists \omega^* > 0 : \forall \omega \geqslant \omega^*, \ \left\| e^{L_\omega + M_\omega} \right\| < 1/2.$$

Remarque 5.5

1. *Puisque* $L_\omega + M_\omega$ *génère un semi-groupe analytique, alors on peut utiliser les techniques de A.Lunardi pour montrer que l'opérateur* $I - e^{L_\omega + M_\omega}$ *est inversible avec*

$$\left(I - e^{L_\omega + M_\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^z}{1 - e^z} \left(z - (L_\omega + M_\omega)\right)^{-1} dz + I,$$

où γ *est une courbe bien choisie dans le plan complexe.(voir A. Lunardi [25], p.59).*

2. Pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

$$\left\| \left(I - e^{L_\omega + M_\omega}\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{1}{1 - \|e^{L_\omega + M_\omega}\|} \leq 2. \tag{5.25}$$

■

Lemme 5.13 *Sous les hypothèses (5.15) $\sim$ (5.24) et pour $\omega > 0$ il existe $\omega^* > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, l'opérateur*

$$\Lambda_\omega = -H\left(L_\omega + M_\omega\right) e^{L_\omega} - e^{L_\omega + M_\omega} + I,$$

admet un inverse borné

$$\Lambda_\omega^{-1} = \left(I - e^{L_\omega + M_\omega}\right)^{-1} \left(I - H\left(L_\omega + M_\omega\right) e^{L_\omega} \left(I - e^{L_\omega + M_\omega}\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

Preuve. On a

$$\Lambda_\omega = \left(I - H\left(L_\omega + M_\omega\right) e^{L_\omega} \left(I - e^{L_\omega + M_\omega}\right)^{-1}\right) \left(I - e^{L_\omega + M_\omega}\right),$$

donc Λ_ω est inversible si et seulement si il suffit d'inverser

$$K_\omega := I - H\left(L_\omega + M_\omega\right) e^{L_\omega} \left(I - e^{L_\omega + M_\omega}\right)^{-1},$$

est inversible. Vu (5.25),

$$\left\| H\left(L_\omega + M_\omega\right) e^{L_\omega} \left(I - e^{L_\omega + M_\omega}\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq 2 \left\| H\left(L_\omega + M_\omega\right) e^{L_\omega} \right\|_{L(X)}.$$

donc, pour inverser K_ω, il suffit d'obtenir pour ω assez grand

$$\left\| H\left(L_\omega + M_\omega\right) e^{L_\omega} \left(I - e^{L_\omega + M_\omega}\right)^{-1} \right\|_{L(X)} < 1/2.$$

Or

$$\begin{aligned} H\left(L_\omega + M_\omega\right) e^{L_\omega} &= H\left(L_\omega + M_\omega\right)^{-1} \left(L_\omega + M_\omega\right)^2 e^{L_\omega} \\ &= H\left(L + M\right)^{-1} \left(L + M\right) \left(L_\omega + M_\omega\right)^{-1} \left(L_\omega + M_\omega\right)^2 e^{L_\omega} \\ &= H\left(L + M\right)^{-1} \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}} \left(L_\omega + M_\omega\right)^2 e^{L_\omega}, \end{aligned}$$

mais

- $H\left(L + M\right)^{-1} \in L(X)$.
- $\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}}_{L(X)}$ est borné indépendamment de ω en effet

$$\begin{aligned} \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}} &= \left(\left(B^2 - A\right) \left(B^2 - A_\omega\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(B^2 - A\right) \left(B^2 - A + \omega I\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(I - \omega \left(B^2 - A + \omega I\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\exists M > 0 : \left\| \left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}} \left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L(X)} \leqslant \left(1 + M\frac{\omega}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + M\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il reste donc a montrer que $\left\|(L_\omega + M_\omega)^2 e^{L_\omega}\right\|_{L(X)}$ peut être rendu petit pour ω grand
Puisque $-\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique on a

$$e^{L_\omega} = e^{B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}} = e^{-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}} e^B,$$

donc

$$\Lambda_\omega = \left(2H\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}} e^B \left(I - e^{-2\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} + I\right)\left(I - e^{-2\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Pour montrer que Λ_ω est inversible il suffit de montrer que

$$\left\|2H\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}} e^B \left(I - e^{-2\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right\|_{L(X)} < 1,$$

on pose

$$T_\omega = 2H\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}} e^B \left(I - e^{-2\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1},$$

on peut écrire T_ω sous la forme

$$T_\omega = 2H\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}}\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}}\left(B^2 - A_\omega\right) e^{-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}} e^B \left(I - e^{-2\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1},$$

pour l'opérateur : $2H\left(B^2 - A\right)^{-\frac{1}{2}}$ est dans $L(X)$,
pour l'opérateur : $\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}}$, on a

$$\begin{aligned}
\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}} &= \left(\left(B^2 - A\right)\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left(B^2 - A\right)\left(B^2 - A + \omega I\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(I - \omega\left(B^2 - A + \omega I\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

d'où

$$\exists M > 0 : \left\|\left(B^2 - A\right)^{\frac{1}{2}}\left(B^2 - A_\omega\right)^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L(X)} \leqslant \left(1 + M\frac{\omega}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + M)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour l'opérateur $\left(B^2 - A_\omega\right) e^{-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}} e^B$:
en utilisant le résultat de Dore et Yakubov et puisque

$$-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}$$

génère un semi-groupe analytique, alors obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\left(B^2 - A_\omega\right) e^{-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}} e^B\right\|_{L(X)} &\leqslant \left\|\left(B^2 - A_\omega\right) e^{-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right\|_{L(X)} \left\|e^B\right\|_{L(X)} \\
&\leqslant ce^{-k\sqrt{\omega}}c', \ c, c', k > 0 \\
&\leqslant c'' e^{-k\sqrt{\omega}}, c'', k > 0,
\end{aligned}$$

et pour : $\left(I-e^{-2\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$

on a montré que $\left(I-e^{-2\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$ est inversible donc

$$\exists c_1>0:\left\|\left(I-e^{-2\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right\|_{L(X)}\leqslant c_1,$$

alors pour ω grand

$$\|T_\omega\|_{L(X)}\leqslant c\,(1+M)^{\frac{1}{2}}\,c''e^{-k\sqrt{\omega}}c_1=c_2e^{-k\sqrt{\omega}}<1,$$

c'est à dire

$$\exists\omega^*>0:\forall\omega\geqslant\omega^*\ \|T_\omega\|_{L(X)}<1.$$

■

5.2.1 Représentation de la solution

On a $\begin{cases} L_\omega-M_\omega\subset 2B\\ L_\omega M_\omega=M_\omega L_\omega\subset -A.\end{cases}$

Sous les hypothèses (5.15) $\sim$ (5.24) on peut construire les opérateurs L et M (notés ici L_ω,M_ω), données dans la première partie du quatrième chapitre .

Alors pour $u_0\in\left(D\left(B^2-A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}$ et $f\in L^p\left(0,1,X\right)$, la solution du problème (5.14) est donnée par

$$\begin{aligned} u\left(x\right) &= e^{xM_\omega}u_0+e^{xM_\omega}e^{L_\omega}\overline{u_0}+e^{(1-x)L_\omega}e^{M_\omega}\overline{u_{1,0}}-e^{xM_\omega}J_0 \\ &\quad +e^{(1-x)L_\omega}\Lambda_\omega^{-1}\left(u_{1,0}-H\left(M_\omega u_0-\left(L_\omega+M_\omega\right)J_0\right)\right)-e^{(1-x)L_\omega}\Lambda_\omega^{-1}I_1 \\ &\quad +\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M_\omega}f\left(s\right)ds \\ &\quad +\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L_\omega}f\left(s\right)ds, \end{aligned} \tag{5.26}$$

où

$$\begin{cases} \overline{u_0}=\Lambda_\omega^{-1}\left(u_{1,0}-H\left(M_\omega u_0-\left(M_\omega+L_\omega\right)J_0\right)-e^{M_\omega}u_0+e^{M_\omega}J_0-I_1\right) \\ \\ \overline{u_{1,0}}=\Lambda_\omega^{-1}J_0-\Lambda_\omega^{-1}u_0. \end{cases}$$

Remarque 5.6 *Si on pose $B=0$ on trouve bien la même représentation de la solution dans* *le chapitre trois précédent*

$$
\begin{aligned}
u(x) \;=\; & e^{-x\sqrt{-A_\omega}}\left(u_0-J_0\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A_\omega}\right)^{-1}\int_0^x e^{-(x-s)\sqrt{-A_\omega}}f(s)\,ds \\
& +e^{-x\sqrt{-A_\omega}}e^{-\sqrt{-A_\omega}}\overline{u_0} \\
& -e^{-(1-x)\sqrt{-A_\omega}}\left(\Lambda_\omega^{-1}I_1\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A_\omega}\right)^{-1}\int_x^1 e^{-(s-x)\sqrt{-A_\omega}}f(s)\,ds \\
& +e^{-(1-x)\sqrt{-A_\omega}}e^{-\sqrt{-A_\omega}}\overline{u_{1,0}} \\
& +e^{-(1-x)\sqrt{-A_\omega}}\left(\Lambda_\omega^{-1}u_{1,0}+\Lambda_\omega^{-1}H\sqrt{-A_\omega}u_0-2\Lambda_\omega^{-1}H\sqrt{-A_\omega}J_0\right)
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{cases}
\overline{u_0}=-\Lambda_\omega^{-1}u_{1,0}-\Lambda_\omega^{-1}H\left(\sqrt{-A_\omega}u_0-2\sqrt{-A_\omega}J_0\right)+e^{-\sqrt{-A_\omega}}\Lambda_\omega^{-1}u_0-e^{-\sqrt{-A_\omega}}\Lambda_\omega^{-1}J_0+\Lambda_\omega^{-1}I_1 \\
\overline{u_{1,0}}=\Lambda_\omega^{-1}J_0-\Lambda_\omega^{-1}u_0.
\end{cases}
$$

5.2.2 Régularité de la solution

Nous avons le résultat suivant

Theorème 5.3 *On suppose (5.15) $\sim$ (5.24), soient $u_0, u_{1,0}\in X$ et $f\in L^p(0,1,X)$. Alors $\exists\omega^*\geqslant 0$ tel que pour $\omega\geqslant\omega^*$:*

u donnée par (5.26) est une solution semi-stricte du problème (5.14) si et seulement si

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
1.\ \left(M_\omega u_0-\displaystyle\int_0^1 e^{sL_\omega}f(s)\,ds\right)\in D(H) \\
u_{1,0}-H\left(M_\omega u_0-\displaystyle\int_0^1 e^{sL_\omega}f(s)\,ds\right)\in\left(D\left(B^2-A\right),X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.
\end{cases} \\
2.\ u_0\in\left(D\left(B^2-A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}.
\end{cases}
$$

De plus dans ce cas u admet une décomposition

$$u=u_R+u_S,$$

1. $u_R\in W^{2,p}(0,1;X)\cap L^p(0,1,D(A)),\ u_R'\in L^p(0,1,D(B))$
2. $u_S\in W^{1,p}(0,1,X)$.

Chapitre 6

Exemples

6.1 Cas Hölderien

Exemple 6.1 *Soit M un opérateur linéaire dans $X = C\left([0,1]\right)$ défini par*

$$\left\{ \begin{array}{l} D\left(M\right) = \left\{v \in C^2\left([0,1]\right) : v\left(0\right) = v\left(1\right) = 0\right\} \\ Mv = v'', \quad v \in D\left(M\right), \end{array} \right.$$

et pour $c > 0$ fixé ,posons

$$A = -M^2 - cI \text{ et } H = M. \tag{6.1}$$

A satisfait hypothèse (2.25) et ainsi (2.2). De plus, de (6.1) nous déduisons (2.3) $\sim$ (2.4). Ici $Q = -\sqrt{M^2 + cI}$ et en posant

$$G(z) = 2\alpha\sqrt{z^2 - c}ze^{-z} - e^{-2z},$$

nous prouvons, comme en sous-section 2.2, que

$$\begin{aligned} \Lambda &= I - 2MQe^Q - e^{2Q} \\ &= I + 2M\sqrt{M^2 + cI}e^{-\sqrt{M^2+cI}} - e^{-2\sqrt{M^2+cI}} \\ &= I + G(-Q), \end{aligned}$$

est inversible et ainsi (2.5) est vérifiée . On peut alors appliquer le théorème 2.1 pour le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u''\left(x\right) + Au\left(x\right) = f\left(x\right), \quad x \in [0,1[\\ u\left(0\right) = u_0 \\ u\left(1\right) + Mu'\left(0\right) = u_{1,0}, \end{array} \right. \tag{6.2}$$

Puisque

$$\left\{ \begin{array}{l} D\left(A\right) = \left\{v \in C^4\left([0,1]\right) : v\left(0\right) = v\left(1\right) = v''\left(0\right) = v''\left(1\right) = 0\right\} \\ Av = -v^{(4)} - cv, v \in D\left(A\right), \end{array} \right.$$

nous pouvons traiter ainsi le problème non local d' EDP suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - cu(x,y) = f(x,y), (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,1) = 0, \ x \in (0,1) \\ u(0,y) = u_0(y), \ y \in (0,1) \\ u(1,y) + \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}(0,y) = u_{1,0}(y), \ y \in (0,1). \end{cases} \tag{6.3}$$

$D(A)$ n'est pas dense dans $X = C([0,1])$ puisque

$$\overline{D(A)} = \overline{D(M)} = \{v \in C([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

et pour $\theta \in]0,1[$

$$D_A(\theta/2, +\infty) = \left\{v \in C^\theta([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\right\}.$$

en appliquant le théorème 2.1 on obtient :

Theorème 6.1 *Pour toute $f \in C^\theta([0,1], X), \theta \in]0,1[$ et $u_0, u_{1,0} \in C^4([0,1])$, tels que*

$$\begin{cases} u_0(0) = u_0(1) = u_0''(0) = u_0''(1) = 0 \\ u_{1,0}(0) = u_{1,0}(1) = u_{1,0}''(0) = u_{1,0}''(1) = 0 \end{cases}.$$

on a

1. *Si $u_0(.) + f(0,.) \in C([0,1])$ et*

$$u_0^{(4)}(0) + f(0,0) = u_0^{(4)}(1) + f(0,1) = 0,$$

   il existe alors une solution semi-classique unique u du problème (6.3).

2. *If $u_0^{(4)}(.) + f(0,.) \in C^\theta([0,1])$ et*

$$u_0^{(4)}(0) + f(0,0) = u_0^{(4)}(1) + f(0,1) = 0,$$

   alors la solution semi-classique unique u du problème(6.3) a la propriété de régularité maximale (2.6.

6.2 Cadre UMD

6.2.1 Cas $B = 0$

Exemple 6.2 *Soit $X = L^2(\mathbb{R})$. On définit A et H par*

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\mathbb{R}) = \{u \in X \ / \ u' \in X, \ u'' \in X\} \\ Au = au'' \text{ pour } u \in D(A) \text{ et } a > 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} D(H) = H^2(\mathbb{R}) = \{u \in X \ / \ u' \in X\} \\ Hu = bu' \ \textit{pour} \ u \in D(H) \ \textit{ et } b > 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Donc le problème (3.21) est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R} \\ u(0,y) = u_0(y), \ \ y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) + \dfrac{\partial u}{\partial y \partial x}(0,y) = u_{1,0}(y), \ \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lemme 6.1 *A et H sont des opérateurs linéaires, fermés et à domaines denses dans* $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. On peut vérifier facilement que A et H sont des applications linéaires et fermés de plus
puisque $H^2(\mathbb{R}) \subset H^1(\mathbb{R})$ donc $D(A) \subset D(H)$,
on sait que $D(\mathbb{R}) \subset H^q(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$; $\forall q \in \mathbb{N}^*$
alors $\overline{H^q(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$ car $\overline{D(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$.
d'où $\overline{D(A)} = \overline{D(H)} = L^2(\mathbb{R})$. ■

Lemme 6.2 *L'opérateur A vérifie l'hypothèse (3.23).*

Preuve. On calcule l'ensemble résolvant de A.

1. Soit v un élément de X et on cherche u qui est unique dans $D(A)$ tel que :

$$(\lambda I - A) u = v$$

d'où

$$\lambda u - a u'' = v$$

en utilisant la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ on obtient

$$\lambda \mathcal{F}(u) - a \mathcal{F}(u'') = \mathcal{F}(v),$$

donc pour chaque t dans $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{F}(u)(t) - a \mathcal{F}(u'')(t) &= \lambda \mathcal{F}(u)(t) - a(it)^2 \mathcal{F}(u)(t) \\ &= \left(\lambda + at^2\right) \mathcal{F}(u)(t) \\ &= \mathcal{F}(v)(t), \end{aligned}$$

et pour $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ on obtient

$$\mathcal{F}(u)(t) = \frac{\mathcal{F}(v)(t)}{\lambda + at^2},$$

on sait que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme avec $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ donc on a

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant C \|\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant C \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(u)(t)|^2 \, dt \\ &\leqslant C \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\mathcal{F}(v)(t)}{\lambda + at^2} \right|^2 dt, \end{aligned}$$

si $\mathrm{Re}\lambda > 0$ alors

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leqslant \frac{C}{(\mathrm{Re}\lambda)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(v)(t)|^2\, dt \\
&\leqslant \frac{C}{(\mathrm{Re}\lambda)^2}\|\mathcal{F}(v)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leqslant \frac{C}{(\mathrm{Re}\lambda)^2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 ,
\end{aligned}$$

2. De la même manière pour u'
on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u')(t) &= \frac{\mathcal{F}(v')(t)}{\lambda + at^2} \\
&= \frac{it\mathcal{F}(v)(t)}{\lambda + at^2}
\end{aligned}$$

et puisque

$$\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leqslant C\,\|\mathcal{F}(u')\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

donc

$$\begin{aligned}
\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(u')(t)|^2\, dt \\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{it\mathcal{F}(v)(t)}{\lambda + at^2}\right|^2 dt \\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|it|^2\,|\mathcal{F}(v)(t)|^2}{|\lambda + at^2|^2} dt \\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\,|\mathcal{F}(v)(t)|^2}{|\lambda + at^2|^2} dt \\
&\leqslant \frac{C}{\mathrm{Re}\,\lambda}\|\mathcal{F}(v)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leqslant \frac{C}{\mathrm{Re}\,\lambda}\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 .
\end{aligned}$$

3. Pour uJ on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u'')(t) &= \frac{\mathcal{F}(v'')(t)}{\lambda + at^2} \\
&= \frac{(it)^2\,\mathcal{F}(v)(t)}{\lambda + at^2} \\
&= \frac{-t^2\mathcal{F}(v)(t)}{\lambda + at^2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|u''\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant C\,\|\mathcal{F}(u'')\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(u'')(t)|^2\,dt \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4\,|\mathcal{F}(v)(t)|^2}{|\lambda+at^2|^2}dt \\
&\leqslant C\,\|\mathcal{F}(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant C\,\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

et puisque u' et $u'' \in L^2(\mathbb{R})$, donc $u \in D(A)$ de plus

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\mathcal{F}(u)(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{\mathcal{F}(v)(x)}{\lambda+ax^2}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{e^{-ix\tau}v(\tau)}{\lambda+ax^2}d\tau dx \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix(t-\tau)}v(\tau)}{\lambda+ax^2}d\tau dx,
\end{aligned}$$

si $\lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R}_- : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ alors $\lambda \in \rho(A)$ et on a

$$\begin{aligned}
\left((\lambda I-A)^{-1}v\right)(t) &= u(t) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix(t-\tau)}v(\tau)}{\lambda+ax^2}d\tau dx,
\end{aligned}$$

donc pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$ et $a \geqslant 0$ on a

$$\left\|(\lambda I-A)^{-1}v\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{C}{\operatorname{Re}\lambda}\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

■

Lemme 6.3 *L'opérateur H vérifie l'hypothèse (*??*).*

Preuve. On cherche l'ensemble résolvant de H.

1. Soit v un élément de X et on cherche u dans $D(H)$ tel que :

$$(\lambda I-H)\,u = v$$

$$(\lambda I - H)\, u = \lambda u - bu' = v \Longrightarrow \lambda \mathcal{F}(u) - b\mathcal{F}(u') = \mathcal{F}(v)\,,$$

d'où $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lambda \mathcal{F}(u)(t) - b\mathcal{F}(u')(t) &= \lambda \mathcal{F}(u)(t) - b\,(it)\,\mathcal{F}(u)(t) \\
&= (\lambda - ibt)\,\mathcal{F}(u)(t) \\
&= \mathcal{F}(v)(t)\,,
\end{aligned}$$

et pour $\lambda - ibt \neq 0$ on obtient

$$\mathcal{F}(u)(t) = \frac{\mathcal{F}(v)(t)}{\lambda - ibt},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant C\,\|\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant C \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(u)(t)|^2\, dt \\
&\leqslant C \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathcal{F}(v)(t)}{\lambda - ibt}\right|^2 dt,
\end{aligned}$$

et si $\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0$ alors

$$\begin{aligned}
|\lambda - ibt| &= |\operatorname{Re}\lambda + i\,(\operatorname{Im}\lambda - bt)| \\
&= \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda - bt)^2} \\
&\geqslant \operatorname{Re}\lambda
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant \frac{C}{(\operatorname{Re}\lambda)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(v)(t)|^2\, dt \\
&\leqslant \frac{C}{(\operatorname{Re}\lambda)^2}\, \|\mathcal{F}(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \frac{C}{(\operatorname{Re}\lambda)^2}\, \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,.
\end{aligned}$$

2. Pour $u\prime$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u')(t) &= \frac{\mathcal{F}(v')(t)}{\lambda - ibt} \\
&= \frac{(it)\,\mathcal{F}(v)(t)}{\lambda - ibt},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\Vert u'\right\Vert_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leqslant C\left\Vert \mathcal{F}\left(u'\right)\right\Vert_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}\left\vert \mathcal{F}\left(u'\right)(t)\right\vert^2 dt \\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\vert it\mathcal{F}\left(v\right)(t)\right\vert^2}{\left\vert \lambda-ibt\right\vert^2}dt \\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2\left\vert \mathcal{F}\left(v\right)(t)\right\vert^2}{\left\vert \lambda-ibt\right\vert^2}dt,
\end{aligned}$$

si $\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0$ alors

$$\begin{aligned}
\left\Vert u'\right\Vert_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}\left\vert \mathcal{F}\left(u'\right)(t)\right\vert^2 dt \\
&\leqslant \frac{C}{\left(\operatorname{Re}\lambda\right)^2}\left\Vert \mathcal{F}\left(v\right)\right\Vert_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leqslant \frac{C}{\left(\operatorname{Re}\lambda\right)^2}\left\Vert v\right\Vert_{L^2(\mathbb{R})}^2
\end{aligned}$$

donc $u' \in L^2\left(\mathbb{R}\right)$, d'où $u \in D\left(H\right)$.
et

$$\begin{aligned}
u\left(t\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}\mathcal{F}\left(u\right)\left(x\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}\frac{\mathcal{F}\left(v\right)\left(x\right)}{\lambda-ibx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}\frac{e^{-ix\tau}v\left(\tau\right)}{\lambda-ibx}d\tau dx \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix(t-\tau)}v\left(\tau\right)}{\lambda-ibx}d\tau dx.
\end{aligned}$$

■

Lemme 6.4 *Les opérateurs A et H vérifient*
$\forall\lambda \geqslant 0 : \left(\lambda I-A\right)^{-1}\left(\lambda_0 I-H\right)^{-1} = \left(\lambda_0 I-H\right)^{-1}\left(\lambda I-A\right)^{-1}.$

Preuve. Soient $\lambda \geqslant 0, v \in L^2(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\left((\lambda I - A)^{-1} Hv\right)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{\mathcal{F}\left((\lambda_0 I - H)^{-1} v\right)(x)}{\lambda + ax^2}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{\mathcal{F}(v)(x)}{(\lambda + ax^2)(\lambda_0 - ibx)}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{e^{-ix\tau}v(\tau)}{(\lambda + ax^2)(\lambda_0 - ibx)}d\tau dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix(t-\tau)}v(\tau)}{(\lambda + ax^2)(\lambda_0 - ibx)}d\tau dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix(t-\tau)}v(\tau)}{(\lambda_0 - ibx)(\lambda + ax^2)}d\tau dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{\mathcal{F}(v)(x)}{(\lambda_0 - ibx)(\lambda + ax^2)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{\mathcal{F}\left((\lambda I - A)^{-1} v\right)(x)}{(\lambda_0 - ibx)}dx \\
&= \left(H(\lambda I - A)^{-1} v\right)(t),
\end{aligned}$$

■

Lemme 6.5 *L'opérateur A est BIP(θ_A, x), $\theta_A\,]0,\pi[$.*

Preuve. En utilisant théorème de Prüss-sohr [27], page. 167. ■

et pour

$$D(Q_\omega) = D(Q) = D(H),$$

donc toutes les hypothèses sont vérifiées alors on peut appliquer le résultat du chapitre 3

Theorème 6.2 *Si $f \in L^p(0,1,L^2(\mathbb{R}))$ avec $1 < p < \infty$ et*

$$\begin{cases}
1. \begin{cases}
1.\ Q_\omega u_0(.) - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s,.)\,ds \in H^1(\mathbb{R}) \\
u_{1,0} - \frac{\partial}{\partial y}\left(Q_\omega u_0(.) - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s,.)\,ds\right) \in \left(H^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}
\end{cases} \\
2.\ u_0 \in \left(H^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p},
\end{cases}$$

alors il existe $\omega^* > 0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$: *le problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R} \\ u(0,y) = u_0(y), \ y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) + \dfrac{\partial u}{\partial y \partial x}(0,y) = u_{1,0}(y), \ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

admet une solution semi-stricte u. *De plus dans ce cas* u *admet une décomposition de la forme*

$$u = u_R + u_S,$$

où

1. $u_R \in H^2(0,1,L^2(\mathbb{R})) \cap L^p(0,1,H^2(\mathbb{R}))$,
2. $u_S \in H^1(0,1,L^2(\mathbb{R}))$.

Theorème 6.3 *Si* $f \in L^p(0,1,L^2(\mathbb{R}))$ *avec* $1 < p < \infty$ *et*

$$\begin{cases} 1. \begin{cases} 1.\ Q_\omega u_0(.) - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s,.)\,ds \in H^1(\mathbb{R}) \\ u_{1,0} - \frac{\partial}{\partial y}\left(Q_\omega u_0(.) - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s,.)\,ds \right) \in \left(H^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p} \end{cases} \\ 2.\ u_0 \in \left(H^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p}. \end{cases}$$

Alors il existe $\omega^* > 0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$: *le problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R} \\ u(0,y) = u_0(y), \ y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) + \dfrac{\partial u}{\partial y \partial x}(0,y) = u_{1,0}(y), \ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

admet une solution stricte et unique telle que
$u \in H^2(0,1,L^2(\mathbb{R})) \cap L^p(0,1,H^2(\mathbb{R}))$.

Exemple 6.3 *Soit* $X = L^p(\mathbb{R})$. *On définit* A *et* H *par*

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}) = \{u \in X \ / \ u' \in X, \ u'' \in X\} \\ Au = au'' \ \text{pour } u \in D(A) \ \text{et } a > 0 \end{cases}$$

$$H = \alpha I, \ \ \mathrm{Re}\,\alpha > 0.$$

Le problème est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y), (x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R} \\ u(0,y) = u_0(y), \ y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = u_{1,0}(y), \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On fait le même raisonnement pour montrer les'hypothèses 3.23 et3.24 et pour **??**$\sim$*3.26 sont evidents.*

Alors on peut appliquer le théorème du chapitre 3

Theorème 6.4 *Si* $f \in L^p(0,1,L^p(\mathbb{R}))$ *avec* $1 < p < \infty$ *et*

$$\begin{cases} 1.\ \left(u_{1,0} - Qu_0(.) - \int_0^1 e^{sQ} f(s,.)\,ds\right) \in \left(W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \\ 2.\ u_0 \in \left(W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

alors le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y),(x,y) \in (0,1)\times\mathbb{R} \\ u(0,y) = u_0(y),\ \ y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = u_{1,0}(y),\ \ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

admet une solution semi stricte u. De plus dans ce cas u admet une décomposition de la forme

$$u = u_R + u_S,$$

où

1. $u_R \in W^{2,p}(0,1L^p(\mathbb{R})) \cap L^p(0,1,W^{2,p}(\mathbb{R}))$,
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1,L^p(\mathbb{R}))$.

Theorème 6.5 *Si* $f \in L^p(0,1,L^p(\mathbb{R}))$ *avec* $1 < p < \infty$ *et*

$$\begin{cases} 1.\ \left(u_{1,0} - Qu_0(.) - \int_0^1 e^{sQ} f(s,.)\,ds\right) \in \left(W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p} \\ 2.\ u_0 \in \left(W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

alors le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y),(x,y) \in (0,1)\times\mathbb{R} \\ u(0,y) = u_0(y),\ \ y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = u_{1,0}(y),\ \ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

admet une solution stricte et unique telle que
$u \in W^{2,p}(0,1L^p(\mathbb{R})) \cap L^p(0,1,W^{2,p}(\mathbb{R}))$.

6.2.2 Cas $B \neq 0$

Exemple 6.4 *On pose $X = L^2(0,1)$et on définit l'opérateur T par*

$$\begin{cases} D(T) = \{f \in H^1(0,1) : f(0) = f(1)\} \\ T(f) = if' \text{ pour } f \in D(T), \end{cases}$$

et introduisons l'opérateur A par

$$\begin{cases} D(A) = D(T^2) \\ A(f) = -2Tf, \end{cases}$$

et l'opérateur B par

$$\begin{cases} D(B) = D(T) \\ B(f) = -iTf, \end{cases}$$

Alors B génère un groupe fortement continu et les opérateurs $B^2 - A_\omega = T^2 + \omega I$, de domaine $D(T^2)$ et $(T^2 + \omega I)^{\frac{1}{2}}$ sont des opérateurs auto-adjoint positifs (pour plus de détails voir [10],exemple 4, p. 211)

En prenant ω assez grand et

$$\begin{cases} f \in L^p(0,1; L^2(1.0)) \\ 1. \begin{cases} \left((P_\omega + B) u_0 - \int_0^1 e^{sP_\omega} f(s)\, ds \right) \in D(H) \\ u_{1,0} - H \left((P_\omega + B) u_0 - \int_0^1 e^{sP_\omega} f(s)\, ds \right) \in (D(B^2 - A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \end{cases} \\ 2.\ u_0 \in (D(B^2 - A), X)_{\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

alors le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R} \\ u(0,y) = u_0(y),\ y \in (0,1), \\ u(1,y) - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(0,y) = u_{1,0}(y),\ y \in (0,1), \\ u(x,0) = u(x,1), \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1), x \in (0,1), \end{cases}$$

admet une solution semi stricte u .

De plus dans ce cas u admet une décomposition de la forme $u = u_R + u_S$, où

1. $u_R \in W^{2,p}(0, 1L^2(0,1)) \cap L^p(0,1, D(T^2)), u'_R \in L^p(0,1, D(T)),$
2. $u_S \in W^{1,p}(0,1, L^2(0,1)).$

Exemple 6.5 *On prend $X = L^p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$.*

On définit les opérateurs A, B *et* H *par*

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}), \ Au = au'', \\ D(B) = W^{1,p}(\mathbb{R}), \ Bu = bu', \\ D(H) = W^{1,p}(\mathbb{R}), \ Hu = cu', \end{cases}$$

où $a - b^2 > 0$ *et* $c > 0$*.Alors pour* $\omega > 0$ *on obtient*

$$\begin{cases} D(B^2 - A_\omega) = W^{2,p}(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ (B^2 - A_\omega) u = -(a - b^2) u'' + \omega u, \\ D\left(\sqrt{B^2 - A_\omega}\right) = W^{1,p}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Remarque 6.1 *On peut voir qu'à partir du théorème de Püss-sohr [27], p 167 ou de Marco-Fuhrman [24] que l'opérateur* $B^2 - A_\omega$ *est* $BIP(\theta_{B^2-A_\omega}, X)$.

Exemple 6.6 *Soit* X *un espace de Hilbert et* B *un opérateur auto-adjoint, strictement positif dans* X *avec* $A = -B^3$*. Alors* $B^2 - A_\omega$ *est un opérateur auto-adjoint, strictement positif et*

$$D\left(\sqrt{B^2 - A_\omega}\right) = D\left(B^{3/2}\right),$$

d'autre part

$$\pm B - \sqrt{B^2 - A_\omega},$$

génèrent un semi-groupe analytique dans X *et nous avons aussi* $D(A) \subsetneq D(B^2)$ *voir exemple 3 dans [10]. car* $\pm B - \sqrt{B^2 - A_\omega}$ *sont des opérateurs positifs.*

On définit les opérateurs A, B *et* H *dans* $X = L^2(\Omega)$ *par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{u \in H^6(\Omega) : u_{/\partial\Omega} = \Delta^2 u_{/\partial\Omega} = 0\right\}, \ Au = \Delta^3 u, \\ D(B) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \ Bu = -\Delta u, \\ D(H) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \ Hu = -\Delta u, \end{cases}$$

où Ω *est un domaine borné dans* $\mathbb{R}^q$*, avec* $q \geqslant 1$.

Alors pour ω *est assez grand , le problème*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 2\Delta \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \Delta^3 u(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in (0,1) \times \Omega \\ u(0,y) = u_0(y), \ y \in \Omega, \\ u(1,y) - \Delta \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = u_{1,0}(y), \ y \in \Omega. \\ u(x,\xi) = \Delta_y u(x,\xi) = \Delta_y^2 u(x,\xi) = 0, \quad (x,\xi) \in (0,1) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

a une solution semi stricte si et seulement si

$$\begin{cases} \begin{cases} 1. \ \left(\left(-B - \sqrt{B^2 - A_\omega}\right) u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{s\left(B - \sqrt{B^2 - A_\omega}\right)} f(s)\, ds\right) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \\ u_{1,0} - \Delta \left(\left(-B - \sqrt{B^2 - A_\omega}\right) u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{s\left(B - \sqrt{B^2 - A_\omega}\right)} f(s)\, ds\right) \in \left(D(B^2 - A), L^2(\Omega)\right)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}, \end{cases} \\ 2. \ u_0 \in \left(D(B^2 - A), L^2(\Omega)\right)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

De plus dans ce cas u *admet une décomposition*

$$u = u_R + u_S,$$

1. $u_R \in W^{2,p}\left(0,1;L^2\left(\Omega\right)\right) \cap L^p\left(0,1,D\left(A\right)\right), u_R' \in L^p\left(0,1,H^2\left(\Omega\right) \cap H_0^1\left(\Omega\right)\right),$
2. $u_S \in W^{1,p}\left(0,1,L^2\left(\Omega\right)\right).$

Bibliographie

[1] B. A. Aliev and S. Yakubov : Second Order Elliptic *Differential-Operator Equations with Unbounded Operator Boundary Conditions in UMD Banach Spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory 69 (2011), 269-300.

[2] A. V. Balakrishnan : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by them*. Pacif. J. Math. 10 (1960), 419-437.

[3] A. V. Bitsadze and A. A Samarskii, *On Some Simple Generalizations of linear Elliptic Boundary value Problems,* Dokl. Akad. Nauk SSSR.,185 (1969), 739-740. ; English transl. : Soviet Math. Dokl., 10 (1969).

[4] T. Carleman : *Sur la Théorie des Equations Intégrales et ses Applications*, Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich, 1 (1932), 132-151.

[5] M. Cheggag : *Problèmes de Sturm- Liouville, Abstrait pour une Equation Différentielle Abstraite Complète Elliptique du Seconde Ordre dans Divers Espaces*, 2008.

[6] G. Da Prato : *Abstract Differential Equations, Maximal Regularity and Linearization*, Proceed. Symposia. Pura Math., 45 (1986), Part I, 359–370.

[7] G. Da Prato et P. Grisvard : *Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. IX Ser.54 (1975), 305-387.

[8] G. Dore et A. Venni : *On the closedness of the sum of two closed operators*, Mathematicsche Zeitschrift, 196 (1987), 124-136.

[9] G. Dore and S. Yakubov : *Semigroup Estimates and Noncoercive Boundary Value Problems, Semigroup Forum,* 60 (2000), 93-121.

[10] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi : *On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type*, Funkcialaj Ekvacioj, 47(2004), 423-452.

[11] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi : *Necessary and Sufficient Conditions in the Study of Maximal Regularity of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 22 (2008), 973-987.

[12] A. Favini, Y. Yakubov, *Irregular Boundary Value Problems for Second Order Elliptic Differential-Operator Equations in UMD Banach Spaces.,* Math. Ann. (2010), 348 : 601-632.

[13] A. Favini, Y. Yakubov, *Regular Boundary Value Problems for Second Ordinay Differential-Operator Equations of Higher Order in UMD Banach Spaces.,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 4, N°3 (2011), 595-614.

[14] P. Grisvard. : *Spazi di tracce e applicazioni, Rendiconti di Matematica*, vol. 5, Serie VI, 1972.

[15] M. Haase : *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 169*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.

[16] H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri : *On Some Elliptic Problems with Non-local Boundary Coefficient-operator Conditions in the Framework of Hölderian Spaces, EJQTDE,2013 No. 36, p.1-32.*

[17] *H. Triebel :Interpolation theory, Function spaces, differential operators*, Amsterdam, North Holland 1978.

[18] S. G. Krein : *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscou, 1967.

[19] T. Kato. : *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1980.

[20] R. Labbas : *Problèmes aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

[21] R. Labbas and S. Maingot : *Singularities in Boundary Value Problems for an Abstract Second-order Differential Equation of Elliptic Type*, Applied Mathematics and Computation, 148 (2004), 645-663.

[22] J.L. Lions. : *Théorème de trace et d'interpolation I et II.* Annali S.N.S.di Pisa, 13, (1959), 389-403 et 14, (1960), 317-331.

[23] J.L. Lions et J. Peetre. : *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), 5-68.

[24]

[25] A. Lunardi : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995.

[26] C. Martinez and M. Sanz : *The Theory of Fractional Powers of Operators*, North Holland, Mathematics studies 187, 2001.

[27] J. Prüss et H. Sohr. : *Boundedness of imaginary powers of second-order elliptic differential operators in L^p*, Hiroshima Math. J., 23 (1993), 161-192.

[28] E. Sinestrari : *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Fonctions* , J. Math. Anal. App. 66 (1985) 16-66.

[29] A. L. Skubachevskii : *Nonclassical Boundary-value Problems. I,* Journal of Mathematical Sciences, Vol. 155, N°2 (2008),199-334.

[30] J. D. Tamarkin : *Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansion of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions*, Petrograd, 1917. Abridged English transl. ; Math. Z., 27, (1928), 1-54.

[31] S. Ya. Yakubov : *Noncoercive Boundary Value Problems for Elliptic Partial Differential and Differential-Operator Equations*, Results in Mathematics, vol. 28 (1995), 153-168.

[32] Y. Wang : *Solutions to Nonlinear Elliptic Equations with a Nonlocal Boundary Condition*, E. J. D. E. (2002), N°05, 1-16.

Résumé :

Ce travail est consacré à l'étude d'une équation différentielle abstraite de second ordre de type elliptique de la forme :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), x \in (0, 1)$$

avec les conditions aux limites non locales

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}, \end{cases}$$

où A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs $D(A), D(B)$ et $D(H)$ dans X (un espace de Banach complexe) ,$u_0, u_{1,0} \in X$ et f est une fonction à valeurs dans X .

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de solutions de ce problème lorsque le second membre f appartient à l'une des deux classes d'espaces de Banach de géométrie différente $C^{\theta}([0; 1]; X)$ et $L^P(0; 1; X)$ avec $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$.

Dans le premier cadre (compte tenu de la régularité höldérienne du second membre f), ou l'espace de Banach X est quelconque, nous prouverons aussi, sous les mêmes hypothèses, de nouveaux résultats optimaux si et seulement si les données u_0, $u_{1,0}$, f vérifient certaines conditions de compatibilité naturelles liées à l'équation elle-même. Ici, les techniques utilisées reposent sur la théorie des semi-groupes analytiques, sur la célèbre théorie des sommes d'opérateurs de Da Prato et Grisvard et principalement sur le travail de Sinestrari.

Dans le deuxième cadre fonctionnel $L^P(0; 1; X)$, lorsque l'espace de Banach X possède la propriété UMD et sous certaines hypothèses sur les opérateurs (ellipticité, commutativité,...), nous démontrerons de nouveaux résultats optimaux si et seulement si les données u_0, $u_{1,0}$ sont dans un espace d'interpolation bien précis. Les techniques utilisées reposent sur la classe dite BIP des opérateurs et essentiellement sur le célèbre Théorème de Dore et Venni.

Mots clés :

Théorie des sommes d'opérateurs linéaires, semi-groupes, espaces d'interpolation, les espaces UMD, les espaces de Hölder, solution stricte,solution semi-stricte, solution semi-classique, régularité optimal, équation elliptique, les conditions non locales, puissances fractionnaires.

Abstract :

This work is devoted to the study of a second order abstract differential equation of elliptic type :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), x \in (0, 1)$$

with the nonlocal boundary conditions

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0} \end{cases}$$

where A, B and H are closed linear operators of respective Domains $D(A), D(B)$ and $D(H)$ in X (a complexe Banach space), u_0,$u_{1,0} \in X$ and f is a function with values in X.

we are interested in the existence, the unicity and the maximum regularity of solutions of this problem when the second member f belongs to the one of the two classes of spaces of Banach of geometry different $C^{\theta}([0; 1]; X)$ and $L^P(0; 1; X)$ with $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$.

In the first framework (taking into account the regularity hölderian of the second member f), where spaces it of Banach X is unspecified,we will also prove, under the same assumptions, new optimal results if and only if the data u_0, $u_{1,0}$, f check certain natural compatibility conditions related to the equation it self. Here, the techniques used are based on the theory of analytic semigroups, the famous theory of operators sums : Da Prato and Grisvard and mainly on the work of Sinestrari.

In the second functional framework $L^P(0;1;X)$, when the space of Banach X has property UMD and under certain assumptions on the operators (ellipticity, commutation,...), we will show new optimal results if and only if the data u_0, $u_{1,0}$ are in interpolation spaces. The techniques used are based on class known as BIP operators and primarily on the famous Theorem of Dore and Venni.

Key words :

Theory of the linear sums of operators, semigroups, interpolation spaces,UMD spaces ,Hölder spaces, strict solution, semi-strict solution, semi-classical solution, regularity optimal, elliptic equation, nonlocal conditions, fractional powers.