REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

*MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE*

UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS, MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

**Département de Mathématiques**

=−=−=−=−=−=−=−=−*o* ◯ *o*−=−=−=−=−=−=−=−=

MEMOIRE DE MAGISTER

En mathématiques

*Intitulé*

# Croissance des solutions des équations différentielles à coefficients fonctions entières de même ordre

Présenté par : **BENZIDANE Abdelkader**

**Soutenu le juin 2010**

**Devant lejury composé de :**

**Président : M. BENDOUKHA Berrabah,** Professeur, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
**Examinateurs : M. BEKKAR Mohammed,** Professeur, Université d'Oran
**M. MEDEGHRI Ahmed,** Maître de Conférences A, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
**Encadreur : M. BELAIDI Benharrat,** Professeur, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
**Co-encadreur :M. HAMOUDA Saada,** Maître de Conférence B, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

## Remerciements

*Ce travail a été effectué au sein du département de Mathématiques à l'université de Mostaganem Sous la direction de Monsieur Belaïdi Benharrat Professeur à l'université de Mostaganem, et Monsieur Hamouda Saada Maître de conférences à l'université de Mostaganem, Je tiens à leur exprimer mes plus vifs remerciements pour leur aide continue et leurs conseils avisés.*

*Je voudrais aussi exprimer mes plus vifs remerciements a monsieur le président du jury, Mr Bendoukha Berrabah Professeur à l'université de Mostaganem et à Mr Bekkar Mohammed Professeur à l'université Es-Senia Oran, à Mr Medeghri Ahmed Maître de conférences à l'université de Mostaganem pour leur aide inestimable tout au long de ma formation.*

*Je dédie cet ouvrage à mes chers parents, mes frères, mes soeurs, et toute ma famille en général ainsi qu'a mon proche entourage et à toute personne qui m'a soutenue, aidé ou contribué de près ou de loin.*

*Enfin, je voudrais remercier le personnel des départements de Mathématiques pour sa précieuse aide sans oublier mes amis (es) en particulier Abdallah El Farissi.*

# Table des matières


**Introduction** **1**

**1 Eléments de la théorie de R. Nevanlinna** **3**

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.2 Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna . . . . . . . . . . . . 6

1.3 Ordre d'une fonction entière . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

1.4 Théorème de Phragmén-Lindelöf. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

**2 Croissance des solutions des équations différentielles non homogènes à coefficients fonctions entières de même ordre** **13**

2.1 Introduction et résultats. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

2.2 Lemmes préliminaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

2.3 Preuve du Théorème 2.1.4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

2.4 Preuve du Théorème 2.1.5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

**3 Croissance des solutions des équations différentielles homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières de même ordre et même type** **31**

3.1 Introduction et résultats . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

3.2 Lemmes préliminaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

3.3 Preuve du Théorème 3.1.4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

3.4 Preuve du Théorème 3.1.5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

**Bibliographie** **42**

# Introduction

La théorie de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe, fondée par R. Nevanlinna, joue un rôle très important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Il très connu que si les coefficients $A_i(z)$ $(i = 0, ..., n-1)$ de l'équation différentielle

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0, \tag{1}$$

sont des fonctions entières, alors toute solution est également une fonction entière. Frei [6] a démontré que si $p$ est le plus grand entier tel que $A_p(z)$ est transcendante, alors il existe au maximum $p$ solutions indépendantes d'ordre fini de l'équation différentielle (1) ( pour la définition de l'ordre d'une fonction entière $f$ voir la page 10). Un autre résultat classique du à Wittich [21] affirme que toutes les solutions de (1) sont d'ordre fini si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle (1) sont des polynômes. Pour une analyse complète sur l'ordre des solutions dans le cas des coefficients polynomiaux voir [10].

Il y a deux questions principales qui intéressent plusieurs chercheurs dans ce domaine : 1) Quelles sont les conditions sur les coefficients qui assurent que toutes les solutions soient d'ordre infini ? 2) Dans quelles conditions existe-il des solutions d'ordre fini dans le cas où il y a des coefficients fonctions entières transcendantes ? Il y a beaucoup de résultats concernant ces deux questions mais le problème dans sa généralité reste ouvert.

Cette thèse comporte une contribution dans ce domaine pour les équations différentielles linéaires à coefficient fonctions entières de même ordre.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

En premier chapitre, on va citer les notions fondamentales de la théorie de R. Nevanlinna nécessaires pour notre travail, pour plus de détails voir ([12], [15]).

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes à coefficients fonctions entières de même ordre et de types différents de la forme

$$f'' + A_1(z) e^{P_1(z)} f' + A_0(z) e^{P_0(z)} f = H(z)$$

et

$$f'' + \left(A_1(z)e^{P_1(z)^n} + D_1(z)\right) f' + \left(A_0(z)e^{P_0(z)^n} + D_0(z)\right) f = H(z),$$

où $A_0, A_1, D_0, D_1, H$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur à $n$, et $P_0, P_1$ sont deux polynômes *à* coefficients complexes. Sous certaines conditions sur la croissance des coefficients, on montre que toute solution transcendante est d'ordre infini.

Dans le troisième chapitre on va étudier l'ordre de croissance des solutions des équations différentielles homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières de même ordre et même type suivantes

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\,e^{z^n} f^{(k-1)} + ... + A_1(z)\,e^{z^n} f' + A_0(z)\,e^{z^n} f = 0,$$

où $A_0(z), ..., A_{n-1}(z)$, $(A_0(z) \not\equiv 0)$ sont des fonctions entières d'ordres inférieurs à $n$. On cherche des conditions suffisantes sur la croissance des coefficients pour que chaque solution non nulle soit d'ordre infini.

# Chapitre 1

# Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

On va citer quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite. Pour plus de détails voir ([12], [15]).

## 1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

**Théorème 1.1.1.** (Formule de Jensen) *Soit $f$ une fonction méromorphe telle que $f \neq 0, \infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_n$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

**Preuve :** On démontre le théorème dans le cas où $f$ ne possède ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z-a_j)} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z-b_j)}.$$

Alors $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\ln |g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne d'une fonction harmonique, on a

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| g\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi. \tag{1.1}$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j|<r} \frac{r}{|a_j|} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r}{|b_j|},$$

d'où

$$\ln |g(0)| = \ln |f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \ln \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{|b_j|}. \tag{1.2}$$

Pour $z = re^{i\varphi}$, on a

$$\left|\frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z-a_j)}\right| = \left|\frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z-b_j)}\right| = 1$$

$$\left|\frac{r^2 - \overline{a_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi}-a_j)}\right| = \left|\frac{r^2 - \overline{b_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi}-b_j)}\right| = 1$$

d'où $|g(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})|$, De (1.1) et (1.2), on obtient le résultat.
**Définition 1.1.1** *Pour tout réel $x > 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

**Lemme 1.1.1.** *On a les inégalités suivantes*
$(a)$ $\ln x \leq \ln^+ x$
$(b)$ $\ln^+ x \leq \ln^+ y \qquad (0 < x \leq y)$
$(c)$ $\ln x \leq \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$
$(d)$ $|\ln x| \leq \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$
$(e)$ $\ln^+ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i$
$(f)$ $\ln^+ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \ln n + \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i$
**Preuve :** Montrons $(e)$ et $(f)$.
$(e)$ Si $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$. alors l'inégalité est triviale. Si $\prod_{i=1}^{n} x_i > 1$ alors

$$\ln^+ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \ln \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i.$$

$(f)$ De $(b)$ et $(e)$, on a

$$\ln^+ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \ln^+ \left(n \max_{1\leq i\leq n} x_i\right) \leq \ln n + \ln^+ \left(\max_{1\leq i\leq n} x_i\right) \leq \ln n + \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i.$$

**Définition 1.1.2.** [11],[12] Soit $f$ une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe $a$, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction $f$ dans le disque $|z| \leqslant t$, chaque racine et pôle étant compté avec son ordre de multiplicité. Posons

$$N(r, a, f) = N\left(r, a, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r;$$

$N(r,f)$ *est appelée fonction a-points de la fonction* $f$ *dans le disque* $|z| \leqslant r$.

**Lemme 1.1.2.** *Soit* $f$ *une fonction méromorphe avec a-points* $\alpha_{1,}\ \alpha_{2,}\ ...,\alpha_n$ *dans le disque* $|z| \leqslant r$ *tel que* $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq ... \leq |\alpha_n| \leqslant r$*, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t}dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t}dt = \sum_{0<|\alpha_i|\leq r} \ln \frac{r}{|\alpha_i|}$$

**Preuve :** Posons $r_i = |\alpha_i|$ $(i = 1, ..., n)$, on obtient

$$\sum_{0<|\alpha_i|\leq r} \ln \frac{r}{|\alpha_i|} = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{r}{r_i} = \ln \frac{r^n}{r_1 r_2 ... r_n} = n \ln r - \sum_{i=1}^{n} \ln r_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} i \left(\ln r_{i+1} - \ln r_i\right) + n\left(\ln r - \ln r_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} i \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dt}{t} + n \int_{r_n}^{r} \frac{dt}{t} = \int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t}dt.$$

**Proposition 1.1.1.** *Soit* $f$ *une fonction méromorphe avec le développement de Laurent*

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i,\ c_m \neq 0,\ m \in \mathbb{Z}.$$

*Alors*

$$\ln |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

**Preuve :** Définissons la fonction méromorphe $h$ en posant

$$h(z) = f(z)\, z^{-m},\ z \in \mathbb{C}.$$

Il est clair que $m = n(0,0,f) - n(0,\infty,f)$ et $h(0) \neq 0,\ \infty$. En effet, si $m > 0$, alors $n(0,\infty,f) = 0$ et $m = n(0,0,f)$ ; si $m < 0$, alors $n(0,\infty,f) = -m$ et $n(0,0,f) = 0$; et finalement si $m = 0$, alors $n(0,\infty,f) = n(0,0,f) = 0$. Donc les fonctions $h$ et $f$ ont les mêmes pôles et les mêmes zéros dans $0 < |z| \leq r$. La formule de Jensen et le Lemme 1.1.2 impliquent

$$\ln |c_m| = \ln |h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left|f\left(re^{i\varphi}\right) r^{-m}\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \ln \frac{r}{|a_j|}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi - \left(n(0,0,f) - n(0,\infty,f)\right) \ln r$$

$$+ \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

**Définition 1.1.3.** *Soit $f$ une fonction méromorphe. On définit la fonction de proximité de la fonction $f$ par*

$$m(r,a,f) = m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)-a\right|} d\theta, a \neq \infty$$

*et*

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

**Définition 1.1.4.** *On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction $f$ par*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

**Exemple 1.1.1.** Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a

$$n(t,\infty,f) = 0 \text{ et } N(r,f) = 0.$$

De plus

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{r\cos\theta+ir}\right| d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta = \frac{r}{2\pi}2\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{\pi}$$

D'où

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

## 1.2 Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna

**Théorème 1.2.1. [12], [17]** *Soit $f$ une fonction méromorphe avec le développement de Laurent*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i,\ c_m \neq 0,\ m \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C}.$$

*Alors*

$$T(r,a,f) - T\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a).$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln 2 + \ln^+ |a|,$$

**Preuve :** Si $a = 0$, alors d'après le Lemme 1.1.1 ($c$) et la Proposition 1.1.1, on a

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|} d\varphi + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

et

$$\ln|c_m| = m(r,f) - m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

donc

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) = m(r,f) + N(r,f) - \ln|c_m|.$$

D'où

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right) = T(r,f) - \ln|c_m| \ \text{ où } \varphi(r,0) = 0. \tag{1.3}$$

Montrons le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Alors

$$N\left(r,\frac{1}{h}\right) = N\left(r,\frac{1}{f-a}\right), \ N(r,h) = N(r,f)$$

et

$$m\left(r,\frac{1}{h}\right) = m\left(r,\frac{1}{f-a}\right).$$

De plus

$$\ln^+|h| = \ln^+|f-a| \leq \ln^+|f| + \ln^+|a| + \ln 2$$

$$\ln^+|f| = \ln^+|f-a+a| = \ln^+|h+a| \leq \ln^+|h| + \ln^+|a| + \ln 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \ln^+|a| + \ln 2$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \ln^+|a| + \ln 2.$$

Posons

$$\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f).$$

Alors

$$\varphi(r,a) \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

En appliquant (1.3) pour $h$, on aura

$$T\left(r,\frac{1}{h}\right) = m\left(r,\frac{1}{h}\right) + N\left(r,\frac{1}{h}\right) = m(r,h) + N(r,h) - \ln|c_m|$$

$$= m(r,f) + N(r,f) + \varphi(r,a) - \ln|c_m| = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a).$$

**Remarque.** Le premier Théorème fondamental peut être formulé comme suit

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1)$$

pour tout nombre complexe $a \neq \infty$.

**Proposition 1.2.1.** *Soient $f$, $f_1$, $f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ telles que $ad - bc \neq 0$. Alors
1) $T\left(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i)$, $(n \geq 1)$
2) $T(r, f^n) = nT(r, f)$ $(n \in \mathbb{N})$
3) $T\left(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n$
4) $T\left(r, \dfrac{af+b}{cf+d}\right) = T(r, f) + O(1)$, $f \neq -\dfrac{d}{c}$.
**Preuve :**
1) On a

$$m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i),$$

et

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i),$$

donc

$$T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) = m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i).$$

2) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1$ équivaut $|f| \leq 1$. Si $|f| \leq 1$, alors

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) \leq nN(r, f) = nT(r, f).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) + m(r, f^n)$$

$$= nN(r, f) + nm(r, f) = nT(r, f).$$

3) On a

$$T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) + \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \ln n = \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n.$$

4) Posons $f_0 = f$, $f_1 = f_0 + \dfrac{d}{c}$, $f_2 = cf_1$, $f_3 = \dfrac{1}{f_2}$, $f_4 = \dfrac{bc - ad}{c} f_3$, $g = f_5 = f_4 + \dfrac{a}{c}$.
Si $c \neq 0$, alors

$$T(r, f_{k+1}) = T(r, f_k) + O(1).$$

D'où le résultat.

**Exemple 1.2.1.** Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

Calculons maintenant $T(t, \infty, f)$. Si $a = 0$, alors $N(r, 0, f) = 0$ et

$$m(r, 0, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{-r\cos\theta}\right| d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -r\cos\theta d\theta = \frac{-r}{2\pi}\left[\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{r}{\pi}.$$

Donc

$$T(r, 0, f) = N(r, 0, f) + m(r, 0, f) = \frac{r}{\pi}.$$

Si $a \neq 0, \infty$ et $z_0$ est une solution de l'équation $e^{z_0} = a$, alors toutes les solutions s'écrivent $z_0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. D'où

$$n(t, a, f) \sim 2\frac{\sqrt{t^2 - (\ln|a|)^2}}{2\pi} \sim \frac{t}{\pi},\ t \to +\infty$$

$$n(t, a, f) = \frac{t}{\pi} + O(1)$$

D'où

$$N(r, a, f) = \frac{r}{\pi} + O(\ln r) = \frac{r}{\pi} + O(1),$$

et

$$m(r, a, f) = O(1).$$

En effet,

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|\exp\left\{re^{i\theta}\right\} - a\right|} d\theta;$$

cette égalité reste bornée car $\exp\left\{re^{i\theta}\right\} \to \infty$ dans le secteur $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $\exp\left\{re^{i\theta}\right\} \to 0$ dans le secteur $\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$. Donc

$$T(r, a, f) = N(r, a, f) + m(r, a, f) = \frac{r}{\pi} + O(1).$$

**Exemple 1.2.2.** Soit

$$f(z) = c\frac{z^p + ... + a_p}{z^q + ... + a_q} \ (\text{où } c \neq 0).$$

Supposons que $p > q$. Alors $f(z) \to \infty$ pour $z \to \infty$, donc $m(r, a, f) = 0$ pour $r > r_0$ si $a \neq \infty$. L'equation $f(z) = a$ possède $p$ racines, donc $n(t, a, f) = p$ et

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt = p\ln r + O(1)$$

et par suite pour $r \to \infty$

$$T(r,f) = p \ln r + O(1)$$

et

$$N(r,a,f) = p \ln r + O(1),$$

$$m(r,a,f) = O(1), \ a \neq \infty.$$

De façon analogue si $p = q$, alors

$$T(r,f) = q \ln r + O(1)$$

et

$$N(r,a,f) = q \ln r + O(1),$$

$$m(r,a,f) = O(1), \ a \neq 0.$$

On a donc dans tous les cas

$$T(r,f) = d \ln r + O(1)$$

et

$$N(r,a,f) = d \ln r + O(1),$$

$$m(r,a,f) = O(1), \ a \neq f(\infty),$$

avec $d = \max(p,q)$.

## 1.3 Ordre d'une fonction entière

**Définition 1.3.1. [12], [18]** Soit $f$ une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de $f$ sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Si $f$ est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de $f$ sont définis par

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Le type d'une fonction entière d'ordre $\sigma$ est définit par

$$\tau(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log M(r,f)}{r^\sigma}.$$

**Exemples 1.3.1.** Soit $P(z)$ est un polynôme d'ordre $n$. Alors
La fonction $f(z) = \sinh\{P(z)\}$ est d'ordre $\sigma(f) = \infty$ et d'hyper ordre $\sigma_2(f) = n$.
La fonction $f(z) = \exp\{\exp z\}$ est d'ordre $\sigma(f) = \infty$ et d'hyper ordre $\sigma_2(f) = 1$.
La fonction $f(z) = \sqrt{z}\sin(\sqrt{z})$ est d'ordre $\sigma(f) = \frac{1}{2}$ et d'hyper ordre $\sigma_2(f) = 0$.
La fonction $f(z) = e^{2z^3}$ est d'ordre $\sigma(f) = 3$ et de type $\tau(f) = 2$.

**Définitions 1.3.2. [11, p. 318]** On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, \infty)$ par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\,dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $E$.

La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, \infty)$ est définie par

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}dt.$$

La densité logarithmique inférieure est définie par

$$\underline{\log dens}(E) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{lm(E \cap [1, r])}{\log r}$$

La densité logarithmique supérieure est définie par

$$\overline{\log dens}(E) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{lm(E \cap [1, r])}{\log r}.$$

**Exemple 1.3.2.** La mesure linéaire de l'ensemble $E = [2, 6] \subset [0, \infty)$ est

$$m(E) = \int_0^{\infty} \chi_E(t)\,dt = \int_2^6 dt = 4.$$

La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1, e^2] \subset [1, \infty)$ est

$$lm(F) = \int_1^{\infty} \chi_F(t)\frac{dt}{t} = \int_1^{e^2} \frac{dt}{t} = 2.$$

La densité logarithmique inférieure de l'ensemble $F$ est

$$\underline{\log dens}(F) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{lm(F \cap [1, r])}{\log r} = 0$$

La densité logarithmique supérieure de l'ensemble $F$ est

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{lm(F \cap [1, r])}{\log r} = 0$$

**Définition 1.3.3. [11, p. 318]** Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière, $\mu(r)$ son terme maximal, i.e. $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n, \quad n = 0, 1, 2, ...\}$. Alors l'indice central de la fonction $f$ est défini par $\nu_f(r) = \max\{m, \quad \mu(r) = |a_m| r^m\}$.

**Exemple 1.3.3.** Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a $\mu(r) = [r]$ et $\nu_f(r) = [r]$.

## 1.4 Théorème de Phragmén-Lindelöf.

Ce théorème est une extension du théorème de Liouville qui affirme que (*si* $f$ *est une fonction analytique et bornée sur le plan complexe* $\mathbb{C}$, *alors elle est constante).* La condition bornée peut être remplacée par une autre majoration comme suit :

**Théorème 1.4.1.** [5] *Soit* $G$ *un domaine simplement connexe et* $f$ *une fonction analytique sur* $G$. *Supposons qu'il existe une fonction analytique* $\varphi : G \to \mathbb{C}$ *bornée et ne s'annule pas sur* $G$. *Si* $M$ *est une constante et* $\partial_\infty G = A \cup B$ *telle que*

*a) pour tout* $a \in A$, $\limsup\limits_{z \to a} |f(z)| \leq M$,

*b) pour tout* $b \in B$, *et* $\eta > 0$, $\limsup\limits_{z \to b} |f(z)| |\varphi(z)|^\eta \leq M$,

*alors* $|f(z)| \leq M$ *pour tout* $z \in G$.

**Corollaire 1.4.1.** *Soit* $a \geq \frac{1}{2}$ *et posons* $G = \left\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2a}\right\}$. *Supposons que* $f$ *est analytique sur* $G$ *et qu'il existe une constante* $M$ *telle que* $\limsup\limits_{z \to w} |f(z)| \leq M$ *pour tout* $w \in \partial_\infty G$. *S'il existe deux constantes positives* $p$ *et* $b < a$ *telles que* $|f(z)| \leq p \exp\left(|z|^b\right)$ *pout tout* $z \in G$ *avec* $|z|$ *suffisamment grand, alors* $|f(z)| \leq M$ *pour tout* $z \in G$.

Ce résultat a été établi dans [16] comme suit :

**Théorème 1.4.2.** *Soit* $f$ *une fonction analytique dans le secteur* $S_\alpha$ *(de mesure angulaire* $\frac{\pi}{\alpha}$*) et continue sur* $\partial S_\alpha$ *telle que* $|f(z)| \leq M$ *pour tout* $z \in \partial S_\alpha$. *Si l'ordre angulaire* $\sigma(f) < \alpha$, *alors* $|f(z)| \leq M$ *pour tout* $z \in S_\alpha$.

# Chapitre 2

# Croissance des solutions des équations différentielles non homogènes à coefficients fonctions entières de même ordre

## 2.1 Introduction et résultats.

Dans ce chapitre, on va étudier la croissance des solutions des équations différentielles non homogènes d'ordre deux à coefficients fonctions entières de même ordre.

Dans l'étude de l'équation différentielle suivante

$$f'' + A_1(z)\, e^{az} f' + A_0(z)\, e^{bz} f = H(z)\,, \tag{2.1}$$

Jun Wang et Ilpo Laine ont obtenu les résultats suivants.

**Théorème 2.1.1.** [20] *Soient* $A_0 \not\equiv 0$, $A_1 \not\equiv 0$ et $H$ *des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à* 1 *et* $a, b$ *des constantes complexes non nulles telles que* $a \neq b$. *Alors toute solution transcendante* $f$ *de l'équation différentielle* (2.1) *est d'ordre infini.*

**Théorème 2.1.2.** [20] *Soient* $A_0 \not\equiv 0$*,* $A_1 \not\equiv 0$*,* $H$*,* $D_0$, et $D_1$ *des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à* 1, *et* $a, b$ *des constantes complexes non nulles telles que* $b/a < 0$. *Alors toute solution transcendante* $f$ *de l'équation différentielle*

$$f'' + (A_1(z)e^{az} + D_1(z))\, f' + \left(A_0(z)e^{bz} + D_0(z)\right) f = H(z) \tag{2.2}$$

*est d'ordre infini*

Maintenant, on va étendre ces résultats, au premier lieu, pour les équations différentielles linéaires suivantes

$$f'' + A_1(z)e^{az^n} f' + A_0(z)e^{bz^n} f = H(z) \tag{2.3}$$

et

$$f^{''}+\left(A_1(z)e^{az^n}+D_1\left(z\right)\right)f^{'}+\left(A_0(z)e^{bz^n}+D_0\left(z\right)\right)f=H(z). \tag{2.4}$$

**Théorème 2.1.4.** *Soient* $A_0 \not\equiv 0$, $A_1 \not\equiv 0$ et $H$ *des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à* $n$ *et* $a, b$ *des constantes complexes non nulles telles que* $a \neq b$. *Alors toute solution transcendante* $f$ *de l'équation différentielle* (2.3) *est d'ordre infini.*

**Théorème 2.1.5.** *Soient* $A_0 \not\equiv 0$, $A_1 \not\equiv 0$, $H$, $D_0$, et $D_1$ *des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à* $n$, *et* $a, b$ *des constantes complexes non nulles telles que* $ab \neq 0$ et $a/b < 0$. *Alors toute solution transcendante* $f$ *de* (2.4) *est d'ordre infini.*

On peut étendre ces résultats facilement aux équations plus générales comme suit :

**Corollaire 2.1.1.** *Soient* $h_j\left(z\right)\left(j=0,1\right)$ *des polynômes non nuls avec* $h_0\left(z\right)=\sum_{i=0}^{n} b_i z^i$, $h_1\left(z\right)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *tels que* $a_i, b_i$ $(i=0,1,...n)$ *sont des constantes complexes telles que* $a_n b_n \neq 0$ *et* $b_n \neq a_n$. *Alors toute solution transcendante de l'équation différentielle*

$$f^{''}+A_1\left(z\right)e^{h_1(z)}f^{'}+A_0\left(z\right)e^{h_0(z)}f=H\left(z\right) \tag{2.5}$$

*est d'ordre infini.*

**Corollaire 2.1.2.** *Soient* $h_j\left(z\right)\left(j=0,1\right)$ *des polynômes non nuls avec* $h_0\left(z\right)=\sum_{i=0}^{n} b_i z^i$, $h_1\left(z\right)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *tels que* $a_i, b_i$ $(i=0,1,...n)$ *sont des constantes complexes telles que* $a_n b_n \neq 0$ *et* $a_n/b_n < 0$. *Alors toute solution transcendante de l'équation différentielle*

$$f^{''}+\left(A_1(z)e^{h_1(z)}+D_1\left(z\right)\right)f^{'}+\left(A_0(z)e^{h_0(z)}+D_0\left(z\right)\right)f=H(z) \tag{2.6}$$

*est d'ordre infini.*

**Exemples 2.1.1** L'équation différentielle suivante

$$f^{''}+\sinh\left(z^2\right)e^{z^4}f^{'}+\cosh\left(z^2\right)e^{2z^4}f=e^{z^2},$$

vérifie les conditions du Théorème 2.1.4. En effet, on a $n=4$ et

$$\sigma\left(A_0\right)=\sigma\left(\cosh\left(z^2\right)\right)=2,$$

$$\sigma\left(A_1\right)=\sigma\left(\sinh\left(z^2\right)\right)=2,$$

$$\sigma\left(H\right)=\sigma\left(e^{z^2}\right)=2.$$

Donc toute solution $f$ transcendante est d'ordre infini.

L'équation différentielle suivante

$$f'' + e^{z}e^{iz^3+2z}f' + e^{z^2}e^{z^3+3z}f = \sin(z),$$

vérifie les conditions du Corollaire 2.1.1. En effet, on a $n = 3$ et

$$\sigma(A_0) = \sigma\left(e^{z^2}\right) = 2,$$

$$\sigma(A_1) = \sigma(e^{z}) = 1,$$

$$\sigma(H) = \sigma(\sin(z)) = 1.$$

$$h_0(z) = z^3 + 3z,\ h_1(z) = iz^3 + 2z.$$

Donc toute solution $f$ transcendante est d'ordre infini.

L'équation différentielle suivante

$$f'' + \left(-2ze^{iz^4} + \frac{1-\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right)f' + \left(2ze^{-iz^4} + \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right)f = e^{z},$$

vérifie les conditions du Théorème.2.1.5. En effet, on a $n = 4$ et

$$\sigma(A_0) = \sigma(2z) = 0,$$

$$\sigma(A_1) = \sigma(-2z) = 0,$$

$$\sigma(D_0) = \sigma\left(\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\sigma(D_1) = \sigma\left(\frac{1-\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\sigma(H) = \sigma(e^{z}) = 1.$$

Donc toute solution $f$ transcendante est d'ordre infini.

L'équation différentielle suivante

$$f'' + \left(e^{2z}e^{z^5+2z} + 1\right)f' + \left(e^{3z}e^{-z^5+z^4+1} + \sqrt{z}\sin\sqrt{z}\right)f = e^{-z},$$

vérifie les conditions du Corollaire 2.1.2. En effet, on a $n = 5$ et

$$\sigma(A_0) = \sigma\left(e^{3z}\right) = 1,$$

$$\sigma(A_1) = \sigma\left(e^{2z}\right) = 1,$$

$$\sigma(D_0) = \sigma\left(\sqrt{z}\sin\sqrt{z}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\sigma(D_1) = \sigma(1) = 0,$$

$$\sigma(H) = \sigma\left(e^{-z}\right) = 1.$$

$$h_0(z) = -z^5 + z^4 + 1,\ h_1(z) = z^5 + 2z.$$

Donc toute solution $f$ transcendante est d'ordre infini.

Pour les démonstrations des théorèmes précédents on a besoin des lemmes suivants.

## 2.2 Lemmes préliminaires

**Lemme 2.2.1.** [13] *Soient $g(z)$ une fonction entière d'ordre fini $\sigma$ et $\nu(r)$ son indice central. Alors*

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \nu(r)}{\log r}.$$

**Lemme 2.2.2.** [9] *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini $\sigma$ et $\varepsilon > 0$ est une constante. Alors, il existe un ensemble $H \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique fini, telle que pour tout $z$ avec $|z| \notin H \cup [0, 1]$ et pour tout $k$, $j$, $0 \leqslant j < k$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.7}$$

*De même, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $z = re^{i\theta}$ avec $|z|$ suffisamment grand et $\theta \in [0, 2\pi) - E$, et pour tout $k$, $j$, $0 \leqslant j < k$, l'inégalité* (2.7) *est valide.*

**Lemme 2.2.3.** [7] *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini $\sigma$. Étant donné $\zeta > 0$ et $0 < l < \frac{1}{2}$, il existe une constante $K(\sigma, \zeta)$ et un ensemble $E_\zeta \subset [0, \infty)$* avec $\underline{\log dens}(E_\zeta) > 1 - \zeta$ *telles que*

$$r \int_J \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| d\theta < K(\sigma, \zeta)\left(l \log \frac{1}{l}\right) T(r, f) \tag{2.8}$$

*pour tout $r \in E_\zeta$ et pour chaque intervalle $J \subset [0, 2\pi]$ de longueur $l$.*

**Lemme 2.2.4.** [20] *Soit $f(z)$ une fonction d'ordre fini $\sigma$ et $M(r, f) = f\left(re^{i\theta}\right)$. Étant donné $\zeta > 0$ et $0 < C(\sigma, \zeta) < 1$, il existe une constante $0 < l_0 < \frac{1}{2}$ et un ensemble $E_\zeta$* avec $\underline{\log dens}(E_\zeta) > 1 - \zeta$ *telle que*

$$e^{-5\pi} M(r, f)^{1-C(\sigma,\zeta)} \leqslant \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \tag{2.9}$$

*pour tout $r \in E_\zeta$ suffisamment grand et tout $\theta$ telle que $|\theta - \theta_r| \leqslant l_0$.*

**Preuve :** On prend la branche principale de $\log f\left(re^{i\theta_r}\right)$, c'est-à-dire $0 \leq \arg\log f\left(re^{i\theta_r}\right) < 2\pi$, on a

$$\log f\left(re^{i\theta}\right) = \log f\left(re^{i\theta_r}\right) + \int_{\theta_r}^{\theta} d\log f\left(re^{i\theta}\right)$$

$$= \log f\left(re^{\theta_r}\right) + ri\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} e^{i\theta} d\theta. \tag{2.10}$$

En prenant les modules des deux côtés de (2.10) et en supposant que $r$ est assez grand, on obtient

$$\left|\log f\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq \left|\log f\left(re^{i\theta_r}\right)\right| - r\int_{\theta_r}^{\theta} \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| |d\theta|$$

$$\geq \log M(r,f) - 2\pi - r\int_{\theta_r}^{\theta} \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| |d\theta|.$$

Du Lemme 2.2.3, il existe un ensemble $E_\zeta \subset [0,\infty)$ avec $1-\zeta \leq \underline{\log dens}\,(E_\zeta)$ telle que

$$\log M(r,f) - K(\sigma,\zeta)\left(l\log\frac{1}{l}\right) T(r,f) \leq \left|\log f\left(re^{i\theta}\right)\right| + 2\pi, \tag{2.11}$$

pour tous les $r \in E_\zeta$ et $0 < |\theta - \theta_r| = l < \frac{1}{2}$, où $K(\sigma,\zeta)$ est une constante ne dépendant que de $\sigma$ et $\zeta$. Il est évident qu'il existe $l_0$ telle que

$$K(\sigma,\zeta)\left(l\log\frac{1}{l}\right) \leq C(\sigma,\zeta) < 1,$$

pour tout $l \leq l_0 < \frac{1}{2}$. De $T(r,f) \leq \log M(r,f)$, et (2.11) on déduit que

$$(1 - C(\sigma,\zeta))\log M(r,f) \leq \left|\log f\left(re^{i\theta}\right)\right| + 2\pi$$

$$\leq \sqrt{\left|\log^2 f\left(re^{i\theta}\right)\right| + (3\pi)^2} \leq \left|\log f\left(re^{i\theta}\right)\right| + 5\pi, \tag{2.12}$$

ce qui conduit à (2.9).

**Lemme 2.2.5.** [20] *Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions entières non constantes avec $\sigma(g) < \sigma(f) < +\infty$. Étant donné $\varepsilon > 0$ avec $0 < 4\varepsilon < \sigma(f) - \sigma(g)$ et $0 < \delta < \frac{1}{4}$, il existe un ensemble $E$ avec $\overline{\log dens}\,(E) > 0$ et une constante positive $r_0$ telle que*

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| \leqslant \exp\left\{-r^{\sigma(f)-2\varepsilon}\right\} \tag{2.13}$$

*pour tout $z$ tel que $|z| = r \in E$ est suffisamment grand et que $|f(z)| \geqslant M(r,f)$ $v_f(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}$.*

**Preuve :** Il est clair que

$$v_f(r) \leq r^{\sigma(f)+1},\ |g(z)| \leqslant \exp\left\{r^{\sigma(g)+\varepsilon}\right\}, \tag{2.14}$$

pour tout $r$ suffisamment grand. Soit $r'_n$ une suite tendant vers l'infini telle que

$$\sigma(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\log M(r'_n, f)}{\log r'_n}.$$

Posons $E = \cup_{n=1}^{\infty}\left[r'_n, r'^{1+2k}_n\right]$ pour $k > 0$. On a

$$\overline{\log dens}\,(E) \geq \limsup_{n\to+\infty} \frac{lm\left(E \cap \left[1, r'^{1+2k}_n\right]\right)}{(1+2k)\log r'_n}$$

$$\geq \limsup_{n\to+\infty} \frac{lm\left(E \cap \left[r'_n, r'^{1+2k}_n\right]\right)}{(1+2k)\log r'_n} = \frac{2k}{1+2k} > 0. \tag{2.15}$$

Puisque $M(r,f)$ est croissante, alors nous avons

$$\frac{\log\log M(r,f)}{\log r} \geq \frac{\log\log M(r'_n, f)}{(1+2k)\log r'_n}$$

pour $r \in \left[r'_n, r'^{1+2k}_n\right]$. Par conséquent, en prenant $2\sigma(f)\,k = \varepsilon$, on obtient

$$\frac{\log\log M(r,f)}{\log r} \geq \frac{\sigma(f)}{1+2k} \geq \sigma(f)(1-2k) = \sigma(f) - \varepsilon$$

Cela signifie que, pour $r \in E$,

$$M(r,f) \geq \exp\left\{r^{\sigma(f)-\varepsilon}\right\}. \tag{2.16}$$

En combinant (2.14) et (2.16), nous pouvons conclure qu'il existe une constante positive $r_0$ telle que

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| \leqslant r^{(\sigma(f)+1)\left(\frac{1}{4}-\delta\right)} \frac{\exp\left\{r^{\sigma(g)+\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r^{\sigma(f)-\varepsilon}\right\}} \leqslant \exp\left\{-r^{\sigma(f)-2\varepsilon}\right\}$$

pour tout $z$ satisfaisant $|f(z)| \geqslant M(r,f)\ v_f(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}$ tel que $r \in E$ est suffisamment grand.

Le lemme suivant décrit le comportement de $e^{P(z)}$ où $P(z)$ est un polynôme.

**Lemme 2.2.6.** [4] *Soient $P(z) = (\alpha + i\beta)\, z^n$, où $\alpha$, $\beta$ sont des nombres réels tels que $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ et $A(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe avec $\sigma(A) < n$. Posons $g(z) = A(z)\, e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P,\theta) = \alpha cos(n\theta) - \beta sin(n\theta)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire fini tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus H$ il existe $R > 0$ tel que pour $|z| = r > R$ et $r \notin E$, on a* *(i) si* $\delta(P,\theta) > 0$*, alors*

$$exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} < \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| < exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}, \tag{2.17}$$

*(ii) si* $\delta(P,\theta) < 0$*, alors*

$$exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} < \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| < exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} \tag{2.18}$$

*où* $H = \{\theta \in [0,2\pi)\,;\ \delta(P,\theta) = 0\}$.

**Preuve :** Soit $g(z) = h(z)\,e^{(\alpha+i\beta)z^n}$ où $h(z) = A(z)\,e^{P_{n-1}(z)}$, $P_{n-1}(z) = P(z) - (\alpha+i\beta)\,z^n$, alors $\sigma(h) = s < n$. Du Lemme 2.2.2, pour tout $\varepsilon$ donné $0 < 2\varepsilon < n-s, H_2 = \{\theta \in [0,2\pi)\,;\delta(P,\theta) = 0\}$, il existe un ensemble $H_1 \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $z = re^{i\theta}$ avec $|z|$ suffisamment grand et $\theta \in [0,2\pi) - H_1$, $|z| > R_0$ $(R_0 > 1)$ on a

$$\left|\frac{h'\left(re^{i\theta}\right)}{h\left(re^{i\theta}\right)}\right| \leqslant r^{(s-1-\varepsilon/2)}. \tag{2.19}$$

En prenant la courbe intégrante $C = \{z : \arg z = \theta, R_0 \leq |z| < r\}$, nous obtient

$$\log h\left(re^{i\theta}\right) = \int_{R_0}^{r} \frac{h'\left(te^{i\theta}\right)}{h\left(te^{i\theta}\right)} e^{i\theta}dt + \log h\left(R_0 e^{i\theta}\right). \tag{2.20}$$

De (2.19) et (2.20) nous obtenons

$$\left|\log h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq r^{s+\varepsilon/2} + M \leq r^{s+\varepsilon}$$

où $M > 0$ est une constante, et

$$\left|\log\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|\right| \leq \left|\log h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq r^{s+\varepsilon}.$$

D'où

$$\exp\left\{-r^{s+\varepsilon}\right\} \leq \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\left\{r^{s+\varepsilon}\right\} \tag{2.21}$$

Comme $\left|\exp\left\{(\alpha+i\beta)\left(re^{i\theta}\right)^n\right\}\right| = e^{\delta(P,\theta)r^n}$ et de $(2.21)$, on aura

$$exp\left\{\delta(P,\theta)r^n - r^{s+\varepsilon}\right\} < \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| < exp\left\{\delta(P,\theta)r^n + r^{s+\varepsilon}\right\} \tag{2.22}$$

D'où, de (2.22) il existe $R > R_0$ telle que pour $r > R$ (2.17) et (2.18) sont réaliseés.

**Lemme 2.2.7.** [8] *Soient* $P_1, P_2..., P_k$ *des polynômes non constants de degrés,* $d_1, d_2..., d_k$*, respectivement, tels que* $\deg(P_i - P_j) = \max\{d_i, d_j\}$ *pour* $i \neq j$ *et* $A(z) = \sum_{j=1}^{k} B_j(z)\,e^{P_j(z)}$*, où* $B_j(z) \not\equiv 0$ *sont des fonctions entières avec* $\sigma(B_j) < d_j$*. Alors* $\sigma(A) = \underset{1\leq j\leq k}{max}\{dj\}$.

# Preuves des Théorèmes

## 2.3 Preuve du Théorème 2.1.4

Supposons d'abord que $f$ est une solution non triviale de (2.3) avec $\sigma(f) < \infty$. Montrons que $\sigma(f) \geq n$. Supposons que $\sigma(f) < n$. Alors d'après (2.3), on a

$$A_1(z)e^{az^n}f^{'} + A_0(z)e^{bz^n}f = H(z) - f''.$$

D'après le Lemme 2.2.7, on a

$$\sigma(A_1(z)e^{az^n}f^{'} + A_0(z)e^{bz^n}f) = \underset{1\leq j\leq 2}{max}\{dj\} = n.$$

D'autre part, on a

$$\sigma\left(H(z) - f''\right) < n,$$

c'est une contradiction. Donc $\sigma(f) \geq n$. De (2.3), on peut écrire

$$\frac{f''}{f} + A_1(z)e^{az^n}\frac{f^{'}}{f} + A_0(z)e^{bz^n} = \frac{H}{f}. \tag{2.23}$$

De la théorie de Wiman-Valiron, pour $0 < \delta < \dfrac{1}{4}$, il existe un ensemble $E_1$ de mesure logarithmique fini tel que

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| = \left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \tag{2.24}$$

où $|f(z)| \geqslant M(r, f)\ v_f(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}\quad r \notin E_1$. De plus, de la définition de l'indice central, on sait que $v_f(r) \to \infty$ quand $r \to \infty$. Du Lemme 2.2.1, on a

$$v_f(r) \leqslant r^{\sigma(f)+1} \tag{2.25}$$

pour tout $r$ suffisamment grand. Du Lemme 2.2.2, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant |z|^{(j)(\sigma(f)-1+\varepsilon)} \qquad j = 1, 2 \tag{2.26}$$

pour tout $z$ satisfaisant $|z| = r \notin E_2$ où $lm(E_2) < \infty$, et $\varepsilon$ est une constante donnée avec $0 < 4\varepsilon < 1 - \sigma(H)$. Et du Lemme 2.2.5, il existe un ensemble $E_3$ avec $\zeta = \overline{\log dens}(E_3) > 0$ tel que

$$\frac{v_f(r)^{\frac{1}{4}-\delta}H(z)}{M(r, f)} \leqslant \exp\left\{-r^{1-2\varepsilon}\right\}, \tag{2.27}$$

où $r \in E_3$ est assez grand. Pour tout $r$, il existe $\theta_r$ telle que $M(r, f) = \left|f\left(re^{i\theta_r}\right)\right|$. Du Lemme 2.2.4, pour une constante $0 < c < 1$, il existe une constante $l_0$ et un ensemble $E_4$ avec $1 - \frac{\zeta}{2} \leqslant \underline{\log dens}(E_4)$, tels que

$$e^{-5\pi}M(r, f)^{1-C} \leqslant \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \tag{2.28}$$

pour tout $r \in E_4$ et $|\theta - \theta_r| \leqslant l_0$. Rappelons maintenant que les fonctions caractéristiques de $E_3$ et $E_4$ vérifient la relation

$$\varkappa_{E_3 \cap E_4}(t) = \varkappa_{E_3}(t) + \varkappa_{E_4}(t) - \varkappa_{E_3 \cup E_4}(t).$$

Il est clair que $\overline{\log dens}\,(E_3 \cup E_4) \leqslant 1$. Ainsi, on obtient

$$\frac{\zeta}{2} \leqslant \overline{\log dens} E_3 + \underline{\log dens} E_4 - \overline{\log dens}\,(E_3 \cup E_4) \leqslant \overline{\log dens}\,(E_3 \cap E_4).$$

Comme $lm\,(E_1 \cup E_2) < \infty$, on aura $\overline{\log dens}\,((E_3 \cap E_4) - (E_1 \cup E_2)) > 0$. Ainsi, il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta_m}$ avec $r_m \to +\infty$ et

$$|f(z_m)| = M(r_m, f). \in (E_3 \cap E_4) \diagdown (E_1 \cup E_2).$$

On suppose que $\lim\limits_{m\to\infty} \theta_m = \theta_0$; (si c'est nécessaire on passe à une suite extraite de $\{\theta_m\}$).

Maintenant on va examiner trois cas séparément.

**Cas.1**. $\delta(az^n, \theta_0) > 0$. De la continuité de $\delta(az^n, \theta)$, on a

$$\frac{1}{2}\delta(az^n, \theta_0) < \delta(az^n, \theta_m) < \frac{3}{2}\delta(az^n, \theta_0) \tag{2.29}$$

pour $m$ suffisamment grand. De (2.17), on déduit que

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(az^n, \theta_0) r_m^n\right\} \leqslant \left|A_1(z_m) e^{az_m^n}\right| \leqslant exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(az^n, \theta_0) r_m^n\right\} \tag{2.30}$$

pour tout $m$ suffisamment grand. De (2.23), on obtient

$$\left|\frac{f'(z_m)}{f(z_m)} + \frac{A_0(z_m)}{A_1(z_m)} e^{(b-a)z_m^n}\right| \leqslant \left|\frac{1}{A_1(z_m)} e^{-az_m^n}\right| \left(\left|\frac{f''(z_m)}{f(z_m)}\right| + \left|\frac{H(z_m)}{M(r_m, f)}\right|\right). \tag{2.31}$$

On va traiter le Cas 1 en trois sous cas :

**Cas.1.1.** $\eta = \delta((b-a)z^n, \theta_0) > 0$. De la continuité de la $\delta((b-a)z^n, \theta)$, on a aussi

$$\frac{1}{2}\delta((b-a)z^n, \theta_0) \leqslant \delta((b-a)z^n, \theta_m) \leqslant \frac{3}{2}\delta((b-a)z^n, \theta_0)$$

pour $m$ suffisamment grand. Encore une autre fois à partir de (2.17), on obtient

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\} \leqslant \left|\frac{A_0(z_m)}{A_1(z_m)} e^{(b-a)z_m^n}\right| \leqslant exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\}, \tag{2.32}$$

quand $m$ est assez grand. En substituant (2.24), (2.25) et (2.27) dans (2.31), on obtient

$$\left|\frac{v_f(r_m)}{z_m}(1+o(1))+\frac{A_0(z_m)}{A_1(z_m)}e^{(b-a)z_m^n}\right|\leqslant\frac{r_m^{2\sigma(f)+1}}{|A_1(z_m)e^{az_m^n}|}\tag{2.33}$$

pour $m$ suffisamment grand. Compte tenu de (2.30), on a clairement

$$\frac{r_m^{2\sigma(f)+1}}{|A_1(z_m)e^{az_m^n}|}\leqslant\frac{r_m^{2\sigma(f)+1}}{exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m^n\right\}}\leqslant exp\left\{-\frac{(1-2\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m^n\right\}.$$

La combinaison de (2.25), (2.32) et (2.33), nous donne

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\}\leqslant\left|\frac{A_0(z_m)}{A_1(z_m)}e^{(b-a)z_m^n}+\frac{v_f(r_m)}{r_m}-\frac{v_f(r_m)}{r_m}\right|$$

$$\leqslant\frac{r_m^{2\sigma(f)+1}}{|A_1(z_m)e^{az_m^n}|}+2r_m^\sigma\leqslant exp\left\{-\frac{(1-2\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m^n\right\}+2r_m^\sigma\leqslant 3r_m^\sigma,$$

qui mène à une contradiction.

**Cas.1.2.** $\eta=\delta\left((b-a)\,z^n,\theta_0\right)<0$. A partir de (2.18), pour $m$ assez grand, on déduit que

$$exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\}\leqslant\left|\frac{A_0(z_m)}{A_1(z_m)}e^{(b-a)z_m^n}\right|\leqslant exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\}.\tag{2.34}$$

Il résulte de (2.33) et (2.34) que

$$\frac{v_f(r_m)}{r_m}(1+o(1))\leqslant exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta r_m^n\right\}\leqslant exp\left\{-\frac{(1-2\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m^n\right\},$$

quand $m\to\infty$, ce qui implique que $v_f(r_m)\to\infty$, ce qui est impossible.

**Cas.1.3.** $\eta=\delta\left((b-a)\,z^n,\theta_0\right)=0$. On peut utiliser (2.28) pour construire une autre suite extraite de points $z_m^*=r_me^{i\theta_m^*}$ avec $\lim\limits_{m\to\infty}\theta_m^*=\theta_0^*$ telle que $\eta_1=\delta\left((b-a)\,z^n,\theta_0^*\right)>0$. Sans perte de généralité, supposons que

$$\delta\left((b-a)\,z^n,\theta\right)>0,\quad \theta\in\left(\theta_0+2k\pi,\theta_0+(2k+1)\,\pi\right);$$

$$\delta((b-a)z^n,\theta)<0,\quad \theta\in\left(\theta_0+(2k-1)\,\pi,\theta_0+2k\pi\right)$$

avec $k\in\mathbb{Z}$. Quand $n$ est assez grand, on a $|\theta_0-\theta_m|\leqslant l_0$. Choisissons maintenant $\theta_m^*$ tel que

$$\frac{l_0}{2}\leqslant\ |\theta_m^*-\theta_m|\leqslant l_0.$$

Par suite

$$\theta_m + \frac{l_0}{2} \leqslant \theta_m^* \leqslant \theta_m + l_0$$

et par conséquent

$$\theta_0 + \frac{l_0}{2} \leqslant \theta_0^* \leqslant \theta_0 + l_0. \tag{2.35}$$

Pour $m$ suffisamment grand, nous avons (2.28) pour $z_m^*$, et $\eta_1 = \delta((b-a)z^n, \theta_0^*) > 0$. Par conséquent,

$$\left|\frac{H(z_m^*)}{f(z_m^*)}\right| \leqslant \frac{v_f(r)^{\frac{1}{4}-\delta} M(r_m, H)}{e^{-5\pi} M(r_m, f)^{1-c}},$$

et

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\eta_1 r_m^n\right\} \leqslant \left|\frac{A_0(z_m^*)}{A_1(z_m^*)} e^{(b-a)(z_m^*)^n}\right| \leqslant exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\eta_1 r_m^n\right\}. \tag{2.36}$$

Du Lemme 2.2.5, nous avons

$$M(r_m, f) \geqslant \exp\left\{r_m^{\sigma(f)-\varepsilon}\right\}.$$

Par conséquent, on aura

$$\left|\frac{H(z_m^*)}{f(z_m^*)}\right| \leqslant r_n^{(\sigma(f)+1)\left(\frac{1}{4}-\delta\right)} \frac{\exp\left\{r_m^{\sigma(H)+\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r_m^{\sigma(f)-\varepsilon}\right\}} \leqslant \exp\left\{-r_m^{1-2\varepsilon}\right\} \tag{2.37}$$

pour tout $m$ assez grand. Prenant maintenant $l_0$ assez petite, on a $\delta(az^n, \theta_0^*) > 0$ par la continuité de $\delta(az^n, \theta)$. Cela donne

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(az^n, \theta_0^*) r_m^n\right\} \leqslant \left|A_1(z_m^*) e^{a(z_m^*)^n}\right|$$

$$\leqslant exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(az^n, \theta_0^*) r_m^n\right\}. \tag{2.38}$$

En substituant (2.26) et (2.37) dans (2.31), on obtient

$$\left|\frac{A_0(z_m^*)}{A_1(z_m^*)} e^{(b-a)(z_n^*)^n}\right| \leqslant \frac{1}{A_1(z_m^*)} e^{a(z_n^*)^n} r_m^{2\sigma(f)+1} + r_m^{\sigma(f)+\varepsilon}.$$

La combinaison de (2.36) et (2.38), donne une contradiction pour $m$ est assez grand.

**Cas.2.** Supposons maintenant que $\delta(az^n, \theta_0) < 0$. A partir de la continuité de $\delta(az^n, \theta)$ et (2.18), on aura

$$exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(az^n, \theta_0) r_m^n\right\} \leqslant \left|A_1(z_m) e^{az_m^n}\right| \leqslant exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(az^n, \theta_0) r_m^n\right\}, \tag{2.39}$$

pour tout $m$ suffisamment grand. De (2.23), nous avons

$$\left|\frac{f''(z_m)}{f(z_m)} + A_0(z_m)e^{bz_m^n}\right| \leqslant \left|A_1(z_m)e^{az_m^n}\right| \left|\frac{f'(z_m)}{f(z_m)}\right| + \frac{|H(z_m)|}{M(r_m, f)}, \tag{2.40}$$

quand $m \to \infty$. Encore une autre fois, nous allons traiter trois sous cas séparément :

**Cas.2.1.** $\delta(bz^n, \theta_0) > 0$. De la continuité de $\delta(bz^n, \theta)$ et (2.17), on déduit que

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(bz^n, \theta_0)r_m^n\right\} \leqslant \left|A_0(z_m)e^{bz_m^n}\right| \leqslant exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(bz^n, \theta_0)r_m^n\right\} \tag{2.41}$$

pour $m$ assez grand. En substituant (2.24), (2.25), (2.27) et (2.39) dans (2.40), on obtient

$$\left|\left(\frac{v_f(r_m)}{z_m}\right)^2 (1 + o(1)) + A_0(z_m)e^{bz_m^n}\right| \leqslant \exp\left\{-r_m^{1-3\varepsilon}\right\}. \tag{2.42}$$

La combinaison de (2.42) avec (2.25) et (2.41), donne l'inégalité suivante

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(bz^n, \theta_0)r_m^n\right\} \leqslant \exp\left\{-r_m^{1-3\varepsilon}\right\} + r_m^{2\sigma(f)} \leqslant 2r_m^{2\sigma(f)},$$

ce qui mène à une contradiction.

**Cas.2.2.** $\delta(bz^n, \theta_0) < 0$, Par la continuité de $\delta(bz^n, \theta)$ et (2.18), on a maintenant

$$exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(bz^n, \theta_0)r_m^n\right\} \leqslant \left|A_0(z_m)e^{bz_m^n}\right| \leqslant exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(bz^n, \theta_0)r_m^n\right\} \tag{2.43}$$

pour tout $m$ suffisamment grand. Il résulte de (2.39), (2.40), (2.43) et du Lemme 2.2.5 que $v_f(r_m) \to 0$ quand $m \to \infty$, ce qui est impossible.

**Cas.2.3.** $\delta(bz^n, \theta_0) = 0$. De la même manière que dans le Cas 1.3, on peut de nouveau construire une autre sous suite de points $z_m^* = r_m e^{i\theta_m^*}$ satisfaisant $\frac{l_0}{2} \leqslant |\theta_m^* - \theta_m| \leqslant l_0$ tel que $\delta(az^n, \theta_0^*) < 0 < \delta(bz^n, \theta_0^*)$ où $\theta_0^* = \lim_{m\to\infty} \theta_m^*$. En remplaçant $\delta(az^n, \theta_0)$ par $\delta(az^n, \theta_0^*)$ dans (2.39) et $\delta(bz^n, \theta_0)$ par $\delta(bz^n, \theta_0^*)$ dans(2.41), respectivement, on obtient (2.39) et (2.41) pour la sous suite de points $z_m^*$. Le même raisonnement du Cas 1.3 mène aussi à (2.37) pour les points $z_m^*$. De même que précédemment, on obtient

$$\left|A_0(z_m^*)e^{b(z_m^*)^n}\right| \leqslant \left|A_1(z_m^*)e^{a(z_m^*)^n}\right| r_m^{\sigma(f)+\varepsilon} + \exp\left\{-r_m^{1-2\varepsilon}\right\} + r_m^{2(\sigma(f)+\varepsilon)}$$

pour tout $m$ suffisamment grand. Une contradiction suit en combinant cette inégalité avec (2.39) et (2.41) pour $z_n^*$.

**Cas.3.** $\delta(az^n, \theta_0) = 0$. On discute trois sous-cas selon $\delta(bz^n, \theta_0)$ comme suit :

**Cas.3.1.** $\delta(bz^n,\theta_0)>0$. Par un raisonnement similaire à celui du sous Cas 1.3, nous pouvons choisir une autre sous suite de points $z_m^*=r_me^{i\theta_m^*}$ avec $\theta_0^*=\lim\limits_{m\to\infty}\theta_m^*$ et $\frac{l_0}{2}\leqslant|\theta_m^*-\theta_m|\leqslant l_0$ tels que $z_m^*$ satisfait (2.37) *et* $\delta(az^n,\theta_0^*)<0<\delta(bz^n,\theta_0^*)$. De même que dans Cas 2.3, une contradiction suit quand $m\to\infty$.

**Cas.3.2.** $\delta(bz^n,\theta_0)<0$. En vertu de la définition de $\delta(P,\theta)$ dans Lemme 2.2.6, on peut définir

$$\delta'(az^n,\theta):=-\alpha\sin n\theta-\beta\cos n\theta=\delta(az^n,\theta+\frac{\pi}{2})$$

où $a=\alpha+i\beta$. Comme $a\neq0$, on a $\delta'(az^n,\theta_0)\neq0$. Pour $z_m'=r_me^{i\theta_m'}$ satisfaisant $0<\left|\theta_m'-\theta_0\right|\leqslant l_0$, nous savons que $z_m'$ satisfait (2.37) et $\delta(az^n,\theta_m')\neq0$. Par la continuité de $\delta(bz^n,\theta)$, on peut avoir $(bz^n,\theta_m')<0<\delta(az^n,\theta_m')$ pour $l_0$ tel que $0<\left|\theta_m'-\theta_0\right|\leqslant l_0$. Alors, $\delta'(az^n,\theta_0)>0$, ce qui signifie que pour un choix convenable de $l_0$, on aura

$$\frac{1}{2}\delta'(az^n,\theta_0)\leqslant\delta'(az^n,\theta)\leqslant\frac{3}{2}\delta'(az^n,\theta_0),\quad\theta\in(\theta_0,\theta_0+l_0)\,.$$

Comme on a choisi $z_n$ tels que $|f(z_m)|=M(r_m,f)$ et $\theta_0=\lim\limits_{n\to\infty}\theta_m$, on a $\left|f(r_me^{i\theta_0})\right|\geqslant M(r_m,f)v_f(r_m)^{-\frac{1}{4}+\delta}$ pour $m$ suffisamment grand. De (2.23), on obtient

$$\left|\frac{f'(z_m')}{f(z_m')}\right|\leqslant\left|\frac{1}{A_1(z_m')}e^{-a\left(z_m'\right)^n}\right|$$
$$+\left(\left|A_0(z_m')e^{b\left(z_m'\right)^n}\right|+\left|\frac{f''(z_m')}{f(z_m')}\right|+\left|\frac{H(z_m')}{f(z_m')}\right|\right).\tag{2.44}$$

Du Lemme 2.2.6, on a

$$exp\left\{-(1+\varepsilon)\delta(az^n,\theta_m')\right\}\leqslant\left|\frac{1}{A_1(z_m')}e^{-a\left(z_m'\right)^n}\right|$$
$$\leqslant exp\left\{-(1-\varepsilon)\delta(az^n,\theta_m')\right\},\tag{2.45}$$

et

$$exp\left\{(1+\varepsilon)\delta(bz^n,\theta_m')\right\}\leqslant\left|A_0(z_m')e^{-b\left(z_m'\right)^n}\right|$$
$$\leqslant exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(bz^n,\theta_m')\right\}\tag{2.46}$$

pour tout $m$ suffisamment grand. L'utilisation de (2.26), (2.37), (2.45) et (2.46) (2.44) implique que

$$\left|\frac{f'(z_m')}{f(z_m')}\right|\leqslant exp\left\{-(1-2\varepsilon)\delta(az,\theta_m')r_m^n\right\}.$$

Comme $\theta_m^{'}$ peut être prise arbitrairement dans $(\theta_0,\theta_0+l_0)$, pour $r_n$ suffisamment grand, on obtient

$$\left|\frac{f^{'}(r_m e^{i\theta})}{f(r_m e^{i\theta})}\right| \leqslant exp\left\{-(1-2\varepsilon)\delta(az^n,\theta)r_m^n\right\}, \quad \theta\in(\theta_0,\theta_0+l_0)\,. \tag{2.47}$$

Par conséquent, pour $\theta\in(\theta_0,\theta_0+l_0)$, nous avons

$$r_m^{n-1}\xi\left(r_m,\theta\right) = r_m^n\int_{\theta_0}^{\theta}\left|\frac{f^{'}(r_m e^{i\theta})}{f(r_m e^{i\theta})}\right|d\theta$$

$$\leqslant r_m^n\int_{\theta_0}^{\theta}e^{-\eta_2(\theta)r_m^n}d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{n\eta_1\left(\theta\right)}e^{-\eta_{2(\theta)r_m^n}}d\left(\eta_2\left(\theta\right)r_m^n\right),$$

où $\eta_1\left(\theta\right)=(1-2\varepsilon)\delta^{'}(az^n,\theta)$, $\eta_2\left(\theta\right)=(1-2\varepsilon)\delta(az^n,\theta)$. Puisque $\delta(az^n,\theta)>0$ pour tout $\theta\in(\theta_0,\theta_0+l_0)$, il est facile d'obtenir

$$\begin{aligned} 0\leqslant\xi\left(r_m,\theta\right) &\leqslant \frac{2}{nr_m^{n-1}(1-2\varepsilon)\delta^{'}(az^n,\theta_0)}\left(e^{-\eta_2(\theta_0)r_m^n}-e^{-\eta_2(\theta)r_m^n}\right) \\ &\leqslant \frac{2}{(1-2\varepsilon)\delta^{'}(az^n,\theta_0)}\left(e^{-\eta_2(\theta_0)r_m^n}-e^{-\eta_2(\theta)r_m^n}\right). \end{aligned}$$

Cela conduit à

$$0\leqslant\xi\left(r_m,\theta\right)\leqslant\frac{2}{\eta_1\left(\theta_0\right)} \tag{2.48}$$

pour tout $m$ assez grand. De la preuve du Lemme 2.2.4, on a

$$log\left|f\left(r_m e^{i\theta_0}\right)\right| - \xi\left(r_m,\theta\right) \leqslant log\left|f\left(r_m e^{i\theta}\right)\right| + 2\pi.$$

Il résulte de cela et (2.48) que

$$\begin{aligned} v_f(r_m)^{\frac{1}{4}-\delta^{'}}M(r_m,f) &= \exp\left\{-2\pi-2/\eta_1\left(\theta_0\right)\right\}v_f(r_m)^{\frac{1}{4}-\delta}M(r_m,f) \\ &\leqslant f\left(r_m e^{i\theta}\right) \end{aligned} \tag{2.49}$$

pour $\theta\in(\theta_0,\theta_0+l_0)$, où $0<\delta^{'}<\delta<\frac{1}{4}$. Par conséquent, nous pouvons choisir une autre sous suite de points $z_m^*=r_m e^{i\theta_m^*}$ avec $\theta_m^*=\frac{l_0}{2}\theta_0$ tel que $z_m^*$ satisfait (2.37). En outre, à partir de (2.49), quand $m$ est suffisamment grand, $z_m^*$ satisfait (2.24). Ainsi, (2.24) et (2.47) impliquent que $v_f(r_m)\to 0$ quand $m\to\infty$, ce qui est impossible.

Quand $\delta(bz^n,\theta_m^{'})<0<\delta(az^n,\theta_m^{'})$ pour $l_0$ tel que $-l_0<\left|\theta_m^{'}-\theta_0\right|\leqslant 0$, il est clair que $\xi\left(r_m,\theta\right)\leqslant 0$ pour tout $\theta\in\left(\theta_0-l_0,\theta_0\right)$. Par conséquent, de même on obtient

$$v_f(r_m)^{\frac{1}{4}-\delta^{'}}M(r,f) = \exp\left\{-2\pi\right\}v_f(r_m)^{\frac{1}{4}-\delta}M(r,f) \leqslant f\left(r_m e^{i\theta}\right) \tag{2.50}$$

pour $\theta\in(\theta_0,\theta_0+l_0)$ où $0<\delta^{'}<\delta<\frac{1}{4}$, c'est une contradiction.

**Cas.3.3.** Enfin, supposons que $\delta(bz^n, \theta_0) = 0$. Nous avons maintenant $a/b = c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0, 1$ et donc

$$az = cbz, \quad (b-a)z = (1-c)bz.$$

Si $c < 0$, on prend $l_0$ suffisamment petit tel que $\delta(bz^n, \theta) < 0 < \delta(az^n, \theta)$, à condition que $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + l_0)$ ou $(\theta_0 - l_0, \theta_0)$. Par un raisonnement similaire à celui du Cas 3-2, on obtient (2.47) et (2.49). Puis par la théorie de Wiman- Valiron, nous avons $v_f(r_m) \to 0$ quand $m \to \infty$, d'où une contradiction.

Si $0 < c < 1$, par la même façon on peut obtenir $\delta((b-a)\, z^n, \theta) > 0$ et $\delta(az^n, \theta) > 0$, à condition que $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + l_0)$ ou $(\theta_0 - l_0, \theta_0)$, pour certain $l_0$ assez petit. Par un raisonnement similaire à celui du sous Cas 1.3, une contradiction suit.

Enfin, si $c > 1$, on obtient $\delta((b-a)\, z^n, \theta) < 0 < \delta(az^n, \theta)$, à condition que $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + l_0)$ ou $(\theta_0 - l_0, \theta_0)$. En outre, $z_m^{'} = r_m e^{i\theta_m^{'}}$ satisfait (2.37), à condition que $\theta_m^{'} \in (\theta_0, \theta_0 + l_0)$ ou $(\theta_0 - l_0, \theta_0)$. Par conséquent, (2.23) implique que

$$\left|\frac{f^{'}(z_m^{'})}{f(z_m^{'})}\right| \leqslant \left|\frac{A_0(z_m^{'})}{A_1(z_m^{'})} e^{(b-a)\left(z_m^{'}\right)^n}\right| + \left|\frac{1}{A_1(z_m^{'})} e^{-a\left(z_m^{'}\right)^n}\right| \left(\left|\frac{f''(z_m^{'})}{f(z_m^{'})}\right| + \left|\frac{H(z_m^{'})}{f(z_m^{'})}\right|\right).$$

De même que dans le Cas 3.2, nous obtenons (2.47) et (2.49). De la théorie de Wiman-Valiron, suit à nouveau une contradiction.

### Preuve du Corollaire 2.1.1

On a

$$h_0(z) = b_n z^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i = b_n z^n + Q_0(z),$$

$$h_1(z) = a_n z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = a_n z^n + Q_1(z).$$

Alors

$$A_0 e^{h_0(z)} = A_0 \exp\{Q_0(z)\} \exp\{b_n z^n\} = M_0(z) \exp\{b_n z^n\},$$
$$A_1 e^{h_1(z)} = A_1 \exp\{Q_0(z)\} \exp\{a_n z^n\} = M_1(z) \exp\{a_n z^n\}.$$

il est évident que $\sigma(M_j(z)) < n, \ (j = 1, 2)$. Donc, on retrouve le cas du *Théorème 2.1.4.*

## 2.4 Preuve du Théorème 2.1.5

Supposons d'abord que $f$ est une solution non triviale de (2.4) avec $\sigma(f) < \infty$. Montrons que $\sigma(f) \geq n$. Supposons que $\sigma(f) < n$. D'après (2.4), on a

$$A_1(z)e^{az^n} f^{'} + A_0(z)e^{bz^n} f = H(z) - f'' - D_1(z)\, f^{'} - D_0(z)\, f.$$

D'après le Lemme 2.2.7, on a

$$\sigma(A_1(z)e^{az^n} f^{'} + A_0(z)e^{bz^n} f) = \max_{1 \leq j \leq 2}\{dj\} = n.$$

D'autre part, on a

$$\sigma\left(H(z)-f''-D_1(z)f^{'}-D_0(z)f\right)<n,$$

d'où une contradiction. Donc $\sigma(f)\geq n$.

De (2.4), on peut écrire

$$\frac{f''}{f}+\left(A_1(z)e^{az^n}+D_1(z)\right)\frac{f^{'}}{f}+\left(A_0(z)e^{bz^n}+D_0(z)\right)=\frac{H(z)}{f}. \tag{2.51}$$

Comme $\varrho=max(\sigma(D_0),\sigma(D_1))<n$, alors

$$|D_j(z)|\leqslant\exp\left\{r^{\varrho+\varepsilon}\right\},\quad j=0,1, \tag{2.52}$$

pour tout $\varepsilon$ tel que $0<3\varepsilon<n-\varrho$. De même que dans la preuve du Théorème 2.1.4, on peut choisir une sous suite de points $z_m=r_me^{i\theta_m}$, $r_m\to\infty$, telle que $\lim\limits_{m\to\infty}\theta_m=\theta_0$ et que

$$|f(z_m)|=M(r_m,f),\qquad r_m\in(E_3\cap E_4)\backslash(E_1\cup E_2).$$

En particulier, la sous suite de points $z_m$ satisfait (2.24), (2.25), (2.26), (2.27) et (2.28). Comme $a/b=c<0$, il existe trois cas à examiner, selon les signes de $\delta(az^n,\theta_0)$ et $\delta(bz^n,\theta_0)$.

**Cas.1.** Tout d'abord supposons que $\delta(bz^n,\theta_0)<0<\delta(az^n,\theta_0)$. Du Lemme 2.2.6, et de la continuité des $\delta(az^n,\theta)$ et $\delta(bz^n,\theta)$, on déduit que

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m^n\right\}\leqslant\left|A_1(z_m)e^{az_m^n}\right|\leqslant exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m^n\right\} \tag{2.53}$$

et

$$exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(bz^n,\theta_0)r_m^n\right\}\leqslant\left|A_0(z_m)e^{bz_m^n}\right|\leqslant exp\left\{\frac{(1+\varepsilon)}{2}\delta(bz^n,\theta_0)r_m^n\right\} \tag{2.54}$$

pour tout $m$ suffisamment grand. De (2.51), on obtient

$$\left|\left(A_1(z_m)e^{az_m^n}+D_1(z_m)\right)\frac{f^{'}(z_m)}{f(z_m)}\right|\leqslant$$

$$\frac{|H(z_m)|}{M(r_m,f)}+\left|\frac{f''(z_m)}{f(z_m)}\right|+\left|A_0(z_m)e^{bz_m^n}+D_0(z_m)\right|. \tag{2.55}$$

La combinaison de (2.52) avec (2.53) et (2.54), nous donne

$$\left|A_0(z_m)e^{bz_m^n}+D_0(z_m)\right|\leqslant\exp\left\{r^{\varrho+2\varepsilon}\right\}$$

et

$$exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m^n\right\}\leqslant\left(A_1(z_m)e^{az_m^n}+D_1(z_m)\right),$$

pour $m$ assez grand. En remplaçant ces estimations avec (2.24) et (2.27) dans (2.55), on obtient

$$v_f(r_m) \leqslant 2r_m exp\left\{-\frac{(1-2\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m^n\right\}\left(2\left(\frac{v_f(r_m)}{r_m}\right)^2 + \exp\left\{r^{\varrho+2\varepsilon}\right\}\right)$$

pour $m$ suffisamment grand. Compte tenu de (2.25), on trouve $v_f(r_m) \to 0$, ce qui est une contradiction.

**Cas.2.** Supposons maintenant que $\delta(az^n,\theta_0) < 0 < \delta(bz^n,\theta_0)$. De même que dans le Cas 1, on obtient par le Lemme 2.2.6 que

$$exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m^n\right\} \leqslant |A_1(z_m)e^{az_m}| \leqslant exp\left\{\frac{(1+\varepsilon)}{2}\delta(az^n,\theta_0)r_m\right\} \quad (2.56)$$

et

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(bz,\theta_0)r_m^n\right\} \leqslant \left|A_0(z_m)e^{b\ z_m^n}\right| \leqslant exp\left\{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}\delta(bz,\theta_0)r_m^n\right\} \quad (2.57)$$

pour tout $m$ suffisamment grand. Il s'ensuit de (2.51) que

$$\left|A_0(z_m)e^{bz_m^n} + D_0\left(z_m\right)\right| \leqslant \frac{|H(z_m)|}{M(r_m,f)} + \left|\frac{f''(z_m)}{f(z_m)}\right| +$$

$$\left|\left(A_1(z_m)e^{az_m^n} + D_1\left(z_m\right)\right)\frac{f'\left(z_m\right)}{f\left(z_m\right)}\right|. \quad (2.58)$$

La combinaison de (2.52) avec (2.56) et (2.57), respectivement, nous donne

$$\left|A_1(z_m)e^{az_m^n} + D_1\left(z_m\right)\right| \leqslant \exp\left\{r^{\varrho+2\varepsilon}\right\}$$

et

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(bz^n,\theta_0)r_m^n\right\} \leqslant \left|A_0(z_m)e^{bz_m^n} + D_0\left(z_m\right)\right|$$

pour $n$ assez grand. En remplaçant les inégalités (2.26) et (2.27) dans (2.58), nous concluons que

$$exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)}{2}\delta(bz^n,\theta_0)r_m^n\right\} \leqslant r_m^{2\sigma(f)}\exp\left\{r^{\varrho+2\varepsilon}\right\}$$

ce qui est impossible.

**Cas.3.** Enfin, il reste le cas $\delta(az^n,\theta_0) = \delta(bz^n,\theta_0) = 0$. De même que dans le Cas 1.3 de la preuve du Théorème 2.1.4, on peut utiliser aussi (2.28) pour la construction d'une sous suite de points $z_m^* = r_m e^{i\theta_m^*}$ avec $\theta_0^* = \lim\limits_{m\to\infty}\theta_m^*$ tels que $\delta(az^n,\theta_0^*) < 0$ et que (2.37) soit valable pour $z_n^*$. En effet, on suppose, sans perte de généralité, que

$$\delta(az^n,\theta_0)>0,\quad \theta\in(\theta_0+2k\pi,\theta_0+(2k+1)\pi),$$

$$\delta(az^n,\theta_0)<0,\quad \theta\in(\theta_0+(2k-1)\pi,\theta_0+2k\pi),$$

pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Pour $m$ assez grand, on a $|\theta_m-\theta_0|\leqslant l_0$. Choisissons maintenant $\theta_0^*$ tel que $\frac{l_0}{2}\leqslant\theta_m-\theta_m^*\leqslant l_0$, alors $\theta_0-l_0\leqslant\theta_0^*\leqslant\theta_0-\frac{l_0}{2}$ et $\delta(az^n,\theta_0^*)<0$. Comme $\delta(bz^n,\theta_0^*)>0$ , on obtient une contradiction comme dans le Cas 2 précédemment.

## Preuve du Corollaire 2.1.2

On a

$$h_0(z)=b_nz^n+\sum_{i=0}^{n-1}b_iz^i=b_nz^n+Q_0(z),$$

$$h_1(z)=a_nz^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_iz^i=a_nz^n+Q_1(z).$$

Alors

$$A_0e^{h_0(z)}+D_0(z)=A_0\exp\{Q_0(z)\}\exp\{b_nz^n\}+D_0(z)$$

$$=M_0(z)\exp\{b_nz^n\}+D_0(z),$$

$$A_1e^{h_1(z)}+D_1(z)=A_1\exp\{Q_1(z)\}\exp\{a_nz^n\}+D_1(z)$$
$$=M_1(z)\exp\{a_nz^n\}+D_1(z).$$

il est évident que $\sigma(M_j(z))<n$, $(j=1,2)$. Donc, on retrouve le cas du *Théorème 2.1.5.*

# Chapitre 3

# Croissance des solutions des équations différentielles homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières de même ordre et même type

## 3.1 Introduction et résultats

Dans ces dernières années, plusieurs auteurs s'intéressent à étudier le cas où les coefficients ont le même ordre, comme, par exemple, J. Tu et C-F. Yi [19] et B. Belaidi [1].

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à cœfficients entières de même ordre et de même type. Tout d'abord, on va citer quelques résultats y liés.

En 2001, B. Belaïdi et S. Hamouda ont établi le résultat suivant :

**Théorème 3.1.1.** [3] *Soient* $A_0(z), ..., A_{n-1}(z)$, $(A_0(z) \not\equiv 0)$ *des fonctions entières telles que pour les constantes réelles* $\alpha$, $\beta$, $\mu, \theta_1$, $\theta_2$ *avec* $0 \leq \beta < \alpha$, $\mu > 0$ *et* $\theta_1 < \theta_2$, *on ait*

$$|A_0(z)| \geq e^{\alpha |z|^{\mu}}$$

et

$$|A_k(z)| \leq e^{\beta |z|^{\mu}} \qquad (k = 1, ..., n-1)$$

*quand* $z \to \infty$ *avec* $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$. *Alors toute solution non nulle de l'équation différentielle*

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0,$$

*est d'ordre infini.*

En 2003, B. Belaïdi et K. Hamani ont généralisé un résultat de G. G. Gundersen [2] de la manière suivante :

**Théorème 3.1.2.** *Soient* $A_0(z), ..., A_{n-1}(z), (A_0(z) \not\equiv 0)$ *des fonctions entières telles que pour les constantes réelles* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta_1 < \theta_2$, *on a*

$$|A_1(z)| \geq e^{(1+o(1))\alpha|z|^\beta},$$

$$|A_j(z)| \leq e^{o(1)\alpha|z|^\beta}, \quad j = 0, 2, 3, ..., k-1$$

*quand* $z \to \infty$ *avec* $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$. *Alors, si* $f$ *est une solution transcendante d'ordre fini* $\sigma < \infty$ *de l'équation différentielle linéaire*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0,$$

alors *on aura les conclusions suivantes, pour* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit :*

$(i)$ *Il existe une constante complexe* $b \neq 0$ *telle que* $f(z) \to b$ *quand* $z \to \infty$ *avec* $\arg z \in (\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon)$ ; *et en plus on a*

$$|f(z) - b| \leqslant exp\left\{-(1 + o(1))\alpha|z|^\beta\right\}.$$

$(ii)$ *Pour tout entier* $i \geq 1$,

$$\left|f^{(i)}(z)\right| \leqslant exp\left\{-(1 + o(1))\alpha|z|^\beta\right\}$$

*quand* $z \to \infty$ *tel que* $\arg z \in (\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon)$.

Puis ce résultat a été généralisé par I. Laine et R. Yang, en remplaçant le coefficient $A_1(z)$ par un coefficient quelconque $A_s(z)$ comme suit :

**Théorème 3.1.3.** [14] *Soient* $k \geq 2$ *un entier naturel,* $\delta > 0$ *un nombre réel tel que* $k\delta < 1$. *Supposons que* $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ *sont des fonctions entières avec* $A_0(z) \not\equiv 0$, *telles que pour les constantes réelles* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *on a pour un certain entier* $s \in \{1, ..., k-1\}$,

$$|A_s(z)| \geq \exp\left\{(1+\delta)\alpha|z|^\beta\right\}$$

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{\delta\alpha|z|^\beta\right\} \quad \text{pour tout } j \neq s$$

*quand* $|z| = r \geq r_\delta$ *avec* $\arg z \in (\theta_1, \theta_2)$. *Etant donné* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit, si* $f$ *est une solution transcendante d'ordre fini* $\sigma < \infty$ *de l'équation différentielle linéaire*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0,$$

alors *on aura les conclusions suivantes :*

$(i)$ *Il existe* $j \in \{0..., s-1\}$ *et une constante complexe* $b_j \neq 0$ *telle que* $f(z) \to b$ *quand* $z \to \infty$ *avec* $\arg z \in (\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon)$ ; *et en plus on a*

$$\left|f^{(j)}(z) - b_j\right| \leqslant exp\left\{-(1 - k\delta)\alpha|z|^\beta\right\}.$$

*(ii) Pour tout entier* $i \geqslant j+1$,

$$\left|f^{(i)}(z)\right| \leqslant exp\left\{-(1-k\delta)\,\alpha\,|z|^{\beta}\right\}$$

*pour tout* $z$ *tel que* $\arg z \in (\theta_1+3\varepsilon, \theta_2-3\varepsilon)$ *et* $|z|$ *assez grand.*

Dans ce chapitre, on obtient les résultats suivants :

**Théorème 3.1.4.** *Soient* $A_0(z), ..., A_{n-1}(z)$, $(A_0(z) \not\equiv 0)$ *sont des fonctions entières telles que pour les constantes réelles* $\alpha$, $\beta$, $\mu, \theta_1$, $\theta_2$ *et l'entier naturel* $n$ *avec* $0 \leq \beta < \alpha$, $0 < \mu < n$ *et* $\theta_1 < \theta_2$, *on ait*

$$|A_0(z)| \geq e^{\alpha|z|^{\mu}} \tag{3.2}$$

et

$$|A_j(z)| \leq e^{\beta|z|^{\mu}} \qquad (j = 1, ..., k-1), \tag{3.3}$$

*quand* $z \to \infty$ *avec* $\arg z \in (\theta_1, \theta_2) \subset \left[0, \frac{\pi}{2n}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2n}, \frac{2\pi}{n}\right]$. *Alors toute solution non nulle de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{z^n} f^{(k-1)} + ... + A_1(z)\, e^{z^n} f' + A_0(z)\, e^{z^n} f = 0, \tag{3.4}$$

*est d'ordre infini.*

**Théorème 3.1.5.** *Soient* $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières avec* $A_0(z) \not\equiv 0$, *telles que pour les constantes réelles* $\alpha > \beta \geq 0$, $0 < \mu < n$, *on a, pour un certain entier* $s \in \{1, ..., k-1\}$,

$$|A_s(z)| \geq e^{\alpha|z|^{\mu}}, \tag{3.5}$$

$$|A_j(z)| \leq e^{\beta|z|^{\mu}} \text{ pour tout } j \neq s, \tag{3.6}$$

*quand* $z \to \infty$ *avec* $\arg z \in (\theta_1, \theta_2) \subset \left[0, \frac{\pi}{2n}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2n}, \frac{2\pi}{n}\right]$. *Alors, si* $f$ *est une solution transcendante d'ordre fini* $\sigma < \infty$ *de l'équation différentielle linéaire*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{z^n} f^{(k-1)} + ... + A_1(z)\, e^{z^n} f' + A_0(z)\, e^{z^n} f = 0, \tag{3.7}$$

alors *on aura les propriétés suivantes :*

*(i) Il existe* $j \in \{0, ..., s-1\}$ *et une constante complexe* $b_j \neq 0$ *telle que* $f(z) \to b$ *quand* $z \to \infty$ *avec* $\arg z \in (\theta_1+\varepsilon, \theta_2-\varepsilon)$, *et en plus on a*

$$\left|f^{(j)}(z) - b_j\right| \leqslant exp\left\{-(\alpha-\beta-\gamma)\,|z|^{\mu}\right\}, \tag{3.8}$$

*où* $0 < \gamma < \alpha - \beta$.

*(ii) Pour tout entier* $i \geqslant j+1$,

$$\left|f^{(i)}(z)\right| \leqslant exp\left\{-(\alpha-\beta-\gamma)\,|z|^{\mu}\right\} \tag{3.9}$$

*pour tout* $z$ *tel que* $\arg z \in (\theta_1+2\varepsilon, \theta_2-2\varepsilon)$ *et* $|z|$ *assez grand.*

**Exemple 3.1.1** Considérons l'équation différentielle

$$f''' - (3+6e^z)\, e^{z^2} f'' + \left(2+6e^z+11e^{2z}\right) e^{z^2} f' - 6e^{3z} e^{z^2} f = 0. \tag{3.10}$$

Dans cette équation, pour $z = re^{i\theta}$, $r$ assez grand et $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, on a

$$|A_0(z)| = \left|-6e^{3z}\right| = 6e^{3r\cos\theta} > e^{3\frac{\sqrt{2}}{2}r},$$

$$|A_1(z)| = \left|2+6e^z+11e^{2z}\right| \leq 19e^{2r\cos\theta} \leq 19e^{\sqrt{3}r} < e^{2r},$$

$$|A_2(z)| = |-(3+6e^z)| \leq 9e^{r\cos\theta} \leq 9e^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} < e^{2r}.$$

Donc, les conditions (3.2) et (3.3) du Théorème 3.1.4 sont vérifiées. Alors, toute solution non nulle de l'équation (3.10) est d'ordre infini.

**Exemple 3.1.2** Considérons l'équation différentielle :

$$f''' + \cos(z)\, e^{z^3} f'' - \cos(z)\, e^{z^3} f' + 2\sin(3z)\, e^{z^3} f = 0. \tag{3.11}$$

Dans cette équation, pour $z = re^{i\theta}$ $(r \to +\infty)$ et $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, on a

$$|A_0(z)| = |2\sin(3z)| \geq |2\sinh(3r\sin\theta)| > \exp(2r\sin\theta) \geq \exp\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}r\right).$$

$$|A_2(z)| = |A_1(z)| = |\cos(z)| \leq \cosh(r\sin\theta) < \exp\left(\frac{1}{2}r\right).$$

Il est facile de voir que les conditions (3.2) et (3.3) du Théorème 3.1.4 sont vérifiées ($\beta = \frac{1}{2} < \sqrt{2-\sqrt{3}} = \alpha$). Alors, toute solution non nulle de l'équation (3.11) est d'ordre infini.

**Exemple 3.1.3** Considèrons l'équation différentielle

$$f^{(k)} + P_{k-1}(e^z)\, e^{z^n} f^{(k-1)} + ... + P_2(e^z)\, e^{z^n} f'' + P_1(e^z)\, e^{z^n} f' + ce^{\alpha z} e^{z^n} f = 0, \tag{3.12}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $c \in \mathbb{C}$, $|c| \geq 1$, $n \geq 2$ et $P_1, ..., P_{k-1}$ sont des polynômes. Si nous prenons le secteur $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, $\theta_1,\ \theta_2 \in \left]0, \frac{\pi}{10}\right[$ tel que $d = \max\limits_{1\leq j\leq k-1} \deg(P_j) < \alpha\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} < n$, alors, pour $z = re^{i\theta}$ $(r \to +\infty)$, on a

$$|A_0(z)| = |ce^{\alpha z}| > e^{\alpha r\cos\theta_2},$$

$$|A_j(z)| = |P_j(e^z)| \leq e^{dr\cos\theta_1} < e^{\alpha r\cos\theta_2},\ j = \overline{1, k-1}.$$

Donc, les conditions (3.2) et (3.3) du Théorème 3.1.4 sont vérifiées. Alors, toute solution non nulle de l'équation (3.12) est d'ordre infini.

Pour la démonstration on a besoin des lemmes suivants.

## 3.2 Lemmes préliminaires

**Lemme 3.2.1.** [9] *Soient $f$ une fonction entière transcendante d'ordre fini $\sigma$, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de couples d'entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$; $i = 1, ..., m$ et $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E$, il existe $R_0 = R_0(\theta) > 0$ tel que, pour tout $z$ vérifiant* $\arg z = \psi_0$ *et* $|z| \geq R_0$ *et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}.$$

**Lemme 3.2.2.** [14] *Soit $f(z)$ une fonction entière. Supposons que $\left|f^{(k)}(z)\right|$ est non bornée sur un rayon* $\arg z = \theta$. *Alors, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta_n}$ $(m = 1, 2, ...)$, où $r_m \to \infty$, tel que $f^{(k)}(z) \to \infty$, et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(k)}(z)}\right| \leqslant \frac{1}{(k-j)!}(1+o(1))|z|^{k-j}, \quad j = 0, ..., k-1. \tag{3.13}$$

**Preuve :** On note $M\left(r, \theta, f^{(k)}\right)$ le maximum du module de $f^{(k)}$ sur le segment de la ligne $\left[0, re^{i\theta}\right]$. Clairement, nous pouvons construire une suite de points $z_n = r_n e^{i\theta}$, $r_n \to \infty$, *telle que* $M\left(r, \theta, f^{(k)}\right) = \left|f^{(k)}\left(r_n e^{i\theta}\right)\right| \to \infty$ quand $n \to \infty$. Pour chaque $n$, par intégration successive $(k-j)$ fois sur le segment de la ligne $[0, r_n]$, on aura

$$f^{(k-1)}(z) = f^{(k-1)}(0) + \int_0^{z_n} f^{(k)}(t)\,dt$$

et

$$f^{(k-2)}(z_n) = f^{(k-2)}(0) + \int_0^{z_n} f^{(k-1)}(t)\,dt$$
$$= f^{(k-2)}(0) + f^{(k-1)}(0)\,z_n + \int_0^{z_n}\int_0^{z_n} f^{(k)}(t)\,dtdt,$$

par suite

$$f^{(j)}(z_n) = f^{(j)}(0) + f^{(j+1)}(0)\,z_n + ... + \frac{1}{(k-i-1)!}f^{(k-1)}(0)\,z^{k-j-1}$$
$$+ \int_0^{z_n} ... \int_0^{z_n} f^{(k)}(t)\,dt...dt. \tag{3.14}$$

Par conséquent, par l'inégalité triangulaire on aura,

$$\left|f^{(j)}(z_n)\right| \leq \left|f^{(j)}(0)\right| + \left|f^{(j+1)}(0)\right| r_n + ... + \frac{1}{(k-j-1)!}\left|f^{(k-1)}(0)\right| r_n^{k-j-1}$$
$$+ \frac{1}{(k-j)!}\left|f^{(k)}(z_n)\right| r_n^{k-j}. \tag{3.15}$$

l'assertion (3.13) suit immédiatement.

**Lemme 3.2.3.** *Etant donnés $\mu > 0$ et $h \geqslant 0$, l'intégrale*

$$I(r) = \int_r^{+\infty} exp(-ht^{\mu})\, dt$$

*converge et en plus on a*

$$I(r) \leqslant exp((-h+\varepsilon) r^{\mu}),$$

*pour $r$ suffisamment grand et $\varepsilon > 0$.*

**Preuve :** Pour $r$ suffisamment grand, on a

$$I(r) = \int_r^{+\infty} exp(-ht^{\mu})\, dt = \int_r^{+\infty} \frac{t^2}{t^2} exp(-ht^{\mu})\, dt$$

$$\leqslant r^2 \exp(-hr^{\mu}) \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

$$\leqslant r \exp(-hr^{\mu}) \leq \exp(-h+\varepsilon) r^{\mu}. \tag{3.16}$$

# Preuves des Théorèmes

## 3.3 Preuve du Théorème 3.1.4

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (3.4) d'ordre fini $\sigma$. De $(3.4)$, on peut écrire

$$\frac{1}{A_0(z) e^{z^n}} \frac{f^{(k)}}{f} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i(z)}{A_0(z)} \frac{f^{(i)}}{f} = -1. \tag{3.17}$$

D'après le Lemme 3.2.1 il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E$, il existe $R_0 = R_0(\theta) > 0$ tel que, pour tout $z$ vérifiant $\arg z = \psi_0$ et $|z| \geq R_0$ et pour tout $i = 1, 2, ..., k$, on a

$$\left| \frac{f^{(i)}(z)}{f(z)} \right| \leq |z|^{i(\sigma - 1 + \varepsilon)} \quad (i = 1, ..., k-1). \tag{3.18}$$

De $(3.2)$, $(3.3)$ et (3.18) on obtient

$$\left| \frac{A_i(z)}{A_0(z)} \right| \left| \frac{f^{(i)}(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{e^{(\alpha - \beta)|z|^{\mu}}} |z|^{i(\sigma - 1 + \varepsilon)} \ (i = 1, ..., k-1).$$

D'où

$$\lim_{z \to \infty} \left| \frac{A_i(z)}{A_0(z)} \right| \left| \frac{f^{(i)}(z)}{f(z)} \right| = 0 \quad (i = 1, ..., k-1). \tag{3.19}$$

Aussi de (3.2) et (3.18), on a

$$\left|\frac{1}{A_0(z)\,e^{z^n}}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{e^{\alpha|z|^{\mu}}e^{r^n\cos n\theta}}\,|z|^{k(\sigma-1+\varepsilon)}\,;$$

et en tenant en compte que $\arg z = \theta \in (\theta_1, \theta_2) \subset \left[0, \frac{\pi}{2n}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2n}, \frac{2\pi}{n}\right]$, on trouve

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{1}{A_0(z)\,e^{z^n}}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| = 0. \tag{3.20}$$

En utilisant (3.19) et (3.20) et (3.17), on obtient

$$1 = \left|\frac{1}{A_0(z)\,e^{z^n}}\frac{f^{(k)}}{f} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{A_i(z)}{A_0(z)}\frac{f^{(i)}}{f}\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{A_0(z)\,e^{z^n}}\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \sum_{i=1}^{k-1}\left|\frac{A_i(z)}{A_0(z)}\right|\left|\frac{f^{(i)}}{f}\right| \to 0 \ \ (\text{quand } z\to\infty)\,,$$

c'est une contradiction. Donc, toute solution $f \not\equiv 0$ de (3.4) est d'ordre infini.

## 3.4 Preuve du Théorème 3.1.5

On commence par montrer que $f^{(s)}$ est bornée dans $S(\varepsilon) = \{z : \theta_1 + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \theta_2 - \varepsilon\}$. Du Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E \in [0, 2\pi]$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $j = s+1, ..., k$,

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(j-s)(\sigma-1+\epsilon)} \leqslant |z|^{k\sigma} \tag{3.21}$$

le long de tout rayon $\arg z = \psi$ avec $|z| = r > r_1$ et $\psi \in (\theta_1, \theta_2)\setminus E$, $(0 < \epsilon < 1)$. Supposons maintenant que $\left|f^{(s)}(z)\right|$ est non bornée sur un rayon $\arg\ z = \phi \in (\theta_1, \theta_2)\setminus E$. Du Lemme 3.2.2, il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\phi}$, $r_m \to \infty$, telle que, $f^{(s)}(z_m) \to \infty$ quand $m \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leqslant \frac{1}{(s-j)!}\,(1+o(1))\,|z_m|^{s-j} \leqslant 2\,|z_m|^k \tag{3.22}$$

pour tout $j = 0, ..., s-1$ et tout $m$ assez grand. Soit $|z_m| \geqslant r_2$. De (3.7), on obtient

$$|A_s| \leqslant \left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right|\left|\frac{1}{e^{z^n}}\right| + |A_{k-1}|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}\right| + ... + |A_{s+1}|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right| + |A_{s-1}|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}}\right| +$$

$$... + |A_1|\left|\frac{f'}{f^{(s)}}\right| + |A_0|\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right| + |A_{k-1}|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}\right| + ... + \ |A_{s+1}|\left|\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right| + |A_{s-1}|\left|\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}}\right| +$$

$$... + |A_1|\left|\frac{f'}{f^{(s)}}\right| + |A_0|\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|. \tag{3.23}$$

En combinant maintenant (3.5) , (3.6) , (3.21) et (3.22) avec l'évaluation (3.23), on trouve

$$\exp\left(\alpha r_m^{\mu}\right) \leqslant |A_s\left(z_m\right)| \leqslant r_m^c \exp\left(\beta r_m^{\mu}\right), \quad (c > 0)$$

quand $m \to \infty$ dans le rayon $\arg z = \phi$, d'où une contradiction. Par conséquent, $\left|f^{(s)}\left(z\right)\right|$ doit être bornée sur tout rayon $\arg z = \phi \in (\theta_1, \theta_2) \backslash E$. Par une application standard du Principe Phragmén-Lindelof, nous concluons que $f^{(s)}\left(z\right)$ est bornée, soit $\left|f^{(s)}\left(z\right)\right| \leqslant M$, dans le secteur entier $S\left(\varepsilon\right)$.

Maintenant, on montre que $|f\left(z\right)| = O\left(|z|^s\right)$ sur tout rayon $\arg z = \phi \in (\theta_1, \theta_2) \backslash E$. Par intégration successive $s$ fois le long du rayon $\arg z = \phi$, on aura

$$f^{(s-1)}\left(z\right) = f^{(s-1)}\left(0\right) + \int_0^z f^{(s)}\left(t\right) dt$$

et

$$f^{(s-2)}\left(z\right) = f^{(s-2)}\left(0\right) + \int_0^z f^{(s-1)}\left(t\right) dt = f^{(s-2)}\left(0\right) + f^{(s-1)}\left(0\right) z + \int_0^z \int_0^z f^{(s)}\left(t\right) dtdt$$

par suite

$$f^{(i)}\left(z\right) = f^{(i)}\left(0\right) + f^{(i+1)}\left(0\right) z + ... + \frac{1}{(s-i-1)!} f^{(s-1)}\left(0\right) z^{s-i-1}$$
$$+ \int_0^z ... \int_0^z f^{(s)}\left(t\right) dt...dt$$

d'où

$$\left|f^{(i)}\left(z\right)\right| \leq \left|f^{(i)}\left(0\right)\right| + \left|f^{(i+1)}\left(0\right)\right| |z| + ... + \frac{1}{(s-i-1)!} \left|f^{(s-1)}\left(0\right)\right| |z|^{s-i-1}$$
$$+ M \int_0^{|z|} ... \int_0^{|z|} dt...dt = O\left(|z|^s\right). \tag{3.24}$$

Écrivons maintenant (3.7) sous la forme

$$\left|f^{(s)}\right| \leq \frac{|f|}{|A_s|} \left( \frac{1}{|e^{z^n}|} \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}\left(z\right)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + ... \right.$$
$$\left. + |A_{s+1}\left(z\right)| \left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right| + |A_{s-1}\left(z\right)| \left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + ... + |A_1\left(z\right)| \left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0\left(z\right)| \right). \tag{3.25}$$

En utilisant (3.21), (3.24), et la majoration de $f$ par $a\left|z\right|^s$ $(a > 0)$ et les conditions (3.5) et (3.6), nous concluons que pour $r \geqslant r_3$

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \frac{a\left|z\right|^s}{exp\left(\alpha\left|z\right|^{\mu}\right)} \left(|z|^k + e^{\beta|z|^{\mu}} |z|^{k-1} + ... + e^{\beta|z|^{\mu}} |z| + e^{\beta|z|^{\mu}}\right)$$
$$\leqslant \frac{a\left|z\right|^{s+k-1} exp\left(\beta\left|z\right|^{\mu}\right)}{exp\left(\alpha\left|z\right|^{\mu}\right)}.$$

D'où
$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leq \exp\left(\left(-\alpha+\beta+\gamma_1\right)|z|^{\mu}\right), \tag{3.26}$$
où $0 < \gamma_1 < \dfrac{\alpha-\beta}{k}$, le long tout rayon $\arg z = \phi \in (\theta_1+\varepsilon, \theta_2-\varepsilon) \backslash E$ . Par le principe de Phragmén-Lindelof, (3.26) reste encore vraie dans le secteur $S(2\varepsilon)$, ce qui prouve la deuxième assertion (3.9) dans le cas $i = s$.

**Preuve de la deuxième assertion pour** $i > s$

Nous pouvons nous restreindre maintenant au secteur $S(3\varepsilon)$. Supposons que $r \geqslant r_4$ est assez grand pour satisfaire que pour un arbitraire $z = re^{i\theta} \in S(3\varepsilon)$, le disque $\Gamma(z)$ de rayon au plus $\sigma = \max\limits_{s<i\leqslant k} ((i-s)!)^{1/(i-s)}$, centré en $z$, est contenu dans $S(2\varepsilon)$, c-à-d, nous devons prendre $r_4 \geqslant \frac{\sigma}{\sin\varepsilon}$. D'après la formule intégrale de Cauchy :
$$\left|f^{(i)}(z)\right| \leqslant \frac{(i-s)!}{2\pi} \int\limits_{\Gamma(z)} \frac{\left|f^{(s)}(\zeta)\right|}{|z-\zeta|^{i-s+1}} d\zeta. \tag{3.27}$$

En utilisant (3.26) dans (3.27), on obtient
$$\left|f^{(i)}(z)\right| \leqslant \exp\left(\left(-\alpha+\beta+\gamma_1\right)|z|^{\mu}\right). \tag{3.28}$$

**Preuve de la première assertion** (3.8) **pour** $j = s-1$

Fixons $\theta \in S(2\varepsilon)$, et posons
$$a_s = \int_0^{+\infty} f^{(s)}\left(te^{i\theta}\right) e^{i\theta} dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f^{(s)}\left(te^{i\theta}\right) e^{i\theta} dt. \tag{3.29}$$

De (3.26), il est facile de voir que $\int_0^{+\infty} f^{(s)}\left(te^{i\theta}\right) e^{i\theta} dt$ converge et donc $a_s \in \mathbb{C}$. De plus, la définition de $a_s$ est indépendante de $\theta$. En effet, en intégrant de $f^{(s)}(\zeta)$ le long du contour $0 \to Re^{i\phi} \to Re^{i\theta} \to 0$, et en utilisant (3.26), on conclut que l'intégrale de $f^{(s)}(\zeta)$ sur $\left[Re^{i\phi}, Re^{i\theta}\right]$ tend vers zéro quand $R \to \infty$, donc l'indépendance de $\theta$ suit immédiatement. Définissons maintenant $b_{s-1} = f^{(s-1)}(0) + a_s$, et supposons que $b_{s-1} \neq 0$. Soit $z = re^{i\theta}$ un point arbitraire dans $S(2\varepsilon)$ tel que $r \geqslant r_4$. Alors, comme
$$f^{(s-1)}(z) - b_{s-1} = \int_0^z f^{(s)}(\zeta)\, d\zeta - \int_0^{+\infty} f^{(s)}\left(te^{i\phi}\right) e^{i\phi} dt, \tag{3.30}$$
on peut appliquer le Lemme 3.2.3 avec (3.26) pour obtenir
$$\begin{aligned}\left|f^{(s-1)}(z) - b_{s-1}\right| &= \left|\int_0^z f^{(s)}(\zeta)\, d\zeta - \int_0^{\infty} f^{(s)}\left(te^{i\phi}\right) e^{i\phi} dt\right| \\ &= \left|\int_{\infty}^z f^{(s)}\left(te^{i\phi}\right) e^{i\phi} dt\right| \leqslant \int_{|z|}^{\infty} f^{(s)}\left(te^{i\phi}\right) dt \\ &\leqslant \int_r^{+\infty} \exp\left(\left(\beta-\alpha+\varepsilon_1\right) t^{\mu}\right) dt \\ &\leqslant \exp\left\{\left(\beta-\alpha+2\gamma_1\right) r^{\mu}\right\},\end{aligned} \tag{3.31}$$

pourvu que $r \geqslant r_4$. Si $b_{s-1} \neq 0$, la démonstration de la première assertion (3.8) est achevée.

**Preuve de la première assertion pour** $j < s-1$ :

Supposons maintenant que $b_{s-1} = 0$. Pour continuer, nous définissons $a_{s-1}$ en remplaçant $f^{(s)}$ par $f^{(s-1)}$ dans (3.29) et $b_{s-2} = f^{(s-2)}(0) + a_{s-1}$. Pour estimer $f^{(s-2)}(z) - b_{s-2}$, nous appliquons le Lemme 3.2.3 et

$\left|f^{(s-1)}(z)\right| \leqslant \exp\left(\left(\beta - \alpha + 2\gamma_1\right) r^{\mu}\right)$ au lieu de (3.26), exactement comme dans (3.31) pour obtenir

$$\left|f^{(s-2)}(z) - b_{s-2}\right| \leqslant \exp\left(\left(\beta - \alpha + 3\gamma_1\right) r^{\mu}\right), \tag{3.32}$$

pour $r \geqslant r_4$.

Nous pouvons continuer maintenant inductivement. Si $b_j \neq 0$ pour $j = s-t$, $t = 2, ..., s-1$, nous obtenons

$$\left|f^{(s-t)}(z) - b_{s-t}\right| \leqslant \exp\left\{\left(\beta - \alpha + (t+1)\gamma_1\right) r^{\mu}\right\}. \tag{3.33}$$

Si non, nous avons $b_{s-1} = b_{s-2} = ... = b_1 = 0$, et nous avons l'évaluation

$$\left|f(z) - b_0\right| \leqslant \exp\left\{\left(\beta - \alpha + (s+1)\gamma_1\right) |z|^{\mu}\right\}. \tag{3.34}$$

Maintenant si $b_0 \neq 0$, nous avons prouvé la première assertion. Il nous reste seulement à montrer que le cas $b_0 = 0$ n'est pas possible, i.e le cas $b_{s-1} = b_{s-2} = ... = b_0 = 0$ est impossible.

$(a)$ La première étape. Écrivons (3.7) sous la forme

$$-\frac{f^{(s)}}{f} = \frac{A_0}{A_s} + \frac{A_1}{A_s}\frac{f'}{f} + ... + \frac{A_{s-1}}{A_s}\frac{f^{(s-1)}}{f}$$

$$+\frac{A_{s+1}}{A_s}\frac{f^{(s+1)}}{f} + ... + \frac{A_{k-1}}{A_s}\frac{f^{(k-1)}}{f} + \frac{1}{A_s e^{z^n}}\frac{f^{(k)}}{f} \tag{3.35}$$

et en utilisant (3.5), (3.6) et (3.21) on conclut que

$$\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \exp\left(\left(\beta - \alpha + \gamma_1\right) |z|^{\mu}\right) \tag{3.36}$$

dans $S(2\varepsilon) \backslash E$. Par conséquent, de (3.34) et (3.36) avec $b_0 = 0$, on trouve

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \exp\left(\left(\beta - \alpha + \gamma_1\right) |z|^{\mu}\right) |f(z)|$$

$$\leqslant \exp\left(\left(\beta - \alpha + \gamma_1\right) |z|^{\mu}\right) \exp\left\{\left(\beta - \alpha + (s+1)\gamma_1\right) |z|^{\mu}\right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{\left[2(\beta - \alpha) + (s+2)\gamma_1\right] |z|^{\mu}\right\} \tag{3.37}$$

dans $S(2\varepsilon) \backslash E$, d'où dans $S(2\varepsilon + \varepsilon \backslash 2) \backslash E$ par le principe de Phragmén-Lindelof.

$(b)$ Deuxième étape. Par récurrence, supposons qu'on a

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \exp\left\{\left[T(\beta - \alpha) + \left((T-1)s + T\right)\gamma_1\right] |z|^{\mu}\right\}, \tag{3.38}$$

qui est valable dans le secteur $S\left(2\varepsilon+\sum_{i=1}^{T-1}\frac{\varepsilon}{2^j}\right)$. En Combinant le Lemme 3.2.3 avec (3.38), nous pouvons répéter le raisonnement dans (3.31) pour obtenir

$$\left|f^{(s-1)}(z)\right| \leqslant \exp\left\{\left[T(\beta-\alpha)+((T-1)s+T+1)\gamma_1\right]|z|^\mu\right\}. \tag{3.39}$$

Comme $b_{s-1}=...=b_0=0$, nous appliquons un raisonnement analogue comme en (3.26) pour obtenir

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leqslant \exp\left\{\left[T(\beta-\alpha)+((T-1)s+T+s)\gamma_1\right]|z|^\mu\right\} \\ &\leqslant \exp\left\{\left[T(\beta-\alpha)+T(s+1)\gamma_1\right]|z|^\mu\right\} \\ &\leqslant \exp\left\{\left[T(\beta-\alpha)+T(\alpha-\beta)\right]|z|^\mu\right\},\end{aligned} \tag{3.40}$$

qui est valide dans $S\left(2\varepsilon+\sum_{i=1}^{T-1}\frac{\varepsilon}{2^j}\right)$ avec $|z|\geq r_4$. En combinant maintenant (3.40) avec (3.36), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|f^{(s)}(z)\right| &\leqslant \exp\left((\beta-\alpha+\gamma_1)|z|^\mu\right)|f(z)| \\ &\leqslant \exp\left\{\left[(T+1)(\beta-\alpha)+(Ts+T+1)\gamma_1\right]|z|^\mu\right\},\end{aligned}$$

dans $S\left(2\varepsilon+\sum_{i=1}^{T-1}\frac{\varepsilon}{2^j}\right)\backslash E$, à condition que $r\geqslant r_4$ . Par le principe de Phragmén-Lindelof, cette inégalité reste valide dans le secteur $S\left(2\varepsilon+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^j}\right)=S(3\varepsilon)$.

$(c)$ Conclusion. Nous avons prouvé que, dans ce cas spécial $b_{s-1}=\cdots=b_0=0$, l'inégalité (3.38) est valide dans $S(3\varepsilon)$ pour tout $T\in\mathbb{N}$, et tout $r\geqslant r_4$. En prenant maintenant un segment dans $S(r_4,3\varepsilon)$. Comme $\alpha>\beta$, et $s+1\leqslant k$, il s'ensuit que $T(\beta-\alpha)+((T-1)s+T)\gamma_1\rightarrow-\infty$ quand $T\rightarrow\infty$. D'où, $f^{(s)}$ s'annule identiquement sur un segment. Par conséquent, $f$ doit être un polynôme, d'où une contradiction.

# Bibliographie


[1] B. Belaïdi, *Growth and oscillation of solutions to linear differential equations with entire coefficients having the same order.* Electronic. J. Differ Equations 2009, No. 70, 10 pp.

[2] B. Belaïdi and K. Hamani, *Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coefficients,* Electronic J. Differ. Equations, No. 17, (2003), pp 1-12.

[3] B. Belaïdi and S. Hamouda, *Orders of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coefficients*, Electronic J. Differ. Equations, N° 63, Vol. 2001 (2001), 1-5.

[4] Z. X. Chen, *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0$ *where the order* $(Q) = 1$, Science in China, Vol. 45, N°3 (2004), 290-300.

[5] J. B. Conway, *Functions of one complex variable,* Springer-Verlag New York. Heidelberg. Berlin 1978.

[6] M. Frei, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[7] W. Fuchs. *Proof of a conjecture of G. Pôlya concerning gap séries*, Illinois J. Math. 7 (1963).661-667.

[8] S.-A. Gao, Z.-X. Chen, T.-W. Chen, *Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, Huazhong University Science and Technology Press, Wuhan, 1998 (in Chinese).

[9] G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function , plus similar estimates* J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), 88-104.

[10] G. G. Gundersen, M. Steinbart and S. Wang, *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 1225-1247.

[11] W. K. Hayman, *The local growth of power series :a survey of the Wiman-Valiron method*, Canad. Math. Bull, 17, 1974, 317-358.

[12] W. K. Hayman, *Meromorphic functions,* Clrarendon Press, Oxford, 1964.

[13] G. Jank, and Volkmann, L., Einführung, *in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen,* Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.

[14] I. Laine and R. Yang, *Finite order solutions of complex linear differential equations,* Electronic J. Differ. Equations, No. 65, (2004), pp 1-8.

[15] l. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, W. de Gruyter, Berlin, 1993.

[16] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complexe variable,* Vol. II, translated by R. A. Silverman, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[17] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes,* Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[18] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Zweite Auflage. Reprint. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[19] J. Tu, C-F. Yi, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coeffcients having the same order*, J. Math. Analysis and Applications, 340, (2008), 487-497.

[20] J. Wang and I. Laine *Growth of solutions of second order linear differential equations,* J. Math. Anale App. 342(2008), no.1, 39-51.

[21] H. Wittich, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.

[22] C.-C . Yang, and Yi, H.-X., *Uniqueness Theory of meromorphic functions*, Science Press / Kluwer, Beijing 2003.