

Table des Matières

0.1	Résumé	2
0.2	Remerciements	3
0.3	Introduction	4
1	Quelques Eléments de la théorie de R. Nevanlinna	5
1.1	Fonction caractéristique de R. Nevanlinna	5
1.1.1	Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna	11
2	Quelques propriétés des solutions des équations différentielles linéaires de second ordre	17
2.0.2	Introduction et résultats	17
2.0.3	Lemmes préliminaires	21
2.0.4	Preuves des théorèmes	22
2.1	Conclusion	28
2.2	BIBLIOGRAPHIE	29

0.1 Résumé

Le principe de ce travail est étudier le problème de la croissance et l'oscillation des polynômes différentiels dans le plan complexe, on a montré sous certaines conditions que le polynôme différentiel possèdent les mêmes propriétés des solutions, d'une manière analogue, on a étudié le même problème pour les polynômes des solutions

$$g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2,$$

lorsque f_1 et f_2 ne sont pas solutions de la même équation.

0.2 Remerciements

Au nom du Dieu clément et miséricordieux.

Tout d'abord, je remercie Dieu tout puissant parce que réussissais dans mes études pour atteindre à ce niveau. Et offrir un grand merci à M. Fettouch Houari pour son aide et les conseils.

Je dédie ce travail à:

*Mon mère.

*Mon père.

*Mes soeurs.

*Ma grand-mère.

*Mes oncles, mes amies et mon neveu.

Je remercie mes enseignants pendant toutes les années d'études surtout mon professeur M. B. Belaïdi.

0.3 Introduction

A la fin des années vingt; la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes a été fondée par Rolf Nevanlinna. Cette théorie joue un rôle très important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Le but de ce travail est d'étudier les propriétés des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières transcendentes. Il s'agit de I. Laine et B. Bank parmi les premiers mathématiciens qui se sont intéressés aux solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients fonctions entières transcendentes.

En 1982, ils ont étudié la distribution des zéros des solutions des équations différentielles linéaires

$$f'' + A(z)f = 0$$

où $A(z)$ est un polynôme ou une fonction transcendente. On va étudier la croissance et l'oscillation de

$$g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2$$

où f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation ci-dessus, et d_1, d_2 sont des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles

Chapitre 1

Quelques Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Dans ce chapitre, on introduit les notations et les théorèmes de base utilisés dans la théorie de R. Nevanlinna. Pour plus détails (voir [6], [7], [9])

Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Théorème 1.1.1 : (voir [6], [7]). (formule de Jensen) soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ (respectivement $b_1, b_2, \dots, b_n$) ses zéros (respectivement ses pôles) chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \log \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j| < r} \log \frac{r}{|a_j|}$$

Preuve. On démontre le théorème dans le cas où f ne possède ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$h(z) = f(z) \frac{\prod_{0 < |a_j| < r} \frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z - a_j)}}{\prod_{0 < |b_j| < r} \frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z - b_j)}}.$$

Alors $h \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\log |h(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne d'une fonction harmonique, on a

$$\log |h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |h(re^{i\varphi})| d\varphi. \quad (1.1.1)$$

D'autre part,

$$|h(0)| = |f(0)| \frac{\prod_{0 < |a_j| < r} \frac{r}{|a_j|}}{\prod_{0 < |b_j| < r} \frac{r}{|b_j|}}$$

d'où

$$\log |h(0)| = \log |f(0)| - \sum_{0 < |b_j| < r} \log \left(\frac{r}{|b_j|} \right) + \sum_{0 < |a_j| < r} \log \left(\frac{r}{|a_j|} \right). \quad (1.1.2)$$

Pour $z = re^{i\varphi}$, on a

$$\left| \frac{r^2 - \bar{a}_j z}{r(z - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \bar{a}_j r e^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - a_j)} \right| = 1, \quad \left| \frac{r^2 - \bar{b}_j z}{r(z - b_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \bar{b}_j r e^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - b_j)} \right| = 1.$$

De plus

$$|h(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})|.$$

D'après 1.1.1 et 1.1.2, on obtient

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \log \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j| < r} \log \frac{r}{|a_j|}.$$

Ceci prouve le théorème. ■

Définition 1.1.1 (voir [6], [7]). Pour tout réel $x > 0$; on définit

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x; & x > 1 \\ 0; & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 (voir [6], [7]). On a les résultats suivants:

$$(1) \log x \leq \log^+ x$$

$$(2) \log^+ x \leq \log^+ y \text{ pour tout } (0 < x \leq y)$$

$$(3) \log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$$

$$(4) |\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$$

$$(5) \log^+ \left(\prod_{j=1}^m x_j \right) \leq \sum_{j=1}^m \log^+ x_j$$

$$(6) \log^+ \left(\sum_{j=1}^m x_j \right) \leq \sum_{j=1}^m \log^+ x_j + \log m$$

Preuve. Montrons (5) et (6).

(5) Si $\prod_{j=1}^m x_j \leq 1$. Alors l'inégalité est triviale. Si $\prod_{j=1}^m x_j > 1$, alors

$$\log^+ \left(\prod_{j=1}^m x_j \right) = \log \left(\prod_{j=1}^m x_j \right) = \sum_{j=1}^m \log x_j \leq \sum_{j=1}^m \log^+ x_j.$$

(6) En utilisant (2), (5), on obtient

$$\log^+ \left(\sum_{j=1}^m x_j \right) \leq \log^+ \left(m \max_{1 \leq j \leq m} x_j \right) \leq \log m + \log^+ \left(\max_{1 \leq j \leq m} x_j \right) \leq \log m + \sum_{j=1}^m \log^+ x_j.$$

■

Fonction a-points

Définition 1.1.2 : (voir [6], [7]). Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a , on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$, situées dans le disque $|z| \leq t$ et par $\bar{n}(t, a, f)$ le nombre de racines distinctes de l'équation $f(z) = a$, situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité. On désigne par $n(t, \infty, f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$, et par $\bar{n}(t, \infty, f)$ le nombre des pôles distinctes de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. Chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité, on définit:

$$N(r, a, f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r; \quad a \neq 0$$

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r$$

$$\overline{N}(r, a, f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, a, f) - \overline{n}(0, a, f)}{t} dt + \overline{n}(0, a, f) \log r; \quad a \neq 0$$

$$\overline{N}(r, \infty, f) = \overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \infty, f) - \overline{n}(0, \infty, f)}{t} dt + \overline{n}(0, \infty, f) \log r$$

$N(r, f)$ est appelée la fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Fonction de proximité

Définition 1.1.3 (voir [6], [7]). Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta; a \neq \infty$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$$

$m(r, f)$ est appelée la fonction de proximité de la fonction f au point a .

Définition 1.1.4 (voir [6], [7]). On définit la fonction caractéristique de R . Nevanlinna f par:

$$T(r, \infty, f) = T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

Proposition 1.1.1 (voir [6], [7]). Soient $f, f_1, \dots, f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des nombres complexes tels que: $ad - cb \neq 0$. Alors, on a les propriétés suivantes:

- 1) $T\left(r, \sum_{j=1}^n f_j\right) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j) + \log n$
- 2) $T\left(r, \prod_{j=1}^n f_j\right) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j)$
- 3) $T(r, f^n) = nT(r, f) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- 4) $T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T(r, f) + O(1)$

Preuve. 1) on a

$$\begin{aligned} T\left(r, \sum_{j=1}^n f_j\right) &= m\left(r, \sum_{j=1}^n f_j\right) + N\left(r, \sum_{j=1}^n f_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n m(r, f_j) + \sum_{j=1}^n N(r, f_j) \\ &= T(r, f_j) + \log n \end{aligned}$$

2) on a

$$m\left(r, \prod_{j=1}^n f_j\right) \leq \sum_{j=1}^n m(r, f_j)$$

et

$$N\left(r, \prod_{j=1}^n f_j\right) \leq \sum_{j=1}^n N(r, f_j)$$

donc

$$T\left(r, \prod_{j=1}^n f_j\right) = m\left(r, \prod_{j=1}^n f_j\right) + N\left(r, \prod_{j=1}^n f_j\right) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j).$$

3) si $|f| \leq 1$, on a $|f|^n \leq 1$, alors

$$m(r, f^n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f^n(re^{i\theta})| d\theta = 0$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f)$$

donc

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) \\ &= nN(r, f) \\ &= nT(r, f) \end{aligned}$$

si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned}
 m(r, f^n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f^n(re^{i\theta})| d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|^n d\theta \\
 &= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \\
 &= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \\
 &= nm(r, f)
 \end{aligned}$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f)$$

donc

$$\begin{aligned}
 T(r, f^n) &= nm(r, f) + nN(r, f) \\
 &= nT(r, f)
 \end{aligned}$$

4) Posons

$$f_0 = f; f_1 = f_0 + \frac{d}{c}; f_2 = cf_1; f_3 = \frac{1}{f_2}; f_4 = \frac{bc - ad}{c}f_3; f_5 = f_4 + \frac{a}{c}.$$

Si $c \neq 0$, alors

$$T(r, f_{i+1}) = T(r, f_i) + O(1).$$

D'où le résultats. ■

Exemple 1 Soit $f(z) = \frac{e^z}{z}$ cette fonction admet un pôle simple en $z = 0$ donc

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r = \log r$$

$$\begin{aligned}
m(r, \infty, f) &= m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left(\frac{e^{r \cos \theta}}{r} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{e^{r \cos \theta}}{r} \right) d\theta \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \log r = \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2} \log r \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \log r = \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2} \log r
\end{aligned}$$

d'autre part,

Alors,

$$T\left(r, \frac{e^z}{z}\right) = \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2} \log r + \log r = \frac{r}{\pi} + \frac{1}{2} \log r$$

d'ou,

$$T\left(r, \frac{e^z}{z}\right) = \frac{r}{\pi} + O(\log r).$$

Exemple 2 Soit

$$g(z) = \frac{3e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

on pose $f(z) = e^{2iz}$ donc $ad - bc = 3 + 1 = 4 \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{3e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}\right) &= T(r, e^{2iz}) + O(1) \\
&= \frac{2r}{\pi} + O(1)
\end{aligned}$$

1.1.1 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.1.2 (voir [6], [7]). Soit f une fonction méromorphe non constante avec le développement de Laurent

$$f(z) - a = \sum_{j=n}^{\infty} c_j z^j, c_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \log |c_n| + \varepsilon(r, a)$$

où

$$|\varepsilon(r, a)| \leq \log 2 + \log^+ |a|$$

et

$$\log |c_n| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

Remarque 1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit pour tout $a \in \mathbb{C}$,*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1); \quad r \rightarrow +\infty$$

Définition 1.1.5 *(voir [5], [10]). Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre et l'hyper ordre de f sont défini par:*

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

Où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique de R. Nevanlinna.

Proposition 1.1.2 *Soient f et g deux fonctions méromorphes non constantes. Alors*

(1) $\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$

(2) $\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$

(3) *Si $\rho(g) < \rho(f)$, alors*

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f).$$

Preuve.

(1) Posons $\rho(f) = \rho_1$ et $\rho(g) = \rho_2$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors pour r assez grand $T(r, f) \leq r^{\rho_1+\varepsilon}$ et $T(r, g) \leq r^{\rho_2+\varepsilon}$, donc

$$T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g) + \log 2$$

$$\leq r^{\rho_1+\varepsilon} + r^{\rho_2+\varepsilon} + \log 2$$

$$\leq 2r^{\max\{\rho_1, \rho_2\}} + \log 2$$

$$\Rightarrow \rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$$

(2) De même,

$$T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g)$$

$$\leq r^{\rho_1+\varepsilon} + r^{\rho_2+\varepsilon}$$

$$\leq 2r^{\max\{\rho_1, \rho_2\}}$$

$$\Rightarrow \rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$$

(3) Supposons que $\rho(g) < \rho(f)$. Alors, on a

$$\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\} = \rho(f)$$

et

$$T(r, f) = T(r, f+g-g) \leq T(r, f+g) + T(r, g) + O(1)$$

$$\Rightarrow \rho(f) \leq \max\{\rho(f+g), \rho(g)\} = \rho(f+g)$$

d'où

$$\rho(f+g) = \rho(f).$$

De même $\rho(fg) \leq \rho(f)$ on a

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{fg}{g}\right) \leq T(r, fg) + T\left(r, \frac{1}{g}\right)$$

$$\leq T(r, fg) + T(r, g)$$

$$\Rightarrow \rho(f) \leq \max \{ \rho(fg), \rho(g) \} = \rho(fg)$$

donc

$$\rho(fg) = \rho(f).$$

■

Exemple 3 (1) pour $f(z) = \frac{e^z}{z}$ on a

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi} + O(\log r)$$

donc

$$\rho\left(\frac{e^z}{z}\right) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T\left(r, \frac{e^z}{z}\right)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{r}{\pi} + O(\log r)\right)}{\log r} = 1$$

et

$$\rho_2(f) = 0.$$

(2) Soit $h(z) = e^{e^z}$, alors (voir [6]).

Alors

$$T(r, f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}} \text{ (quand } r \rightarrow +\infty \text{)}.$$

D'où

$$\rho(e^{e^z}) = \infty \text{ et } \rho_2(f) = 1.$$

(3) $\rho(z^2 + 3) = 0$, et $\rho_2(z^2 + 3) = \infty$.

Remarque 2 Si f est d'ordre fini, alors l'hyper ordre de cette fonction est nulle.

Définition 1.1.6 (voir [5], [10]). Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et

l'hyper-exposant de convergence des zéros de la fonction f respectivement par:

$$\lambda(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

$$\lambda_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r$$

est la fonction de comptage de zéros de $f(z)$ dans $\{z : |z| \leq r\}$.

Exemple 4 Soit $f(z) = e^z - 1$.

On a $e^z = 1 \Leftrightarrow z = i(\arg 1 + 2k\pi), (k \in \mathbb{Z})$

$$|z| \leq t \Rightarrow -t \leq 2\pi k \leq t$$

$$\Rightarrow \frac{-t}{2\pi} \leq k \leq \frac{t}{2\pi}$$

$$\Rightarrow n\left(t, \frac{1}{f}\right) \sim \frac{t}{\pi}; t \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \frac{r}{\pi} + O(1)$$

$$\Rightarrow \lambda(f) = 1.$$

Définition 1.1.7 (voir [5], [10]). On définit l'exposant et l'hyper-exposant de convergence des zéros distincts de f respectivement par:

$$\bar{\lambda}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

$$\bar{\lambda}_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, \frac{1}{f}) - \bar{n}(0, \frac{1}{f})}{t} dt + \bar{n}(0, \frac{1}{f}) \log r$$

$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ est la fonction de comptage de zéros distincts de f .

Définition 1.1.8 (voir [2], [7]). Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper-exposant de convergence des points fixes de la fonction f respectivement par:

$$\lambda(f - z) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r}$$

$$\lambda_2(f - z) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r}$$

Définition 1.1.9 (voir [2], [7]). Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper-exposant de convergence des points fixes distincts de la fonction f respectivement par:

$$\bar{\lambda}(f - z) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r}$$

$$\bar{\lambda}_2(f - z) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r}.$$

Chapitre 2

Quelques propriétés des solutions des équations différentielles linéaires de second ordre

2.0.2 Introduction et résultats

Supposons que f_1 et f_2 soient deux solutions linéairement indépendants de l'équation différentielle linéaire complexe

$$f'' + A(z)f = 0 \tag{2.0.1}$$

et le polynôme des solutions

$$g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2 \tag{2.0.2}$$

où A et $d_j (j = 1, 2)$ sont des fonctions entières d'ordre fini dans le plan complexe. Il est clair que si $d_j (j = 1, 2)$ sont des nombres complexes telles que $d_1 = cd_2$ où c est un nombre complexe, alors g_f est un solution de 2.0.1 ou a les même propriétés des solutions. Il est naturel de demander ce que l'on peut dire sur les propriétés de g_f dans le cas où $d_1 \neq cd_2$ où c est un nombre complexe et sous quelles conditions g_f conserve les mêmes propriétés des solutions de 2.0.1.

Dans [2], Chen a étudié les points fixes et hyper-ordre de la solutions d'équations différen-

tielles linéaires de second ordre avec des coefficients entiers et a obtenu les résultats suivants:

Théorème 2.0.3 (A) : (voir [2]). Pour toute solution non triviale f de 2.0.1 on a

(i) si A est un polynôme avec $\deg A = n \geq 1$, alors

$$\lambda(f - z) = \rho(f) = \frac{n+2}{2}.$$

(ii) si A est un transcendant et $\rho(A) < \infty$, alors on a:

$$\lambda(f - z) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\lambda_2(f - z) = \rho_2(f) = \rho(A).$$

Avant d'énoncer nos résultats, nous définit h et Ψ par

$$h = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ d'_1 & d_1 & d'_2 & d_2 \\ d''_1 - d_1 A & 2d'_1 & d''_2 - d_2 A & 2d'_2 \\ d'''_1 - 3d'_1 A - d_1 A' & d''_1 - d_1 A + 2d'_1 & d'''_2 - 3d'_2 A - d_2 A' & d''_2 - d_2 A + 2d'_2 \end{vmatrix}$$

et

$$\Psi(z) = \frac{2(d_1 d'_2 - d_2^2 d'_1)}{h} \varphi^{(3)} + \phi_2 \varphi'' + \phi_1 \varphi' + \phi_0 \varphi,$$

où $\varphi \neq 0$ est la fonction entière d'ordre fini et

$$\phi_2 = \frac{3d_2^2 d'_1 - 3d_1 d_2 d''_2}{h} \quad (2.0.3)$$

$$\phi_1 = \frac{2d_1 d_2 d'_2 A + 6d_2 d'_1 d''_2 - 6d_2 d'_2 d'_1 - 2d_2^2 d'_1 A}{h} \quad (2.0.4)$$

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \frac{2d_2d_1'd_2''' - 2d_1d_2'd_2''' - 3d_1d_2d_2''A - 3d_2d_1'd_2''}{h} \\
&+ \frac{2d_1d_2d_2'A' - 4d_2d_1'd_2'A - 6d_1'd_2d_2'' + 3d_1(d_2'')^2}{h} \\
&+ \frac{4d_1(d_2')^2A + 3d_2^2d_1'A + 6(d_2')^2d_1'' - 2d_2^2d_1'A'}{h}
\end{aligned} \tag{2.0.5}$$

Théorème 2.0.4 (B) : (voir [2]). Pour toute solution non triviale f de 2.0.1 on a

(i) si A est un polynôme avec $\deg A = n \geq 1$, alors

$$\lambda(g_f - z) = \rho(f) = \frac{n+2}{2}.$$

(ii) si A est un transcendant et $\rho(A) < \infty$, alors on a:

$$\lambda(g_f - z) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\lambda_2(g_f - z) = \rho_2(f) = \rho(A).$$

Le sujet de ce mémoire est d'étudier les problèmes des solutions de l'équation différentielle 2.0.1.

En effet, nous étudions la croissance et l'oscillation de

$$g_f = d_1f_1 + d_2f_2$$

où f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.0.1 et d_1 et d_2 sont des fonctions entières d'ordre fini qui ne disparaissent pas toutes identiquement nulle et satisfont $d_1 \neq cd_2$ où c est un nombre complexe, et nous obtenons les résultats suivants.

Théorème 2.0.5 (1) Soit $A(z)$ une fonction entière transcendant d'ordre fini. Soient $d_j(z)$ ($j = 1, 2$) des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho(A)$, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.0.1, alors le polynôme des solutions 2.0.2 vérifie:

$$\rho(g_f) = \rho(f_j) = \infty \quad (j = 1, 2)$$

$$\rho_2(g_f) = \rho_2(f_j) = \rho(A) \quad (j = 1, 2).$$

Exemple 5 On considère l'équation $f'' + A(z)f = 0$ avec $A(z) = 3e^{4z^2}$.

Soient $d_1(z) = z^3 + 1$ et $d_2(z) = 6z^4 + 5$, on a $\rho(A) = 2$, $\rho(d_1) = \rho(d_2) = 0$,
tel que $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho(A)$, alors le polynôme des solutions $g_f = d_1f_1 + d_2f_2$ vérifie
 $\rho(g_f) = \rho(f_1) = \rho(f_2) = \infty$ et $\rho_2(g_f) = \rho_2(f_1) = \rho_2(f_2) = \rho(A) = 2$.

Théorème 2.0.6 (2) Soit $A(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre fini. Soient $d_j(z)$ ($j = 1, 2$) des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho(A)$, soit $\varphi(z) \neq 0$ une fonction entière d'ordre fini telle que $\Psi(z) \neq 0$. Si f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.0.1, alors le polynôme des solutions 2.0.2 vérifie:

$$\bar{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f_1) = \rho(f_2) = \infty$$

et

$$\bar{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho(A).$$

Exemple 6 On considère l'équation $f'' + A(z)f = 0$ avec $A(z) = -(e^z + e^{2z})$.

Soit $d_1(z) = z^3 + 1$ et $d_2(z) = 6z^4 + 5$, on a $\rho(A) = 1$, $\rho(d_1) = \rho(d_2) = 0$ tel que $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho(A)$.

Soit $\varphi(z) = e^z \neq 0$ telle que $\Psi(z) \neq 0$.

Alors le polynôme des solutions $g_f = d_1f_1 + d_2f_2$ vérifie $\bar{\lambda}(g_f - e^z) = \lambda(g_f - e^z) = \rho(f_1) = \rho(f_2) = \infty$ et $\bar{\lambda}_2(g_f - e^z) = \lambda_2(g_f - e^z) = \rho(A) = 1$.

Théorème 2.0.7 (3) Soit $A(z)$ un polynôme de $\deg A = n$ soient $d_j(z)$ ($j = 1, 2$) des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que $h \neq 0$ et $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \frac{n+2}{2}$; si f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.0.1, alors le polynôme des solutions 2.0.2 vérifie:

$$\rho(g_f) = \rho(f_1) = \rho(f_2) = \frac{n+2}{2}.$$

Exemple 7 Considérons l'équation $f'' + A(z)f = 0$ avec $A(z) = z^4 + \frac{3}{2}z$.

Soient $d_1(z) = 2z^5 + \frac{1}{2}z^3 + z$ et $d_2(z) = z^4 + 5z^2 + 2$, on a $\deg(A) = 4$, $\rho(d_1) = \rho(d_2) = 0$ telles que $h \neq 0$ et $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \frac{n+2}{2} = 3$.

Alors le polynôme des solutions $g_f = d_1f_1 + d_2f_2$ vérifie $\rho(g_f) = \rho(f_1) = \rho(f_2) = \frac{n+2}{2} = 3$.

Théorème 2.0.8 (4) Soit $A(z)$ un polynôme de $\deg A = n$ soient $d_j(z)$ ($j = 1, 2$) des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que $h \neq 0$ et $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \frac{n+2}{2}$; soit $\varphi(z) \neq 0$ une fonction entière d'ordre $\rho(\varphi) < \frac{n+2}{2}$ telle que $\Psi(z) \neq 0$. Si f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.0.1, alors le polynôme des solutions 2.0.2 vérifie:

$$\bar{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \frac{n+2}{2}.$$

Exemple 8 Considérons l'équation $f'' + A(z)f = 0$ avec $A(z) = z^4 + \frac{3}{2}z$.

Soient $d_1(z) = 2z^5 + \frac{1}{2}z^3 + z$ et $d_2(z) = z^4 + 5z^2 + 2$, on a $\deg(A) = 4$, $\rho(d_1) = \rho(d_2) = 0$ telles que $h \neq 0$ et $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \frac{n+2}{2} = 3$. Soit $\varphi(z) = \cos z$ d'ordre $\rho(\cos z) = 1 < 3$, telle que $\Psi(z) \neq 0$. Alors le polynôme des solutions $g_f = d_1f_1 + d_2f_2$ vérifie $\bar{\lambda}(g_f - \cos z) = \lambda(g_f - \cos z) = 3$.

Pour démontrer les théorèmes ci dessus on a besoin les lemmes suivants.

2.0.3 Lemmes préliminaires

Lemme 2.0.2 (1) (voir [1], [3]). Soient $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}; F \neq 0$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe de l'équation

$$f^k + A_{k-1}f^{k-1} + \dots + A_1f' + A_0f = F$$

avec $\rho(f) = +\infty$ et $\rho_2(f) = \rho$, alors f satisfait

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty$$

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho.$$

Ici, on donne un cas particulier du résultat obtenu par T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng et J. Tu dans [4].

Lemme 2.0.3 (2) *Soient $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}; F \neq 0$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe de l'équation*

$$f^k + A_{k-1}f^{k-1} + \dots + A_1f' + A_0f = F$$

avec $\max\{\rho(A_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(F)\} < \rho(f) < +\infty$ alors

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f).$$

2.0.4 Preuves des théorèmes

Preuve du théorème 2.0.4

Preuve. Supposons que f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.0.1. Alors d'après le théorème (2.0.2) on a

$$\rho(f_1) = \rho(f_2) = \infty$$

et

$$\rho_2(f_1) = \rho_2(f_2) = \rho(A)$$

Si on suppose que $d_1 = cd_2$ où c est un nombre complexe, alors d'après 2.0.2 on a

$$g_f = cd_2f_1 + d_2f_2 = d_2(cf_1 + f_2)$$

Comme $f = cf_1 + f_2$ est un solution de (1) et $\rho(d_2) < \rho(A)$, alors on a

$$\rho(g_f) = \rho(cf_1 + f_2) = \infty$$

et

$$\rho_2(g_f) = \rho_2(cf_1 + f_2) = \rho(A).$$

Supposons maintenant que $d_1 \neq cd_2$ où c est un nombre complexe. On a

$$g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2$$

en dérivant les deux côtes de l'équation 2.0.2, on obtient

$$g'_f = d'_1 f_1 + d_1 f'_1 + d'_2 f_2 + d_2 f'_2 \quad (2.0.6)$$

en dérivant les deux côtes de l'équation 2.0.6, on obtient

$$g'_{f'} = d''_1 f_1 + 2d'_1 f'_1 + d_1 f''_1 + d''_2 f_2 + 2d'_2 f'_2 + d_2 f''_2 \quad (2.0.7)$$

en substituant $f''_j = -A f_j$ ($j = 1, 2$) dans l'équation 2.0.7, on trouve

$$g'_{f'} = (d''_1 - d_1 A) f_1 + 2d'_1 f'_1 + (d''_2 - d_2 A) f_2 + 2d'_2 f'_2$$

en dérivant les deux côtes de l'équation 2.0.7, et en substituant $f''_j = -A f_j$ ($j = 1, 2$), on obtient

$$g'''_f = (d'''_1 - 3d'_1 A - d_1 A') f_1 + (d''_1 - d_1 A + 2d''_1) f'_1 + (d'''_2 - 3d'_2 A - d_2 A') f_2 + (d''_2 - d_2 A + 2d''_2) f'_2 \quad (2.0.8)$$

De 2.0.2, 2.0.7, 2.0.6, et 2.0.8 on a ■

$$\begin{cases} g_f &= d_1 f_1 + d_2 f_2 \\ g'_f &= d'_1 f_1 + d_1 f'_1 + d'_2 f_2 + d_2 f'_2 \\ g''_f &= d''_1 f_1 + 2d'_1 f'_1 + d_1 f''_1 + d''_2 f_2 + 2d'_2 f'_2 + d_2 f''_2 \\ g'''_f &= (d'''_1 - 3d'_1 A - d_1 A') f_1 + (d''_1 - d_1 A + 2d''_1) f'_1 + (d'''_2 - 3d'_2 A - d_2 A') f_2 + (d''_2 - d_2 A + 2d''_2) f'_2 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous devons d'abord prouver que $h \neq 0$. Par des

calculs simples, on trouve

$$h = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ d'_1 & d_1 & d'_2 & d_2 \\ d''_1 - d_1 A & 2d'_1 & d''_2 - d_2 A & 2d'_2 \\ d'''_1 - 3d'_1 A - d_1 A' & d''_1 - d_1 A + 2d'_1 & d'''_2 - 3d'_2 A - d_2 A' & d''_2 - d_2 A + 2d'_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left(4d_1^2 (d'_2)^2 + 4d_2^2 (d'_1)^2 - 8d_1 d_2 d'_1 d'_2 \right) A + 2d_1 d_2 d'_1 d'''_2 \\ &+ 2d_1 d_2 d'_2 d'''_1 - 6d_1 d_2 d'_1 d''_2 \\ &- 6d_1 d'_1 d'_2 d''_2 - 6d_2 d'_1 d'_2 d''_1 \\ &+ 6d_1 (d'_2)^2 d'_1 + 6d_2 (d'_1)^2 d''_2 \\ &- 2d_2^2 d'_1 d'''_1 - 2d_1^2 d'_2 d'''_2 \\ &+ 3d_1^2 (d'_2)^2 + 3d_2^2 (d'_1)^2 \end{aligned}$$

Pour montrer que $4d_1^2 (d'_2)^2 + 4d_2^2 (d'_1)^2 - 8d_1 d_2 d'_1 d'_2 \neq 0$, on suppose que

$$d_1^2 (d'_2)^2 + d_2^2 (d'_1)^2 - 2d_1 d_2 d'_1 d'_2 = 0 \quad (2.0.9)$$

en divisant les deux côtés de l'équation 2.0.9 par $(d_1 d_2)^2$, on obtient

$$\left(\frac{d'_2}{d_2} \right)^2 + \left(\frac{d'_1}{d_1} \right)^2 - 2 \frac{d'_1}{d_1} \frac{d'_2}{d_2} = 0$$

ce qui équivaut à

$$\left(\frac{d'_1}{d_1} - \frac{d'_2}{d_2} \right) = 0$$

ce qui implique que $d_1 = c d_2$ où c est un nombre complexe, c'est une contradiction.

Comme $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho(A)$ et $4d_1^2 (d'_2)^2 + 4d_2^2 (d'_1)^2 - 8d_1 d_2 d'_1 d'_2 \neq 0$, alors

$$\rho(h) = \rho(A) > 0.$$

Ainsi $h \neq 0$. Par la méthode de Cramer, on a

$$f_1 = \frac{\begin{vmatrix} g_f & 0 & d_2 & 0 \\ g'_f & d_1 & d'_2 & d_2 \\ g''_f & 2d'_1 & d''_2 - d_2 A & 2d'_2 \\ g'''_f & d''_1 - d_1 A + 2d'_1 & d'''_2 - 3d'_2 A - d_2 A' & d''_2 - d_2 A + 2d'_2 \end{vmatrix}}{h}$$

d'où

$$f_1 = \frac{2 \left(d_1 d_2 d'_2 - d_2^2 d'_1 \right)}{h} g_f^{(3)} + \phi_2 g''_f + \phi_1 g'_f + \phi_0 g_f \quad (2.0.10)$$

où ϕ_j ($j = 1, 2$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini définies dans 2.0.3, 2.0.4 et 2.0.5. Supposons maintenant $\rho(g_f) < \infty$, alors d'après 2.0.10 on obtient $\rho(f_1) < \infty$, c'est une contradiction et $\rho(g_f) = \infty$. De 2.0.2 on a $\rho_2(g_f) \leq \rho(A)$, si on suppose que $\rho_2(g_f) < \rho(A)$, alors d'après 2.0.10 on obtient $\rho_2(f_1) < \rho(A)$, c'est une contradiction, donc $\rho_2(g_f) = \rho(A)$.

Preuve du théorème 2.0.5

Preuve. D'après le théorème (2.0.4) on a $\rho(g_f) = \infty$ et $\rho_2(g_f) = \rho(A)$. Posons $\omega(z) = d_1 f_1 + d_2 f_2 - \varphi$. Comme $\rho(\varphi) < \infty$ on a $\rho(\omega) = \rho(g_f) = \infty$. Pour prouver que $\bar{\lambda}(g_f - \varphi) = \infty$, Il suffit de montrer que $\bar{\lambda}(\omega) = \infty$. De $g_f = \omega + \varphi$ et d'après 2.0.10

$$f_1 = \frac{2 \left(d_1 d_2 d'_2 - d_2^2 d'_1 \right)}{h} \omega^{(3)} + \phi_2 \omega'' + \phi_1 \omega' + \phi_0 \omega + \psi$$

■

où

$$\psi = \frac{2 \left(d_1 d_2 d'_2 - d_2^2 d'_1 \right)}{h} \varphi^{(3)} + \phi_2'' \varphi + \phi_1' \varphi + \phi_0 \varphi \quad (2.0.11)$$

En substituant ?? dans l'équation 2.0.1, on obtient

$$\frac{2 \left(d_1 d_2 d'_2 - d_2^2 d'_1 \right)}{h} \omega^{(5)} + \sum_{j=0}^4 \beta_j \omega^{(j)} = - \left(\psi'' + A\psi \right) = B$$

où β_j ($j = 0, \dots, 4$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Comme $\psi \neq 0$ et $\rho(\psi) < \infty$, il s'ensuit ψ n'est pas une solution de 2.0.1, ce qui implique que $B \neq 0$. En appliquant le lemme(2.0.1) on obtient

$$\bar{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f_1) = \rho(f_2) = \infty$$

$$\bar{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho(A).$$

Preuve du théorème 2.0.6

Preuve. Supposons que f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de 2.0.1. Alors d'après le théorème (2.0.2) on a

$$\rho(f_1) = \rho(f_2) = \frac{n+2}{2}.$$

Par le même raisonnement du théorème (2.0.4), on a

$$h = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ d'_1 & d_1 & d'_2 & d_2 \\ d''_1 - d_1 A & 2d'_1 & d''_2 - d_2 A & 2d'_2 \\ d'''_1 - 3d'_1 A - d_1 A' & d''_1 - d_1 A + 2d'_1 & d'''_2 - 3d'_2 A - d_2 A' & d''_2 - d_2 A + 2d'_2 \end{vmatrix}$$

Comme $h \neq 0$ et par la méthode de Cramer, on a

$$f_1 = \frac{\begin{vmatrix} g_f & 0 & d_2 & 0 \\ g'_f & d_1 & d'_2 & d_2 \\ g''_f & 2d'_1 & d''_2 - d_2 A & 2d'_2 \\ g'''_f & d''_1 - d_1 A + 2d'_1 & d'''_2 - 3d'_2 A - d_2 A' & d''_2 - d_2 A + 2d'_2 \end{vmatrix}}{h}$$

d'où

$$f_1 = \frac{2(d_1 d_2 d'_2 - d_2^2 d'_1)}{h} g_f^{(3)} + \phi_2 g''_f + \phi_1 g'_f + \phi_0 g_f$$

où ϕ_j ($j = 1, 2$) sont des fonctions méromorphes avec $\rho(\phi_j) < \frac{n+2}{2}$ ($j = 0, 1, 2$) définies dans 2.0.3, 2.0.4 et 2.0.5. D'après 2.0.2 on a $\rho(g_f) \leq \frac{n+2}{2}$, si on suppose que $\rho(g_f) < \frac{n+2}{2}$, alors d'après 2.0.10 on obtient $\rho(f_1) < \frac{n+2}{2}$, c'est une contradiction, donc $\rho(g_f) = \frac{n+2}{2}$.

Preuve du théorème 2.0.7

Preuve. D'après le théorème (2.0.6) on a $\rho(g_f) = \frac{n+2}{2}$. Posons $\omega(z) = d_1 f_1 + d_2 f_2 - \varphi$. Comme $\rho(\varphi) < \frac{n+2}{2}$ on a $\rho(\omega) = \rho(g_f) = \frac{n+2}{2}$. Pour prouver que $\bar{\lambda}(g_f - \varphi) = \frac{n+2}{2}$, Il suffit de montrer que $\bar{\lambda}(\omega) = \frac{n+2}{2}$. De $g_f = \omega + \varphi$ et d'après 2.0.10 ■ ■

$$f_1 = \frac{2 \left(d_1 d_2 d'_2 - d_2^2 d'_1 \right)}{h} \omega^{(3)} + \phi_2 \omega'' + \phi_1 \omega' + \phi_0 \omega + \psi$$

où

$$\psi = \frac{2 \left(d_1 d_2 d'_2 - d_2^2 d'_1 \right)}{h} \varphi^{(3)} + \phi_2'' \varphi + \phi_1' \varphi + \phi_0 \varphi$$

En substituant ?? dans l'équation 2.0.1, on obtient

$$\frac{2 \left(d_1 d_2 d'_2 - d_2^2 d'_1 \right)}{h} \omega^{(5)} + \sum_{j=0}^4 \beta_j \omega^{(j)} = - \left(\psi'' + A\psi \right) = B$$

où β_j ($j = 0, \dots, 4$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Comme $\psi \neq 0$ et $\rho(\psi) < \infty$, il s'ensuit ψ n'est pas une solution de 2.0.1, ce qui implique que $B \neq 0$. En appliquant le lemme(2.0.2) on obtient

$$\bar{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \frac{n+2}{2}$$

2.1 Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié le problème de la croissance et l'oscillation des polynômes différentielles dans le plan complexe, on a montré sous certaines conditions que les polynômes différentielles

$$g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2$$

possèdent les mêmes propriétés des solutions.

L'outil principal utilisé dans ce travail étude étant la théorie de Nevanlinna. Cette théorie est la plus approprié dans l'étude des équations différentielles.

2.2 BIBLIOGRAPHIE

[1]**B. Belaïdi**, “Growth and oscillation theory of solutions of some linear differential equations,” *Matematiski Vesnik*, vol. 60, no. 4, pp. 233–246, 2008.

[2]**Z. X. Chen**, “The fixed points and hyper-order of solutions of second order complex differential equations,” *Acta Mathematica Scientia A*, vol. 20, no. 3, pp. 425–432, 2000 (Chinese).

[3]**Z. X. Chen**, “Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations,” *Analysis*, vol. 14, no. 4, pp. 425–438, 1994.

[4]**T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng, and J. Tu**, “On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations,” *Annals of Differential Equations*, vol. 21, no. 2, pp. 111–122, 2005.

[5]**Z. X. Chen and C. C. Yang**, “Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations,” *Kodai Mathematical Journal*, vol. 22, no. 2, pp. 273–285, 1999.

[6]**W. K. Hayman**, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1964.

[7]**I. Laine**, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, vol.15 of *de Gruyter Studies in Mathematics*, Walter de Gruyter, Berlin, Germany, 1993.

[8]**I. Laine and S. Bank**, On the oscillations theory of $f'' + A(z)f = 0$ where A is entire, *Trans. Amer. Math. Soc.* 273(1982); 351_363.

[9]**R. Nevanlinna**, *Eindeutige analytische Funktionen*, vol. 46 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer, Berlin, Germany, 2nd edition, 1974.

[10]**C. C. Yang and H. X. Yi**, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, vol. 557 of *Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2003.