

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM ABDELHAMID IBN BADIS  
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

## THÈSE

Présentée pour l'obtention d'un

**DOCTORAT LMD en MATHÉMATIQUES**

Option : Analyse Harmonique et Équations aux Dérivées Partielles

Par :

**Zineb KAISSERLI**

### **Décomposition du Potentiel de l'Opérateur de Schrödinger Semi-Classique Bidimensionnel : Application à la Représentation d'Images**

Soutenue publiquement le 04 octobre 2015 devant le jury composé de :

<b>Président :</b>	M. S. Gala	Professeur, Université de Mostaganem
<b>Examineurs :</b>	M. B. Bendoukha	Professeur, Université de Mostaganem
	M. B. Messirdi	Professeur, Université d'Oran
	M. M. Terbeche	Professeur, Université d'Oran
<b>Directrice de thèse :</b>	Mme. A. Lahmar-Benbernou	Professeur, Université de Mostaganem
<b>Co-directrice :</b>	Mme. T.M. Laleg-Kirati	Assistant Professor, KAUST, KSA
<b>Invité :</b>	M. D. Bouagada	Professeur, Université de Mostaganem

# Remerciements

Je voudrais exprimer ma plus grande gratitude et mes sincères remerciements à :

Tous ceux et celles qui m'ont assistée et soutenue de près ou de loin dans ma modeste contribution, en particulier à :

Ma Directrice de thèse Madame Amina LAHMAR-BANBERNOU, Professeur à l'Université de Mostaganem et Ma Co-directrice de thèse Madame Taous-Meriem LALEG-KIRATI, Assistant Professor à l'Université des Sciences et Technologies du Roi Abdallah, pour m'avoir fait confiance en me proposant un sujet de recherche intéressant. Tout au long de ces années de thèse, elles ont su orienter mes recherches en me guidant, m'encourageant et en me conseillant, tout en me laissant une grande liberté et en m'accordant l'honneur de me déléguer plusieurs responsabilités dont j'espère avoir été à la hauteur.

Monsieur Berrabah BENDOUKHA, Professeur à l'Université de Mostaganem qui m'a accompagnée durant mon cursus universitaire et qui m'a honorée en acceptant de faire partie de mon Jury de soutenance.

Monsieur Djilali BOUAGADA Professeur à l'Université de Mostaganem et Messieurs Bekkai MESSIRDI et Mekki TERBECHE Professeurs à l'Université d'Oran de m'avoir fait l'honneur de participer au Jury de soutenance et pour l'intérêt qu'ils ont apporté à mes travaux. Je les en remercie profondément.

Monsieur Sadek GALA Professeur à l'Université de Mostaganem qui m'a honoré en présidant ce Jury ainsi que pour son aide et ses précieux conseils le long de mon cursus universitaire.

Tous les Professeurs que j'ai rencontré ou côtoyé durant tout mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.

Comment ne pas remercier les membres de *Estimation, Modeling and ANalysis Group* (EMANG) de l'Université des Sciences et Technologies du Roi Abdallah (KAUST) pour leurs hospitalité, gentillesse, disponibilité, soutien et encouragement. Je suis très reconnaissante envers eux pour tout ce qu'ils ont fait pour moi, et surtout de m'avoir accordé leurs séances de travail lors de mes séjours, et pour les conversations intéressantes et aussi pour les moments exceptionnels passés ensemble. J'ai eu, aussi, la chance et le plaisir de rencontrer durant mes séjours à KAUST de nombreuses personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et je tiens à les remercier.

Mes sincères remerciements vont également à H., R. et aux membres de *QA* et de *SP*, sans oublier ceux qui représentent pour moi *ma deuxième famille*. Je les remercie pour leurs sympathie, patience, présence, écoute et conseils durant tout le long de ces années de thèse et aussi pour les moments inoubliables passés ensemble.

Enfin, je ne peux omettre mes parents et ma famille dont l'affection et le soutien continus ont constitué pour moi un socle sur lequel j'ai pu m'appuyer pour élaborer ce modeste produit de recherche.

*Zineb*

# Sommaire

<b>Sommaire</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Le problème mathématique . . . . .	5
1.2 Les méthodes de décomposition de Fourier . . . . .	6
1.3 La méthode de décomposition modale empirique . . . . .	8
1.4 Les méthodes de décomposition via la transformée de diffusion inverse . . . . .	10
<b>2 Analyse spectrale semi-classique du potentiel : SCSA</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Définition de la SCSA . . . . .	18
2.3 Convergence et comportement du spectre discret en fonction de $h$ . . . . .	19
2.4 Résolution numérique, interprétation et applications . . . . .	23
2.5 SCSA et théorie d'analyse semi-classique : une reformulation . . . . .	40
<b>3 Extension de la SCSA en deux dimensions</b>	<b>48</b>
3.1 Présentation générale . . . . .	48
3.2 Définition de la SCSA en deux dimensions . . . . .	49
3.3 Étude de la convergence lorsque $h$ tend vers 0 . . . . .	50
3.4 Comportement du spectre discret en fonction de $h$ . . . . .	54
3.5 SCSA en 2D et produit tensoriel . . . . .	56
<b>4 Résolution numérique de la SCSA en 2D</b>	<b>59</b>
4.1 Présentation générale . . . . .	59
4.2 Discrétisation de la SCSA en deux dimension . . . . .	59
4.3 Résolution numérique de la SCSA en 2D . . . . .	61
4.4 Validation et exemples . . . . .	63
<b>5 SCSA en 2D et représentation d'images</b>	<b>74</b>
5.1 Présentation générale . . . . .	74
5.2 Quelques notions d'images . . . . .	75
5.3 Exemples de représentation d'images . . . . .	76

5.4	Comparaison de la SCSA en 2D avec d'autres méthodes de représentation d'images	84
	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>
	<b>Annexes</b>	<b>90</b>
<b>A</b>	<b>Opérateur de Schrödinger et données de diffusion</b>	<b>92</b>
<b>B</b>	<b>Espaces séparables, bases et frames</b>	<b>97</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>100</b>
	<b>Index des notations</b>	<b>105</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>107</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>110</b>

# Introduction

Les problèmes inverses consistent à retrouver une donnée qui a été transformée ou perturbée à partir de quelques quantités mesurables. L'élaboration de modèles efficaces est un travail pluridisciplinaire lequel a réuni des ingénieurs, des mathématiciens et des physiciens.

La mise en oeuvre de plusieurs outils et théories mathématiques est indispensable pour la formalisation de ces modèles. Les résultats obtenus ont apporté de nombreuses perspectives dans chaque discipline.

En imagerie, où l'image est considérée comme une fonction bidimensionnelle, cela a ouvert la porte à l'étude systématique des phénomènes transitoires. En effet, dans le domaine de l'imagerie, l'image est naturellement soumise à un flou ou à un bruit lesquels engendrent des dégradations sévères. Traiter une image est avant tout une affaire de représentation. Il s'agit, donc, de trouver les structures élémentaires permettant de révéler le contenu utile et l'information pertinente de l'image. Cette étape est réalisable grâce à une décomposition de l'image selon un ensemble de fonctions élémentaires.

Pour une approximation précise, la décomposition de l'image doit se faire selon un ensemble de fonctions élémentaires adaptées à elle même pour pouvoir mettre en valeur ces propriétés. C'est ce que suggère aussi la théorie mathématique d'approximation. Plus que cela, cette théorie propose, pour des raisons de simplification et d'implémentation, de faire une extension séparable des approches monodimensionnelles.

Il existe de nombreuses méthodes de décomposition en une dimension [7, 18, 52, 53], mais presque toutes ces méthodes n'utilisent pas un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives. Par contre, le mariage entre la théorie de diffusion inverse de l'opérateur de Schrödinger [1, 7, 11, 19, 42, 55] et celle de l'analyse semi-classique [12, 28, 54] a fait apparaître une nouvelle approche dont la décomposition se fait seulement selon un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives.

En effet, pour cette nouvelle approche, dite **SCSA** de **Semi-Classical Signal Analysis** [30, 44, 45], il s'agit de considérer la fonction à décomposer comme un potentiel  $V_1$  de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel de la forme :

$$\mathcal{H}_{1,h}(V_1) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} - V_1, \quad (1)$$

où  $h$  désigne le paramètre semi-classique en lien avec la constante de Planck [12]. Ainsi, cette décomposition, laquelle est donnée par :

$$V_{1,h}(x) = 4h \sum_{k=1}^{K_h} \sqrt{-\mu_{k,h}} \psi_{k,h}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

exploite uniquement un nombre fini  $K_h$  de données spectrales  $\{\mu_{k,h}, \psi_{k,h}\}_{k=1}^{K_h}$ , résultant de la résolution du problème spectral de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel :

$$\mathcal{H}_{1,h}(V_1(x))\psi_{k,h}(x) = \mu_{k,h} \psi_{k,h}(x), \quad k = 1, \dots, K_h, \quad (3)$$

lors de la représentation du potentiel.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la généralisation de l'approche SCSA en deux dimensions pour pouvoir l'utiliser. En effet, il s'agit de décomposer sous certaines conditions une fonction bidimensionnelle selon un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives. La fonction à décomposer est considérée comme un potentiel  $V_2$  de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel :

$$\mathcal{H}_{2,h}(V_2) = -h^2\Delta - V_2, \quad (4)$$

et l'ensemble en question est donné par le carré d'un nombre fini  $K_h^\lambda$  de fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_{k,h}$  associées aux valeurs propres négatives  $\mu_{k,h}$  et inférieures à  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_-$ , résultant du problème spectral de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel :

$$\mathcal{H}_{2,h}(V_2(x, y))\psi_{k,h}(x, y) = \mu_{k,h} \psi_{k,h}(x, y), \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (5)$$

Nous nous intéressons également à l'étude des propriétés du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel en fonction du paramètre semi-classique  $h$ . Ces dernières peuvent être très utiles dans l'étude de certains phénomènes. Ensuite, la convergence de l'approche proposée laquelle est donnée par le théorème ci-dessous est démontrée.

**Théorème 0.0.1.** [36] *Soient  $V_2$  une fonction à valeur réelle positive appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  considérer comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger et  $\Omega_2 = ]a, b[ \times ]c, d[$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Alors, pour tout couple  $(\Lambda_2, \lambda)$ , tel que  $\Lambda_2 \subset \Omega_2$  est un compact, et*

$$\begin{cases} \lambda < \inf(-V_2(a, c), -V_2(b, d)), \\ V_2(\Lambda_2) \subset ]-\lambda, +\infty[, \\ \lambda \text{ n'est pas une valeur critique de } -V_2, \end{cases} \quad (6)$$

*nous avons :  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$*

$$V_2(x, y) = -\lambda + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h^2}{L_{2,\gamma}^{cl}} \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y) \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad (7)$$

*où  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  et  $L_{2,\gamma}^{cl}$  est la constante universelle semi-classique donnée par :*

$$L_{2,\gamma}^{cl} = \frac{1}{2^2\pi} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 2)}, \quad (8)$$

*et  $\Gamma$  représente la fonction Gamma.*

*Par ailleurs,  $\mu_{k,h}$  sont les valeurs propres négatives rangée par ordre décroissant de  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$  et  $\psi_{k,h}$  sont les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées tel que :*

$$\mathcal{H}_{2,h}(V_2)\psi_{k,h} = \mu_{k,h} \psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda, \quad (9)$$

*et  $K_h^\lambda$  est le nombre des valeurs propres négatives inférieures à  $\lambda$ .*

Des résultats de la théorie de l'analyse spectrale et semi-classique [29, 62] montrent que les fonctions propres  $\psi_{k,h}$  de l'opérateur de Schrödinger semi-classique sont localisées et oscillent graduellement avec une décroissance forte de leurs amplitudes. Plus explicitement la première fonction propre  $\psi_{1,h}$ , qui correspond à la plus grande intensité du potentiel, a un seul pic localisant cette intensité. La deuxième fonction propre  $\psi_{2,h}$ , laquelle a une allure sinusoïdale avec seulement deux pics, représente l'information des deux plus grandes intensités qui suivent la première, et ainsi de suite. Les dernières fonctions propres, qui représentent les faibles détails du potentiel, oscillent rapidement avec une convergence vers zéro pour les amplitudes. Autrement dit, les fonctions propres contiennent les informations les plus pertinentes du potentiel ainsi que les détails. Cette propriété des fonctions propres peut être considérée comme un second point fort de cette nouvelle approche, ce qui a permis et permettra son utilisation dans plusieurs domaines et applications. Des exemples illustreront les différents résultats obtenus et montreront l'efficacité de la SCSA en 2D en utilisant une extension séparable des algorithmes monodimensionnels.

La thèse traite modélisation, étude théorique et algorithmique accompagné de résultats numériques. Elle est organisée en cinq chapitres, comme suit :

- Le premier chapitre introduit le problème auquel on s'intéresse à savoir représenter une fonction par le biais d'une décomposition selon un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives. Nous présentons également, de manière générale, les différentes méthodes existantes tout en précisant leurs différences et limites. Ces limites amènent directement au second chapitre qui est une réponse au problème de l'adaptativité.
- Ce second chapitre présente spécifiquement l'approche retenue pour pallier aux faiblesses des méthodes existantes. Cette nouvelle approche de décomposition est dite **SCSA**.
- Quant au troisième chapitre, nous y présentons les principaux résultats théoriques obtenus sur notre problème de décomposition. Dans un premier temps la définition de cette nouvelle approche dans le cas bidimensionnel est formalisée. Ensuite ses différentes propriétés et notamment sa convergence sont présentées. En dernier, et pour des raisons d'implémentation, une formulation de la SCSA en 2D utilisant le produit tensoriel lors de l'écriture de l'ensemble des fonctions élémentaires est donnée.
- Le quatrième chapitre est consacré aux aspects numériques de la SCSA en 2D. Nous y décrivons le schéma numérique, ensuite, procédons à l'étude de l'influence des paramètres dont elle dépend et nous terminons par la représentation de quelques fonctions académiques bidimensionnelles en utilisant le logiciel MATLAB. Ce chapitre peut aussi être vu comme une validation de notre approche ainsi que de ses propriétés.
- Le cinquième et dernier chapitre se focalise sur l'une des applications possible la SCSA en 2D à savoir la représentation d'images. Nous rappelons quelques notions d'images qui sont considérées comme des fonctions bidimensionnelles. Ensuite, nous présentons quelques

exemples de représentation d'images standard et en niveaux de gris. En dernier, pour corroborer l'efficacité de l'approche proposée pour la représentation d'images, un benchmark a lieu.

Enfin, la dernière partie de ce manuscrit présente tout d'abord une conclusion générale de la SCSA en 2D en affichant ses avantages. Par la suite, les perspectives, qui restent nombreuses, ouvrent les portes sur un terrain vierge et prometteur et dans différents axes de recherche.

Ce manuscrit comprend également deux annexes qui étayent certains résultats présentés brièvement dans le texte ainsi que certains théorèmes et lemmes, sans oublier que les différents articles et ouvrages utilisés pour l'élaboration de ce modeste travail sont présentés dans la bibliographie qui clôture ce manuscrit.

# Chapitre 1

## État de l'art

Ce chapitre est dédié à la présentation de la problématique traitée dans cette thèse. Un état de l'art des méthodes existantes en la matière ainsi que leurs limites quant au problème étudié fait l'objet des trois dernières parties de ce chapitre.

### 1.1 Le problème mathématique

Avec la spécialisation croissante des chercheurs, la théorie du signal a suscité depuis plusieurs décennies un très grand intérêt chez les mathématiciens et les ingénieurs. La notion de signal comporte un volet assez large de définitions selon l'application envisagée. Une définition générale et intuitive peut être formalisée de la manière suivante : le signal ressort de l'observation d'un phénomène certaines quantités qui dépendent du temps, de l'espace, de la fréquence, . . . Ces quantités, supposées mesurables, sont appelées des signaux. Elles correspondent, en mathématiques, à la notion d'une fonction d'une ou de plusieurs variables, qui en constitue donc une modélisation<sup>1</sup> [22].

La théorie du signal a pour objet l'étude des signaux et des systèmes qui les transmettent. Une solution consiste à produire des versions simplifiées du signal pour pouvoir l'analyser. L'opération qui réalise cette simplification est dite : décomposition. Elle induit alors une représentation, simplification, débruitage, . . .

Dans ce cadre, notre travail est motivé par un problème précis : décomposer un signal bidimensionnel sur un ensemble de fonctions élémentaires afin d'en extraire les éléments clefs et de mettre en évidence certaines propriétés du signal pour mieux l'analyser, l'estimer, le représenter voire le filtrer.

Naturellement, la question qui se pose est : existe-il un unique ensemble de fonctions élémentaires pour tous types de signaux bidimensionnels ? Dans le cas contraire, sous quelles conditions l'ensemble des fonctions élémentaires est-il choisi ?

Dans ce contexte, la théorie mathématique de l'approximation suggère de choisir un ensemble de fonctions élémentaires adaptées au signal lui-même qui permettent d'obtenir une approximation précise des signaux à partir de combinaison d'un nombre fini de fonctions [53]. Plus que cela, pour

---

1. Dans ce manuscrit, la notion de signal aura le même sens qu'une fonction et sera attribuée à un signal d'une ou de plusieurs dimensions en fonction du contexte.

simplifier les mathématiques et les algorithmes pour des signaux de dimension supérieure à 1, cette théorie propose de faire une extension séparable des algorithmes unidimensionnels [15, 35, 43].

Pour toutes ces raisons nous présentons, dans ce qui suit, trois types de méthodes de décomposition des signaux unidimensionnels. Pour chacune de ces méthodes, nous précisons leurs points forts, faibles et leurs différences. Nous commencerons par un aperçu de la méthode de Fourier et de toutes ses versions vu qu'elles sont largement utilisées en théorie du traitement du signal [9, 20, 22, 53, 78, 80]. Nous présentons ensuite la méthode modale empirique, connue aussi sous le nom EMD pour Empirical Mode Decomposition, introduite en 1998 [33, 57, 68]. Cette dernière permet de traiter une classe plus générale de fonctions. Mais, malgré son succès, elle ne répond pas à la première suggestion de la théorie mathématique d'approximation. Pour cela, nous présentons, en dernier, un autre type de méthode de décomposition, basée sur des méthodes de diffusion inverse de l'opérateur de Schrödinger [11]. Cette méthode prend en considération le premier point proposé par la théorie mathématique de l'approximation lequel est le choix d'un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives, mais elle présente des difficultés d'un point de vue numérique. Pour pallier à cette difficulté, récemment, une simplification de cette méthode a été proposée [30, 44, 45]. Plus de détails seront présentés dans le second chapitre de ce manuscrit.

## 1.2 Les méthodes de décomposition de Fourier

Le principe fondateur de l'analyse dans le domaine des fréquences est l'analyse de Fourier, largement répandue. Il s'agit de décomposer une fonction périodique  $f$ , de période  $T$ , sur une base fixe des exponentielles complexes. Ainsi la fonction  $f$  se développe en série de Fourier sous la forme [53] :

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \exp\left(\frac{2i\pi kt}{T}\right) \quad (1.1)$$

où

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-\frac{2i\pi kt}{T}\right) dt. \quad (1.2)$$

Les séries de Fourier ont prouvé leur performance pour des fonctions périodiques ou suffisamment régulières, mais pour une classe plus large des fonctions stationnaires non périodiques, une généralisation des séries de Fourier a été introduite. Cette dernière, dite transformée de Fourier, est définie par [53] :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\xi t} dt, \quad (1.3)$$

pour toute fonction  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  ( $L^1$  représente l'espace des fonctions absolument intégrable<sup>2</sup>). La transformée de Fourier a régné sur le traitement des signaux car les sinusoides  $e^{i\xi t}$  sont les vecteurs propres des opérateurs linéaires stationnaires, et chaque opérateur linéaire stationnaire  $L$  est entièrement caractérisé par ses valeurs propres  $\hat{h}(\xi)$  :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, L e^{i\xi t} = \hat{h}(\xi) e^{i\xi t}. \quad (1.4)$$

---

2. Les différents espaces utilisés dans cette thèse sont décrits dans les pages de notations

Sa richesse en fait un outil fondamental pour une grande variété d'applications. Néanmoins, si on s'intéresse à des phénomènes transitoires, comme par exemple un mot prononcé à un certain moment, la transformée de Fourier s'avère inadéquate.

En effet, la transformée de Fourier (formule (1.3)) est obtenue en corrélant la fonction  $f$  avec une sinusoïde  $e^{i\xi t}$ . Comme le support de  $e^{i\xi t}$  couvre tout l'axe réel,  $\hat{f}(\xi)$  dépend des valeurs de  $f$  à tous les instants  $t \in \mathbb{R}$ . Ce brassage de l'information rend difficile l'analyse des propriétés locales de la fonction  $f$  à partir de  $\hat{f}$  et engendre de gros calculs.

C'est pourquoi on a vu apparaître de nombreuses autres méthodes de décomposition spectrale. La plus intuitive de ces méthodes est la transformée de Fourier à fenêtre glissante, introduite par Gabor en 1946 [20], pour des fonction  $L^2$ . Le principe de cette méthode est de construire des atomes<sup>3</sup> temps-fréquence à partir d'une fenêtre  $w$ , en la translatant en temps et en fréquence :

$$w_{u,\xi} = w(t - u)e^{i\xi t} \quad (1.5)$$

On note par  $\sigma_t, \sigma_w$  la variance temporelle et fréquentielle de  $f$ , elles sont données, respectivement, par :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|^2 dt, \\ \sigma_\nu^2 &= \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

D'après le principe d'incertitude d'Heisenberg [5], ces valeurs vérifient :

$$\sigma_t \sigma_\nu \geq \frac{1}{4}. \quad (1.7)$$

Ce produit atteint son minimum et sa borne si et seulement si  $w$  est une Gaussienne. Ainsi la transformée de Gabor, dite aussi transformée de Fourier à fenêtre glissante d'une fonction  $f$ , s'écrit [20] :

$$G_f(u, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)w(t - u)e^{-i\xi t} dt. \quad (1.8)$$

C'est une intégrale de Fourier localisée au voisinage de  $u$  grâce à la fenêtre  $w(t - u)$ . En d'autre terme, la transformée de Fourier à fenêtre glissante calcule la corrélation entre la fonction  $f$  et une famille de fonctions bien concentrées en temps et en fréquences  $w(t - u)e^{-i\xi t}$ .

Cette méthode, plus fine que la transformée de Fourier simple, offre un compromis entre localisation en temps et en fréquence, mais elle est inexploitable pour une grande classe de fonctions vu que la taille de la fenêtre est fixé et elle ne prend cependant pas en compte les caractéristiques de la fonction, mais la théorie des ondelettes y remédie, en introduisant la notion d'échelle dans cette décomposition.

Dans un cas réel, la transformée en ondelettes continue d'une fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  au temps  $u$  et à l'échelle  $s$  s'écrit [53] :

$$W_f(u, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi\left(\frac{t - u}{s}\right) dt, \quad (1.9)$$

3. En mécanique quantique, un atome est une fonction bien concentrée en temps et en fréquence, dans la limite permise par le principe d'incertitude de Heisenberg [5]

où  $\psi$  est une fonction de  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  appelée ondelette mère, et vérifiant la condition d'admissibilité :

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\nu)|}{|\nu|} d\nu < \infty. \quad (1.10)$$

La décomposition en ondelettes, grâce au paramètre d'échelle  $s$ , est une méthode d'analyse fondamentalement multi-échelles. Ainsi, elle permet de traiter des fonctions comportant de fortes singularités. Comme pour la transformée de Fourier, des algorithmes rapides et une théorie pour les signaux discrets ont contribué au succès des ondelettes dans de nombreux domaines. Pour plus de détails sur le royaume de Fourier, nous invitons le lecteur à consulter [9, 20, 22, 53, 78, 80].

Mais même si les transformées de Fourier à fenêtre glissante ou en ondelette ont permis des avancées dans l'analyse temps-fréquences, aucune de ces méthodes n'est adaptée pour traiter correctement des fonctions non stationnaires et non linéaires dont on ne connaît pas à priori les caractéristiques. Plus que cela, cette classe de méthodes n'exploite pas ou peu les caractéristiques importantes des fonctions, ceci vient du fait, qu'en général, ces méthodes utilisent une base fixe, qui est exprimée par des exponentielles complexes, (hormis, pour les ondelettes, il existe de nombreuses bases plus ou moins adaptées à une classe très particulière de fonctions), or la théorie mathématique d'approximation propose de décomposer chaque fonction par une base, une frame ou un ensemble de fonctions adaptées à elle même.

Partant des limites citées plus haut, récemment, Huang et al [33] ont introduit une méthode qui traite la problématique de la décomposition et l'analyse des signaux (fonctions) non-stationnaires dite transformée de Huang ou décomposition modale empirique (EMD). L'EMD construit une base optimale, qui dépend de la fonction, et où les premières composantes contiendront presque toute l'information ; pour cela, la fonction est décomposée à partir d'une base connue, avant de réaliser une analyse en composante principale [33, 57, 58, 67, 68, 69]. La décomposition modale empirique apporte deux nouveautés :

- Elle consiste en une décomposition dans une base non fixée du signal ; en ce sens, elle est auto-adaptative.
- Elle est fondamentalement algorithmique, contrairement aux autres méthodes qui nécessitent de calculer des matrices de covariance très coûteuses.

### 1.3 La méthode de décomposition modale empirique

La décomposition modale empirique, ou EMD pour Empirical Mode Decomposition a été d'abord proposée dans [33]. C'est une méthode algorithmique de décomposition spectrale auto-adaptative. L'idée de base est de construire au fur et à mesure les fonctions de base, appelées fonctions modales intrinsèques ou IMF pour Intrinsic Mode Function, au lieu de décomposer et d'analyser une fonction dans une base fixe comme avec les méthodes de Fourier. Elle a été introduite pour traiter de manière relativement souple des données quelconques, pouvant être non-stationnaires et non-linéaires [33, 57, 68].

Avant d'étayer la notion de la décomposition modale empirique, nous présentons quelques notions sur les fonctions de base IMF.

**Définition 1.3.1.** [33, 58] On appelle fonction modale intrinsèque IMF, une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant :

1. Les minimas de  $g$  sont strictement négatifs, ses maximas sont strictement positifs.
2. La somme de l'enveloppe supérieure interpolant les maximas de  $g$ , et de l'enveloppe inférieure interpolant les minimas, est nulle.

Plus simplement, une IMF est une fonction oscillante autour de 0, de moyenne locale nulle, modulée en amplitude et en fréquence. La moyenne locale est définie par :

**Définition 1.3.2.** [58] La moyenne locale d'une fonction  $g$  est la demi-somme de ses enveloppes supérieures et inférieures, qui sont obtenues par interpolation des maximas et des minimas respectivement.

La technique de décomposition modale empirique EMD est dérivée de la simple hypothèse que toute fonction se compose de différentes fonctions modales intrinsèques IMF. Chacune d'entre elles représentant une oscillation caractéristique intégrée sur une échelle de temps séparée.

Plus précisément, l'idée principale de l'EMD est que toute fonction réelle  $f$  peut se décomposer en une moyenne locale  $m$  et une composante fortement oscillante  $d_1$ . On a ainsi [58] :

$$f(t) = d_1(t) + m(t) \quad (1.11)$$

Nous pouvons ensuite extraire une composante fortement oscillante de  $m$  que l'on note par  $d_2$ , et itérer le procédé jusqu'à n'obtenir qu'un résidu non oscillant  $r$ . Ainsi la décomposition totale de  $f$  s'écrit [58] :

$$f(t) = \sum_i d_i(t) + r(t) \quad (1.12)$$

La notion duale de la moyenne locale est celle du mode oscillant : en fait pour extraire la composante fortement oscillante  $d_1$ , dite aussi le mode oscillant, de  $f$ , on construit la moyenne locale du signal  $e_1(t)$ , encore appelée enveloppe moyenne. Ainsi le mode oscillant  $d_1$  est alors calculé par la formule [57, 58] :

$$d_1(t) = f(t) - e_1(t). \quad (1.13)$$

En posant  $e_0(t) = f(t)$ , on peut alors écrire :

$$d_i(t) = e_{i-1}(t) - e_i(t), \quad \forall i = 1, \dots, K. \quad (1.14)$$

La décomposition s'achève quand on ne peut plus calculer une enveloppe moyenne, c'est-à-dire lorsque  $e_K = r$  possède trois extrêmes au plus.

Cette méthode, relativement jeune, a fait depuis son introduction l'objet de nombreux travaux [57, 67, 68, 69, 71], la plupart essayant de formaliser les notions de "modes oscillants" et "moyenne locale" de différentes manières lesquelles restent très floues malgré que cette décomposition est par nature exacte. En effet, le gros défaut de cette méthode est l'absence de théorie et la base auto-adaptative qui ne permet pas, parfois, d'extraire l'information utile. Pour surmonter cette contrainte nous introduisons un nouveau type de décomposition des fonctions basée essentiellement sur la transformée de la diffusion inverse [7, 11, 14, 18, 23, 34, 52]. Ces méthodes consistent en une décomposition sur un ensemble de fonctions élémentaires dépendant de la fonction elle-même, donc un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives.

## 1.4 Les méthodes de décomposition via la transformée de diffusion inverse

La transformée de la diffusion directe, notée par **DST** pour Direct Scattering Transform, et la transformée de diffusion inverse, notée par **IST** pour Inverse Scattering Transform, sont importantes car elles sous-tendent l'un des outils les plus répandus dans la plupart des phénomènes physiques [61, 63, 74].

On entend par transformée de diffusion directe, dans une formulation dépendant du temps, l'étude du comportement de longue durée des solutions d'une équation d'évolution qui se déplacent vers l'infini. À travers cette méthode nous obtenons des données de diffusion, dites aussi données scattering. L'une des applications de la transformée de diffusion directe les plus reconnues est la résolution de l'équation d'évolution non linéaire de Korteweg-de Vries [21]. Cette dernière a été résolue en utilisant la transformée de la diffusion directe de l'opérateur de Schrödinger [21, 23, 48, 52, 66, 81].

Quant à la transformée de diffusion inverse, il s'agit de décomposer, et par suite reconstruire, le potentiel de l'opérateur de Schrödinger, qui représentera dans tout le long de ce manuscrit notre fonction à décomposer, à partir des données de diffusion. La reconstruction unique d'un potentiel particulier nécessite l'identification des conditions sur les données de diffusion associées à ce potentiel. Plusieurs travaux concernant la caractérisation du problème inverse pour des différents types de potentiels ont été proposés [7, 11, 14, 18, 23, 34, 52]. Une étude très approfondie a été réalisée par Deift et Trubowitz dans [11]. Avant de présenter cette méthode, sur la quelle une nouvelle méthode de décomposition s'appuie, nous donnons quelques notions sur l'opérateur de Schrödinger, vu qu'il est largement utilisé dans les transformées de la diffusion directe et inverse et qu'il est l'outil essentiel dans la présente thèse.

### 1.4.1 Opérateur de Schrödinger unidimensionnel

Soit l'expression différentielle définie par :

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

où le potentiel  $V_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  représente notre fonctions à décomposer.

L'opérateur de Schrödinger unidimensionnel  $\mathcal{H}_1$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  défini par,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(V_1)u &= Lu, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1(V_1)), \text{ avec} \\ \mathcal{D}(\mathcal{H}_1(V_1)) &= \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) \mid g, \frac{dg}{dx} \in AC_{loc}(\mathbb{R}), Lg \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

est auto-adjoint [73, 75]. Le spectre de  $\mathcal{H}_1(V_1)$  noté par  $\sigma$  est donc réel [73, 75] et est composé d'un :

- spectre continu  $\sigma_c$ , qui comprend les valeurs propres positives de multiplicité 2.
- spectre discret  $\sigma_d$ , qui contient les valeurs propres négatives de multiplicité 1.

Supposons, maintenant, que  $V_1$  est une fonction à valeurs réelles vérifiant :

$$V_1 \in L_1^1(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial^m V_1}{\partial x^m} \in L^1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2, \quad (1.17)$$

où,

$$L_1^1(\mathbb{R}) = \{V_1 \mid \int_{-\infty}^{\infty} |V_1(x)|(1 + |x|)dx < \infty\}. \quad (1.18)$$

$L_1^1(\mathbb{R})$  est souvent appelé classe de Faddeev [1, 18]. Avec ces conditions, nous sommes dans le cas point limite et donc nous n'avons pas besoin de conditions aux limites à l'infini (voir Annexe A.1). Ainsi, nous considérons l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_1(V_1)$  défini sur  $L^2(\mathbb{R})$  par :

$$\mathcal{H}_1(V_1)\psi = -\frac{d^2}{dx^2}\psi + V_1\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1(V_1)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}), \quad (1.19)$$

où  $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$  est l'espace de Sobolev d'ordre 2.

Intéressons-nous maintenant à l'équation aux valeurs propres suivante [11, 42] :

$$\mathcal{H}_1(V_1)\psi = z\psi, \quad (1.20)$$

- Si  $V_1$  est un potentiel nul, alors l'équation (1.20) admet des solutions exponentielles.
- Si  $V_1$  est un potentiel non nul et  $z = s^2$  avec  $s \in \mathbb{C}^+$  (le demi plan complexe supérieur,  $\Im(s) \geq 0$ ). Alors, la solution de l'équation (1.20) est composée d'un spectre continu  $\sigma_c$  et d'un spectre discret  $\sigma_d$ . Ainsi, nous avons  $\sigma_c = [0, +\infty)$  et  $\sigma_d$  est composé d'un nombre fini (ou nul) de valeurs propres négatives que l'on note  $s^2 = \mu_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ .
- Si  $V_1$  est un potentiel non nul à support compact. Alors les solutions de l'équation (1.20) se comportent comme des exponentielles pour  $x \rightarrow \pm\infty$ . En fait, l'hypothèse  $V_1 \in L_1^1(\mathbb{R})$  permet de retrouver le comportement exponentiel des solutions de l'équation (1.20) en  $\pm\infty$ .

Comme il a été déjà cité précédemment, la décomposition des fonctions, en utilisant les méthodes de transformée de diffusion inverse, se base essentiellement sur les données de diffusion, après avoir donner un bref aperçu sur l'opérateur de Schrödinger et sa résolution spectrale, nous présentons, dans ce qui suit, la formulation et quelques notions sur les données de diffusion, ces dernières sont exprimées en fonction de la solution de l'opérateur de Schrödinger en  $\pm\infty$ .

## 1.4.2 Solutions de Jost, états bornés et données de diffusion

Les solutions de Jost, notées  $f_{\pm}$  sont définies comme étant les solutions uniques de l'équation de Schrödinger en  $\pm\infty$  [11, 18, 42, 52], elles sont données par :

$$f_{\pm}(s, x) = e^{\pm isx} - \int_x^{\pm\infty} \frac{\sin[s(x-x')]}{s} V_1(x') f_{\pm}(s, x') dx', \quad (1.21)$$

où  $\Im(s) \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

Ce sont des fonctions propres de  $\mathcal{H}_1(V_1)$  associées aux valeurs propres  $s^2$  vérifiant :

$$\mathcal{H}_1(V_1)f_{\pm}(s, x) = s^2 f_{\pm}(s, x) \quad (1.22)$$

avec,

$$\begin{aligned} f_{\pm}(s, x) &= e^{\pm i s x} + o(1), & x \rightarrow \pm\infty, \\ \frac{df_{\pm}}{dx}(s, x) &= \pm i s e^{\pm i s x} + o(1), & x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (1.23)$$

A partir de ces fonctions, nous définissons de nouvelles quantités nommées coefficients de transmission  $T(s)$  et coefficients de réflexion par la gauche et par la droite  $\mathcal{R}_l(s)$  et  $\mathcal{R}_r(s)$  respectivement (voir Annexe A.2). Elles sont définies en fonction du Wronskien des solutions de Jost comme suit [11, 42] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(s)} &= \frac{1}{2is} W(f_-(s, x), f_+(s, x)), & s \in \overline{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}, \\ \frac{\mathcal{R}_l(s)}{T(s)} &= \frac{1}{2is} W(f_+(s, x), f_-(-s, x)), & s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{\mathcal{R}_r(s)}{T(s)} &= \frac{1}{2is} W(f_+(-s, x), f_-(s, x)), & s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

où  $W(f, g) = f(x) \frac{dg(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} g(x)$  représente le Wronskien de  $f$  et  $g$  et  $\overline{\mathbb{C}}^+ = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ .

Le comportement en  $\mp\infty$  de  $f_{\pm}$  se déduit des propriétés de Wronskien et s'écrit en fonction de  $T(s)$  et  $\mathcal{R}_{r(l)}(s)$  :

$$f_{\pm}(s, x) = \frac{1}{T(s)} e^{\pm i s x} + \frac{\mathcal{R}_{l(r)}(s)}{T(s)} e^{\mp i s x} + o(1), \quad x \rightarrow \mp\infty. \quad (1.25)$$

Une interprétation physique de ces équations consiste à considérer la solution  $T(s)f_+(s, x)$  comme décrivant une onde plane  $e^{i s x}$  émise de  $-\infty$ .  $T(s)e^{i s x}$  est alors transmise vers  $+\infty$  et  $\mathcal{R}_l(s)e^{-i s x}$  est réfléchi. De même  $T(s)f_-(s, x)$  décrit le phénomène pour une onde émise de  $+\infty$  comme montre la figure 1.1.

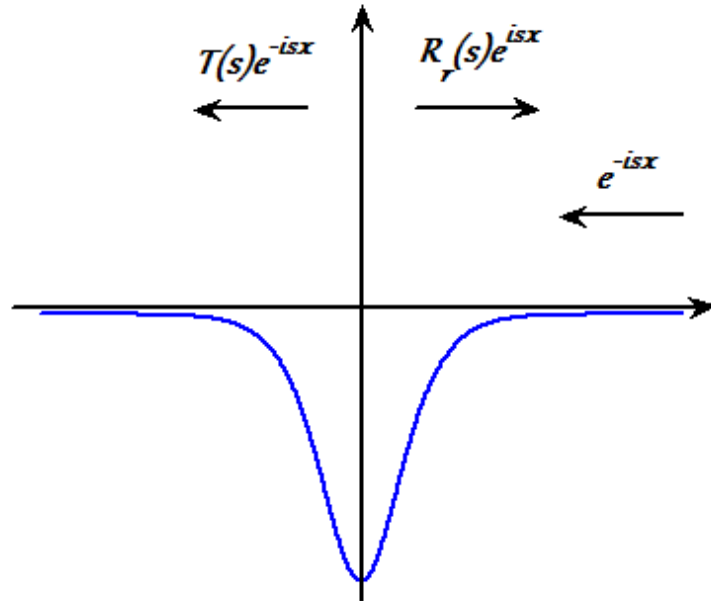


FIGURE 1.1 – Phénomène de diffusion de l'opérateur de Schrödinger.

La proposition suivante donne des propriétés des coefficients de réflexion  $\mathcal{R}_{r(l)}(s)$  et de transmission  $T(s)$ ,  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ces derniers sont obtenus par l'utilisation des propriétés du Wronskien.

**Proposition 1.4.1.** [11, 42] *Pour tout  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , nous avons :*

$$\overline{T(s)} = T(-s), \quad \overline{\mathcal{R}_r(s)} = \mathcal{R}_r(-s), \quad \overline{\mathcal{R}_l(s)} = \mathcal{R}_l(-s), \quad (1.26)$$

$$\mathcal{R}_r(s)\overline{T(s)} = -\overline{\mathcal{R}_l(s)}T(-s), \quad (1.27)$$

$$|\mathcal{R}_r(s)|^2 + |T(s)|^2 = 1 = |\mathcal{R}_l(s)|^2 + |T(s)|^2. \quad (1.28)$$

L'équation (1.28) s'interprète physiquement par la conservation de l'énergie des ondes transmises et réfléchies. Nous en déduisons que  $|T(s)| \leq 1$  et  $|\mathcal{R}_{r(l)}(s)| \leq 1$ ,  $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Les coefficients de transmission et de réflexion peuvent également s'écrire sous forme d'une intégrale dépendant du potentiel  $V_1$  et des solutions de Jost  $f_{\mp}$  [11, 42] :

$$\frac{1}{T(s)} = 1 - \frac{1}{2is} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm isx} V_1(x) f_{\mp}(s, x) dx, \quad (1.29)$$

et

$$\frac{\mathcal{R}_{r(l)}(s)}{T(s)} = \frac{1}{2is} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm isx} V_1(x) f_{\pm}(s, x) dx. \quad (1.30)$$

Ainsi, la matrice de diffusion, nommée aussi la matrice de scattering,  $S(s)$  est définie par :

$$S(s) = \begin{pmatrix} T(s) & \mathcal{R}_r(s) \\ \mathcal{R}_l(s) & T(s) \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1.31)$$

A partir des propriétés des coefficients de réflexion et de transmission, nous déduisons que la matrice de scattering  $S(s)$  est unitaire.

Intéressons-nous à présent aux valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_1(V_1)$  notées  $s^2 = \mu_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_K$ . Soient  $\psi_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées aux valeurs propres négatives  $\mu_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Ces fonctions sont appelées états bornés (voir figure 1.2) et vérifiant :

$$\mathcal{H}_1(V_1(x))\psi_k(x) = \mu_k\psi_k(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_k(x)|^2 dx = 1, \quad k = 1, \dots, K. \quad (1.32)$$

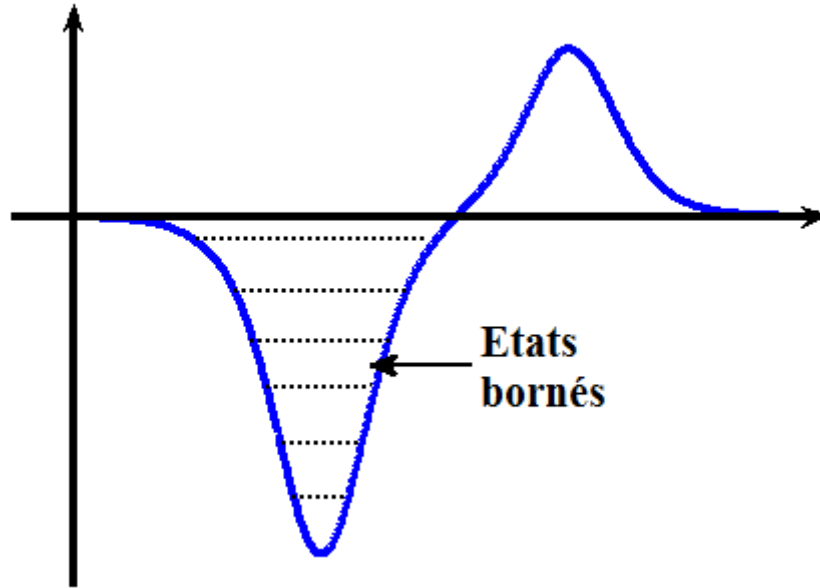


FIGURE 1.2 – Les états bornés de l'opérateur de Schrödinger.

Notons :

$$c_{l,k} = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |f_+(i\kappa_k, x)|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad c_{r,k} = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |f_-(i\kappa_k, x)|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.33)$$

avec  $\mu_k = -\kappa_k^2 = i^2 \kappa_k^2$ .  $c_{l,k}$ ,  $c_{r,k}$  sont appelées constantes de normalisation.

L'analyse spectrale de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_1(V_1)$  introduit ainsi un ensemble appelées données de diffusion, ou encore données scattering, ce dernier est unique pour chaque potentiel  $V_1$ . Soient les ensembles  $\mathcal{S}_l(V_1)$  et  $\mathcal{S}_r(V_1)$  qui regroupent respectivement les données de diffusion à gauche et à droite :

$$\mathcal{S}_j(V_1) = \{\mathcal{R}_j(s), \mu_k, c_{j,k}, k = 1, \dots, K\}, \quad j = l, r. \quad (1.34)$$

Ainsi, cette analyse introduit les deux transformations citées auparavant transformées de diffusion directe **DST** et transformées de diffusion inverse **IST**. Plusieurs méthodes de décomposition basées sur la transformée de diffusion inverse ont été proposées [7, 23, 52]. Dans ce qui suit nous présentons la méthode de décomposition de Deift et Trubowitz [11], cette dernière s'est avéré très efficace et a fait l'objet de plusieurs travaux [25, 40, 55, 56].

### 1.4.3 Formule de décomposition de Deift et Trubowitz

Deift et Trubowitz [11] ont montré que le potentiel  $V_1$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_1$  peut être décomposé, en utilisant la transformée de la diffusion inverse, par une formule explicite décrite dans le théorème suivant :

**Théorème 1.4.1.** [11] Soit  $V_1 \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $V_1$  peut être reconstruit, de manière unique, par la formule suivante :

$$V_1(x) = -4 \sum_{k=1}^K \sqrt{-\mu_k} \psi_k^2(x) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b \left( \frac{2i}{\pi} \int_{-a}^{+a} s \mathcal{R}_{r(l)}(s) f_{\pm}^2(s, x) ds \right) da, \quad p.p. \quad (1.35)$$

Si de plus  $s \mathcal{R}_{r(l)}(s) \in L^1(\mathbb{R})$ , alors :

$$V_1(x) = -4 \sum_{k=1}^K \sqrt{-\mu_k} \psi_k^2(x) + \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \mathcal{R}_{r(l)}(s) f_{\pm}^2(s, x) ds, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.36)$$

La formule (1.36) est souvent appelée formule de trace de Deift et Trubowitz. Elle se décompose en la somme de deux termes, un terme qui se caractérise par le spectre discret  $\sigma_d$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_1$ , et un autre qui montre la contribution du spectre continu  $\sigma_c$  dans la reconstruction du potentiel  $V_1$ .

Rappelons que le spectre discret  $\sigma_d$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_1$  est composé un nombre fini  $K$  de fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_k$  associées aux valeurs propres négatives rangées par ordre décroissant  $\mu_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . En effet les fonctions propres  $\psi_k$  constituent une base unique pour chaque potentiel, d'où l'obtention d'un ensemble adaptatif, contenant un nombre fini de fonctions propres  $L^2$ -normalisées au carré  $\psi_k^2$  associées aux valeurs propres négatives  $\mu_k$ , pour la décomposition des fonctions grâce à l'utilisation de la transformée de la diffusion inverse de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_1$ .

Malgré le grand succès qu'ont eu les formules de décomposition (1.35) et (1.36) de Deift et Trubowitz, cependant, cette représentation n'est pas directement exploitable en raison des difficultés liées au calcul numérique des coefficients de réflexion  $\mathcal{R}_{r(l)}$  et des fonctions de Jost  $f_{\pm}^2$ . C'est dans ce sens que les auteurs, dans [44, 45], ont allégé les formules de Deift et Trubowitz pour pouvoir décomposer et représenter un potentiel  $V_1$  en utilisant uniquement le spectre discret  $\sigma_d$ , ce dernier peut être facilement calculé numériquement. Cette nouvelle décomposition fait l'objet du second chapitre de ce manuscrit.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le problème traité, à savoir décomposer une fonction sur un ensemble de fonctions élémentaires adaptées à elle-même pour pouvoir l'analyser, l'estimer, la reconstruire voir aussi la filtrer.

Différentes méthodes de décomposition ont été présentées chacune avec ses avantages et limites. Nous avons souligné que la méthode basée sur les formules de Deift et Trubowitz respecte bien la condition proposée par la théorie mathématique de l'approximation, laquelle suggère de choisir un ensemble de fonctions élémentaires dépendant de la fonction elle-même. Cependant, la contribution de la partie continue du spectre pose un problème technique.

Pour remédier à ce problème, nous allons présenter dans le chapitre suivant une méthode de décomposition de fonctions basées sur une quantification semi-classique de l'opérateur de Schrödinger développée récemment.

## Chapitre 2

# Analyse spectrale semi-classique du potentiel : SCSA

Dans ce chapitre, est traitée la difficulté numérique que posent les formules de décomposition de Deift et Trubowitz. N'ayant aucun résultat qui permet de traiter ce genre de problème, nous surmontons cette difficulté en intégrant le paramètre semi-classique dans l'opérateur de Schrödinger, et par suite dans la formule de Deift et Trubowitz, d'où l'apparition d'une nouvelle approche basée sur une quantification semi-classique et une transformée de diffusion inverse. Cette nouvelle approche permet de décomposer une fonction sur un ensemble de fonctions adaptées à elle-même et avec peu de composantes. Nous présentons, également, quelques propriétés et nous montrons sa convergence. A travers quelques exemples numériques, nous montrons son efficacité pour des signaux académiques, réels et bruités. En dernier, en se basant sur des résultats d'analyse semi-classique, une reformulation de cette approche est présentée. Tout au long du chapitre on s'intéressera, théoriquement et numériquement, à une analyse spectrale semi-classique du potentiel.

### 2.1 Introduction

Rappelons que les limites des méthodes de décomposition basées sur l'analyse de Fourier [22, 53] et de la décomposition modale empirique (EMD) [33, 58] exposées dans le chapitre précédent résident, principalement, dans la formulation des bases et/ou des lourds calculs que leur mise en oeuvre induit. Par contre la décomposition proposée par Deift et Trubowitz [11], qui s'appuie essentiellement sur la transformée de diffusion inverse de l'opérateur de Schrödinger, permet une décomposition sur un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives avec un nombre fini de composantes et un résidu lequel est exprimé par une partie continue. Cette contribution du spectre continu pose numériquement des difficultés. Pour surmonter ce problème, nous présentons, dans ce chapitre, une nouvelle méthode de décomposition, développée récemment [44, 45] et inspirée des formules de décomposition de Deift et Trubowitz [11].

En effet, en introduisant le paramètre semi-classique dans l'opérateur de Schrödinger et par suite dans les formules de Deift et Trubowitz [11], la contribution du spectre continu s'annule, d'où l'apparition d'une nouvelle approche de décomposition dont le principe consiste à utiliser

uniquement le spectre discret, c'est-à-dire un nombre fini de valeurs propres négatives et leurs fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées au carré de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel pour analyser et représenter la fonction dont elle est considérée comme un potentiel de cet opérateur.

Le paramètre semi-classique permet d'explorer le principe de correspondance, c'est-à-dire, on doit retrouver la mécanique classique à partir de la mécanique quantique lorsque le paramètre semi-classique, en lien avec la constante de Plank, notée par  $h$  tend vers 0 [12, 28, 54]. Ainsi, ce paramètre permet non seulement de faire une étude microlocale mais, beaucoup plus : il permet à la décomposition du potentiel de mieux converger.

Comme cette nouvelle méthode s'appuie sur une étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger semi-classique, le nom SCSA lui a été attribué, lequel vient de : Semi-Classical Signal Analysis.

## 2.2 Définition de la SCSA

Dans tout ce qui suit, nous nous intéressons essentiellement à l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  défini sur  $L^2(\mathbb{R})$  par :

$$\mathcal{H}_{1,h}(V_1) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} - V_1, \quad \mathcal{D}(\mathcal{H}_{1,h}(V_1)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}) \quad (2.1)$$

tel que :

$$V_1 \in L^1_+(\mathbb{R}), \quad V_1(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^m V_1}{\partial x^m} \in L^1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2. \quad (2.2)$$

Il est à noter que sous les hypothèses (2.2), il existe un nombre  $K_h$  fini [11] et non nul [42] de valeurs propres négatives de l'opérateur  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$ . Notons  $\mu_{k,h}$  les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  avec

$$\mu_{1,h} < \mu_{2,h} < \dots < \mu_{K_h,h} < 0, \quad k = 1, \dots, K_h.$$

Soient  $\psi_{k,h}$  les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées à  $\mu_{k,h}$ ,  $k = 1, \dots, K_h$ .

Nous définissons la SCSA par :

**Définition 2.2.1.** [44, 45] Soient  $V_1$  une fonction vérifiant les hypothèses (2.2) et  $h$  le paramètre semi-classique. L'approximation par la SCSA est définie par :

$$V_{1,h}(x) = 4h \sum_{k=1}^{K_h} \sqrt{-\mu_{k,h}} \psi_{k,h}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

où  $\mu_{k,h}$  et  $\psi_{k,h}$ ,  $k = 1, \dots, K_h$  sont respectivement les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{1,h}(V_1)\psi_{k,h} = \mu_{k,h}\psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h. \quad (2.4)$$

Il est clair d'après cette définition que la SCSA résulte d'une écriture à partir d'un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives qui dépend du potentiel lui-même et qui consiste en le carré des fonctions propres  $L^2$ -normalisées de l'opérateur de Schrödinger semi-classique dont le potentiel est donné par la fonction elle-même comme montré par Newell et Kaup [40] et aussi Deift et Trubowitz dans [11].

## 2.3 Convergence et comportement du spectre discret en fonction de $h$

Dans cette partie, nous allons présenter quelques résultats du comportement du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel en fonction du paramètre semi-classique  $h$ . Ce dernier joue un rôle important. En effet, il permet de modifier le spectre de  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  de façon à approcher au mieux  $V_1$  par  $V_{1,h}$ . Intuitivement, plus  $h$  diminue, plus l'extraction des valeurs propres négatives de  $V_1$  par rapport à  $x$  est meilleure, d'où la convergence du potentiel estimé vers le potentiel original qui sera présenté dans la section qui suit suivie par quelques propriétés du spectre discret.

### 2.3.1 Étude de la convergence de $V_{1,h}$ lorsque $h$ tend vers 0

Pour montrer la convergence de la SCSA, nous utiliserons la formule de trace établie par Deift et Trubowitz dans [11] en terme semi-classique que nous rappelons ci-dessous :

$$V_{1,h}(x) = 4h \sum_{k=1}^{K_h} \sqrt{-\mu_{k,h}} \psi_{k,h}^2(x) - \frac{2ih^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \mathcal{R}_{r(l),h}(s) f_{\pm,h}^2(s, x) ds, \quad (2.5)$$

pour  $s \mathcal{R}_{r(l),h}(s) \in L^1(\mathbb{R})$  et  $V_1$  vérifie les hypothèses (2.2).

Intuitivement, pour montrer la convergence de la formule (2.3) lorsque le paramètre semi-classique  $h \rightarrow 0$ , nous démontrons que le terme donné par :

$$\frac{2ih^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \mathcal{R}_{r(l),h}(s) f_{\pm,h}^2(s, x) ds \quad (2.6)$$

tend vers 0 lorsque  $h$  converge vers 0. A cet effet nous utiliserons des propriétés relatives au coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_{r(l),h}$  et des propriétés de bornitude des fonctions de Jost  $f_{\pm,h}$  que nous montrons en utilisant le lemme suivant :

**Lemme 2.3.1.** [59] Soit  $V_1 \in L^1(\mathbb{R})$  un potentiel continu avec  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_1(x) = 0$ . Alors,

$$|f_{\pm,h}(s, x) - \exp(\pm ixs/h)| \leq |s|^{-1} \delta_{\pm}(x) \exp(|s|^{-1} \delta_{\pm}(x)) \quad (2.7)$$

pour tout  $s \in \mathbb{R}^*$ , où

$$\delta_{\pm}(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} |V_1(y)| dy. \quad (2.8)$$

A partir de ce lemme nous déduisons la bornitude des fonctions de Jost  $f_{\pm,h}$ .

**Corollaire 2.3.1.** Soit  $V_1 \in L^1(\mathbb{R})$  un potentiel continu avec  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_1(x) = 0$ . Alors,

$$|f_{\pm,h}(s, x)| \leq C, \quad (2.9)$$

où  $C$  est une constante.

**Preuve. (Corollaire 2.3.1)**

D'après le lemme 2.3.1, nous avons :

$$|f_{\pm,h}(s, x) - \exp(\pm ixs/h)| \leq |s|^{-1} \delta_{\pm}(x) \exp(|s|^{-1} \delta_{\pm}(x)). \quad (2.10)$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} & |f_{\pm,h}(s, x) - \exp(\pm ixs/h)| + |\exp(\pm ixs/h)| \\ & \leq |s|^{-1} \delta_{\pm}(x) \exp(|s|^{-1} \delta_{\pm}(x)) + |\exp(\pm ixs/h)|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Or,

$$\begin{aligned} & |f_{\pm,h}(s, x) - \exp(\pm ixs/h) + \exp(\pm ixs/h)| \\ & \leq |f_{\pm,h}(s, x) - \exp(\pm ixs/h)| + |\exp(\pm ixs/h)|, \end{aligned} \quad (2.12)$$

d'où :

$$|f_{\pm,h}(s, x)| \leq |s|^{-1} \delta_{\pm}(x) \exp(|s|^{-1} \delta_{\pm}(x)) + 1 \quad (2.13)$$

pour tout  $s \in \mathbb{R}^*$ . Ainsi,

$$|f_{\pm,h}(s, x)| \leq C, \quad (2.14)$$

où  $C$  est une constante.

La proposition suivante est un résultat de convergence sur le coefficient de réflexion. Elle nous permet d'établir un autre résultat dont nous aurons besoin pour montrer la convergence de la formule (2.3) lorsque le paramètre  $h$  tend vers 0.

**Proposition 2.3.1.** [44, 45] Soit  $V_1 \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction qui vérifie aussi les hypothèses (2.2).

Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^4 \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 |\mathcal{R}_{r(l),h}(s)|^2 ds = 0. \quad (2.15)$$

**Proposition 2.3.2.** Soit  $V_1 \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction qui vérifie aussi les hypothèses (2.2). Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |s \mathcal{R}_{r(l),h}(s)| ds = 0. \quad (2.16)$$

**Preuve. (Proposition 2.3.2)**

D'une part, nous avons :

$$h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |s \mathcal{R}_{r(l),h}(s)| ds = 2h^2 \int_0^{+\infty} |s \mathcal{R}_{r(l),h}(s)| ds, \quad (2.17)$$

car  $|s| = |-s|$  et  $|\mathcal{R}_{r(l),h}(s)| = |\mathcal{R}_{r(l),h}(-s)|$ .

D'autre part,  $\forall s \in \mathbb{R} : |\mathcal{R}_{r(l),h}| \leq 1$ . Alors il existe une constante  $M \in \mathbb{R}_+^*$  assez grande telle que :

$$|h^2 s \mathcal{R}_{r(l),h}(s)| \leq |h^2 s \mathcal{R}_{r(l),h}(s)|^2 \quad (2.18)$$

pour tout  $s \geq M$ . Donc :

$$\begin{aligned} h^2 \int_0^{+\infty} |s\mathcal{R}_{r(l),h}(s)| ds &= \int_0^M |h^2 s\mathcal{R}_{r(l),h}(s)| ds + \int_M^{+\infty} |h^2 s\mathcal{R}_{r(l),h}(s)| ds, \\ &\leq \int_0^M |h^2 s| ds + \int_M^{+\infty} |h^2 s\mathcal{R}_{r(l),h}(s)|^2 ds, \\ &\leq h^2 \frac{M^2}{2} + h^4 \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 |\mathcal{R}_{r(l),h}(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |s\mathcal{R}_{r(l),h}(s)| ds &= \lim_{h \rightarrow 0} 2h^2 \int_0^{+\infty} |s\mathcal{R}_{r(l),h}(s)| ds, \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \left[ h^2 M^2 + 2h^4 \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 |\mathcal{R}_{r(l),h}(s)|^2 ds \right], \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

i. e. :

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |s\mathcal{R}_{r(l),h}(s)| ds = 0. \quad (2.21)$$

Ainsi, nous déduisons :

**Corollaire 2.3.2.** Soit  $V_1 \in$  une fonction qui vérifie les hypothèses (2.2). Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ih^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s\mathcal{R}_{(l),h} f_{\pm,h}^2(s, x) ds = 0. \quad (2.22)$$

**Preuve. (Corollaire 2.3.2)**

Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ih^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s\mathcal{R}_{(l),h}(s) f_{\pm,h}^2(s, x) ds \right| &\leq \frac{2}{\pi} \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |s\mathcal{R}_{r(l),h}(s)| |f_{\pm,h}^2(s, h)| ds, \\ &\leq \frac{2C^2}{\pi} \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |s\mathcal{R}_{(l),h}(s)| ds, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Comme,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ih^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s\mathcal{R}_{(l),h}(s) f_{\pm,h}^2(s, x) ds \\ = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ih^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s\mathcal{R}_{(l),h}(s) f_{\pm,h}^2(s, x) ds \right|, \end{aligned} \quad (2.24)$$

on en déduit le résultat sus-cité.

D'après tous ce qui précède, il sensuit :

**Théorème 2.3.1.** Soit  $V_1$  une fonction réelle qui vérifie les conditions (2.2). Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , nous avons :

$$V_1(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 4h \sum_{k=1}^{K_h} \sqrt{-\mu_{k,h}} \psi_{k,h}^2(x), \quad (2.25)$$

où  $\mu_{k,h}$  et  $\psi_{k,h}$ ,  $k = 1, \dots, K_h$  sont respectivement les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{1,h}(V_1)\psi_{k,h} = \mu_{k,h}\psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h. \quad (2.26)$$

### 2.3.2 Comportement du spectre discret en fonction de $h$

Dans cette partie nous présentons quelques résultats sur le spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel en fonction du paramètre semi-classique  $h$ . Nous verrons par la suite (section 2.4.3) que ces résultats sont très utiles pour l'étude et l'analyse des signaux.

La première proposition concerne les propriétés du nombre  $K_h$  des valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  :

**Proposition 2.3.3.** [44, 45] *Soit  $V_1$  une fonction à valeurs réelles vérifiant les hypothèses (2.2). Alors,*

1. *Le nombre  $K_h$  de valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  est une fonction décroissante de  $h$ .*
2. *Si de plus  $V_1 \in L^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ , alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} hK_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{V_1(x)} dx. \quad (2.27)$$

Intéressons nous à présent aux valeurs propres négatives  $\mu_{k,h}$ ,  $k = 1, \dots, K_h$  de l'opérateur  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$ .

**Proposition 2.3.4.** [44, 45]

1. *Soient  $V_1$  une fonction à valeurs réelles vérifiant les hypothèses (2.2),  $h$  le paramètre semi-classique et  $\mu_{k,h}$ ,  $k = 1, \dots, K_h$  avec  $\mu_{1,h} < \mu_{2,h} < \dots < \mu_{K_h,h} < 0$  les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$ . Supposons que  $0 \leq V_1 \leq \max_{x \in \mathbb{R}} V_1(x)$ , alors,*

$$\max_{x \in \mathbb{R}} -V_1(x) \leq \mu_{k,h} < 0, \quad k = 1, \dots, K_h. \quad (2.28)$$

2. *Si de plus,*

$$V_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ tel que } \exists \gamma_0 \in \mathbb{R}, \min_{\mathbb{R}}(-V_1 + \gamma_0) > 0 \quad (2.29)$$

*et*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha > 0 \text{ tel que } \left| \frac{\partial^\alpha V_1}{\partial x^\alpha} \right| \leq C_\alpha(-V_1 + \gamma_0), \quad (2.30)$$

*alors toute valeur régulière de  $V_1$  est un point d'accumulation de l'ensemble  $\{-\mu_{k,h}, k = 1, \dots, K_h\}$*

La proposition suivante donne des résultats de convergence des sommes des valeurs propres négatives  $\mu_{k,h}$ ,  $k = 1, \dots, K_h$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Ces sommes peuvent être très intéressantes dans l'analyse des signaux comme par exemple les signaux de pression artérielle [44, 45, 46, 47] et les signaux turbomachine [17, 41].

**Proposition 2.3.5.** [44, 45] *Sous les hypothèses (2.2), nous avons :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=1}^{K_h} \sqrt{-\mu_{k,h}} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(x) dx, \quad (2.31)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{1,h}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(x) dx. \quad (2.32)$$

Si de plus  $V_1 \in L^2(\mathbb{R})$ , alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=1}^{K_h} (-\mu_{k,h})^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} V_1^2(x) dx, \quad (2.33)$$

La localisation des fonctions propres, qui reste un point fort pour cette approche, est présenté dans la proposition suivante. Cette propriété a été aussi étudiée dans [29].

**Proposition 2.3.6.** [62] *Pour tout potentiel  $V_1$  vérifiant :*

$$V_1 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} V(x) = +\infty. \quad (2.34)$$

*Alors, le spectre  $\sigma$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{1,h}$  est purement discret, i.e. : il existe une base orthonormale, de fonctions propres  $\psi_k$  associées aux valeurs propres simples  $\mu_k$  avec  $k = 1, \dots, K_h$ .*

*Si de plus,  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{K_h} < 0$ , alors, chaque fonction propre  $\psi_k$  associée à  $\mu_k$  a exactement  $k$  pics, i.e. ;  $\psi_k$  prend la valeur zéro  $k - 1$  fois. Et toutes les fonctions propres  $\psi_k$  décroissent rapidement et exponentiellement au voisinage de l'infinie.*

## 2.4 Résolution numérique, interprétation et applications

Dans cette section nous présentons le schéma numérique qui permet la décomposition, l'estimation, l'analyse et la représentation d'une fonction en une dimension par la SCSA. Nous testons l'efficacité de cette méthode et nous validons quelques propriétés sur les valeurs propres et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées ainsi que sur le nombre  $K_h$  des valeurs propres négatives, en utilisant un exemple très utilisé en théorie de l'analyse semi-classique. Nous verrons par la suite que cette approche a été appliquée avec succès sur plusieurs types de signaux dont nous expliquerons brièvement son utilité et efficacité. Il est nécessaire de rappeler que le terme signal aura le même sens qu'une fonction.

### 2.4.1 Discrétisation du problème

Le calcul essentiel qui intervient dans la SCSA est la résolution spectrale de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel :

$$-h^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi_{k,h}(x) - V_1(x) \psi_{k,h}(x) = \mu_{k,h} \psi_{k,h}(x), \quad k = 1, \dots, K_h. \quad (2.35)$$

Pour que ceci soit possible numériquement, nous passons par plusieurs étapes que nous résumons ci-dessous. Pour plus de détails nous vous recommandons de consulter [44, 45].

**Étape 1 :** *Discrétisation de l'opérateur de Schrödinger*

Pour cette première étape, il existe de nombreuses méthodes de discrétisation des équations différentielles et aux dérivées partielles, ces dernières peuvent appartenir à l'un des trois groupes suivants [2, 4, 26, 32, 77] :

- Méthodes des différences finies,
- Méthodes des éléments finis,
- Méthodes pseudo-spectrales.

L'idée de toutes ces méthodes consiste à approcher la solution par une série de fonctions de base en un nombre fini de points. La différence réside dans la nature des fonctions de base et le choix des points de discrétisation. Pour discrétiser notre opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel, nous utilisons la méthode pseudo-spectrale de Fourier [4, 26, 27, 32, 76, 77]. Cette méthode est généralement destinée à des problèmes périodiques, mais en pratique cette condition n'est guère une restriction vu qu'elle a été déjà utilisée pour des problèmes non périodiques. Plus que cela, cette méthode permet de réaliser un bon compromis entre précision et temps de calcul.

Pour cela, considérons l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel, associé au potentiel  $V_1$

$$\mathcal{H}_{1,h}(V_1(x)) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} - V_1(x). \quad (2.36)$$

Soient  $M$  points  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, M$  uniformément répartis sur un intervalle  $[a, b]$  tel que :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b. \quad (2.37)$$

Le pas  $\Delta x$ , qui représente l'écart entre deux points successifs  $x_j$  et  $x_{j+1}$ , est constant et est donné par :

$$\Delta x = \frac{b - a}{M - 1}. \quad (2.38)$$

Ramenons nous à présent à l'intervalle  $[0, 2\pi \frac{M-1}{M}]$  par l'homothétie

$$x \rightarrow \frac{2\pi(M-1)}{(b-a)M}(x-a), \quad (2.39)$$

soit, alors,  $\Delta = \frac{2\pi}{M}$  le nouveau pas.

En utilisant la transformée de Fourier direct et inverse discrète [53], quelques propriétés d'interpolation [26] et d'interpolation Barycentrique [32], la matrice de différenciation du second ordre, qui est donnée par le terme  $\frac{d^2}{dx^2}$  dans un cas continu, est symétrique définie négative et est notée par  $D_2$  [45] :

$$D_2 = \frac{\Delta^2}{(\Delta x)^2} D_2^\pi, \quad (2.40)$$

où  $D_2^\pi$  est réalisée en utilisant la commande `toeplitz` de MATLAB [77], et est donnée par [26] :

- Si  $M$  est pair,

$$D_2^\pi(k, j) = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3\Delta^2} - \frac{1}{6} & \text{pour } k = j, \\ -(-1)^{k-j} \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{(k-j)\Delta}{2}\right)} & \text{pour } k \neq j. \end{cases} \quad (2.41)$$

- Si  $M$  est impair,

$$D_2^\pi(k, j) = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3\Delta^2} - \frac{1}{12} & \text{pour } k = j, \\ -(-1)^{k-j} \frac{1}{2} \frac{\cot\left(\frac{(k-j)\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(k-j)\Delta}{2}\right)} & \text{pour } k \neq j. \end{cases} \quad (2.42)$$

Ainsi, la version discrétisée de l'équation de Schrödinger semi-classique (2.36) est alors donnée par :

$$H_{1,h}(I_1) = -h^2 D_2 - \text{diag}(I_1), \quad (2.43)$$

où la matrice  $\text{diag}(I_1)$  est la matrice diagonale dont les éléments sont les  $V_1(x_j) = I_1[j]$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

### Étape 2 : Valeurs propres et fonctions propres

Cette étape consiste à calculer les valeurs propres  $\mu$  et les fonctions propres  $\psi$ . La discrétisation de l'opérateur de Schrödinger (2.36) nous ramène à un problème de valeurs propres de matrice (2.43) que nous pouvons résoudre par des méthodes de calcul direct. Pour la résolution de ce problème nous avons utilisé la commande `eig` de MATLAB.

Ainsi, dans ce cas, les valeurs propres négatives sont notées  $\mu_{k,h}$  avec  $\mu_{1,h} < \dots < \mu_{K_h,h} < 0$  où  $K_h$  est le nombre des valeurs propres négatives de l'opérateur  $H_{1,h}(I_1)$  avec  $0 < K_h < M$ . Les vecteurs propres associés  $l^2$ -normalisés, par l'utilisation de la méthode de Simpson [64], sont notés par  $\underline{\Psi}_{k,h} = [\underline{\psi}_{1,h}, \dots, \underline{\psi}_{K_h,h}]^T$ , elles vérifient :

$$\Delta x \sum_{k=1}^{K_h} \underline{\psi}_{k,h}^2 = 1 \iff \|\underline{\psi}_{k,h}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K_h. \quad (2.44)$$

Ainsi, dans le cas discret la formule de la SCSA (2.3) s'écrit comme suit :

$$I_{1,h}[j] = 4h \sum_{k=1}^{K_h} \sqrt{-\mu_{k,h}} \underline{\psi}_{k,h}^2[j], \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.45)$$

### Étape 3 : Calcul d'une valeur optimale du paramètre semi-classique $h$

La proposition 2.3.3 montre que le nombre  $K_h$  des valeurs propres négatives est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{N}$  décroissante en  $h$ . De plus, plus  $h$  diminue, et plus l'erreur d'approximation par la SCSA diminue. Néanmoins la diminution de  $h$ , devient très lourde à gérer numériquement et nous nous contentons en pratique de déterminer une valeur  $\hat{h}$  de  $h$  qui permet de réaliser une bonne précision avec un minimum de valeurs propres négatives  $K_h$ . Pour déterminer  $\hat{h}$ , nous proposons de minimiser la fonctionnelle quadratique suivante qui n'est rien d'autre que l'erreur moyenne quadratique sur un intervalle  $[h_1, h_2]$  :

$$J(h) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (I_1[j] - I_{1,h}[j])^2, \quad (2.46)$$

Ainsi, la figure 2.1 résume la procédure de reconstruction d'une fonction par la SCSA.

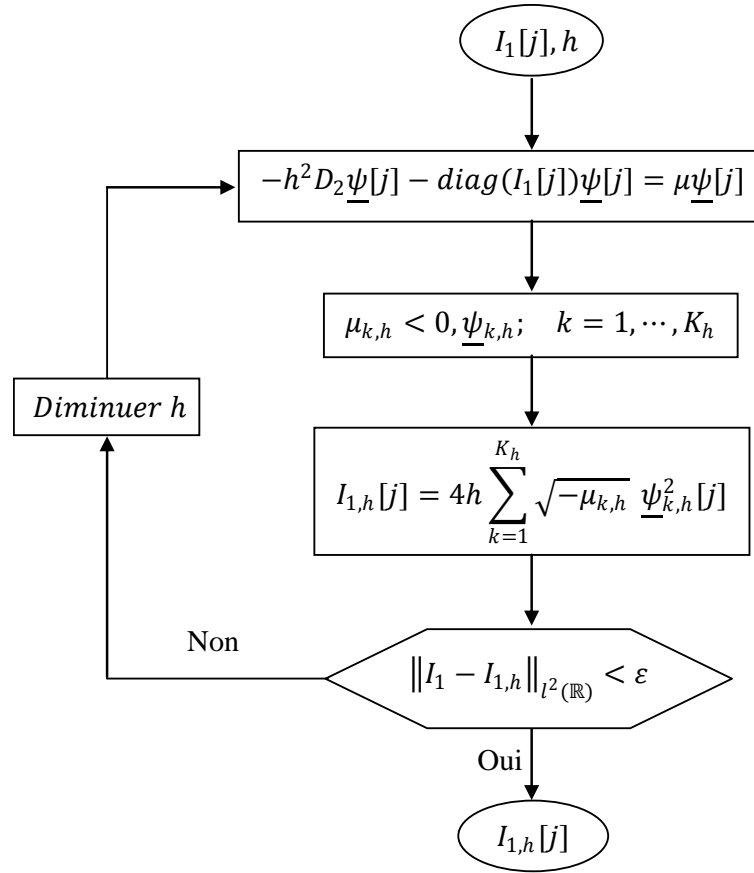


FIGURE 2.1 – Algorithme de reconstruction d’une fonction unidimensionnelle par la SCSA.

**Remarque 2.4.1.**

1. Il existe plusieurs méthodes d’optimisation. La méthode `GlobalSearch` de MATLAB s’est avéré la plus efficace, mais en pratique, nous nous contentons de choisir quelques valeurs de  $h$  puis nous calculons l’erreur moyenne quadratique (Eq. 2.46).
2. Il a été montré numériquement à travers plusieurs exemples que le nombre  $K_h$  est une fonction en escalier de  $h$  [44].
3. Il existe une relation étroite entre le pas de discrétisation  $\Delta x$  et l’ordre d’approximation  $K_h$  (i.e. ;  $h$ ). Pour que la résolution numérique soit possible, il est nécessaire d’avoir un pas suffisamment petit. C’est-à-dire plus  $h$  diminue, plus le pas doit diminuer.

Ces remarques seront illustrées dans les résultats numériques présentés plus loin.

**2.4.2 Application à des fonctions académiques**

Pour valider cette approche et étudier l’influence du paramètre semi-classique  $h$  sur la décomposition, l’estimation, l’analyse et la représentation des fonctions unidimensionnels, dans [44, 45], les auteurs ont choisi un potentiel bien connu dans la littérature [6, 49, 60], il s’agit de la sécante hyperbolique :

$$V_1(x) = \text{sech}^2(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.47)$$

Ce potentiel appartient à la classe des potentiels sans réflexion<sup>1</sup> [70]. En effet, ce type de potentiel facilite la validation de la méthode et permet de vérifier les différentes propriétés sur les valeurs propres, les fonctions propres  $L^2$ -normalisées et le nombre  $K_h$  des valeurs propres négatives vu que le potentiel s'exprime uniquement en fonction du spectre discret  $\sigma_d$ .

Toutefois, cette approche a été testée sur des fonctions périodique et une gaussienne [44] en raison de leur large utilisation dans différents domaines. Pour le premier type de fonctions, les valeurs propres négatives se répètent selon le nombre de période. Les différentes propriétés sur les valeurs propres, le nombre des valeurs propres négatives, les valeurs propres négatives et leurs fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées restent valables pour ces deux types de signaux.

Dans ce qui suit, nous présentons en détail un exemple très connu dans la littérature de la théorie d'analyse semi-classique [12, 28, 54]. Il s'agit de l'oscillateur harmonique donné par :

$$V_1(x) = -x^2 - x_0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.48)$$

Dans ce qui suit, nous montrons comment nous choisissons la valeur optimale de  $h$ . Nous validons, ensuite, les propriétés sur le nombre  $K_h$  des valeurs propres négatives. La convergence de la méthode, ainsi que quelques remarques sur les valeurs propres et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées seront aussi présentées. Dans la mesure du possible, nous essayons de respecter la chronologie des résultats présentés dans les sections précédentes.

Pour la résolution numérique, nous considérons  $V_1$  sur  $M$  points équidistants d'un intervalle  $[x_1, x_2]$ . Choisissons un intervalle suffisamment large, prenons par exemple :  $x_1 = -6$ ,  $x_2 = 6$  avec  $\Delta x = 0.01$  et  $x_0 = 36$ , ainsi, dans un cas discret l'oscillateur harmonique est donné par :

$$I_1[j] = j^2 - 36, \quad j = 1, \dots, M, \quad \text{où } M = 1200. \quad (2.49)$$

Nous utiliserons la commande `GlobalSearch` ainsi que la fonction `fmincon` de MATLAB pour trouver la valeur optimale de  $h$  sur l'intervalle  $[h_1, h_2] = [0.015, 0.4]$  avec  $h_0 = 0.015$  comme valeur initiale. Ainsi, la valeur optimale est  $h = 0.0192$  qui correspond à 936 valeurs propres négatives. Mais comme il a été décrit précédemment, nous nous contentons de chercher une valeur  $\hat{h}$  de  $h$  qui permet de réaliser une bonne précision avec un minimum de valeurs propres négatives, pour cela, nous ajoutons une condition additionnelle sur la fonctionnelle de l'erreur moyenne quadratique (formule (2.46)). La nouvelle valeur optimale de  $h$  est 0.2764 et qui correspond à 65 valeurs propres négatives.

La figure 2.2(a) illustre les variations de l'erreur moyenne quadratique  $J(h)$  en fonction de  $h$ , tandis que la figure 2.2(b) montre la décroissance des valeurs propres négatives en fonction de  $h$ , comme indiqué dans la proposition 2.3.3. Nous remarquons aussi, que  $K_h$  est une fonction en escalier comme illustré précédemment.

---

1. un potentiel est dit sans réflexion si  $\mathcal{R}_{r,(l)}(s) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}$ .

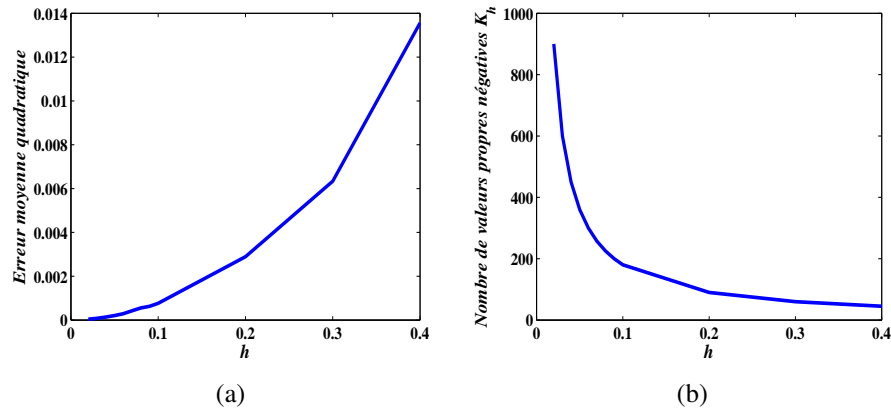


FIGURE 2.2 – Variation de l’erreur moyenne quadratique (Fig. (a)) et du nombre des valeurs propres négatives  $K_h$  (Fig. (b)) en fonction de  $h$  pour  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $[-6, 6]$ .

La figure 2.3 représente les variations de quelques valeurs propres rangées par ordre croissant, de la matrice  $-h^2 D_2 - \text{diag}(I_1)$  en fonction de  $h$ . Nous constatons que ces valeurs propres, initialement positives, sont des fonctions décroissantes en  $h$  et qu’à chaque passage de  $K_h$  à  $K_h + 1$ , une valeur propre positive devient négative, à partir d’un certain rang de  $h$ , ce qui explique que pour un  $h$  très petit nous obtiendrons un  $K_h$  très grand.

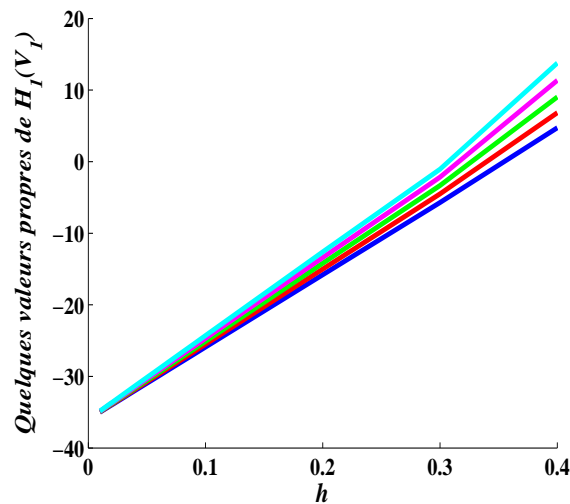


FIGURE 2.3 – Variation de quelques valeurs propres en fonction de  $h$  pour  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $[-6, 6]$ .

La figure 2.4 montre une reconstruction satisfaisante du signal  $V_1$ , nous avons remarqué qu’à partir de  $h = 0.2764$  i. e. ;  $K_h = 65$  la reconstruction de l’oscillateur harmonique est satisfaisante.

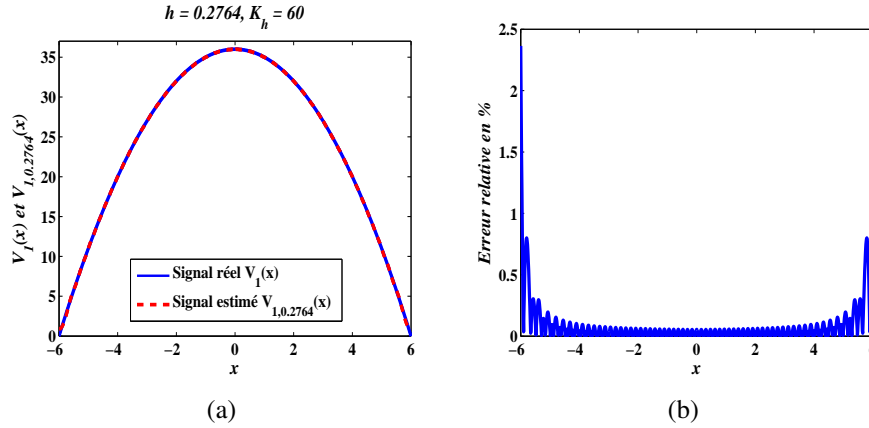


FIGURE 2.4 – (a). Reconstruction de  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $[-6, 6]$ , (b). Erreur relative correspondante pour  $h = 0.2764$  ( $K_h = 65$ ).

La proposition 2.3.4, montre que sous les conditions (2.2), toutes les valeurs propres négatives  $\mu_{k,h}$ ,  $k = 1, \dots, K_h$  de l'opérateur de Schrödinger (Eq. (2.1)) associées à un potentiel  $V_1$  sont toutes comprises entre  $-\max V_1$  et 0, c'est ce que nous montrons, dans la figure 2.5, pour l'oscillateur harmonique  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $[-6, 6]$ .

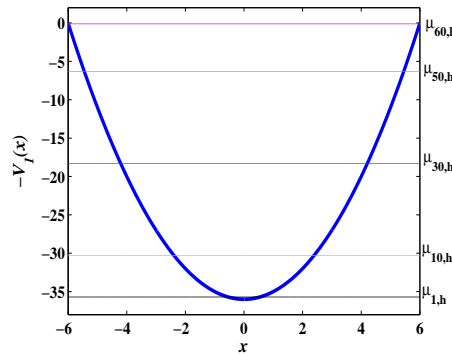


FIGURE 2.5 – Les valeurs propres négatives  $\mu_{k,h}$ ,  $k = 1, \dots, K_h$  de  $-h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_1(x)$ ,  $x \in [-6, 6]$  sont toutes comprises entre  $-\max V_1$  et 0.

La figure 2.6 représente l'allure des carrés de quelques fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_{k,h}^2$  dans le cas où  $h = 0.2764$ . Nous remarquons que la première fonction propre  $\psi_{1,h}^2$  localise le plus grand pic du potentiel  $V_1$ . La deuxième fonction propre  $\psi_{2,h}^2$  représente les deux pics qui suivent  $\psi_{1,h}^2$ . La dernière fonction propre  $L^2$ -normalisée  $\psi_{65,h}^2$  présente plusieurs oscillations, ces derniers caractérisant les petits détails du potentiel  $V_1$ . Nous remarquons aussi que l'amplitude du carré des fonctions propres diminue.

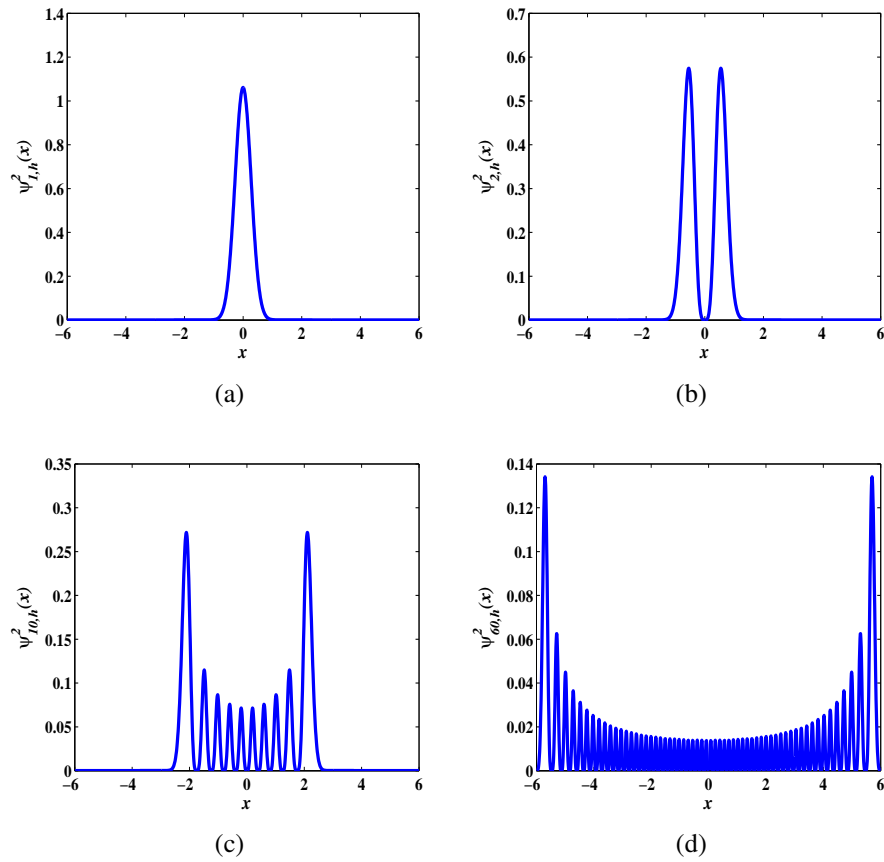


FIGURE 2.6 – Allure de la première, deuxième, dixième et dernière fonction propre  $L^2$ -normalisée  $\psi_{k,h}^2$  dans le cas où  $h = 0.2764$  pour  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $[-6, 6]$ .

Par ailleurs, la figure 2.7 illustre une bonne estimation des valeurs propres négatives pour  $h = 0.2764$ . Dans ce cas, nous avons 65 valeurs propres égales à  $(2i - 1)h - 36$ ,  $i = 1, \dots, 65$  respectivement.

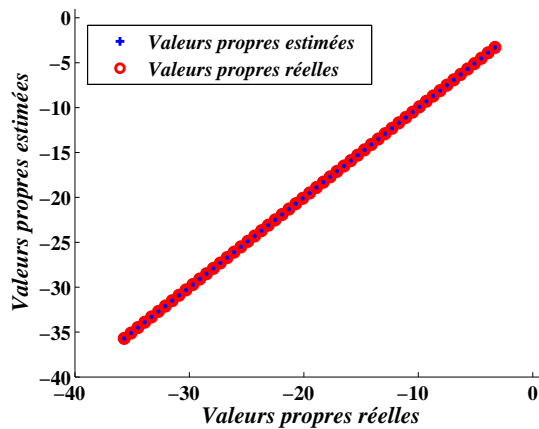


FIGURE 2.7 – Valeurs propres réelles et estimées dans le cas où  $h = 0.2764$  pour  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $[-6, 6]$ .

La figure 2.8 illustre la relation entre le pas de discrétisation  $\Delta x$  et le paramètre semi-classique  $h$ , on remarque bien que plus le paramètre  $h$  diminue, plus  $\Delta x$  doit diminuer.

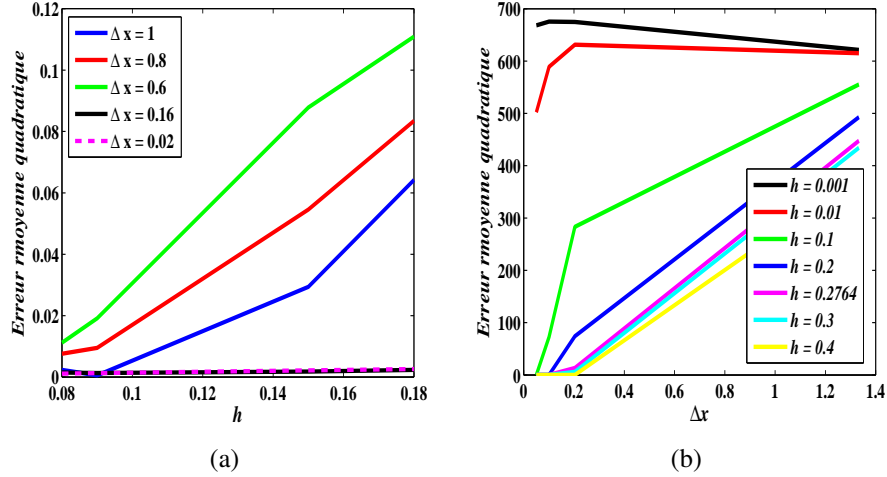


FIGURE 2.8 – Relation entre le pas de discrétisation  $\Delta x$  et le paramètre semi-classique  $h$  pour  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $[-6, 6]$ .

### 2.4.3 Application à l'estimation des signaux réels

La formule de la SCSA a été testée sur deux types de signaux réels ; les résultats obtenus sont prometteurs. Dans ce qui suit nous donnons une idée générale sur l'application de cette approche sur ces deux types de signaux.

#### Signaux de pression artérielle

Dans [30, 44, 45, 46, 47], les auteurs ont montré que la SCSA permet, non seulement, de reconstruire avec peu de composantes (de 5 à 9 composantes), un signal de pression artérielle, mais aussi d'introduire de nouveaux paramètres permettant de bien analyser le signal. En effet, la SCSA permet de faire un filtrage séparant la pression systolique et diastolique (Pour rappel la pression systolique est la valeur maximale de la pression ; elle résulte de l'activité du coeur pendant la phase d'éjection sanguine, tandis que la pression diastolique représente la pression minimale, elle correspond à la phase de relaxation du coeur [16, 72]). Aussi, les valeurs propres négatives reflètent bien les variations sur la forme du signal. De plus, en se référant à la proposition 2.3.5, deux nouvelles quantités spectrales sont définies. Ces dernières permettront de donner plus d'informations physiologiques importantes sur le signal. Il s'agit des invariants :

$$INV_1 = 4h \sum_{k=1}^{K_h} \sqrt{-\mu_{k,h}}, \quad INV_2 = \frac{16h}{3} \sum_{k=1}^{K_h} (-\mu_{k,h})^{\frac{3}{2}}. \quad (2.50)$$

La première quantité, qui représente la somme de la racine des valeurs propres négatives, est une grandeur standard en clinique tandis que la deuxième, qui représente l'intégrale du carré de la pression, n'est pas une grandeur connue en clinique mais calculable par des méthodes directes. Pour plus de détails voir [44, 45].

## Signaux turbomachine

Pour ce type de signaux, les paramètres spectraux dits aussi les invariants (2.50) permettront de dévoiler beaucoup d'informations pertinentes qui sont cachées dans les signaux à analyser tels que le flux, la vitesse et la pression. De nouveaux indices ont été introduits en combinant les invariants (2.50) pour décrire l'instabilité des signaux turbomachine [17, 41]. Il est intéressant de mentionner également que les paramètres de la SCSA sont très sensibles à des amplitudes très faibles et limités ou à des perturbations. Plus que cela, ces paramètres permettent de bien analyser un signal non stationnaire contrairement aux autres méthodes standards (approches basées sur l'analyse de Fourier [53]) qui ne sont pas appropriées pour de tels signaux. Pour plus de détails, nous vous invitons à consulter [17, 41].

### 2.4.4 Applications à des signaux bruités

#### Principe

Dans cette section, nous allons donner quelques notions et remarques dans le cas où le potentiel  $V_1$  subirait une perturbation  $\omega$ .  $V_1^\omega$  est le potentiel perturbé. Il s'écrit sous la forme :

$$V_1^\omega(x) = V_1(x) + \omega(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.51)$$

où,  $\omega$  représente le bruit et  $V_1$  est le potentiel original non bruité.

Dans un cas discret, notons par  $I_1^\omega[j]$  et  $\varpi[j]$  les valeurs de  $V_1^\omega$  et  $\omega$ , respectivement, aux points  $x_j$ , pour  $j = 1, \dots, M$  et  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ .

Afin d'appliquer l'approche par SCSA, dans un cas discret bruité, nous aurons besoin de résoudre le problème aux valeurs propres matriciel suivant :

$$\left(-h^2 D_2 - \text{diag}(I_1^\omega)\right) \underline{\psi}_{k',h}^\omega = \mu_{k',h}^\omega \underline{\psi}_{k',h}^\omega, \quad (2.52)$$

où,  $\mu_{k',h}^\omega$  et  $\underline{\psi}_{k',h}^\omega$  représentant respectivement les valeurs propres négatives et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées avec  $k' = 1, \dots, K_h^\omega$  et  $K_h^\omega$  le nombre de valeurs propres négatives.

Ainsi, dans le cas discret, le débruitage du potentiel  $V_1^\omega$  par la SCSA est donné par :

$$I_1^\omega[j] = 4h \sum_{k'=1}^{K_h^\omega} \sqrt{-\mu_{k',h}^\omega} \underline{\psi}_{k',h}^{\omega 2}[j], \quad (2.53)$$

pour  $j = 1, \dots, M$ .

Dans un cas bruité, le choix de  $h$  se fait de telle façon qu'on puisse garder l'information utile du signal tout en réduisant le niveau du bruit. Ceci est réalisable grâce aux fonctions propres  $L^2$ -normalisées. Ces derniers contiennent l'information utile du signal et possèdent la propriété de la localisation. En effet, et comme illustré précédemment la première fonction propre localise bien le plus grand pic, la seconde les deux pics qui suivent le plus grand pic tandis que les dernière fonctions propres possèdent plusieurs oscillations qui représentent les petits détails du signal. Ainsi, pour avoir un bon débruitage du signal, l'idée est de garder les premières fonctions propres qui sont plus importantes et ôter celles qui représentent le bruit. Cela implique que le paramètre  $h$

doit être choisi d'une manière efficace pour réaliser cette tâche avec un nombre plus petit  $K_h^\omega$  de valeurs propres négatives. Une façon de trouver une valeur appropriée pour  $h$  est de minimiser une fonction coût appropriée, en utilisant la commande `Globalsearch` de MATLAB constituée de la norme de l'erreur d'estimation et un terme qui dépend du débruitage du signal donné par la norme du signal débruité comme suit :

$$J^\omega(h) = \|I_1 - I_1^\omega\|_2^2 + \lambda \|I_1^\omega\|_2^2. \quad (2.54)$$

La proposition suivante, montre une approximation entre les valeurs propres négatives du potentiel original  $\mu_{k,h}$  et bruité  $\mu_{k',h}^\omega$ .

**Proposition 2.4.1.** [51] *Supposons que les deux matrices  $-h^2 D_2 - \text{diag}(I_1)$  et  $-h^2 D_2 - \text{diag}(I_1^\omega)$  définies dans (2.43) et (2.52) satisfaisant les conditions suivantes :*

**(C1) :**  $D_2$  est une matrice symétrique

**(C2) :**  $D_2$  est une matrice définie négative

**(C3) :** le nombre de zéro dans la diagonale de la matrice  $\text{diag}(I_1)$  est égal à  $m$  avec  $0 \leq m \leq M - 1$ .

**(C4) :** le nombre des éléments positifs dans la diagonal de la matrice  $\text{diag}(I_1^\omega)$  est égal à  $m'$  avec  $0 \leq m' \leq M - 1$ .

**(C5) :** pour la même valeur de  $h$ , le nombre de valeurs propres négatives  $K_h$  et  $K_h^\omega$  sont égaux.

**(C6) :**  $\mu_{k',h} > 2\mu_{k',h}^\omega$ , pour  $k' = 1, \dots, K_h^\omega$ .

Alors, nous avons :

$$|\mu_{k',h} - \mu_{k',h}^\omega| \stackrel{p}{<} \frac{B_{\mu,\sigma}^\gamma}{\sqrt{-2\mu_{k',h}}}, \quad (2.55)$$

où,  $B_{\mu,\sigma}^\gamma = \max(|\mu - \gamma\sigma|, |\mu + \gamma\sigma|)$  avec  $\mu$  et  $\sigma^2$  désignent la valeur probable et la variance du bruit  $\omega$  respectivement.  $c \stackrel{p}{<} d$  signifie que la probabilité pour que  $c$  soit inférieur à  $d$  est  $p$ , avec  $p = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$  et  $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ .

Une estimation de l'erreur entre le signal débruité et le signal original reconstruit est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 2.4.2.** [51] *Sous les conditions (C1) - (C6), la contribution d'erreur de bruit dans  $I_{1,h}^\omega$  peut être exprimée par :*

$$\|I_{1,h}^\omega - I_{1,h}\|_2 \stackrel{p}{<} \frac{4h}{\sqrt{\Delta x}} \sum_{k'=1}^{K_h^\omega} \left( 2\sqrt{-\mu_{k',h}} + \frac{B_{\mu,\sigma}^\gamma}{\sqrt{-2\mu_{k',h}^\omega}} \right). \quad (2.56)$$

### Exemples académiques

Comme dans le cas non bruité, pour tester et valider cette approche pour des signaux bruités, la sécante hyperbolique définie par (2.47) bruité avec un bruit gaussien blanc de moyenne nulle  $\omega(x)$  a été utilisé où l'efficacité et la stabilité de l'approche ont été montrées [51].

Dans ce qui suit, nous allons montrer comment choisir une valeur appropriée du paramètre semi-classique  $h$  dans un cas discret bruité. Pour cela, nous supposons que  $I_1$  est l'observation discrète bruitée de  $V_1$  définie par (2.51), où :

$$I_1[j] = [j]^2 - 36, \quad j = 1, \dots, M \quad (2.57)$$

avec  $-6 < x_1 < \dots < x_M < 6$  et  $\Delta x = 0.005$ . Par ailleurs, nous supposons que le bruit  $\omega[i]$  est un bruit gaussien blanc de moyenne nulle et de variance  $\delta$ , nous utiliserons la commande `randn` de MATLAB. La valeur de la variance est choisie de telle façon que le rapport signal sur bruit

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^M I_1[j]^2}{\sum_{j=1}^M \left( I_1[j] - I_1^\varpi[j] \right)^2} \quad (2.58)$$

soit égal à 22.35 dB.

En utilisant la commande `GlobalSearch` et la fonction `fmincon` de MATLAB, sur l'intervalle  $[0.2, 1]$  pour  $h_0 = 0.2$  comme valeur initiale, la valeur optimale de  $h$  est 0.9564 qui correspond à 21 valeurs propres négatives. Les figures 2.9(a) et 2.9(b) montrent les variations de l'erreur moyenne quadratique  $J(h)$  entre le signal original  $I_1$  et le débruité  $I_{1,h}^\varpi$ , ainsi que la décroissance du nombre des valeurs propres négatives  $K_h^\varpi$  en fonction de  $h$  comme indiqué dans la proposition 2.3.3, respectivement.

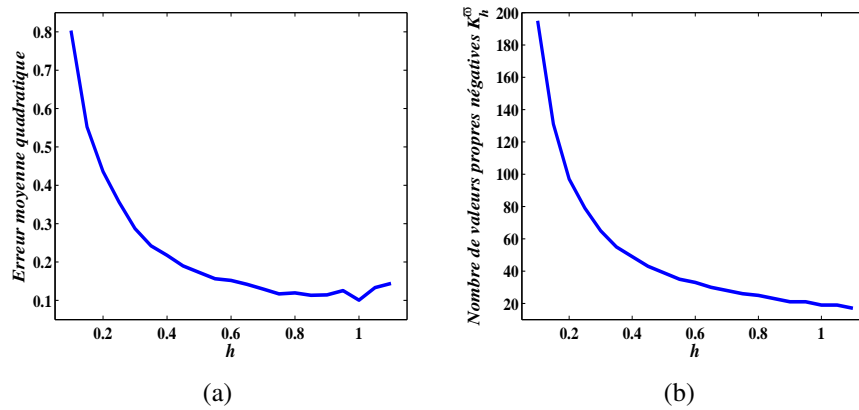


FIGURE 2.9 – Variation de l'erreur moyenne quadratique (Fig. (a)) et du nombre de valeurs propres négatives  $K_h^\varpi$  en fonction de  $h$  (Fig. (b)) pour  $I_1^\varpi[j] = j^2 - 36 + \varpi[j]$  pour  $j = 1, \dots, M$ .

Comme dans le cas non bruité, nous représentons, dans la figure 2.10, les variations de quelques valeurs propres rangées par ordre croissant, de la matrice  $-h^2 D_2 - \text{diag}(I_1^\varpi)$  en fonction de  $h$ . Plus  $h$  diminue, plus les valeurs propres positives deviennent négatives.

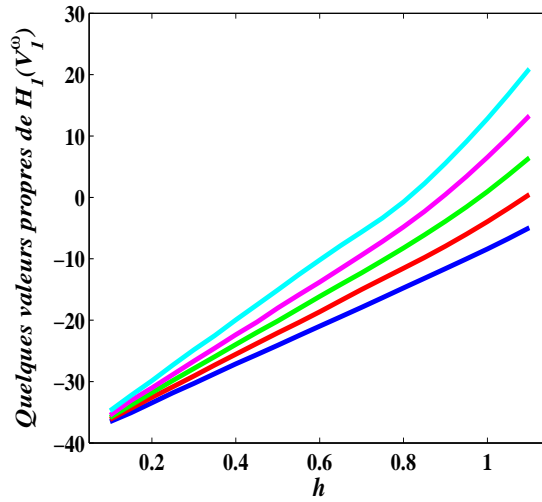


FIGURE 2.10 – Variation de quelques valeurs propres en fonction de  $h$  pour  $V_1^\omega(x) = x^2 - 36 + \omega(x)$  sur  $[-6, 6]$ .

La figure 2.11(a) montre un débruitage satisfaisant du signal  $I_1^\omega$ . On rappelle que le nombre de valeurs propres négatives nécessaires pour reconstruire le signal non bruité était de 65, par contre, nous avons constaté que seulement 21 valeurs propres négatives suffiraient pour avoir un bon débruitage du signal, ceci revient du fait que les dernières fonctions propres contiennent plus d’informations sur le bruit que sur le signal.

La figure 2.11(b) illustre les variations de l’erreur relative entre le potentiel original  $I_1$  et le potentiel débruité  $I_{1,h}^\omega$ .

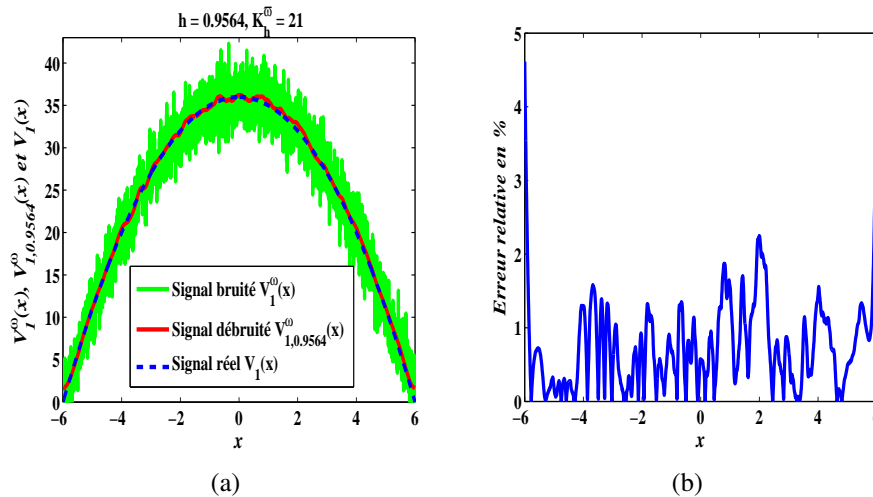


FIGURE 2.11 – (a). Débruitage de  $I_1^\omega[j] = j^2 - 36 + \omega[j]$  pour  $j = 1 \cdots M$ ; (b). Erreur relative correspondante pour  $h = 0.9564$ .

La figure 2.12 représente l’allure des carrés de quelques fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_{k',h}^\omega$  dans le cas où  $h = 0.9564$ . Comme dans le cas non bruité, la première fonction propre localise

le plus grand pic du potentiel  $I_1$  et la dernière fonction propre  $L^2$ -normalisée  $(\psi_{21,h}^\varpi)^2$  présente plusieurs oscillations. Nous avons utilisé seulement 21 valeurs propres négatives pour ne pas reconstruire les petits détails du signal qui caractérisent essentiellement le bruit.

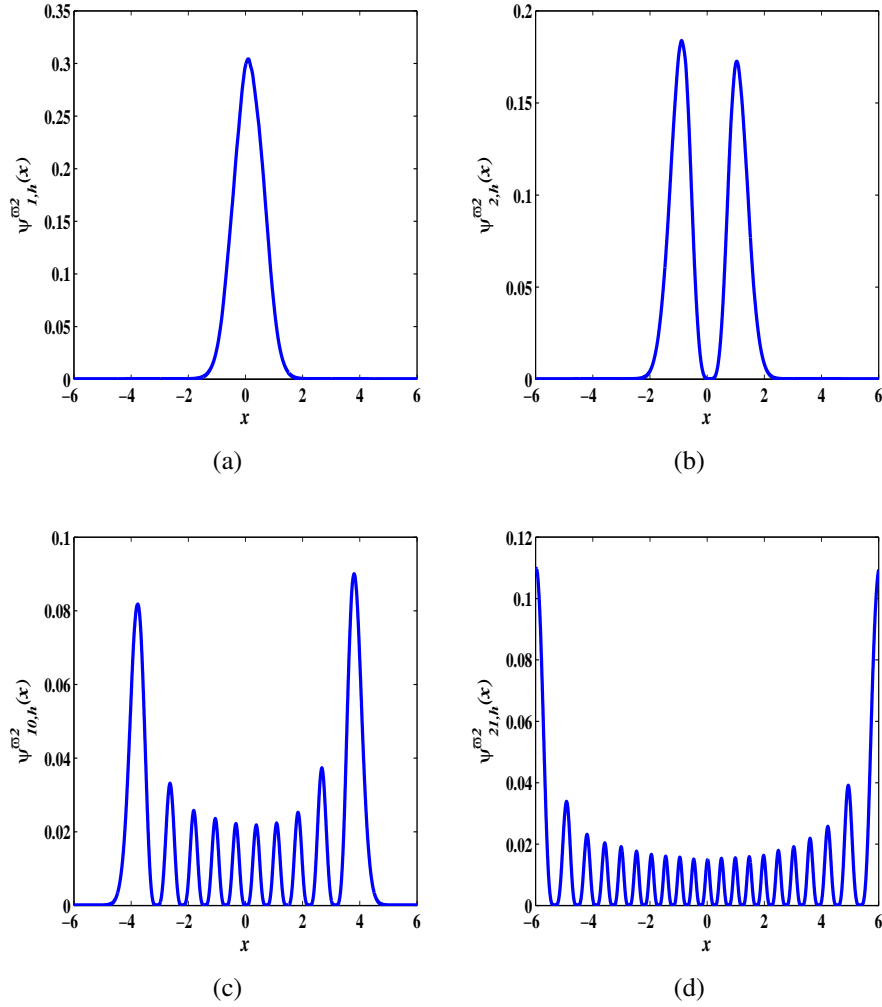


FIGURE 2.12 – Allure du carré de la première, deuxième, dixième et la dernière fonction propre  $L^2$ -normalisée dans le cas où  $h = 0.9564$  pour  $I_1^\varpi[j] = j^2 - 36 + \varpi[j]$  pour  $j = 1, \dots, M$ .

Par ailleurs, la figure 2.13 illustre une estimation des valeurs propres négatives pour  $h = 0.9564$ . Dans ce cas, nous avons 21 valeurs propres égales à  $(2i - 1)h - 36$ ,  $i = 1, \dots, 21$  respectivement. Nous remarquons qu’il y a un tard-off entre les valeurs propres négatives  $\mu_{k',h}$  du signal original  $I_1$  et les valeurs propres négatives  $\mu_{k',h}^\varpi$  du signal bruité  $I_1^\varpi$  comme le montre la proposition 2.4.1.

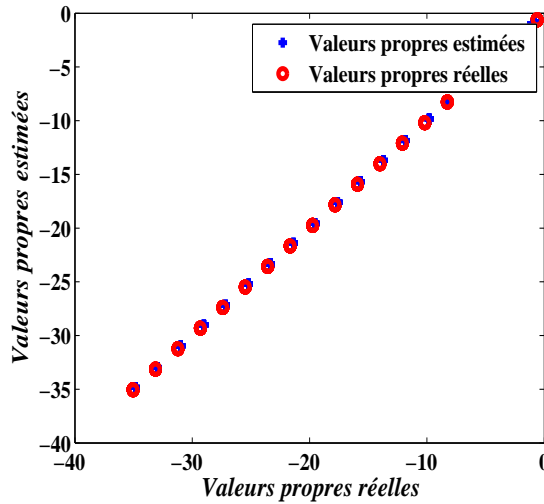


FIGURE 2.13 – Valeurs propres réelles et estimées dans le cas où  $h = 0.9564$  pour  $I_1^\varpi[j] = j^2 - 36 + \varpi[j]$  pour  $j = 1, \dots, M$ .

La figure ci-dessous (Fig. 2.14) montre une comparaison entre la représentation du signal original  $I_1$  et le signal débruité  $I_{1,h}^\varpi$  pour  $h = 0.2764$  et l'erreur relative correspondante pour chaque cas. Pour  $h = 0.2764$ , le signal débruité admet 71 valeurs propres négatives.

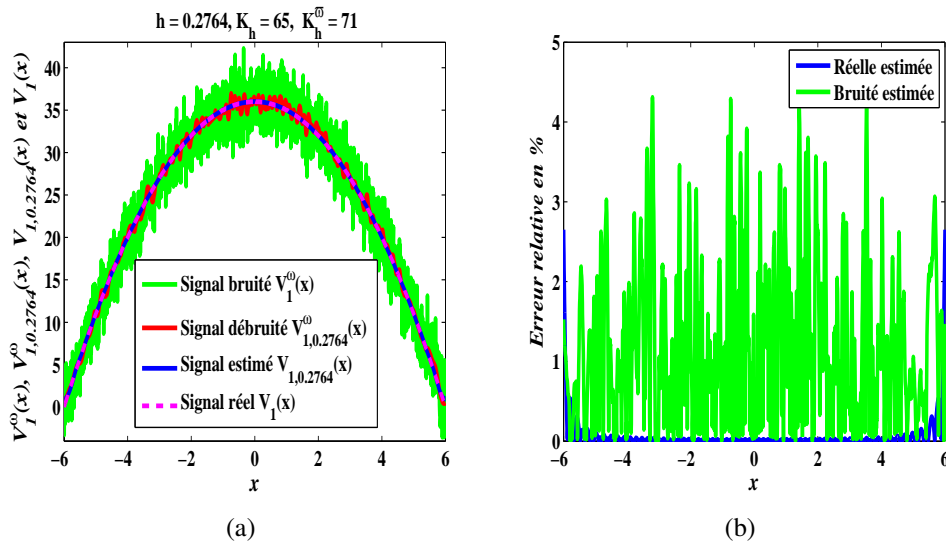


FIGURE 2.14 – Représentation du signal original  $I_1[j] = j^2 - 36$  et du signal débruité  $I_1^\varpi[j] = j^2 - 36 + \varpi[j]$  pour  $j = 1, \dots, M$  dans le cas où  $h = 0.2764$ .

Le carré de quelques fonctions propres  $L^2$ -normalisées dans les deux cas bruité et débruité est présenté dans la figure 2.15. Il est clair que le carré des fonctions propres  $L^2$ -normalisées du potentiel débruité garde presque la même allure que celui du potentiel non bruité mais par contre leur amplitude change à cause du bruit.

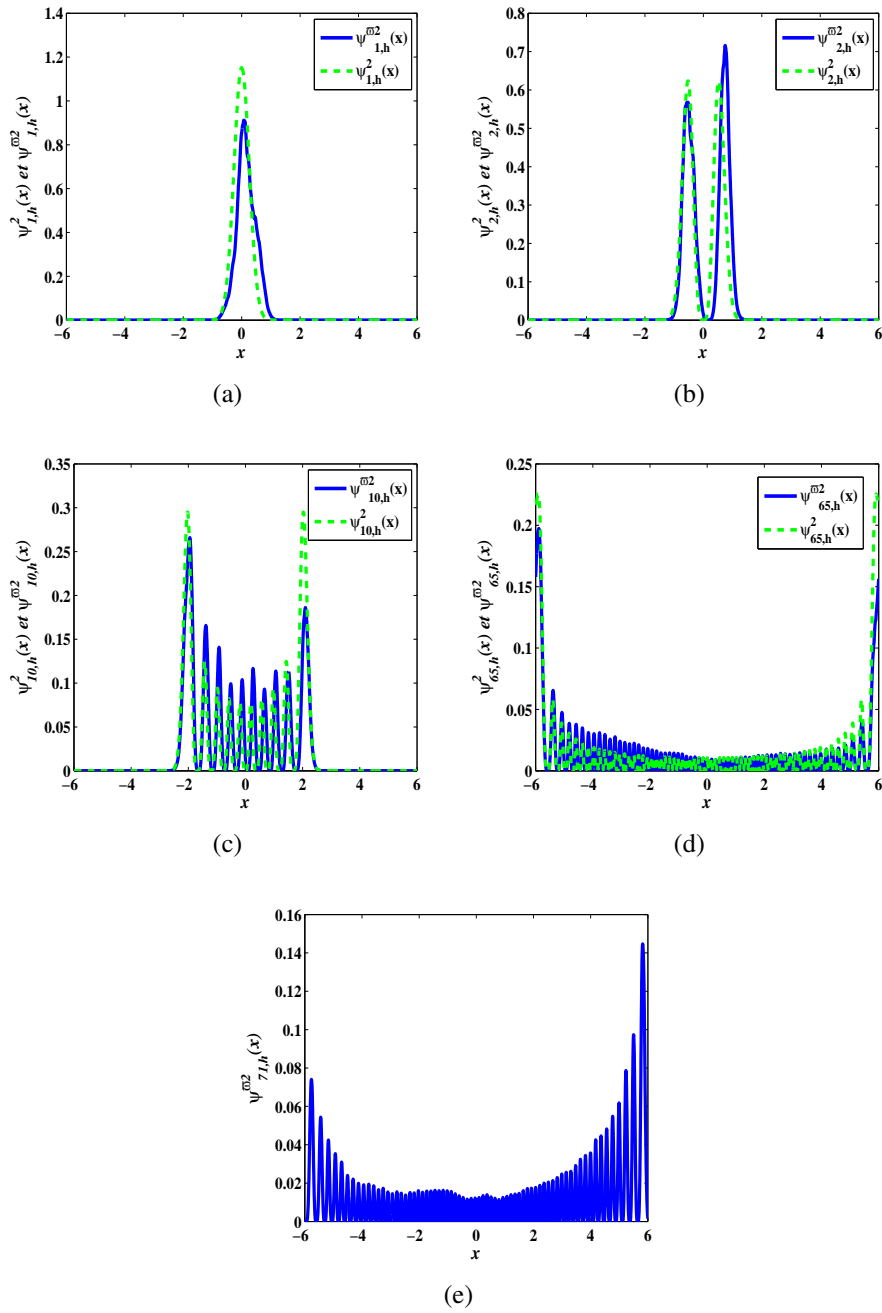


FIGURE 2.15 – Allure du carré de quelques fonctions propres  $L^2$ -normalisées dans le cas où  $h = 0.2765$  pour  $V_{1,h}(x)$  et  $V_{1,h}^\omega(x)$  avec  $x \in [-6, 6]$ .

En dernier, la figure 2.16 montre un filtrage de l'oscillateur harmonique donné par la formule (2.57) bruité avec différents niveaux de bruits gaussien blancs de moyenne nulle. Il est clair que la SCSA permet un bon filtrage du signal même si la fréquence du bruit est élevée.

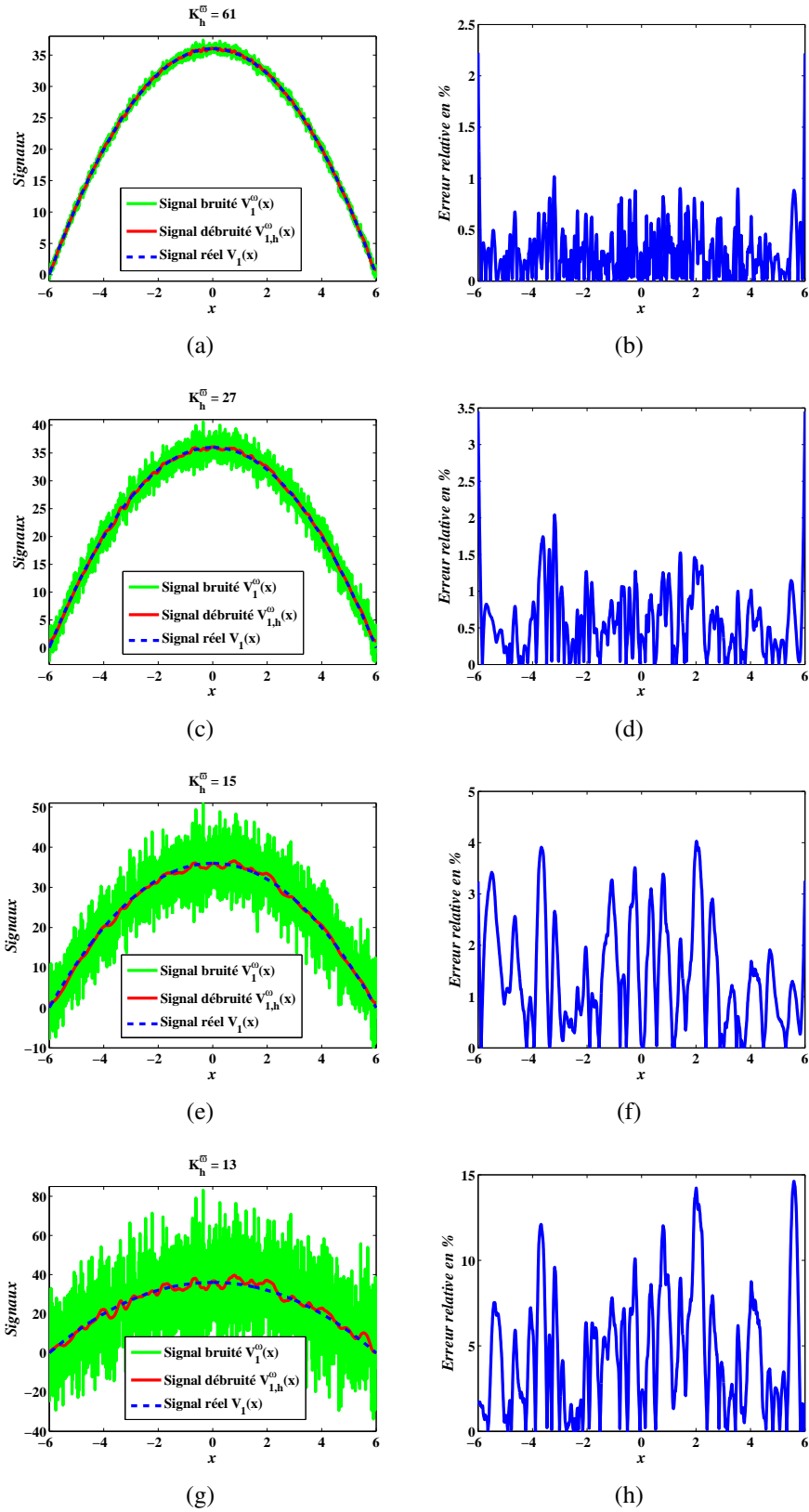


FIGURE 2.16 – Débruitage de  $V_1^\omega(x) = x^2 - 36 + \omega(x)$  avec  $x \in [-6, 6]$  pour différentes valeurs du SNR ; (a). SNR = 35 dB, PSNR = 51.08 dB ; (c). SNR = 25 dB, PSNR = 45.30 dB ; (e). SNR = 15, PSNR = 37.80 dB ; (g). SNR = 5 dB, PSNR = 27.52 dB ; (b). ; (d). ; (f). et (h). Erreur relative correspondante, respectivement.

## 2.5 SCSA et théorie d'analyse semi-classique : une reformulation

Comme décrit précédemment l'intuition derrière cette nouvelle méthode était principalement proposée pour pallier les difficultés que posent les formule de Deift et Trubowitz. Mais quand est-il du côté de la théorie d'analyse semi-classique ?

En continuité des résultats obtenus dans [44, 45], les auteurs ont montré, dans [30], qu'en s'inspirant des propriétés de l'analyse semi-classique d'une part et des résultats numériques obtenus d'une autre part, la formule de la SCSA peut être redéfinie d'une nouvelle manière et pour une classe plus large des potentiels, comme suit :

### 2.5.1 Une reformulation de l'approche SCSA

Soit l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  défini sur  $L^2(\mathbb{R})$  par :

$$\mathcal{H}_{1,h}(V_1) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} - V_1, \quad \mathcal{D}(\mathcal{H}_{1,h}(V_1)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}) \quad (2.59)$$

tel que :

$$V_1(x) \geq 0, \quad V_1 \in C^\infty(\Omega_1) \quad (2.60)$$

où  $\Omega_1 = ]a, b[$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}$ . Ainsi, en s'inspirant des résultats de la théorie de l'analyse semi-classique [31, 39], la nouvelle définition de la SCSA est donnée par :

**Définition 2.5.1.** [30] Soient  $V_1 \in C^\infty(\Omega_1)$  une fonction réelle à valeurs positives et  $h$  le paramètre semi-classique. Alors pour tout  $x \in \Lambda_1$ , nous avons :

$$V_{1,h,\gamma,\lambda}(x) = -\lambda + \left( \frac{h}{L_{1,\gamma}^{cl}} \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(x) \right)^{\frac{2}{1+2\gamma}}, \quad (2.61)$$

où  $\Lambda_1 \subset \Omega_1$  est un compact,  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$  et  $L_{1,\gamma}^{cl}$  est la constante universelle semi-classique donnée par :

$$L_{1,\gamma}^{cl} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + \frac{3}{2})}, \quad (2.62)$$

avec  $\Gamma$  est la fonction Gamma.

Par ailleurs,  $\mu_{k,h}$  sont les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  avec  $\mu_{1,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} < \lambda$  et  $\psi_{k,h}$  sont les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{1,h}(V_1)\psi_{k,h} = \mu_{k,h}\psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (2.63)$$

**Remarque 2.5.1.** Les mêmes propriétés du spectre discret en fonction du paramètre semi-classique  $h$  présenté dans la section 2.3.2 resteront valables pour cette nouvelle formule de la SCSA.

## 2.5.2 Étude de la convergence de la SCSA

L'efficacité de cette formule et l'influence des paramètres  $\lambda$ ,  $h$  et  $\gamma$  ont été étudiées dans [30]. En effet, le paramètre  $\lambda$  permet de spécifier le domaine de l'estimation, la décomposition et de l'analyse de la fonction, cependant, comme il a été décrit précédemment, seul le paramètre semi-classique  $h$  joue un rôle important dans cette méthode, plus  $h$  diminue, plus le nombre des valeurs propres négatives  $K_h^\lambda$  augmente et plus l'estimation du signal est meilleure. Toutefois, le paramètre  $\gamma$  peut améliorer l'approximation du signal pour un nombre de valeurs propres négatives  $K_h^\lambda$  données. Ainsi, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2.5.1.** [30] *Soient  $V_1 \in C^\infty(\Omega_1)$  une fonction réelle à valeurs positives considérée comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{1,h}$  et  $h$  le paramètre semi-classique.*

*Alors pour tout couple  $(\Lambda_1, \lambda)$ , tel que  $\Lambda_1 \subset \Omega_1$  est un compact, et*

$$\begin{cases} \lambda < \inf(-V_1(a), -V_1(b)), \\ V_1(\Lambda_1) \subset ]-\lambda, +\infty[, \\ \lambda \text{ n'est pas une valeur critique de } -V_1, \end{cases} \quad (2.64)$$

*et pour tout  $x \in \Lambda_1$ , nous avons :*

$$V_1(x) = -\lambda + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{L_{1,\gamma}^{cl}} \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(x) \right)^{\frac{2}{1+2\gamma}}, \quad (2.65)$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  et  $L_{1,\gamma}^{cl}$  est la constante universelle semi-classique donnée par la formule (2.62).

Par ailleurs,  $\mu_{k,h}$  sont les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$  avec  $\mu_{1,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} < \lambda$  et  $\psi_{k,h}$  sont les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{1,h}(V_1) \psi_{k,h} = \mu_{k,h} \psi_{k,h}, \quad h = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (2.66)$$

La démonstration de ce théorème se base essentiellement sur le théorème de la moyenne de Riesz établie par Helffer et Robert [31] et une extension appropriée du théorème de Karadzhov sur la fonction spectrale [39]. Le théorème correspondant à cette extension est donnée par :

**Théorème 2.5.2.** [30] *Soit  $V_1$  une fonction  $C^\infty$  à valeur réelle considérer comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{1,h}$  et soit  $e_h^\gamma$  la fonction spectrale définie par :  $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$e_h^\gamma(\lambda, x, x') = \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^\gamma \psi_{k,h}(x) \psi_{k,h}(x'), \quad (2.67)$$

où  $h \rightarrow 0$ .  $\mu_{k,h}$  et  $\psi_{k,h}$  sont les valeurs propres négatives rangée dans l'ordre décroissant et plus petites que  $\lambda$ , et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées de l'opérateur  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$ .

Pour chaque couple  $(\Lambda_1, \lambda)$  satisfaisant les conditions (2.64), nous avons :  $\forall x \in \Lambda_1$ ,

$$e_h^\gamma(\lambda, x, x) = (2\pi)^{-1} \left( \lambda + V_1(x) \right)_+^{\frac{1+2\gamma}{2}} c_\gamma h^{-1} + \mathcal{O}(h^\gamma), \quad h \rightarrow 0, \quad (2.68)$$

uniformément dans  $\Omega_1$ , où

$$c_\gamma = \int_{\mathbb{R}} (1 - \eta^2)_+^\gamma d\eta,$$

et  $(\cdot)_+$  désigne la partie positive et est donnée par :

$$(\alpha)_+^\gamma = \begin{cases} \alpha^\gamma & \text{si } \alpha \geq 0, \\ 0 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases} \quad (2.69)$$

Le théorème de la moyenne de Riesz est donné par :

**Théorème 2.5.3.** [31] Soit  $V_1$  est une fonction à valeur réelle considérer comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{1,h}$  appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R})$ , avec

$$V_1(x) > 0 \text{ et } -\infty < \inf -V_1 < \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} -V_1. \quad (2.70)$$

Soient  $\lambda \in ]\inf -V_1, \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} -V_1[$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$  est le paramètre semi-classique. Supposons que  $\lambda$  n'est pas une valeur critique pour  $-V_1$ . On note par :

$$S_\gamma(h, \lambda) = \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma, \quad \gamma \geq 0, \quad (2.71)$$

la moyenne de Riesz des valeurs propres négatives décroissantes  $\mu_{k,h}$  inférieure à  $\lambda$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$ . Pour  $\gamma > 0$ , nous avons :

$$S_\gamma(h, \lambda) = \frac{1}{h} \left( L_{1,\gamma}^{cl} \int_{\mathbb{R}} \left( \lambda + V_1(x) \right)_+^{\frac{1+2\gamma}{2}} dx + \mathcal{O}(h^{1+\gamma}) \right), \quad h \rightarrow 0, \quad (2.72)$$

où  $L_{1,\gamma}^{cl}$  et  $(\cdot)_+$  représentent, respectivement, la constante universelle semi-classique et la partie positive. Elles sont donnée par les formules (2.62) et (2.69).

### 2.5.3 Illustration et exemples

La formule (2.61) est généralement utilisée lorsque nous désirions décomposer, analyser, estimer et représenter seulement une partie du signal. Cette précision sur le signal se fait en donnant une valeur souhaitée à  $\lambda$ . La figure ci-dessous (Fig. 2.17) illustre la représentation d'une fonction monodimensionnel par la SCSA (formule (2.61)).

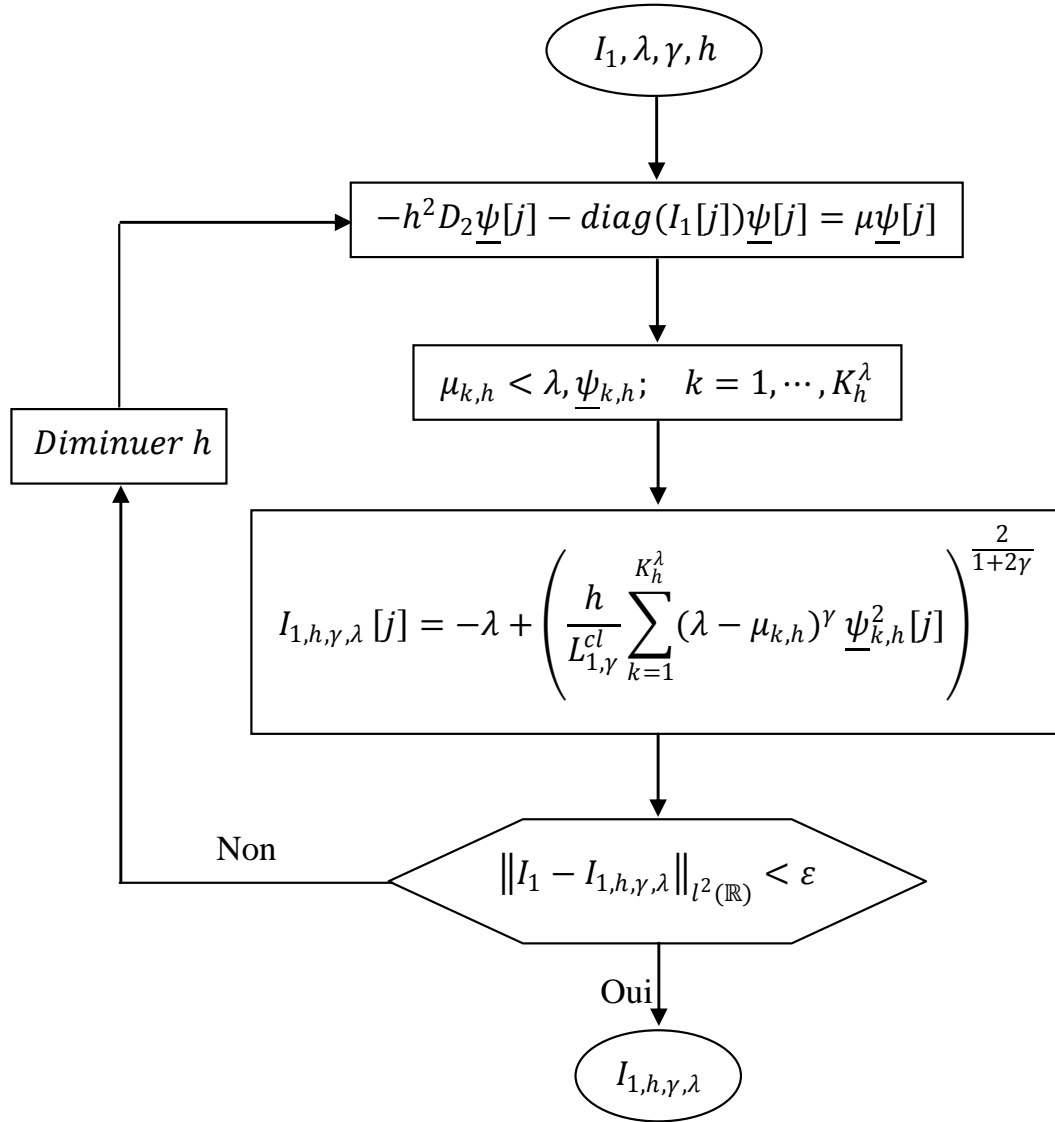


FIGURE 2.17 – Algorithme de reconstruction d’une fonction par la SCSA (Cas général) en une dimension.

Comme dans le premier cas, cette formule a été validée en utilisant la sécante hyperbolique (formule (2.47)) [30]. De plus cette formule a été testée avec succès sur des signaux de pression artérielle, où il a été montré que plus la valeur de  $\lambda$  et celle de  $h$  diminuent, plus la valeur de  $\gamma$  doit augmenter [30], dans ce cas, la théorie d’analyse semi-classique suggère de prendre  $\gamma \geq 1$ .

Comme un premier cas, nous nous contentons de prendre  $\lambda = 0$ , et nous analysons la représentation de l’oscillateur harmonique défini par :

$$V_1(x) = x^2 - 36, \text{ sur } x \in [-6, 6] \quad (2.73)$$

pour  $h = 0.2764$  et  $\gamma = 0.5, 1$  et  $2$  et en utilisant la nouvelle formule de la SCSA (2.61).

Les figures 2.18(a), 2.18(c) illustrent la reconstruction de l’oscillateur harmonique pour différentes valeurs de  $\gamma$ . A travers les figures 2.18(b) et 2.18(d), nous remarquons que  $\gamma = 0.5$  donne un meilleur résultat pour le même nombre de valeurs propres négatives qui est  $K_h^\lambda = 65$ .

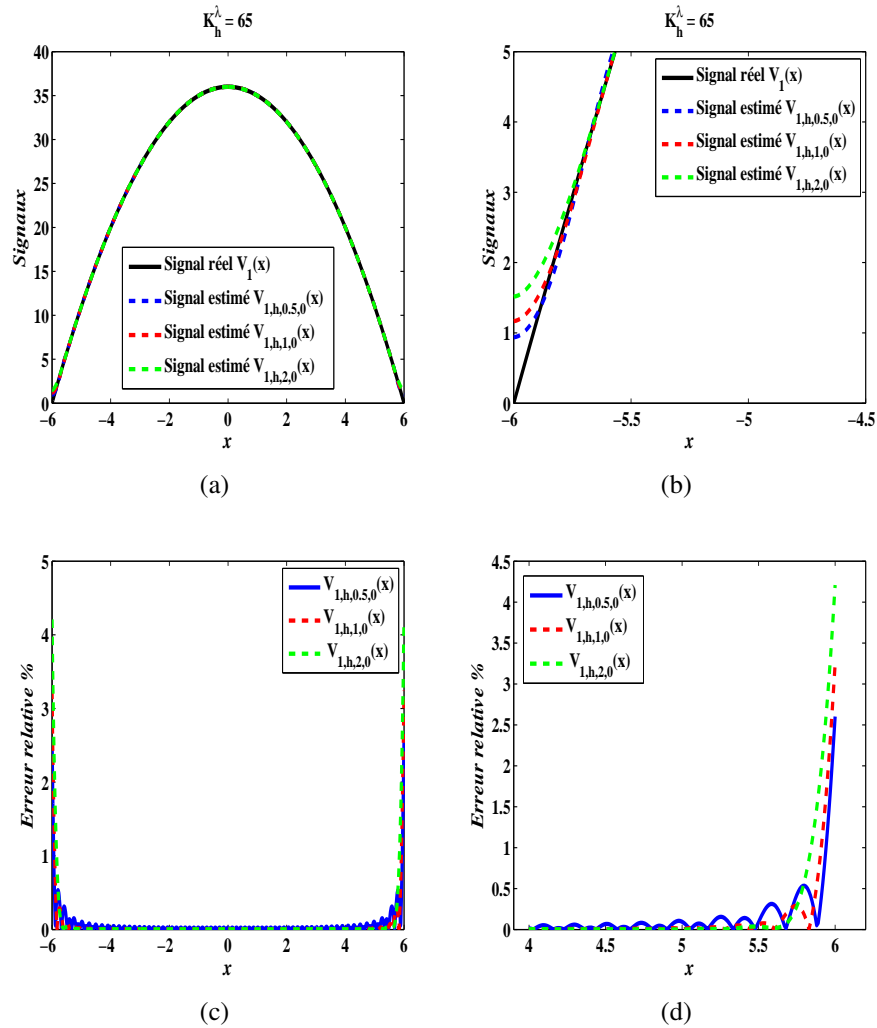


FIGURE 2.18 – (a). Reconstruction de  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $x \in [-6, 6]$ ; (c). Erreur relative correspondante, pour  $\lambda = 0$ , différentes valeurs de  $\gamma$  et  $h = 0.2764$ . (b)., (d). Zoom sur une partie des Figures (a) et (c) respectivement

La figure 2.19 montre une reconstruction de l'oscillateur harmonique pour  $h = 0.018$  i. e. :  $K_h^\lambda = 983$ . Il est clair que l'erreur relative correspondante à  $\gamma = 2$  est plus régulière que celle de  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 0.5$  ce qui prouve la bonne représentation de l'oscillateur harmonique pour  $\gamma = 2$ , et aussi confirme que plus  $h$  diminue et plus  $\gamma$  doit augmenter.

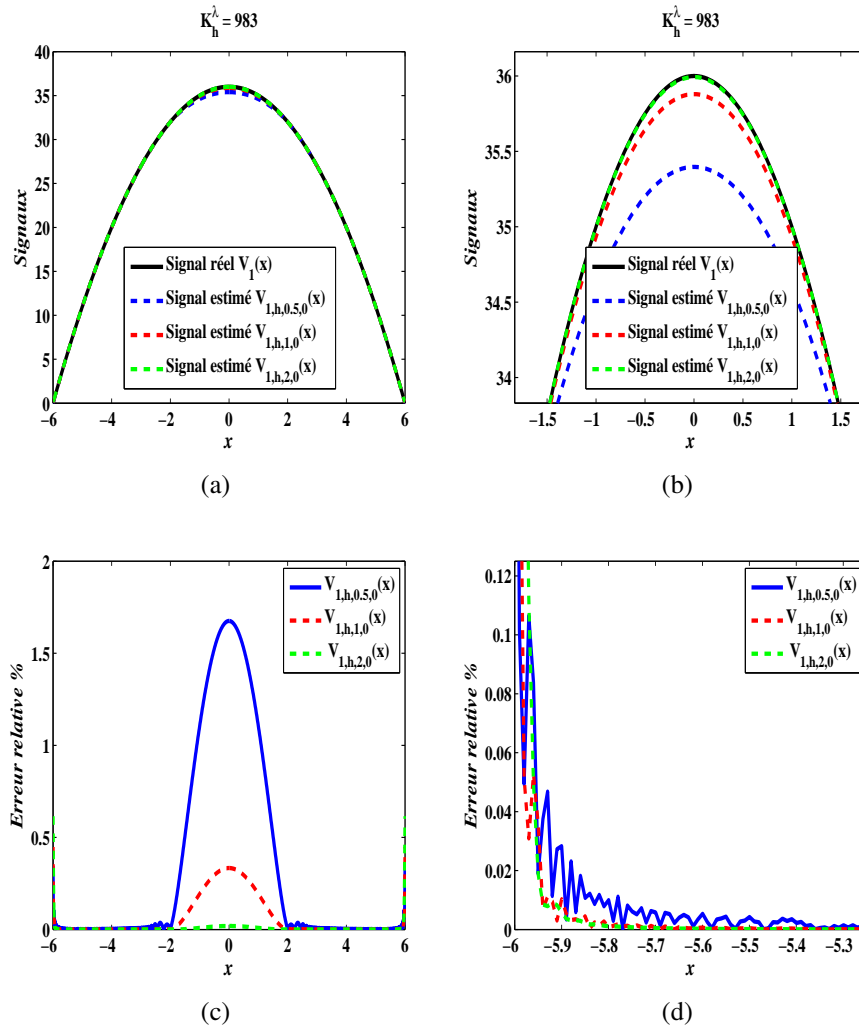


FIGURE 2.19 – (a). Reconstruction de  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $x \in [-6, 6]$ ; (c). Erreur relative correspondante, pour  $\lambda = 0$ , différentes valeurs de  $\gamma$  et  $h = 0.1$ . (b)., (d). Zoom sur une partie des Figures (a) et (c) respectivement

La figure 2.20 illustre une représentation d’une partie de l’oscillateur harmonique pour  $\lambda = -30$ , qui correspond à  $x \in [-2, 2]$ , avec  $h = 0.2$  ( $K_h^\lambda = 15$ ) et différentes valeurs de  $\gamma$ . Il est clair que la valeur optimale de  $\gamma$  pour  $\lambda$  et  $h$  fixée est  $\gamma = 2$ . Comme il a été décrit précédemment, l’erreur relative pour  $\gamma = 2$  est plus régulière que  $\gamma = 0.5$ .

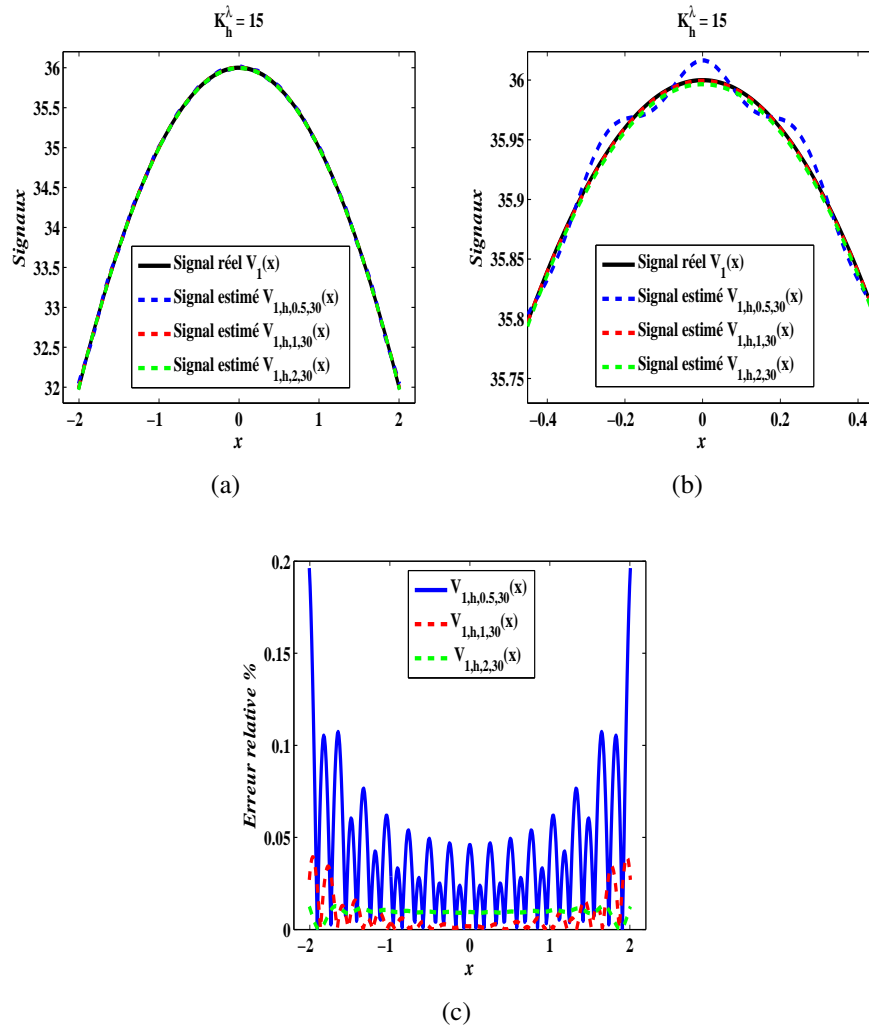


FIGURE 2.20 – (a). Reconstruction de  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $x \in [-2, 2]$ ; (b). Zoom sur la reconstruction de  $V_1$ ; (c). Erreur relative, pour  $\lambda = -30$ ,  $h = 0.007$  et différentes valeurs de  $\gamma$ .

## Conclusion

Ce chapitre consiste en une solide étude préliminaire d'une nouvelle méthode de décomposition des fonctions basée sur une analyse spectrale de l'opérateur de Schrödinger semi-classique en utilisant la transformée de diffusion inverse. L'idée principale de cette méthode, dite SCSA, consiste à décomposer la fonction en utilisant le spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique dont la fonction est considérée comme un potentiel de cet opérateur. Quelques propriétés de la SCSA ont été présentées. La convergence de cette méthode, dans le cas simple (formule (2.3)), a été démontrée.

En ce qui concerne les signaux bruités, les résultats numériques obtenus sont prometteurs malgré l'insuffisance de l'étude sur le plan théorique.

En se basant sur les résultats obtenus et sur quelques résultats de la théorie de l'analyse semi-classique, une nouvelle formule de cette méthode a été présentée (formule (2.61)) dans le but

principal n'est pas seulement de représenter une classe plus élargie des potentiels mais aussi de préciser la région de la fonction à décomposer pour pouvoir l'analyser avec plus de précision. La convergence de cette méthode a été illustrée. En fin, à travers quelques exemples, la performance de cette nouvelle approche a été montrée.

Comme le critère de l'ensemble des fonctions élémentaires adaptatives, suggéré par la théorie mathématique d'approximation, est respecté par la SCSA, nous proposons de généraliser cette dernière pour des fonctions bidimensionnelles. Cette généralisation fait l'objet du chapitre suivant :

# Chapitre 3

## Extension de la SCSA en deux dimensions

Ce chapitre représente le coeur du manuscrit. On y présente les principaux résultats obtenus lors de la généralisation en deux dimension de la méthode illustrée dans le chapitre précédent. Tout d'abord nous présenterons la définition de la SCSA dans le cas bidimensionnel. Ensuite, nous nous intéresserons à la convergence de cette nouvelle méthode. La troisième partie sera consacrée à la définition de la formule de la SCSA en 2D en utilisant le produit tensoriel ainsi que quelques propriétés liées au spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel.

### 3.1 Présentation générale

Comme la méthode SCSA présentée dans le chapitre précédent respecte bien la première suggestion de la théorie mathématique d'approximation [22] laquelle résiste dans l'utilisation d'un ensemble de fonctions élémentaires adaptées au potentiel lui même pour décomposer, analyser, représenter et aussi filtrer le potentiel [30, 45], nous proposons, dans ce chapitre, de généraliser, en 2D, cette méthode pour pouvoir l'utiliser pour des fonctions bidimensionnelles. Tout d'abord, nous commencerons par introduire quelques notions sur l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel suivies par la généralisation de la formule de la SCSA en 2D, qui est réalisable grâce aux résultats d'analyse spectrale et semi-classique de l'opérateur de Schrödinger bidimensionnel.

Il est ensuite question de montrer la convergence de cette nouvelle formule en 2D. Nous la présentons, dans la deuxième section de ce chapitre, en utilisant des résultats de l'analyse semi-classique de l'opérateur de Schrödinger qui existent et d'autres que nous montrons. Aussi, nous soulignons l'importance et l'influence du paramètre semi-classique sur la décomposition, l'analyse et la représentation de la fonction bidimensionnelle, en effet, le paramètre semi-classique permet de bien approcher le potentiel estimé vers le potentiel original.

Rappelons que la deuxième suggestion de la théorie mathématique de l'approximation est d'utiliser, pour la décomposition des fonctions de dimension supérieure à 1, une extension séparable des méthodes unidimensionnelles [15, 22, 35, 43]. Cela simplifie les mathématiques, et les méthodes qui en résultent sont efficaces et rapides car elles opèrent séparément les variables de la fonction  $x_i, i = 2, \dots, N$ . C'est pour cette raison que la dernière section de ce chapitre est consacrée à la généralisation de la formule de la SCSA en 2D en utilisant le produit tensoriel.

Nous commencerons par quelques heuristiques pour pouvoir réécrire la formule de la SCSA en 2D. Ceci passe tout d'abord par le calcul du produit tensoriel des fonctions propres des opérateurs de Schrödinger unidimensionnels, et ensuite par la reformulation de l'expression des valeurs propres négatives. Nous achevons ce chapitre avec quelques propriétés sur le spectre discret de l'opérateur de Schrödinger en fonction de  $h$ , dont le potentiel est donné par la fonction elle-même, dans le cas de la séparation des variables.

## 3.2 Définition de la SCSA en deux dimensions

Soit  $V_2$  une fonction réelle vérifiant les conditions suivantes :

$$V_2(x, y) \geq 0, \quad V_2 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_2), \quad (3.1)$$

où  $\Omega_2 = ]a, b[ \times ]c, d[$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , alors l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel, noté par  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$ , est défini sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  par :

$$\mathcal{H}_{2,h}(V_2) = -h^2\Delta - V_2, \quad \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2,h}(V_2)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^2), \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^2)$  est l'espace de Sobolev d'ordre 2,  $\Delta$  est le Laplacien en 2D,  $h \in \mathbb{R}_+^*$  est le paramètre semi-classique.

Il est à noter que sous les conditions (3.1) et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_-$ , il existe un nombre  $K_h^\lambda$  fini et non nul [31, 39] de valeurs propres négatives  $\mu_{k,h}$  inférieures à  $\lambda$  de l'opérateur  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$  avec  $\mu_{1,h} < \mu_{2,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} < \lambda$ . Soient  $\psi_{k,h}$  les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées à  $\mu_{k,h}$  avec  $k = 1, \dots, K_h^\lambda$ .

Nous définissons la SCSA en 2D par :

**Définition 3.2.1.** Soient  $V_2$  une fonction vérifiant les hypothèses (3.1),  $\lambda \leq 0$  et  $h$  un paramètre semi-classique positif. Alors l'approximation par SCSA est définie par :  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$

$$V_{2,h,\gamma,\lambda}(x, y) = -\lambda + \left( \frac{h^2}{L_{2,\gamma}^{cl}} \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y) \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad (3.3)$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  et  $\Lambda_2 \subset \Omega_2$  est un compact.  $L_{2,\gamma}^{cl}$  est la constante universelle semi-classique donnée par :

$$L_{2,\gamma}^{cl} = \frac{1}{2^2\pi} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 2)}, \quad (3.4)$$

et  $\Gamma$  représente la fonction Gamma.

Par ailleurs,  $\mu_{k,h}$  sont les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$  avec  $\mu_{1,h} < \mu_{2,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} \leq \lambda$  et  $\psi_{k,h}$  sont les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{2,h}(V_2)\psi_{k,h} = \mu_{k,h}\psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda, \quad (3.5)$$

où  $K_h^\lambda$  représente le nombre des valeurs propres négatives inférieures à  $\lambda$ .

La formule (3.3) dépend de trois paramètres  $\lambda$ ,  $\gamma$  et  $h$ , mais seul le paramètre semi-classique  $h$  influe sur le nombre des valeurs propres négatives. Dans la section qui suit, nous allons montrer que ce paramètre joue un rôle clé dans cette approche. En effet, lorsque le paramètre semi-classique tend vers 0, le potentiel estimé converge vers le potentiel original.

### 3.3 Étude de la convergence lorsque $h$ tend vers 0

La formule de la SCSA dépend de trois paramètres  $h$ ,  $\gamma$  et  $\lambda$ . Dans [30], les auteurs ont montré que seul le paramètre semi-classique  $h$  joue un rôle important. En effet plus  $h$  diminue, plus l'extraction des valeurs propres négatives du potentiel  $V_2$  par rapport à  $x$  et à  $y$  est meilleure, d'où la convergence du potentiel estimé  $V_{2,h,\gamma,\lambda}$  vers le potentiel original  $V_2$ . Avant de prouver cette convergence, nous présentons quelques résultats qui nous ont permis de montrer la convergence de cette méthode lorsque le paramètre semi-classique  $h$  tend vers 0.

Le premier résultat décrit la moyenne de Riesz liée à la conjoncture de Lieb-Thirring proposé par Helffer et Robert dans [31]

**Théorème 3.3.1.** [31] *Soit  $V_2$  une fonction à valeurs réelles considérée comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger (3.2) appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , avec*

$$-\infty < \inf -V_2 < \liminf_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ |y| \rightarrow +\infty}} -V_2. \quad (3.6)$$

*Soit  $\lambda \in ] \inf -V_2, \liminf_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ |y| \rightarrow +\infty}} -V_2[$  et supposons que  $\lambda$  n'est pas une valeur critique pour  $-V_2$  et  $h$  le paramètre semi-classique. Notons par :*

$$S_\gamma(h, \lambda) = \sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma, \quad \gamma \geq 0, \quad (3.7)$$

*la moyenne de Riesz des valeurs propres négatives  $\mu_{k,h}$  décroissantes et inférieures à  $\lambda$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$ . Alors, Pour tout  $\gamma > 0$ , nous avons :*

$$S_\gamma(h, \lambda) = \frac{1}{h^2} \left( L_{2,\gamma}^{cl} \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda + V_2(x, y))_+^{1+\gamma} dx dy + \mathcal{O}(h^{2+\gamma}) \right), \quad h \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

*où,  $(\cdot)_+$  est la partie positive et est donnée par :*

$$(\alpha)_+^\gamma = \begin{cases} \alpha^\gamma & \text{si } \alpha \geq 0, \\ 0 & \text{si } \alpha < 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

*et  $L_{2,\gamma}^{cl}$  est la constante universelle semi-classique. Elle est donnée par la formule (3.4).*

Le théorème suivant est une généralisation en 2D du théorème 4.1 proposé dans [30] et qui est une extension du théorème de Karadzhov sur les fonctions spectrales [39].

**Théorème 3.3.2.** *Soit  $V_2$  une fonction à valeur réelle positive appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  considérée comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger (3.2). Soit  $e_h^\gamma$ , la fonction spectrale définie par :  $\forall ((x, x'), (y, y')) \in \mathbb{R}^4$ ,*

$$e_h^\gamma(\lambda, x, y, x', y') = \sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}(x, y) \psi_{k,h}(x', y'), \quad (3.10)$$

lorsque  $h \rightarrow 0$ .  $\mu_{k,h}$  et  $\psi_{k,h}$  sont les valeurs propres négatives rangées par ordre décroissant et inférieur à  $\lambda$ , et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées de l'opérateur  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$  respectivement.

Alors, pour tout couple  $(\Lambda_2, \lambda)$ , tel que  $\Lambda_2 \subset \Omega_2$  est un compact, et

$$\begin{cases} \lambda < \inf(-V_2(a, c), -V_2(b, d)), \\ V_2(\Lambda_2) \subset ]-\lambda, +\infty[, \\ \lambda \text{ n'est pas une valeur critique de } -V_2, \end{cases} \quad (3.11)$$

nous avons :  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$

$$e_h^\gamma(\lambda, x, y, x, y) = (2\pi)^{-2} (\lambda + V_2(x, y))_+^{1+\gamma} c_\gamma h^{-2} + \mathcal{O}(h^\gamma), \quad h \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

uniformément sur  $\Lambda_2$ , où,

$$c_\gamma = \int_{\Lambda_2} (1 - \eta^2 - \eta'^2)_+^\gamma d\eta d\eta',$$

et  $(\cdot)_+$  est la partie positive donnée par la formule (3.9).

### Preuve. (Théorème 3.3.2)

La démonstration de ce théorème se base essentiellement sur des résultats d'analyse semi-classique. Nous nous référons à la preuve du théorème 3.2 établie par Helffer et Robert dans [31]. La preuve est établie selon deux étapes correspondant à la contribution qui est près de  $\lambda$  et loin de  $\lambda$ . Avec la sommation de ces deux cas nous obtenons aisément le résultat final.

#### Étape 1 :

Considérons la fonction  $\chi$  avec  $\text{supp}\chi \subset \mathbb{C}] - \infty, 0[$ , et soit  $f_{h,\chi}^\gamma$  une fonction définie par :

$$f_{h,\chi}^\gamma(\lambda, x, y, x, y) = \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} \chi(\mu_{k,h} - \lambda) |\lambda - \mu_{k,h}|^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y). \quad (3.13)$$

Pour tout couple  $(\Lambda_2, \lambda)$  vérifiant les conditions (3.11), nous avons :

$$\begin{aligned} f_{h,\chi}^\gamma(\lambda, x, y, x, y) &= (2\pi h)^{-2} \int_{\Lambda_2} \left( \chi(\lambda - \xi^2 - \xi'^2 + V_2(x, y)) \times \right. \\ &\quad \left. |\lambda + V_2(x, y) - \xi^2 - \xi'^2|^\gamma \right) d\xi d\xi' + \mathcal{O}(h^\gamma), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

#### Étape 2 :

Pour ce cas, soit  $g_{h,\chi}^\gamma$  une fonction définie par :

$$g_{h,\chi}^\gamma(\lambda, x, y, x, y) = \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (1 - \chi(\mu_{k,h} - \lambda)) |\lambda - \mu_{k,h}|^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y), \quad (3.15)$$

Pour tout couple  $(\Lambda_2, \lambda)$  satisfaisant les conditions (3.11), nous avons :  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$ ,

$$\begin{aligned} g_{h,\chi}^\gamma(\lambda, x, y, x, y) &= (2\pi h)^{-2} \int_{\Lambda_2} \left( 1 - \chi(\lambda - \xi^2 - \xi'^2 + V_2(x, y)) \right) \times \\ &\quad \left( |\lambda + V_2(x, y) - \xi^2 - \xi'^2|^\gamma \right) d\xi d\xi' + \mathcal{O}(h^\gamma), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Revenons, maintenant au cas général, pour tout  $(\Lambda_2, \lambda)$  satisfaisant les conditions (3.11), nous avons :  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$

$$\begin{aligned} f_{h,\chi}^\gamma(\lambda, x, y, x, y) + g_{h,\chi}^\gamma(\lambda, x, y, x, y) &= \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} |\lambda - \mu_{k,h}|^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y), \\ &= e_h^\gamma(\lambda, x, y, x, y) \end{aligned} \quad (3.17)$$

d'une part. D'autre part, nous avons :  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$

$$\begin{aligned} f_{h,\chi}^\gamma(\lambda, x, y, x, y) + g_{h,\chi}^\gamma(\lambda, x, y, x, y) &= (2\pi h)^{-2} \times \\ &\int_{\Lambda_2} |\lambda + V_2(x, y) - \xi^2 - \xi'^2|^\gamma d\xi d\xi' + \mathcal{O}(h^\gamma), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le changement de variables  $\xi = \eta(\lambda + V_2(x, y))_+^{\frac{1}{2}}$  et  $\xi' = \eta'(\lambda + V_2(x, y))_+^{\frac{1}{2}}$  donne :  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$

$$\begin{aligned} h^2 \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y) &= (2\pi)^{-2} (\lambda + V_2(x, y))_+^{1+\gamma} c_\gamma \\ &+ \mathcal{O}(h^{\gamma+2}), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

uniformément sur  $\Lambda_2$ , où

$$c_\gamma = \int_{\Lambda_2} (1 - \eta^2 - \eta'^2)_+^\gamma d\eta d\eta',$$

et  $(\cdot)_+$  représente la partie positive et est donnée par la formule (3.9).

Ainsi,  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$

$$e_h^\gamma(\lambda, x, y, x, y) = (2\pi)^{-2} (\lambda + V_2(x, y))_+^{1+\gamma} c_\gamma h^{-2} + \mathcal{O}(h^\gamma), \quad h \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

uniformément sur  $\Lambda_2$ .

La convergence de la SCSA en 2D est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 3.3.3.** Soient  $V_2 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_2)$  une fonction réelle à valeurs positives, considérée comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger (3.2) et  $h$  le paramètre semi-classique. Alors, pour tout couple  $(\Lambda_2, \lambda)$  satisfaisant les conditions (3.11) et pour tout  $(x, y) \in \Lambda_2$ , nous avons :

$$V_2(x, y) = -\lambda + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h^2}{L_{2,\gamma}^{cl}} \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y) \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad (3.21)$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  et  $L_{2,\gamma}^{cl}$  est la constante universelle semi-classique donnée par la formule (3.4).

Par ailleurs,  $\mu_{k,h}$  sont les valeurs propres négatives rangées par ordre décroissant de  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$  et  $\psi_{k,h}$  sont les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées tel que :

$$\mathcal{H}_{2,h}(V_2)\psi_{k,h} = \mu_{k,h} \psi_{k,h}, \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda, \quad (3.22)$$

et  $K_h^\lambda$  est le nombre des valeurs propres négatives inférieures à  $\lambda$ .

**Preuve. (Théorème 3.3.3)**

Pour prouver la convergence de la formule SCSA dans le cas bidimensionnel, nous utiliserons une extension appropriée du théorème de Karadzhov [39] sur les fonctions spectrales (théorème 3.3.2) et la moyenne de Riesz liée à la conjecture de Lieb-Thirring proposée par Helffer and Robert dans [31] (théorème 3.3.1).

Premièrement, en combinant les formules (3.10) et (3.12), on trouve :  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$

$$\sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y) = (2\pi h)^{-2} (\lambda + V_2(x, y))_+^{1+\gamma} c_\gamma + \mathcal{O}(h^\gamma) \quad (3.23)$$

où  $h \rightarrow 0$  et  $(\cdot)_+$  est la partie positive, et

$$c_\gamma = \int_{\Lambda_2} (1 - \eta^2 - \eta'^2)_+^\gamma d\eta d\eta'. \quad (3.24)$$

Maintenant, essayons de trouver une expression plus simple de  $c_\gamma$ . En intégrant par partie la partie droite de la formule (3.23) sur  $x$  et  $y$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_2} \left( \sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y) \right) dx dy &= \sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^\gamma, \quad h \rightarrow 0 \\ &= S_\gamma(h, \lambda), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} &\int_{\Lambda_2} h^{-2} (\lambda + V_2(x, y))_+^{1+\gamma} (2\pi)^{-2} c_\gamma dx dy + \mathcal{O}(h^\gamma) \\ &= \int_{\Lambda_2} \sum_{\mu_{k,h} \leq \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})_+^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y) dx dy, \quad h \rightarrow 0 \\ &= S_\gamma(h, \lambda), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc, pour  $\gamma > 0$  et en utilisant le théorème 3.3.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\int_{\Lambda_2} h^{-2} (\lambda + V_2(x, y))_+^{1+\gamma} (2\pi)^{-2} c_\gamma dx dy + \mathcal{O}(h^\gamma) = \\ &\quad \frac{L_{2,\gamma}^{cl}}{h^2} \int_{\Lambda_2} (\lambda + V_2(x, y))_+^{1+\gamma} dx dy + \mathcal{O}(h^\gamma), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-2} c_\gamma &= L_{2,\gamma}^{cl}, \\ &= \frac{1}{2^2 \pi} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 2)}. \end{aligned}$$

Puisque le potentiel  $V_2$  est positif, on en déduit :  $\forall (x, y) \in \Lambda_2$

$$V_2(x, y) = -\lambda + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h^2}{L_{2,\gamma}^{cl}} \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y) \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}.$$

### 3.4 Comportement du spectre discret en fonction de $h$

Dans cette partie nous allons présenter quelques propriétés du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique  $\mathcal{H}_{2,h}$  associé au potentiel  $V_2$ . Ce dernier permet d'obtenir une bonne estimation du potentiel. Notre analyse du spectre discret se base essentiellement sur les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2.

La première proposition que nous énonçons concerne les propriétés du nombre  $K_h^\lambda$  des valeurs propres négatives de l'opérateur  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$ .

**Proposition 3.4.1.** *Soit  $V_2$  une fonction réelle à valeurs positives vérifiant les hypothèses du théorème 3.3.3. Alors, le nombre  $K_h^\lambda$  des valeurs propres négatives de l'opérateur  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$  est une fonction décroissante de  $h$ .*

**Preuve. (Proposition 3.4.1)**

*Pour montrer la décroissance du nombre des valeurs propres négatives  $K_h^\lambda$  en fonction du paramètre semi-classique  $h$ , nous utiliserons le lemme suivant :*

**Lemme 3.4.1.** [66] *Pour  $\lambda \leq 0$ , soit  $K_h^\lambda$  le nombre de valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$  inférieures à  $\lambda$ . Soient  $W_1$  et  $W_2$  deux potentiels de l'opérateur de Schrödinger semi-classique (3.2) tel que  $W_1 \leq W_2$ . Alors :*

$$K_h^\lambda(W_2) \leq K_h^\lambda(W_1), \quad \forall \lambda \leq 0. \quad (3.25)$$

*Prenons :*

$$W_1 = h_1 V_2, \quad W_2 = h_2 V_2, \quad \text{avec } h_1 \leq h_2. \quad (3.26)$$

*Nous avons alors :*

$$\begin{aligned} W_1 \leq W_2 &\implies K_h^\lambda(W_2) \leq K_h^\lambda(W_1), \\ &\implies K_h^\lambda(h_2 V_2) \leq K_h^\lambda(h_1 V_2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

*Or, nous avons  $h_1 \leq h_2$  et  $K_h^\lambda(h_j V_2) = K_{h+h_j}^\lambda$ ,  $j = 1, 2$ , ceci achève la démonstration de la première propriété du nombre des valeurs propres négatives.*

La proposition suivante montre la relation qui existe entre les valeurs propres négatives  $\mu_{k,h}$  pour  $k = 1, \dots, K_h^\lambda$  et le potentiel  $V_2$ .

**Proposition 3.4.2.** *Soient  $V_2$  une fonction à valeurs réelles vérifiant les hypothèses (3.1) et  $h$  le paramètre semi-classique. Soient  $\mu_{k,h}$ , avec  $k = 1, \dots, K_h^\lambda$  les valeurs propres négatives de l'opérateur  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$ . Supposons, de plus, que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  :*

$$0 \leq V_2(x, y) \leq \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} V_2(x, y). \quad (3.28)$$

*Alors,*

$$-\mu_{k,h} \leq \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} V_2(x, y), \quad (3.29)$$

*pour  $k = 1, \dots, K_h^\lambda$ .*

**Preuve. (Proposition 3.4.2)**

Soit le problème spectral de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel :

$$-h^2 \Delta \psi(x, y) - V_2(x, y) \psi(x, y) = \mu \psi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.30)$$

Soient  $\mu_{k,h}$  une valeur propre négative de  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$  et  $\psi_{k,h}$  la fonction propre  $L^2$ -normalisée associée :

$$-h^2 \Delta \psi_{k,h}(x, y) - V_2(x, y) \psi_{k,h}(x, y) = \mu_{k,h} \psi_{k,h}(x, y), \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (3.31)$$

Multiplions l'équation précédente par  $\psi_{k,h}(x, y)$ ,

$$-h^2 \Delta \psi_{k,h}^2(x, y) - V_2(x, y) \psi_{k,h}^2(x, y) = \mu_{k,h} \psi_{k,h}^2(x, y), \quad k = 1, \dots, K_h^\lambda. \quad (3.32)$$

En intégrant la formule précédente par rapport à  $x$  et à  $y$  sur  $\Lambda_2$  et sachant que les fonctions propres  $\psi_{k,h}(x, y)$  sont  $L^2$ -normalisées, nous obtenons :

$$-h^2 \int_{\Lambda_2} \Delta \psi_{k,h}^2(x, y) dx dy - \int_{\Lambda_2} V_2(x, y) \psi_{k,h}^2(x, y) dx dy = \mu_{k,h}. \quad (3.33)$$

En intégrant par partie le terme  $\int_{\Lambda_2} \Delta \psi_{k,h}^2(x, y) dx dy$  de l'équation (3.33), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & h^2 \int_{\Lambda_2} \left( \frac{\partial \psi_{k,h}(x, y)}{\partial x} \right)^2 dx dy + h^2 \int_{\Lambda_2} \left( \frac{\partial \psi_{k,h}(x, y)}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ & - \int_{\Lambda_2} (V_2(x, y) \psi_{k,h}^2(x, y)) dx dy = \mu_{k,h}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} & h^2 \int_{\Lambda_2} \left( \frac{\partial \psi_{k,h}(x, y)}{\partial x} \right)^2 dx dy + h^2 \int_{\Lambda_2} \left( \frac{\partial \psi_{k,h}(x, y)}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ & - \mu_{k,h} = \int_{\Lambda_2} (V_2(x, y) \psi_{k,h}^2(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Comme tous les termes de la formule (3.35) sont positifs, nous obtenons donc :

$$-\mu_{k,h} \leq \int_{\Lambda_2} (V_2(x, y) \psi_{k,h}^2(x, y)) dx dy, \quad (3.36)$$

ce qui achève la démonstration en utilisant (3.47).

La convergence des valeurs propres négatives lorsque le paramètre semi-classique  $h$  tend vers 0 est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 3.4.3.** *Pour toute fonction  $V_2$  vérifiant les conditions du théorème 3.3.1, nous avons :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \sum_{\mu_{k,h} < \lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma = L_{2,\gamma}^{cl} \int_{\Lambda_2} (\lambda + V_2(x, y))^{1+\gamma} dx dy. \quad (3.37)$$

Si de plus  $V_2$  vérifie les conditions du théorème 3.3.3, alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Lambda_2} (\lambda + V_{2,h,\gamma,\lambda}(x, y))^{1+\gamma} dx dy = \int_{\Lambda_2} (\lambda + V_2(x, y))^{1+\gamma} dx dy. \quad (3.38)$$

**Preuve. (Proposition 3.4.3)**

1. La formule (3.37) se déduit aisément du théorème 3.3.1.
2. Par définition de la SCSA en 2D, nous avons :  $\forall(x, y) \in \Lambda_2$

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_2} \left( \lambda + V_{2,h,\gamma,\lambda}(x, y) \right)^{1+\gamma} dx dy &= \int_{\Lambda_2} \left( \frac{h^2}{L_{2,\gamma}^{cl}} \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma \psi_{k,h}^2(x, y) \right) dx dy, \\ &= \frac{h^2}{L_{2,\gamma}^{cl}} \sum_{k=1}^{K_h^\lambda} (\lambda - \mu_{k,h})^\gamma. \end{aligned}$$

En utilisant la formule (3.37), nous obtenons (3.38).

### 3.5 SCSA en 2D et produit tensoriel

La décomposition des fonctions en deux dimensions pose de nombreux problèmes spécifiques de nature géométrique et topologique qu'on ne rencontre pas en une dimension. Pour éviter ce type de difficultés, nous nous concentrons sur une extension séparable des méthodes unidimensionnelles [15, 35, 43]. C'est l'exemple de la transformée de Fourier en 2D, qui utilise un produit tensoriel des exponentiels complexes en 1D [53], où plus récemment, la transformée en Ridgelette qui se base sur le produit tensoriel d'ondelette en 1D [13]. Le principe de la séparation des variables simplifie les mathématiques, et les formules résultant sont efficaces et rapides car elles opèrent séparément sur les deux variables de la fonction [53].

D'autre part, la décomposition des fonctions bidimensionnelles par la formule (3.3) exige un calcul des valeurs propres et fonctions propres lequel est complexe par ses deux dimensions. Pour des raisons de simplicité, nous proposons dans cette section, d'utiliser le principe de la séparation des variables en répartissant l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel en deux opérateurs de Schrödinger unidimensionnels et par suite résoudre le problème des valeurs propres pour chaque opérateur en une dimension.

#### 3.5.1 Principe de la séparation des variables dans un cas continu

Définissons, pour tout  $(x_0, y_0) \in \Lambda_2$ , les deux opérateurs de Schrödinger en une dimension :

$$\mathcal{A}_{x_0,h}(V_2(x_0, y)) = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} V_2(x_0, y), \quad (3.39)$$

$$\mathcal{B}_{y_0,h}(V_2(x, y_0)) = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2} V_2(x, y_0), \quad (3.40)$$

tel que pour tout  $(x_0, y_0)$  fixée, la somme des deux opérateurs  $\mathcal{A}_{x_0,h}$  et  $\mathcal{B}_{y_0,h}$  donne l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{2,h}$  évaluée à  $(x_0, y_0)$ .

Les problèmes spectraux liés aux opérateurs  $\mathcal{A}_{x_0,h}$  et  $\mathcal{B}_{y_0,h}$  sont donnés par :

$$\mathcal{A}_{x_0,h}(V_2(x_0, y)) \varphi_{x_0,n,h}(y) = \kappa_{x_0,n,h} \varphi_{x_0,n,h}(y), \quad (3.41)$$

$$\mathcal{B}_{y_0,h}(V_2(x, y_0)) \phi_{y_0,m,h}(x) = \rho_{y_0,m,h} \phi_{y_0,m,h}(x), \quad (3.42)$$

où,  $\kappa_{x_0,n,h}$  et  $\varphi_{x_0,n,h}$  pour  $n = 1, \dots, N_h^\lambda$  (resp.  $\rho_{y_0,m,h}$  et  $\phi_{y_0,m,h}$  pour  $m = 1, \dots, M_h^\lambda$ ) sont les valeurs propres négatives inférieures à  $\lambda$  rangées par ordre décroissant et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées de l'opérateur (3.39) (resp. (3.40)) et  $N_h^\lambda$  (resp.  $M_h^\lambda$ ) est le nombre des valeurs propres négatives inférieures à  $\lambda$ .

En multipliant les formules (3.41) et (3.42) par  $\phi_{y_0,m,h}(x)$  et  $\varphi_{x_0,n,h}(y)$  respectivement, et en additionnant les résultats obtenus, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_{x_0,h}(V_2(x_0, y)) + \mathcal{B}_{y_0,h}(V_2(x, y_0))\} \varphi_{x_0,n,h}(y) \phi_{y_0,m,h}(x) \\ = (\kappa_{x_0,n,h} + \rho_{y_0,m,h}) \varphi_{x_0,n,h}(y) \phi_{y_0,m,h}(x). \end{aligned} \quad (3.43)$$

En particulier pour  $x = x_0, y = y_0$  et en utilisant les formules (3.22) et (3.43) nous obtenons :

$$\varphi_{x_0,n,h}(y_0) \phi_{y_0,m,h}(x_0) = \psi_{k,h}(x_0, y_0), \quad (3.44)$$

$$\kappa_{x_0,n,h} + \rho_{y_0,m,h} = \mu_{k,h}. \quad (3.45)$$

Donc : la formule (3.3) peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} V_{2,h,\gamma,\lambda}(x_0, y_0) = -\lambda \\ + \left( \frac{h^2}{L_{2,\gamma}^{cl}} \sum_{n=1}^{N_h^\lambda} \sum_{m=1}^{M_h^\lambda} (\lambda - (\kappa_{x_0,n,h} + \rho_{y_0,m,h}))^\gamma \varphi_{x_0,n,h}^2(y_0) \phi_{y_0,m,h}^2(x_0) \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

A partir de cette formule, on peut en déduire que toute fonction  $V_2$  bidimensionnelle peut être estimée au point  $(x_0, y_0)$  à partir du produit tensoriel de deux fonctions élémentaires adaptatives résultant de la résolution des problèmes spectraux de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel.

### 3.5.2 Quelques propriétés du spectre discret en fonction de $h$

Les propriétés du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel présentées dans la section 3.4 restent valables pour le cas de la séparation des variables. Dans la partie qui suit, nous les présenterons tandis que leurs démonstration se traite d'une manière analogue que ceux présenter précédemment.

La première proposition que nous énonçons concerne les propriétés du nombre  $N_h^\lambda M_h^\lambda$  des valeurs propres négatives de l'opérateur  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$ .

**Proposition 3.5.1.** *Soit  $V_2$  une fonction réelle à valeurs positives vérifiant les hypothèses du théorème 3.3.3. Alors, le nombre  $N_h^\lambda M_h^\lambda$  des valeurs propres négatives de l'opérateur  $\mathcal{H}_{2,h}(V_2)$  est une fonction décroissante de  $h$ .*

La proposition suivante montre la relation qui existe entre les valeurs propres négatives  $\kappa_{x_0,n,h} + \rho_{y_0,m,h}$  pour  $n = 1, \dots, N_h^\lambda, m = 1, \dots, M_h^\lambda$  et le potentiel  $V_2$ .

**Proposition 3.5.2.** Soient  $V_2$  une fonction à valeurs réelles vérifiant les hypothèses (3.1) et  $h$  le paramètre semi-classique. Soient  $\kappa_{x_0,n,h} + \rho_{y_0,m,h}$ , avec  $n = 1, \dots, N_h^\lambda$  et  $m = 1, \dots, M_h^\lambda$ , les valeurs propres négatives des opérateurs  $\mathcal{A}_{x_0,h}(V_2(x_0, \cdot))$  et  $\mathcal{B}_{y_0,h}(V_2(\cdot, y_0))$  respectivement. Supposons, de plus, que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$0 \leq V_2(x, y) \leq \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} V_2(x, y). \quad (3.47)$$

Alors,

$$-\kappa_{x_0,n,h} - \rho_{y_0,m,h} \leq \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} V_2(x, y), \quad (3.48)$$

pour  $n = 1, \dots, N_h^\lambda$  et  $m = 1, \dots, M_h^\lambda$ .

La convergence des valeurs propres négatives lorsque le paramètre semi-classique  $h$  tend vers 0 est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 3.5.3.** Pour toute fonction  $V_2$  vérifiant les conditions du théorème 3.3.1, nous avons :

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \sum_{\kappa_{x_0,n,h} < \lambda} \sum_{\rho_{y_0,m,h} < \lambda} \left( \lambda - (\kappa_{x_0,n,h} + \rho_{y_0,m,h}) \right)^\gamma \\ &= L_{2,\gamma}^{cl} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \lambda + V_2(x, y) \right)^{1+\gamma} dx dy. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Si de plus  $V_2$  vérifie les conditions du théorème 3.3.3, alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Lambda_2} \left( \lambda + V_{2,h,\gamma,\lambda}(x, y) \right)^{1+\gamma} dx dy = \int_{\Lambda_2} \left( \lambda + V_2(x, y) \right)^{1+\gamma} dx dy. \quad (3.50)$$

## Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à la présentation de la formule de la SCSA dans le cas bidimensionnel. Nous avons commencé par introduire quelques notions sur l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel. Ensuite, la formule de la SCSA en 2D a été présentée. En se basant sur quelques résultats de l'analyse semi-classique, nous avons montré la convergence de cette nouvelle méthode lorsque le paramètre semi-classique  $h$  tend vers 0.

Pour continuer, nous y avons entre autre souligné l'importance de l'utilisation du produit tensoriel lors du passage à une dimension supérieure à 1 pour la décomposition des fonctions bidimensionnelles. La définition de la SCSA, dans le cas bidimensionnel en utilisant la séparation des variables, a été présentée. Cette nouvelle approche permet de décomposer, d'estimer et de représenter une fonction en 2D en utilisant un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives suivant chaque direction  $x$  et  $y$ .

Finalement, nous avons exposé quelques résultats liés au spectre discret en fonction de  $h$  de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel dans le cas de la séparation des variables.

# Chapitre 4

## Résolution numérique de la SCSA en 2D

Dans ce chapitre sera, comme son nom l'indique, présentée la partie purement numérique du travail effectué et les résultats obtenus avec la méthode exposée dans le chapitre précédent. Nous commencerons par présenter la formule de la SCSA en deux dimensions, en utilisant le produit tensoriel, dans un cas discret suivi par le schéma numérique correspondant. Dans la dernière section, nous aborderons la question de l'influence des paramètres dont dépend cette méthode sur la décomposition, l'analyse et la représentation d'une fonction bidimensionnelle suivie par différents exemples de fonctions en 2D. A travers ces exemples nous illustrerons quelques notions et nous validerons cette nouvelle approche.

### 4.1 Présentation générale

Ce chapitre traite la résolution numérique suivie par la validation de la SCSA en deux dimensions. Après avoir présenté, dans le chapitre précédent, la formule de la SCSA dans le cas bidimensionnel en utilisant le produit tensoriel, nous commençons, dans ce chapitre, par redéfinir la formule de la SCSA en 2D dans un cas discret pour des signaux bidimensionnels, ce qui facilite la présentation du schéma numérique où nous rappelons brièvement les étapes de calculs pour décomposer, estimer et reconstruire un signal bidimensionnel par la SCSA en 2D. La méthode d'optimisation que nous avons jugé utile pour trouver la valeur optimale de  $h$  sera illustrée selon un critère donné.

Dans la dernière section, nous aborderons la question de l'influence des paramètres dont dépend cette méthode sur la décomposition et la représentation des signaux où nous expliquerons le rôle de chaque paramètre, puis nous validerons notre approche, à la fois, avec un signal bidimensionnel, largement utilisé dans la théorie de l'analyse semi-classique, et un signal quelconque. Quelques remarques liées au spectre discret de l'opérateur de Schrödinger seront présentées.

### 4.2 Discrétisation de la SCSA en deux dimension

Comme il a été décrit dans [15, 35, 43], il est plus simple et facile d'utiliser une extension séparable des algorithmes unidimensionnels lors de la généralisation à une dimension supérieure.

Ceci simplifie les mathématiques et les algorithmes vu qu'elle permet de traiter séparément chacune des variables de la fonction en 2D. Avant de présenter le schéma numérique, nous illustrons la procédure du produit tensoriel utilisé pour passer d'un problème 2D complexe à des problèmes 1D plus simples dans un cas discret.

En effet, dans un cas discret, une fonction 2D est représentée par une matrice dont la première variable représente les lignes de la matrice et la seconde les colonnes, le terme pixel représente un élément de cette matrice.

Notons  $I_2$  une fonction bidimensionnelle dans l'espace des matrices carrées  $\mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R}^+)$ . La discrétisation du problème aux valeurs propres (3.5) est donnée, dans un cas discret, par l'expression suivante :

$$H_{2,h}(I_2[i, j]) \underline{\psi}_{k,h}[i, j] = \mu_{k,h} \underline{\psi}_{k,h}[i, j], \quad (4.1)$$

où  $\mu_{k,h}$  et  $\underline{\psi}_{k,h}$ , pour  $k = 1, \dots, K_h^\lambda$  avec  $K_h^\lambda < N \times N$ , sont les valeurs propres négatives avec  $\mu_{1,h} < \dots < \mu_{K_h^\lambda,h} < \lambda$  et les vecteurs propres  $l^2$ -normalisés respectivement de l'opérateur de Schrödinger semi-classique discrétisé bidimensionnel  $H_{2,h}$  et  $i, j = 1, \dots, N$  indiquent la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $I_2$  respectivement.

Comme il a été décrit dans la section 3.5.1, pour résoudre le problème aux valeurs propres en 2D (4.1), l'idée est de résoudre les problèmes aux valeurs propres en une dimension et de combiner, ensuite, les résultats obtenus en utilisant le produit tensoriel. Cela signifie que résoudre le problème aux valeurs propres en 2D (4.1) revient à résoudre plusieurs problèmes 1D selon chaque ligne et chaque colonne, ce qui simplifie les calculs en termes de complexité et de temps de calcul.

Dans un cas discret, les opérateurs (3.39) et (3.40) sont donnés respectivement par :

$$A_{i,h}(I_2[i, :]) = -h^2 D_2 - \text{diag} \left( \frac{1}{2} I_2[i, :] \right), \quad (4.2)$$

$$B_{j,h}(I_2[:, j]) = -h^2 D_2 - \text{diag} \left( \frac{1}{2} I_2[:, j] \right), \quad (4.3)$$

où  $D_2$  est la matrice de différenciation du second ordre en une dimension obtenue en utilisant les méthodes pseudo-spectrales de Fourier [4, 26, 77] (formule (2.40)) et les notations  $\text{diag} \left( \frac{1}{2} I_2[i, :] \right)$  et  $\text{diag} \left( \frac{1}{2} I_2[:, j] \right)$  représentent les matrices diagonales du signal en 1D selon les lignes et les colonnes.

Les problèmes aux valeurs propres associées sont donnés par :

$$A_{i,h}(I_2[i, :]) \underline{\varphi}_{i,n,h} = \kappa_{i,n,h} \underline{\varphi}_{i,n,h}, \quad (4.4)$$

$$B_{j,h}(I_2[:, j]) \underline{\phi}_{j,m,h} = \rho_{j,m,h} \underline{\phi}_{j,m,h}. \quad (4.5)$$

En particulier, pour un pixel  $[i, j]$ , le problème aux valeurs propres (4.4) est résolu, ensuite toutes les valeurs propres négatives  $\kappa_{i,n,h}$  sont prises avec la  $j^{\text{ème}}$  composante des vecteurs propres  $l^2$ -normalisés  $\underline{\varphi}_{i,n,h}$  pour  $n = 1, \dots, N_h^\lambda$ . De même, le problème aux valeurs propres (4.5) est résolu, ensuite toutes les valeurs propres négatives  $\rho_{j,m,h}$  sont prises avec la  $i^{\text{ème}}$  composante des vecteurs propres  $l^2$ -normalisés  $\underline{\phi}_{j,m,h}$  pour  $m = 1, \dots, M_h^\lambda$ . Ainsi, nous obtenons :

$$\underline{\varphi}_{i,n,h}[j] \underline{\phi}_{j,m,h}[i] = \underline{\psi}_{k,h}[i, j], \quad (4.6)$$

$$\kappa_{i,n,h} + \rho_{j,m,h} = \mu_{k,h}. \quad (4.7)$$

En dernier, en se basant sur le théorème 3.3.3 et sur des notions de la théorie mathématique d'approximation [15, 22, 35, 43], la décomposition (resp. représentation) du signal en 2D est faite pixel par pixel comme suit :

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $I_2 \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R}_+)$  une matrice carrée à valeurs réelles positives. Alors, l'approximation par la méthode SCSA en 2D de la matrice  $I_2$  est définie par la formule suivante :*

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2,$$

$$I_{2,h,\gamma,\lambda}[i, j] = -\lambda + \left( \frac{h^2}{L_{2,\gamma}^{cl}} \sum_{n=1}^{N_h^\lambda} \sum_{m=1}^{M_h^\lambda} (\lambda - (\kappa_{i,n,h} + \rho_{j,m,h}))^\gamma \underline{\varphi}_{i,n,h}^2[j] \underline{\phi}_{j,m,h}^2[i] \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad (4.8)$$

où  $h \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_-$ , et  $L_{2,\gamma}^{cl}$  est la constante universelle semi-classique donnée par la formule (3.4).

Par ailleurs,  $\kappa_{i,n,h}$  (resp.  $\rho_{j,m,h}$ ) sont les valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel (4.2), (resp. (4.3)) avec  $\kappa_{i,1,h} < \dots < \kappa_{i,N_h^\lambda,h} < \lambda$  (resp.  $\rho_{j,1,h} < \dots < \rho_{j,M_h^\lambda,h} < \lambda$ ),  $N_h^\lambda$  (resp.  $M_h^\lambda$ ) est le nombre des valeurs propres négatives inférieures à  $\lambda$ , et  $\underline{\varphi}_{i,n,h}$  (resp.  $\underline{\phi}_{j,m,h}$ ) sont les vecteurs propres  $l^2$ -normalisés associés tel que :

$$A_{i,h}(I_2[i, :]) \underline{\varphi}_{i,n,h} = \kappa_{i,n,h} \underline{\varphi}_{i,n,h}, \quad n = 1, \dots, N_h^\lambda \quad (4.9)$$

(resp.

$$B_{j,h}(I_2[:, j]) \underline{\phi}_{j,m,h} = \rho_{j,m,h} \underline{\phi}_{j,m,h}, \quad m = 1, \dots, M_h^\lambda). \quad (4.10)$$

### 4.3 Résolution numérique de la SCSA en 2D

Comme décrit dans la section 2.4, le calcul essentiel qui intervient dans la SCSA est la résolution du problème spectral de l'opérateur de Schrödinger. Pour que ceci soit possible numériquement, la première étape consiste à discrétiser cet opérateur puis à calculer ses valeurs propres et ses fonctions propres. La deuxième étape consiste à déterminer la valeur optimale du paramètre semi-classique  $h$  selon un critère donné. Une troisième étape en deux dimensions est indispensable. Il s'agit de combiner les résultats obtenus dans la première étape pour pouvoir reconstruire le signal bidimensionnel. La section qui suit résume la procédure de reconstruction d'un signal bidimensionnel par la SCSA en 2D.

#### 4.3.1 Algorithme

Les étapes qui suivent résument la procédure de la reconstruction d'un signal 2D par la SCSA en 2D.

**Étape 1** : discrétisation de l'opérateur de Schrödinger (4.2).

**Étape 2** : résolution du problème aux valeurs propres (4.4) pour le potentiel  $\frac{1}{2}I_2[i, :]$ , et puis garder seulement les valeurs propres négatives  $\kappa_{i,n,h}$  et la  $j^{\text{ième}}$  composante du vecteur propre  $l^2$ -normalisé associé  $\underline{\varphi}_{i,n,h}$  pour  $n = 1, \dots, N_h^\lambda$ .

**Étape 3** : discrétisation de l'opérateur de Schrödinger (4.3).

**Étape 4** : résolution du problème aux valeurs propres (4.5) pour le potentiel  $\frac{1}{2}I_2[:, j]$ , et puis prendre toutes les valeurs propres négatives  $\rho_{j,m,h}$  et la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur propre  $l^2$ -normalisé associé  $\underline{\phi}_{j,m,h}$  pour  $m = 1, \dots, M_h^\lambda$ .

**Étape 5** : reconstruction de l'élément  $I_2[i, j]$  en utilisant la formule (4.8).

**Remarque 4.3.1.** Comme indiqué dans la section 2.4.1, en MATLAB :

- La matrice de différenciation du second ordre en une dimension  $D_2$  peut être obtenue aisément en utilisant la commande `toeplitz`.
- La commande `eig` est utilisé pour résoudre les problèmes aux valeurs propres.

### 4.3.2 Calcul d'une valeur optimale de $h$

Comme il a été décrit dans le cas unidimensionnel (section 2.3.2) et la proposition 3.5.1, le nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{2,h}$  est une fonction à valeur dans  $\mathbb{N}$  décroissante en  $h$ . Et plus  $h$  diminue, plus l'erreur d'approximation par la SCSA diminue et devient très difficile à gérer numériquement. En pratique nous nous contentons de déterminer une valeur  $\hat{h}$  de  $h$  qui permet une bonne approximation avec peu de composantes spectrales. Une façon de le faire est de minimiser une fonction coût  $J(h)$  sur un intervalle  $[h_1, h_2]$ , dite aussi erreur moyenne quadratique, où

$$J(h) = \frac{1}{N \times N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left| I_{2,h,\gamma,\lambda}[i, j] - I_2[i, j] \right|^2 \quad (4.11)$$

Parmi les méthodes d'optimisation efficace que nous avons testé, la méthode d'optimisation laquelle s'effectue à l'aide de la commande `Globalsearch` et la fonction `fmincon` de MATLAB s'est avéré efficace. Mais en pratique, nous nous contentons de choisir quelques valeurs de  $h$  pour calculer  $J(h)$

En se basent sur les discussions ci-dessus, l'algorithme proposé est donné par la figure ci-dessous (Fig. 4.1) :

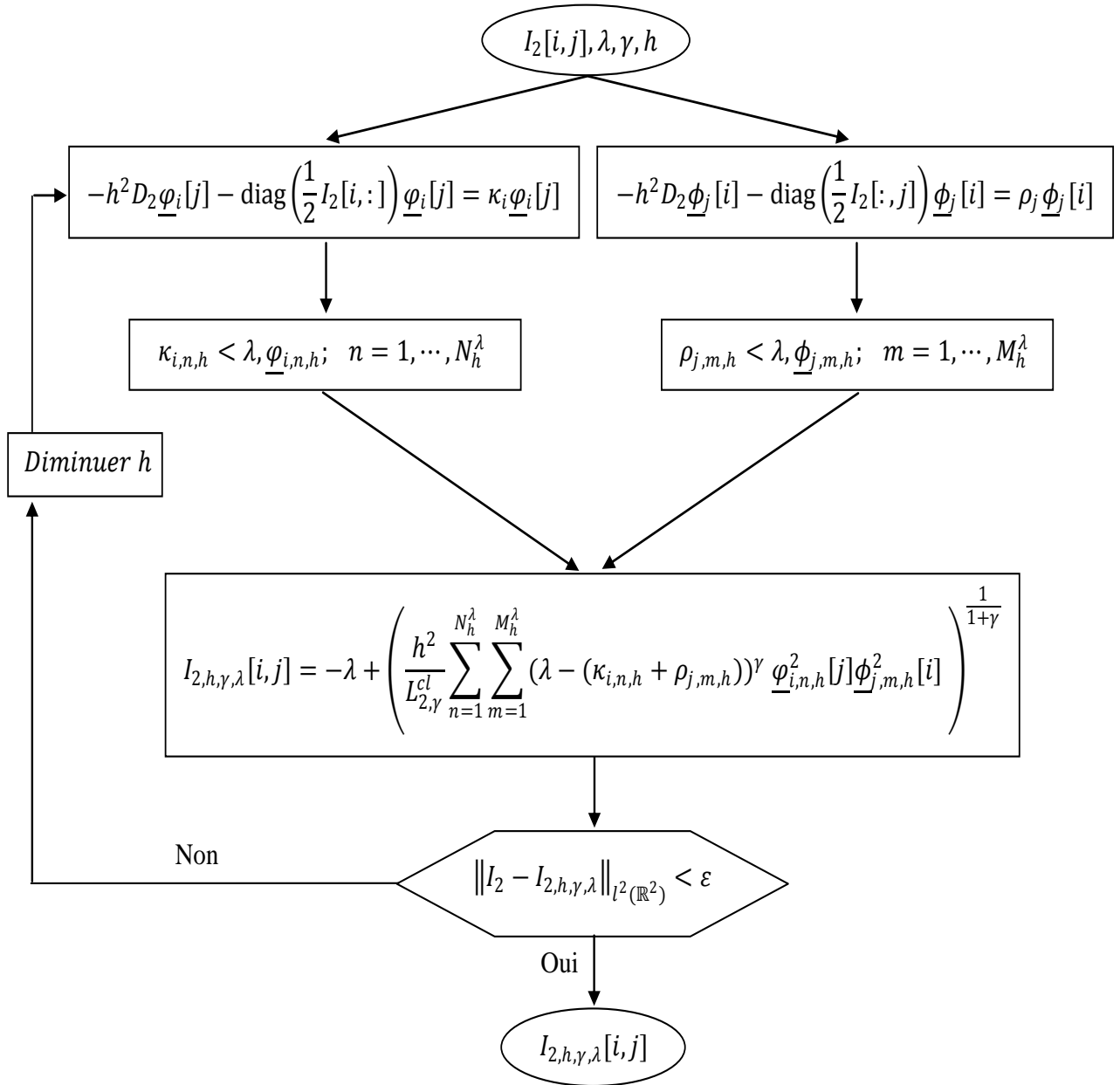


FIGURE 4.1 – Algorithme de reconstruction d’une fonction bidimensionnelle par la SCSA en 2D.

## 4.4 Validation et exemples

### 4.4.1 Influence des paramètres et validation

La formule de la SCSA en 2D (formule (4.8)) dépend de trois paramètres :  $h$ ,  $\lambda$  et  $\gamma$ . Le paramètre  $\lambda$  apporte des informations sur la partie du signal qui sera estimé, analysé et représenté [31]. Par souci de simplicité, nous proposons de prendre  $\lambda = 0$  par la suite c’est-à-dire, nous proposons d’estimer, d’analyser et de reconstruire le signal tout entier. Quant aux deux autres paramètres, comme le montre le théorème 3.3.3, seul le paramètre semi-classique  $h$  influe sur les valeurs propres et fonctions propres associées puisque l’opérateur dépend de  $h$ . Aussi, il est bien

connu que le nombre de valeurs propres négatives dépend du paramètre semi-classique  $h$ . En effet, plus  $h$  diminue, plus le nombre des valeurs propres négatives  $N_h$  (resp.  $M_h$  et  $N_h M_h$ ) augmente. En pratique, comme la méthode de Fourier, il y a toujours un trade-off entre le nombre d'éléments de la base pour gérer et la reconstruction souhaitée. D'un point de vue de mise en oeuvre, il est préférable d'avoir une bonne représentation d'un signal en 2D avec peu de composantes spectrales. Donc nous allons choisir une valeur de  $h$  assez grande ( $0 < h < 1$ ) pour avoir une bonne reconstruction avec un nombre réduit de valeurs propres négatives.

En outre, il a été démontré que, dans le cas 1D, le paramètre  $\gamma$  peut améliorer l'approximation du signal pour un nombre donné de valeurs propres négatives. Cela signifie que pour une valeur donnée de  $h$  (resp.  $N_h$ ,  $M_h$ ), nous pouvons améliorer la représentation de l'image en changeant uniquement la valeur de  $\gamma$ .

Dans ce manuscrit, les tests numériques ont été réalisés, en utilisant un code MATLAB non optimisé sur une machine Inter(R) Core(TM) i3-3217U CPU avec 1.80 GHz, 4Go de mémoire sous le système Windows7, sur deux types de signaux bidimensionnels (fonctions académiques et images). Nous proposons, à travers, les deux exemples présentés dans la partie qui suit, de valider la formule (4.8) et d'étudier l'influence des paramètres  $\gamma$  et  $h$  pour la représentation des fonctions académiques en 2D.

#### 4.4.2 Validation pour des fonctions bidimensionnelles académiques

Comme dans le cas unidimensionnel, et comme premier exemple, notre choix porte sur une fonction académique à deux variables largement utilisée dans la théorie de l'analyse semi-classique. Il s'agit de l'oscillateur harmonique.

**Exemple 4.4.1.** Soit l'oscillateur harmonique défini par :

$$V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28, \quad \text{sur } [-1, 1] \times [-2, 2] \quad (4.12)$$

Dans un cas discret le signal  $V_2$  est donné par  $I_2$  comme suit :

$$I_2[i, j] = -4i^2 - 6j^2 + 28, \quad (4.13)$$

pour  $i, j = 1, \dots, N$  avec  $\Delta x = 6.6 \times 10^{-3}$ ,  $\Delta y = 1.32 \times 10^{-2}$  où  $-1 = x_1 < \dots < 1 = x_N$  et  $-2 = y_1 < \dots < 2 = y_N$ .

En calculant l'erreur moyenne quadratique

$$EQM = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I_2[i, j] - I_{2,h,\gamma,\lambda}[i, j])^2}{N \times N}, \quad (4.14)$$

pour différentes valeurs de  $h$  et  $\gamma$ , nous remarquons que pour  $\gamma = 4$  et  $h = 0.13$  le minimum est atteint comme le montre la figure 4.2(a). La représentation  $I_{2,h,\gamma,0}$  de  $I_2$  en utilisant les valeurs optimales de  $h$  et  $\gamma$  est donnée par la figure 4.2(b). En particulier, nous montrons dans la figure 4.2(c) le signal original  $I_2[40, j]$  et son estimé  $I_{2,0.13,4,0}[40, j]$  avec  $j = 1, \dots, N$ . En dernier, la figure 4.2(d) montre l'erreur relative entre le signal estimé et l'original.

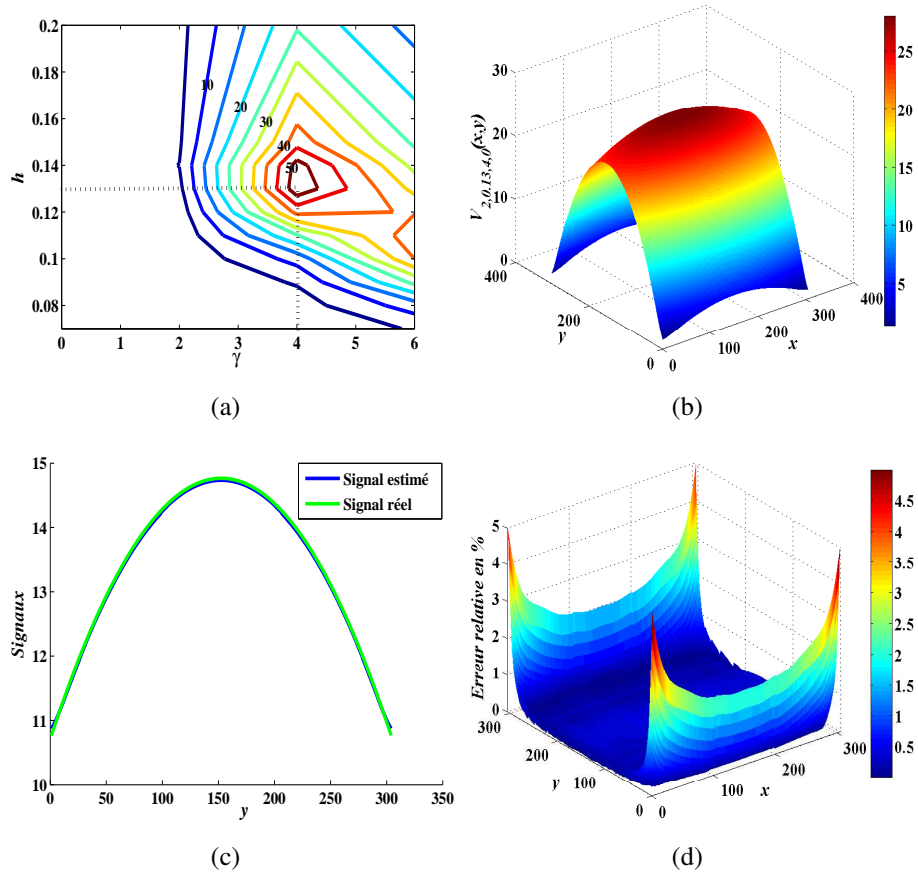


FIGURE 4.2 –  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ . (a). Variation de  $\frac{1}{\|V_2 - V_{2,h,\gamma,0}\|^2}$ ; (b).  $V_{2,0,13,4,0}(x, y)$ ; (c).  $V_2(-0, 742, y)$ ,  $V_{2,0,13,4,0}(-0, 7426, y)$ ; (d). Erreur relative entre la fonction et son estimée.

Dans la partie qui suit nous allons valider quelques propriétés sur le comportement du paramètre semi-classique  $h$  sur le nombre des valeurs propres négatives et l'erreur moyenne quadratique. Quelques remarques sur les valeurs propres et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées seront présentées. Dans la mesure du possible, nous essayons de respecter la chronologie des résultats énoncés dans le troisième chapitre.

La figure 4.3(a) montre la décroissance des valeurs propres négatives en fonction de  $h$ , comme indiqué dans la proposition 3.5.1 tandis que la figure 4.3(b) illustre les variations de l'erreur moyenne quadratique  $J(h)$  en fonction de  $h$  pour  $\lambda = 0$  et  $\gamma = 4$ .

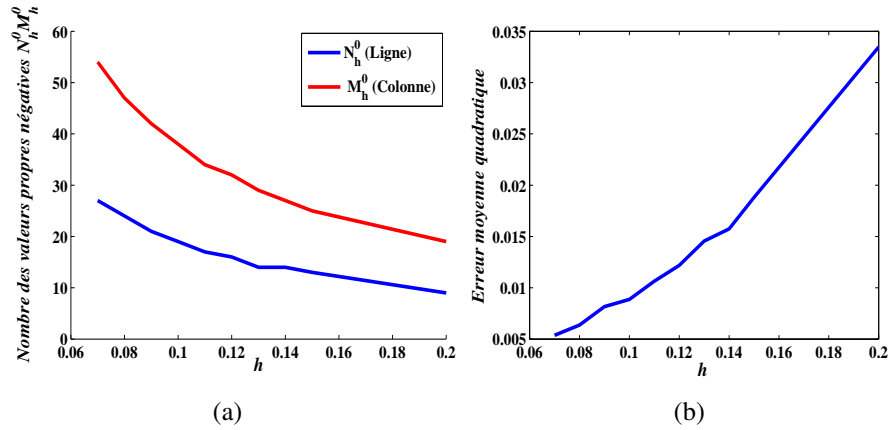


FIGURE 4.3 – Nombre de valeurs propres négatives  $N_h M_h$  (Fig. (a)) et erreur quadratique en fonction de  $h$  (Fig. (b)) pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ .

La figure 4.4 représente les variations de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger (4.1) en fonction de  $h$ . Nous remarquons que ces valeurs propres, initialement positives, sont des fonctions décroissantes en fonction de  $h$  et qu'à chaque passage d'une valeur de  $N_h^0 \times M_h^0$  à une autre, une valeur propre positive devient négative, à partir d'un certain rang de  $h$ .

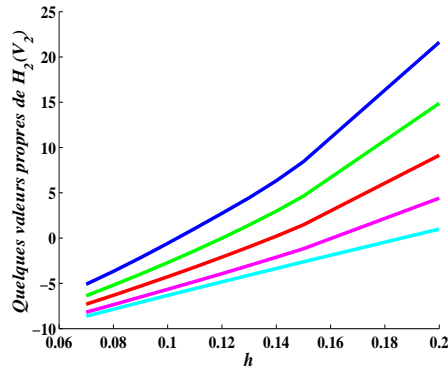


FIGURE 4.4 – Variation de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en fonction de  $h$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ .

Rappelons que la proposition 3.5.2 montre que toutes les valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger bidimensionnel  $\mathcal{H}_2(V_2)$  associées à un potentiel  $V_2$  sont toutes comprise entre  $-\max V_2$  et 0. Pour l'oscillateur harmonique choisi, cette propriété est illustrée par la figure 4.5.

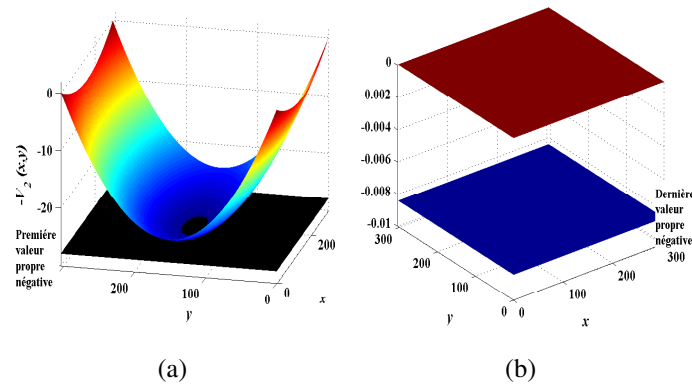


FIGURE 4.5 – Les valeurs propres négatives sont toutes comprises entre  $-V_2(x, y) = 4x^2 + 6y^2 - 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$  et 0 pour  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$ . (a). Première valeur propre négative ; (b). Dernière valeur propre négative

Les figures 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9 représente l’allure du carré de la première, deuxième, vingt cinquième et dernière fonction propre  $L^2$ -normalisée dans le cas où  $h = 0.13$  et  $\gamma = 4$ . Nous remarquons que la première fonction propre localise bien le plus grand pic du potentiel. Elle représente, aussi, la plus grande intensité du signal (Fig. 4.6). La seconde fonction propre (Fig. 4.7) fournit de l’information sur les deux grandes intensités qui suivent la première, et ainsi de suite. La figure 4.8 représente l’allure du carré de la vingt cinquième fonction propre  $L^2$ -normalisée, il est clair que le nombre d’oscillations augmente tandis que leur amplitude diminue. Les faibles intensités qui représentent aussi les petits détails du signal sont liés aux valeurs propres moins importantes, ces derniers sont associés aux dernières fonctions propres qui oscillent asymptotiquement comme le montre la figure 4.9.

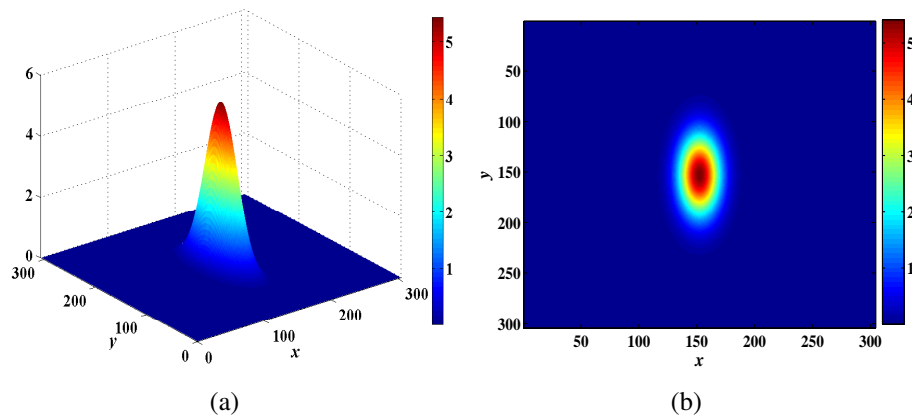


FIGURE 4.6 – Allure de la première fonction propre dans le cas où  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ .

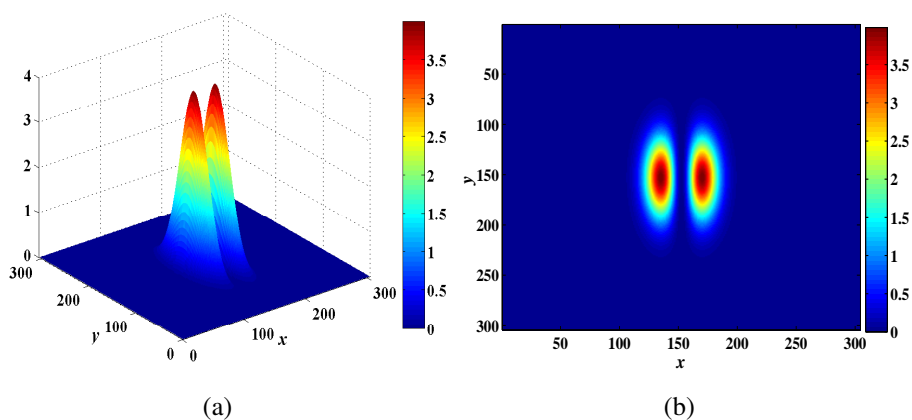


FIGURE 4.7 – Allure de la deuxième fonction propre dans le cas où  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ .

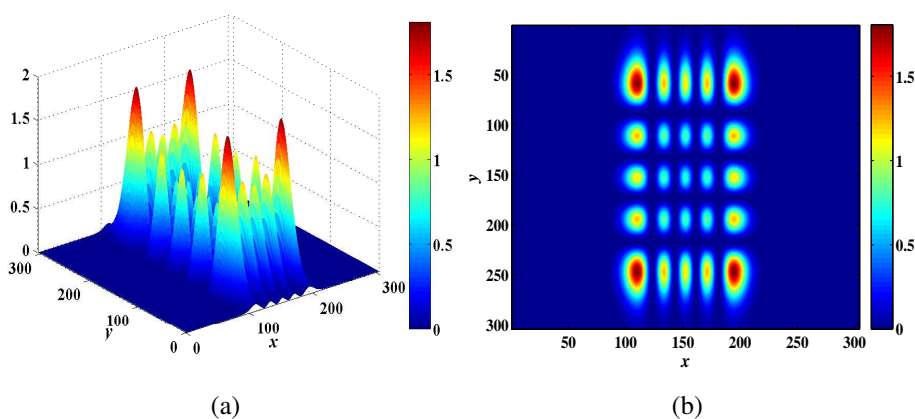


FIGURE 4.8 – Allure de la vingt cinquième fonction propre dans le cas où  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ .

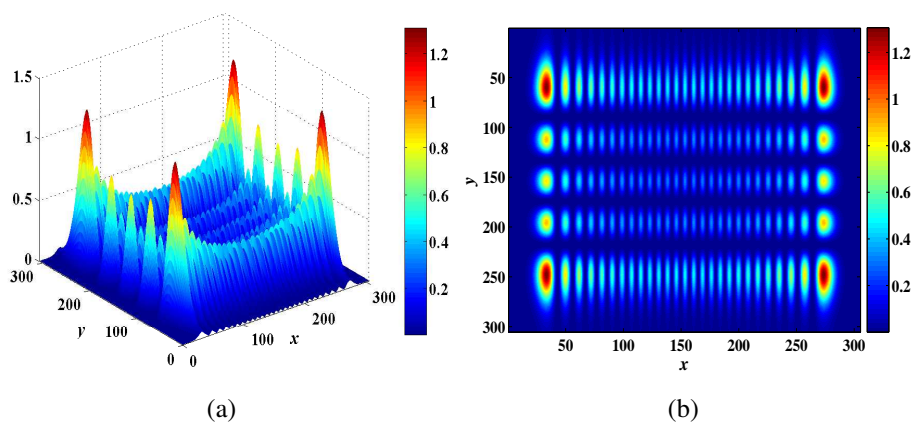


FIGURE 4.9 – Allure de la dernière fonction propre dans le cas où  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ .

Comme indiqué plus haut, la figure ci-dessous (Fig. 4.10) montre une reconstruction d'une partie de l'oscillateur harmonique (Eq. 4.12) pour  $\lambda = 1.5$ ,  $h = 0.13$  et  $\gamma = 4$ .

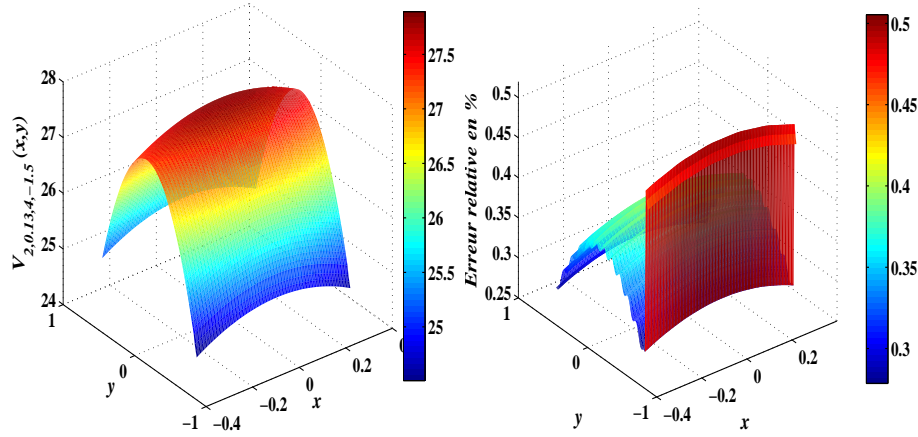


FIGURE 4.10 – (a). Reconstruction de  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  pour  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = -1.5$ ; (b). L'erreur relative correspondante.

Dans ce qui suit, nous présentons une décomposition et une reconstruction d'une autre fonction bidimensionnelle et nous verrons que nous obtenons les mêmes remarques que l'exemple 4.4.1 présenté précédemment.

**Exemple 4.4.2.** *Considérons la fonction définie par :*

$$V_2(x, y) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3\right) \cos(2x + 1 - e^y) + 1. \quad (4.15)$$

pour  $(x, y) \in ]-1, 3[ \times ]-1, 3[$

Dans le cas discret  $V_2$  est donnée par  $I_2$  comme suit :

$$I_2[i, j] = \sin\left(\frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{4}j^2 + 3\right) \cos(2i + 1 - e^j) + 1, \quad (4.16)$$

pour  $i, j = 1, \dots, N$  avec  $\Delta x = \Delta y = 0.02$  où  $-1 = x_1 = y_1 < \dots < 3 = x_N = y_N$

En calculant l'erreur moyenne quadratique (formule (4.14)) pour différentes valeurs de  $h$  et  $\gamma$ , nous remarquons que pour  $\gamma = 4$  et  $h = 6 \times 10^{-3}$  le minimum est atteint comme le montre la figure 4.11(a). La reconstruction  $I_{2,h,\gamma,0}$  de  $I_2$  en utilisant les valeurs optimales de  $h$  et  $\gamma$  est donnée par la figure 4.11(b). En particulier, nous montrons dans la figure 4.11(c) une représentation du signal original  $I_2[20, j]$  et son estimé  $I_{2,0.006,4,0}[20, j]$ , avec  $j = 1, \dots, N$ . La figure 4.11(d) montre l'erreur relative entre le signal estimé et l'original.

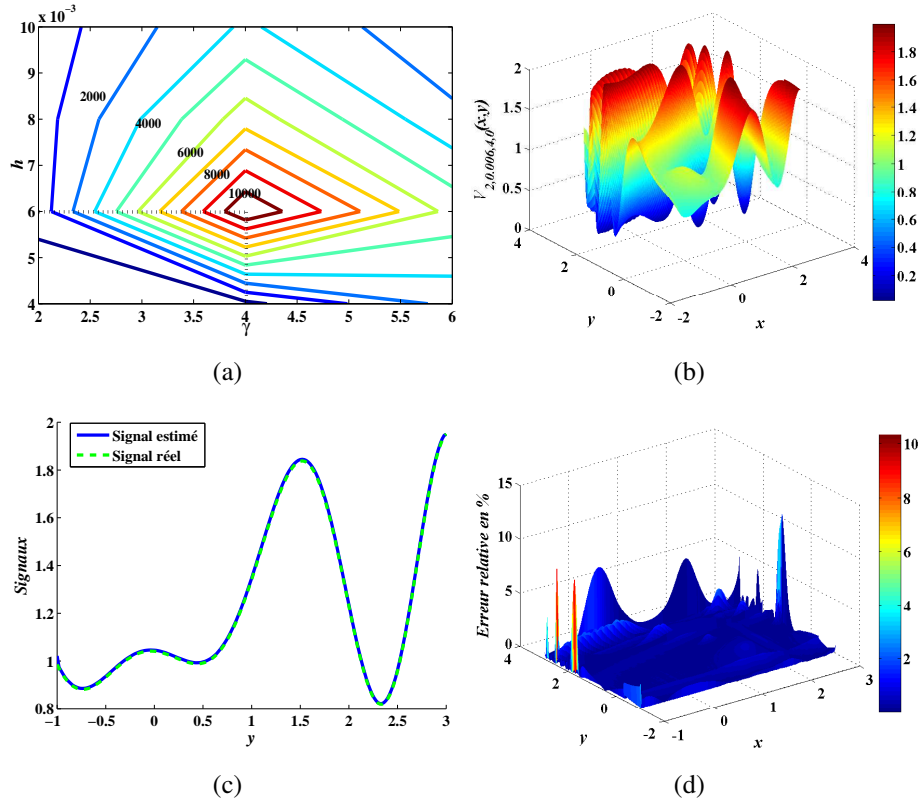


FIGURE 4.11 –  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ . (a). Variation de  $\frac{1}{\|V_2 - V_{2,h,\gamma,0}\|^2}$ ; (b).  $V_{2,0.006,4,0}(x, y)$ ; (c).  $V_2(-0.62, y)$ ,  $V_{2,0.006,4,0}(-0.62, y)$ ; (d). Erreur relative entre la fonction et son estimée.

Le comportement du paramètre semi-classique  $h$  sur le nombre des valeurs propres négatives et de l'erreur moyenne quadratique est montré dans les figures 4.12(a) et 4.12(b). Il est clair que le nombre de valeurs propres négatives est une fonction décroissante en  $h$ .

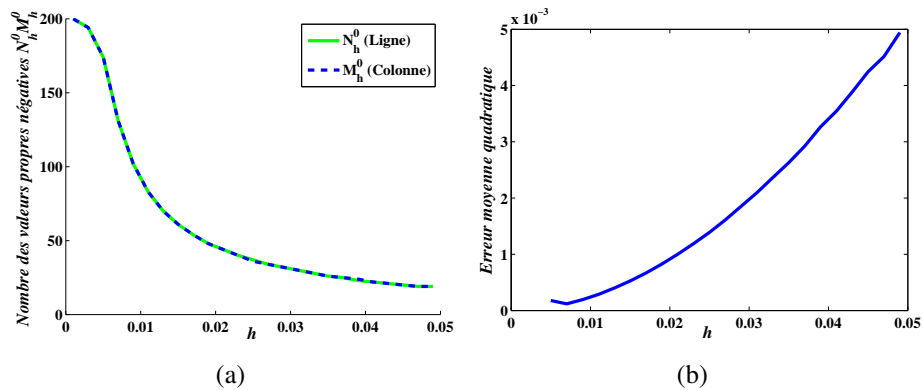


FIGURE 4.12 – Nombre de valeurs propres négatives  $N_h M_h$  (Fig. (a)) et erreur moyenne quadratique (Fig. (b)) en fonction de  $h$  pour  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ .

La variation de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger semi-classique est présentée dans les figures 4.4.2. Il est clair que pour chaque passage d'un  $K_h$  à  $K_h + 1$  une valeur propre positive devient négative.

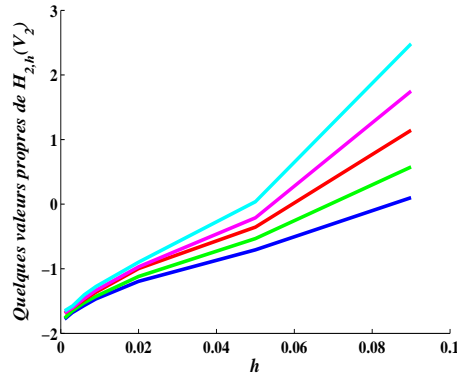


FIGURE 4.13 – Variation de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en fonction de  $h$  pour  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ .

Comme indiqué dans la proposition 3.5.2, la figure 4.14 montre que toutes les valeurs propres négatives sont comprises entre 0 et  $-\max_{(x,y)} V_2$ .

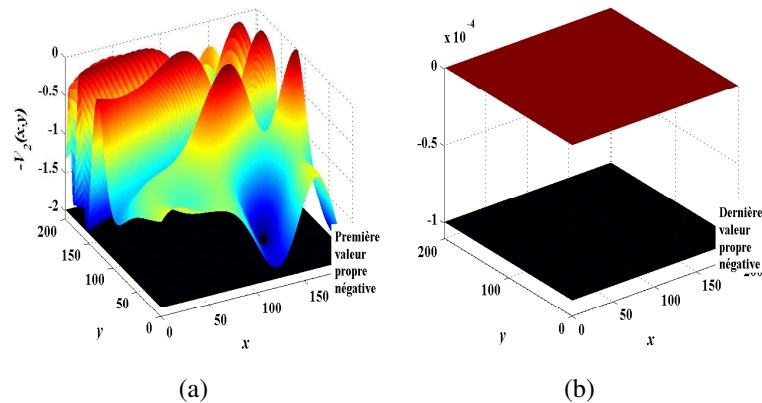


FIGURE 4.14 – Les valeurs propres négatives sont toutes comprises entre  $-V_2(x, y) = -\sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) - 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$  et 0 pour  $h = 6 \times 10^{-3}$ . (a). Première valeur propre négative ; (b). Dernière valeur propre négative.

En dernier, les figures 4.15, 4.16 et 4.17 illustrent l'allure du carré de la première, deuxième et dernière fonction propre  $L^2$ -normalisée. On voit bien que le nombre des oscillations des fonctions propres  $L^2$ -normalisées au carré augmente alors que leur amplitude diminue.

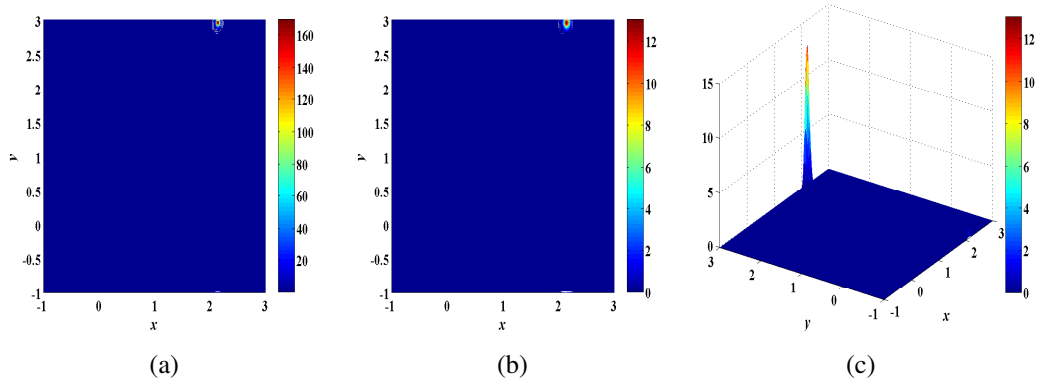


FIGURE 4.15 – (a). Allure de la première fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l’allure de la première fonction pour  $h = 6 \times 10^{-3}$  et  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ .

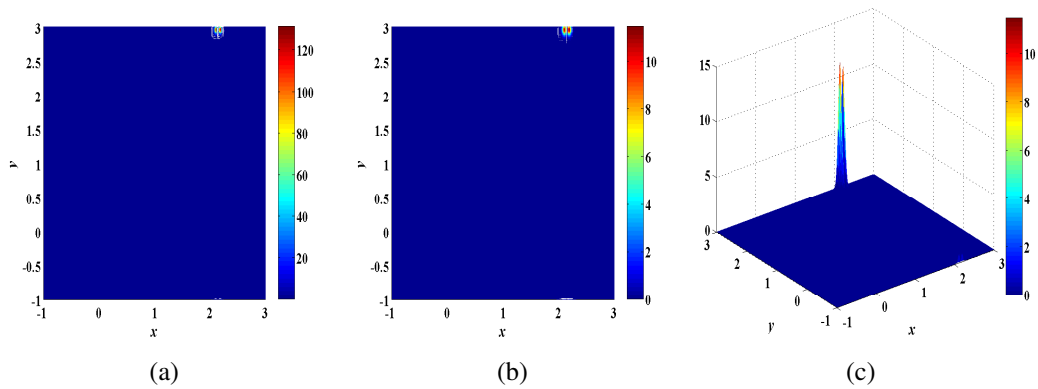


FIGURE 4.16 – (a). Allure de la deuxième fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l’allure de la deuxième fonction pour  $h = 6 \times 10^{-3}$  et  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ .

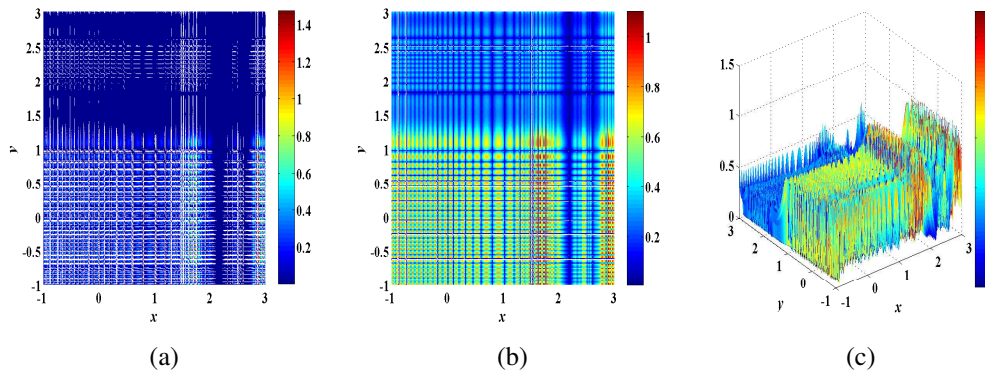


FIGURE 4.17 – (a). Allure de la dernière fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l’allure de la dernière fonction pour  $h = 6 \times 10^{-3}$  et  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ .

**Remarque 4.4.1.** *Nous avons testé l'algorithme sur différents exemples de différente taille. Nous avons remarqué que la valeur optimale de  $\gamma$  est égale à 4.*

## Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à la présentation des divers aspects numériques de notre méthode de résolution. Nous avons commencé par détailler la discrétisation de la méthode, ce qui nous a permis de décrire le schéma numérique. Nous y avons entre autre souligné l'importance que joue le paramètre semi classique sur la décomposition du signal et nous avons proposé une méthode que nous avons jugée efficace pour le choix de  $h$ . L'influence des autres paramètres dont dépend cette méthode ont été ensuite discutés. Les deux exemples présentés et d'autres étudiés nous ont permis de valider la méthode et de noter certaines propriétés de la méthode tels que : l'influence du paramètre  $h$  sur le nombre des valeurs propres négatives, les fonctions propres et l'erreur d'approximation. Nous allons à présent appliquer cette méthode pour la représentation d'images tout en la comparant avec d'autres méthodes de représentation d'images, c'est, en effet, l'objet du cinquième et dernier chapitre de la thèse.

# Chapitre 5

## SCSA en 2D et représentation d'images

Ce chapitre présente l'une des applications possibles de la méthode SCSA en 2D qui est la représentation d'images. Nous y introduisons tout d'abord quelques notions d'images. Nous y présentons ensuite, en détails, des exemples de représentation d'images en utilisant la méthode SCSA en 2D. La dernière partie du chapitre est consacrée à la comparaison de la représentation d'images entre de la SCSA en 2D et d'autres méthodes de représentation d'images.

### 5.1 Présentation générale

Comme dans la plupart des méthodes de traitement des signaux bidimensionnels, connues aussi sous le nom de traitement d'images, les méthodes sont validées avec des images test standard en niveaux de gris et/ou en couleur. En effet, de nos jours, le traitement d'images joue un rôle crucial, il permet l'amélioration de la qualité de l'image ou la mise en évidence de quelques unes de ses caractéristiques ce qui facilite la compréhension des phénomènes et l'établissement des diagnostics dans des domaines aussi variés que la télédétection (astronomie, météo, ...), l'imagerie médicale (échographie, tomographie, ...), robotique (contrôle de qualité, véhicules autonomes, ...), sécurité (reconnaissance terrestre, identification d'empreintes digitales, ...) pour ne citer que quelques exemples.

Dans la partie qui suit, nous présentons quelques définitions et propriétés utiles sur la notion de l'image. Quant à la troisième partie est consacrée à la reconstruction d'images par la SCSA en 2D. Nous commencerons par représenter une image en niveaux de gris très connu et très utilisé en traitement d'images suivie par d'autres images. Nous verrons que les propriétés présentées dans la section 3.5.2 resteront valables pour les images.

En dernier, nous terminerons ce chapitre par des résultats que nous avons obtenus lors de la comparaison de la SCSA en 2D à deux autres méthodes de représentation d'images existantes.

## 5.2 Quelques notions d'images

**Définition 5.2.1.** Soit  $\mathbf{U}$  un domaine fermé de  $\mathbb{R}^2$ . Une image est une fonction (signal)  $u$  continue aux coordonnées spatiales de  $\mathbf{U}$  dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} u : \mathbf{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ (x, y) &\longrightarrow u(x, y). \end{aligned} \quad (5.1)$$

$(x, y)$  représente un élément de l'image et  $u(x, y)$  représente la valeur de l'intensité de cet élément.

De cette façon l'image n'est pas exploitable par la machine numérique, d'où la nécessité de sa numérisation.

**Définition 5.2.2.** Une image numérique est une image dont la surface est divisée en éléments de taille fixe appelés pixels, ayant comme caractéristique le niveaux de gris ou de couleur, ces derniers ne peuvent prendre qu'un nombre discret de valeur comprise entre 0 et 255.

Plus précisément l'image numérisée est définie comme suit :

**Définition 5.2.3.** Pour  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ , soient  $\mathbf{D} = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2 \subset \mathbb{N}^2$  où  $\mathbf{I}_l = \{0, 1, \dots, N_l - 1\}$ ,  $l = 1, 2$  et  $\mathbf{J}$  un ensemble de  $\mathbb{N}$ .

Une image de taille  $N_1 \times N_2$  est une fonction  $u$  aux coordonnées spatiales définie par :

$$\begin{aligned} u : \mathbf{D} &\longrightarrow \mathbf{J}^m, \\ [i, j] &\longrightarrow u[i, j]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Donnons un exemple.

**Exemple 5.2.1.** 1. Une image en noir et blanc (binaire) est représentée par la fonction  $u_1 : \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 255\}$ .

2. Une image en niveaux de gris est représentée par la fonction  $u_2 : \mathbf{D} \longrightarrow \{0, \dots, 255\}$ .

3. Une image en couleur est représentée par la fonction  $u_3 : \mathbf{D} \longrightarrow \{0, \dots, 255\}^3$ , (chaque pixel contient les valeurs des trois canaux 'rouge, vert et bleu').

La figure ci-dessous (Fig. 5.1) représente les différents types d'images cités précédemment.



FIGURE 5.1 – (a). Image de Lena en noir et blanc ; (b). Image de Lena en niveaux de gris ; (c). Image de Lena en couleur.

Une image est aussi un ensemble de textures, de régions et de contours. Ces derniers se définissent comme suit :

- Une texture est un champ de l'image qui apparaît comme un domaine cohérent et homogène, c'est-à-dire forment un tout pour un observateur.
- Une région est un ensemble de pixels regroupés selon un critère pré-définis. Autrement dit une région constitue une partition de l'image.
- Un contour (bord) est la frontière entre deux régions différentes. C'est la limite entre deux pixels dont les intensités représentent une différence significative.

### 5.3 Exemples de représentation d'images

La représentation d'image ou encore la reconstruction d'image consiste à retrouver l'image qui a été décomposée. Cela est impossible étant donné que, lors de la décomposition, on perd de l'information. On cherche donc à retrouver au mieux l'image en question.

Comme premier exemple de représentation d'images, notre choix porte sur l'image de Lena<sup>1</sup> en niveaux de gris. En effet, cette dernière est très utilisée comme image test dans les algorithmes de traitement d'images vu qu'elle contient un mélange intéressant de détails, de régions uniformes et de textures.

**Exemple 5.3.1.** *Considérons l'image au niveaux de gris de Lena de taille  $512 \times 512$ .*



FIGURE 5.2 – Image originale de Lena.

*En calculant l'erreur moyenne quadratique (formule (4.14)) entre l'image originale et estimée avec la formule de la SCSA en 2D (formule (4.8)), nous remarquons que les valeurs optimales de  $\gamma$  et  $h$  sont données, respectivement, par 4 et 0.2 comme le montre la figure 5.3(a). En utilisant ces*

---

1. <http://www.ece.rice.edu/wakin/images/>

valeurs optimales, la figure 5.3(b) montre une bonne reconstruction de l'image. En particulier la figure 5.3(c) illustre la reconstruction de la ligne 100. L'erreur relative entre l'image originale et reconstruite est présentée dans la figure 5.3(d).

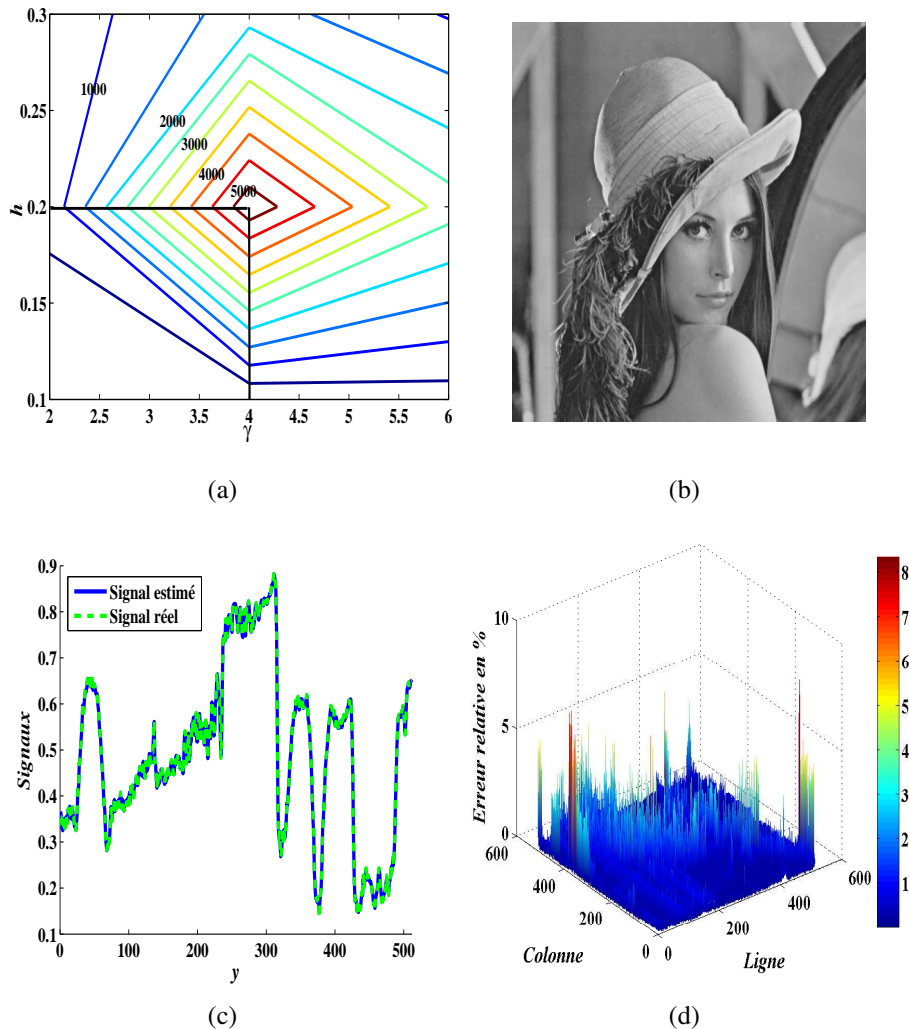


FIGURE 5.3 – (a). Inverse de l'erreur moyenne quadratique ; (b). Reconstruction de l'image de Lena ; (c). Représentation de la 100<sup>ième</sup> ligne de l'image de Lena et de son estimée ; (d). Erreur relative entre l'image de Lena et son estimée.

Comme dans les exemples illustrés dans le chapitre 4, la partie qui suit est consacrée à la validation de quelques propriétés du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique où l'image est considérée comme son potentiel.

La figure 5.4(a) montre la décroissance des valeurs propres négatives en fonction de  $h$ , comme indiqué dans la proposition 3.5.1 tandis que la figure 5.4(b) illustre les variations de l'erreur quadratique  $J(h)$  en fonction de  $h$  pour  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$ .

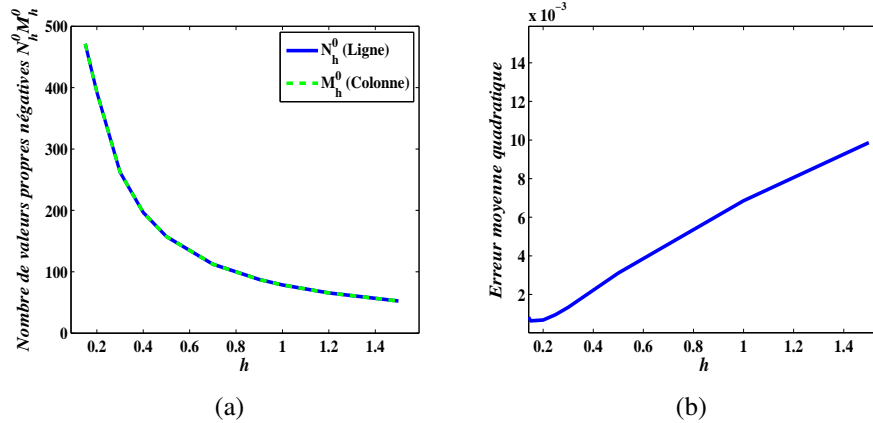


FIGURE 5.4 – Nombre de valeurs propres négatives  $N_h^0 M_h^0$  (Fig. (a)) et erreur moyenne quadratique (Fig. (b)) en fonction de  $h$  pour l'image de Lena.

La figure 5.5 représente les variations de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en fonction de  $h$ . Comme indiqué précédemment, nous remarquons que ces valeurs propres, initialement positives, sont des fonctions décroissantes en fonction de  $h$  et qu'à chaque passage d'une valeur de  $N_h^0 \times M_h^0$  à une autre, une valeur propre positive devient négative, à partir d'un certain rang de  $h$ .

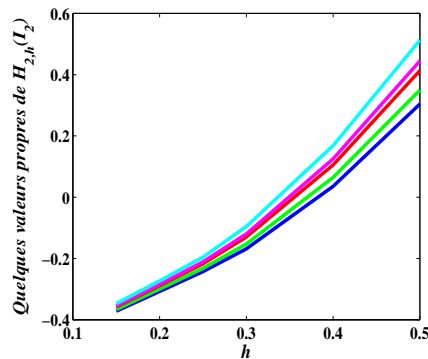


FIGURE 5.5 – Variation de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en fonction de  $h$  pour l'image de Lena.

Comme indiqué dans la proposition 3.5.2, les figures 5.6(a) et 5.6(b) montrent que la plus petite valeur propre négative est plus grande que  $-I_2$  (Fig. 5.6(a)), où  $I_2$  est la matrice contenant les intensités de l'image de Lena, tandis que la plus grande valeur propre négative est strictement inférieure à 0 (Fig. 5.6(a)). Autrement dit : toutes les valeurs propres négative sont comprises entre  $-\max I_2$  et 0.

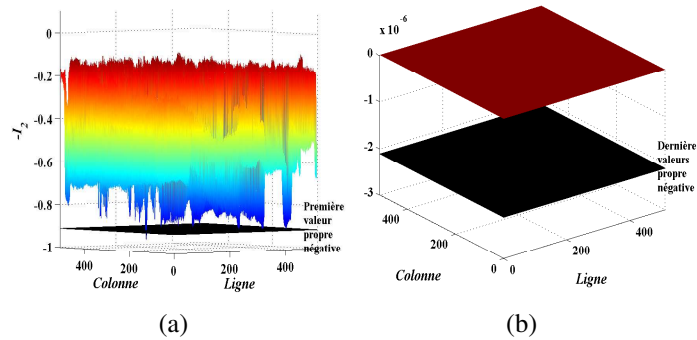


FIGURE 5.6 – Première valeur propre négative (Fig. (a)) et dernière valeur propre négative (Fig. (b)) de l'image de Lena pour  $h = 0.2$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$ .

Les figures 5.7, 5.8, 5.9 et 5.10 représentent l'allure du carré de la première, deuxième, dixième et dernière fonction propre  $L^2$ -normalisée dans le cas où  $h = 0.2$ . Nous remarquons que la première fonction propre localise bien le plus grand pic de l'image de Lena (le pixel ayant la plus forte intensité) (Fig. 5.7). La deuxième, représente les deux pics qui suivent le plus grand pic (Fig. 5.8), tandis que les dernières fonctions propres représentent les petits détails de l'image i. e. : pixels avec faible intensité (Fig. 5.9 et Fig. 5.10).

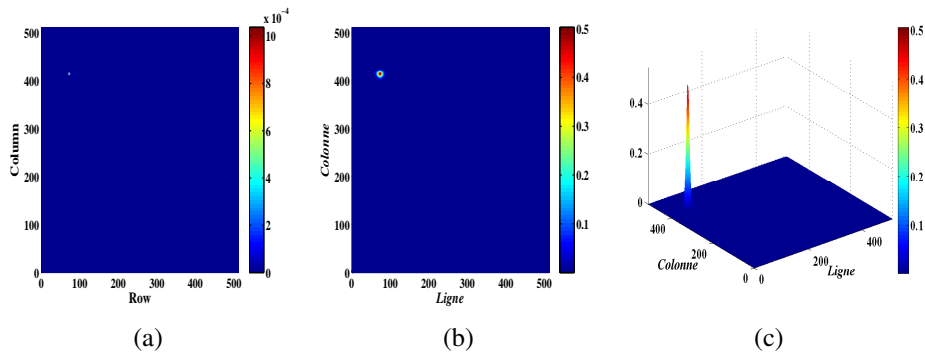


FIGURE 5.7 – (a). Allure de la première fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la première fonction propre dans le cas où  $h = 0.2$  pour l'image de Lena.

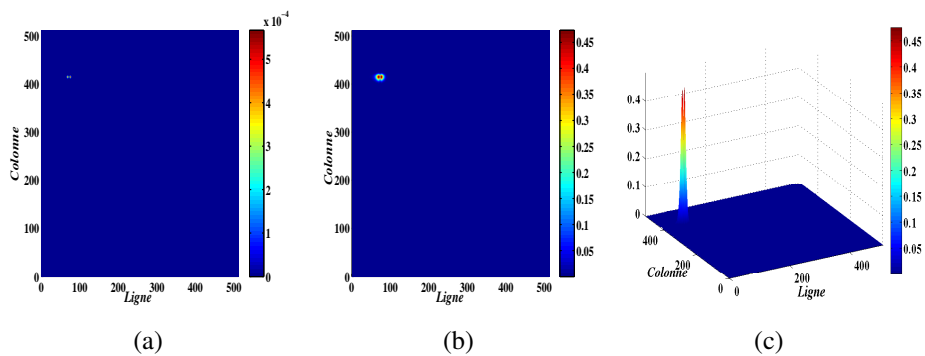


FIGURE 5.8 – (a). Allure de la deuxième fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la deuxième fonction propre dans le cas où  $h = 0.2$  pour l'image de Lena.

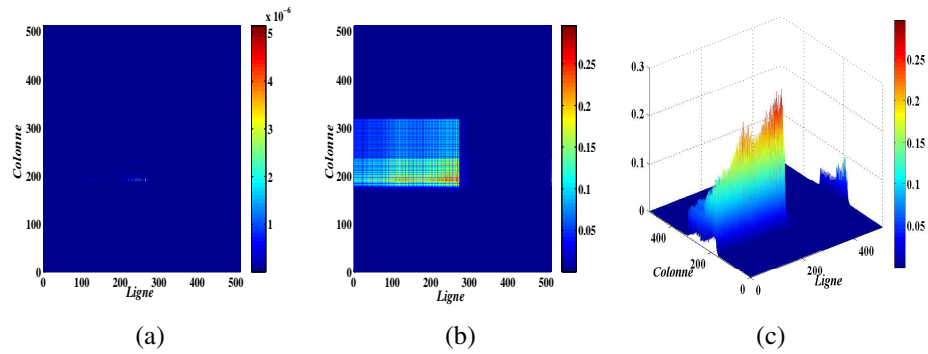


FIGURE 5.9 – (a). Allure de la dixième fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la dixième fonction propre dans le cas où  $h = 0.2$  pour l'image de Lena.

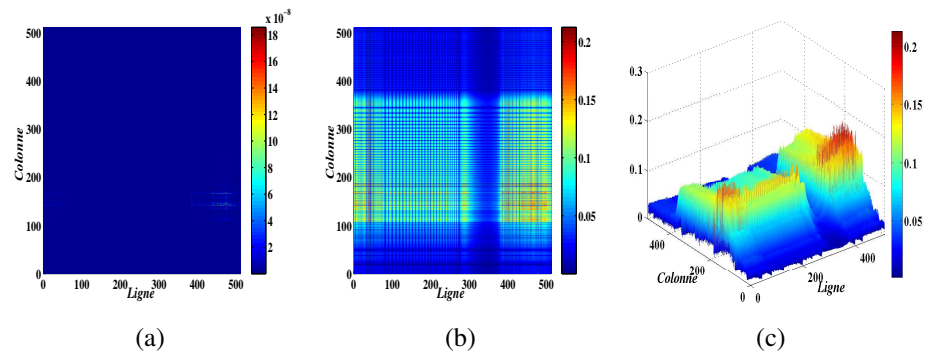


FIGURE 5.10 – (a). Allure de la dernière fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la dernière fonction propre dans le cas où  $h = 0.2$  pour l'image de Lena.

Comme deuxième exemple, notre choix porte sur l'image en niveaux de gris de Peppers<sup>2</sup>.

**Exemple 5.3.2.** L'image de Peppers en niveaux de gris de taille  $256 \times 256$  est donnée par la figure ci dessous (Fig. 5.11) :



FIGURE 5.11 – Image originale de Peppers.

2. <http://sipi.usc.edu/database/database>

La figure 5.12(a) représente les variations de l'erreur moyenne quadratique (formule (4.14)) entre l'image originale de Peppers et son estimée calculée avec la formule de la SCSA en 2D (formule (4.8)), pour différentes valeurs de  $h$  et  $\gamma$ . Nous remarquons que les valeurs optimales de  $\gamma$  et  $h$  sont données, respectivement, par 4 et 0.18. Une bonne reconstruction de l'image est donnée par la figure 5.12(b). En particulier la figure 5.12(c) illustre la reconstruction de la 30<sup>ième</sup> ligne, et en dernier l'erreur relative entre l'image originale et celle reconstruite est présentée dans la figure 5.12(d).

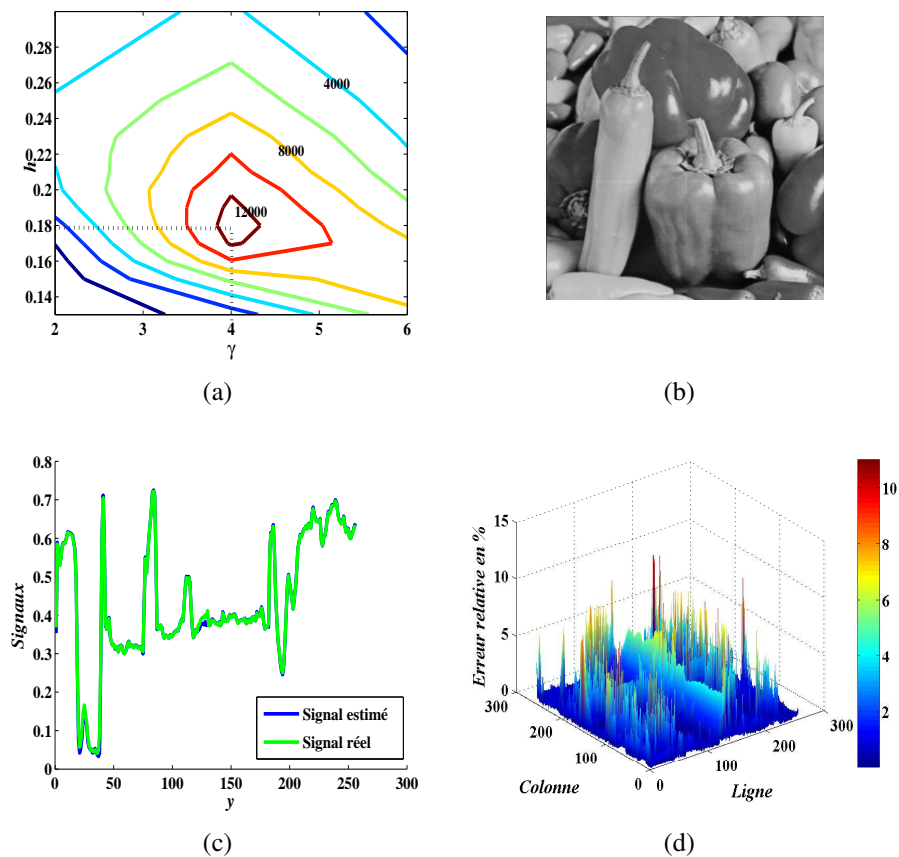


FIGURE 5.12 – (a). Inverse de l'erreur moyenne quadratique ; (b). Reconstruction de l'image de Peppers ; (c). Représentation de la 30<sup>ième</sup> ligne de l'image de Peppers et de son estimée ; (d). Erreur relative entre l'image originale et son estimée.

Le comportement du paramètre semi-classique  $h$  sur le nombre de valeurs propres négatives et l'erreur moyenne quadratique  $J(h)$ , pour  $\lambda = 0$  et  $\gamma = 4$ , est présenté par les figures 5.13(a) et 5.13(b). Comme précédemment, le nombre des valeurs propres négatives  $N_h^0 M_h^0$  est une fonction décroissante en  $h$ .

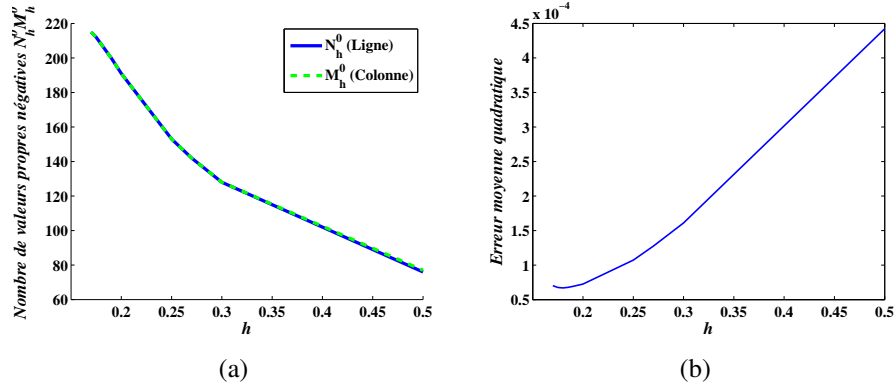


FIGURE 5.13 – Nombre de valeurs propres négatives  $N_h^0 M_h^0$  (Fig. (a)) et erreur moyenne quadratique (Fig. (b)) en fonction de  $h$  pour l’image de Peppers.

L’allure de quelques valeurs propres de l’opérateur de Schrödinger semi-classique associée à l’image de Peppers est présentée dans la figure (5.14). Nous remarquons que plus  $h$  tend vers 0, plus le nombre de valeurs propres négatives  $N_h^0 M_h^0$  augmente.

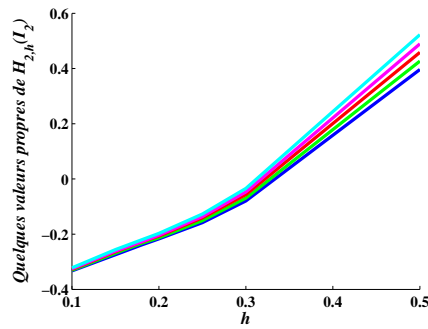


FIGURE 5.14 – Variation de quelques valeurs propres de l’opérateur de Schrödinger en fonction de  $h$  pour l’image de Peppers.

Les figures 5.15(a) et 5.15(b) montrent que pour un  $h$  permettant une bonne reconstruction de l’image toutes les valeurs propres négatives sont comprises entre  $-\max I_2$  et 0.

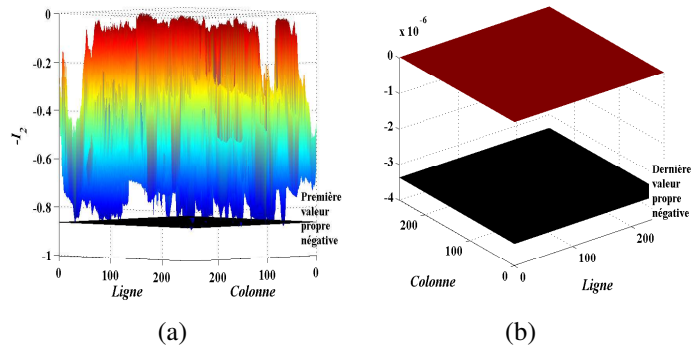


FIGURE 5.15 – Première valeur propre négative (Fig. (a)) et dernière valeur propre négative (Fig. (b)) de l’image de Peppers pour  $h = 0.18$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$ .

Les figures 5.16, 5.17 et 5.18 illustrent l'allure du carré de la première, troisième et dernière fonction propre  $L^2$ -normalisée pour  $h = 0.18$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$ . La propriété de localisation des fonctions propres est conservée. La dernière fonction propre représente les petits détails de l'image, et donc comme deuxième propriété intéressante des fonctions propres, elle contient l'information pertinente sur l'image.

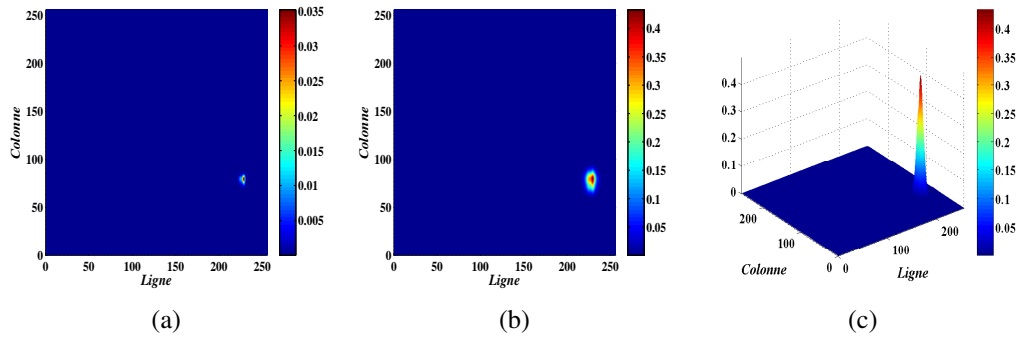


FIGURE 5.16 – (a). Allure de la première fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la première fonction propre dans le cas où  $h = 0.18$  pour l'image de Peppers.

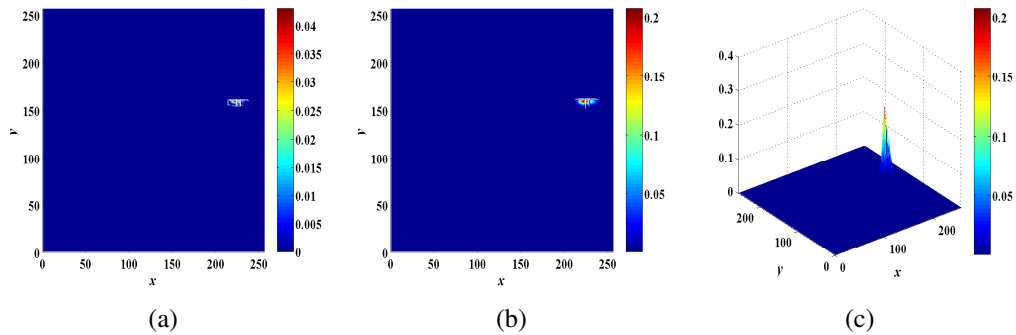


FIGURE 5.17 – (a). Allure de la troisième fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la troisième fonction propre dans le cas où  $h = 0.18$  pour l'image de Peppers.

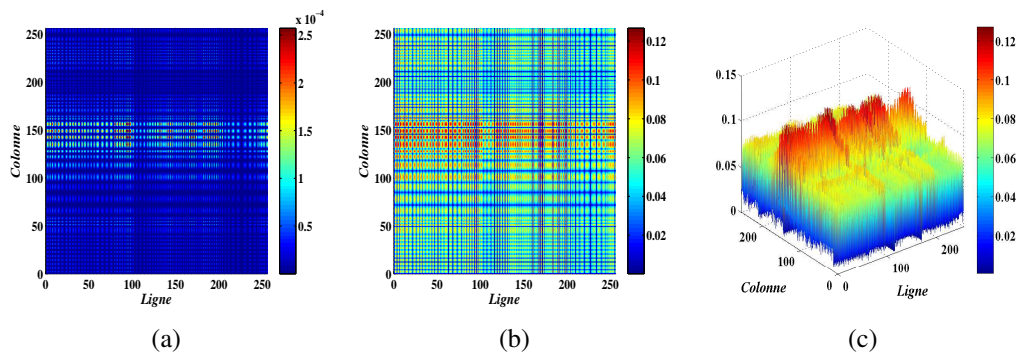


FIGURE 5.18 – (a). Allure de la dernière fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la dernière fonction propre dans le cas où  $h = 0.18$  pour l'image de Peppers.

## 5.4 Comparaison de la SCSA en 2D avec d'autres méthodes de représentation d'images

Pour corroborer l'efficacité de la méthode proposée dans ce manuscrit pour la représentation de l'image, un benchmark a eu lieu. En effet, nous allons comparer, dans cette section, la représentation d'images par la méthode SCSA en 2D avec d'autres méthodes de représentation. Notre choix porte sur les méthodes S-Tree Coding (STC) [10] et Overlapping Rectangular Non-symmetry and Anti-packing Model (ORNAM) [83].

La première méthode, qui est une combinaison de deux méthodes, représente l'image à l'aide d'un bloc homogène en utilisant une représentation spatiale arborescente. Le bloc homogène est obtenu en partitionnant l'image de départ selon la règle de décomposition binaire. En effet, il s'agit de décomposer, à chaque étape, l'image en deux sous-images. La décomposition s'achève lorsque toutes les sous-images obtenues sont homogènes. Une fois le bloc homogène obtenu, qui signifie par abus de langage un ensemble de sous-images homogènes, l'image est donc reconstruite par la représentation spatiale arborescente. Le schéma ci-dessous (Fig. 5.19) illustre la reconstruction de l'image en utilisant la méthode STC.

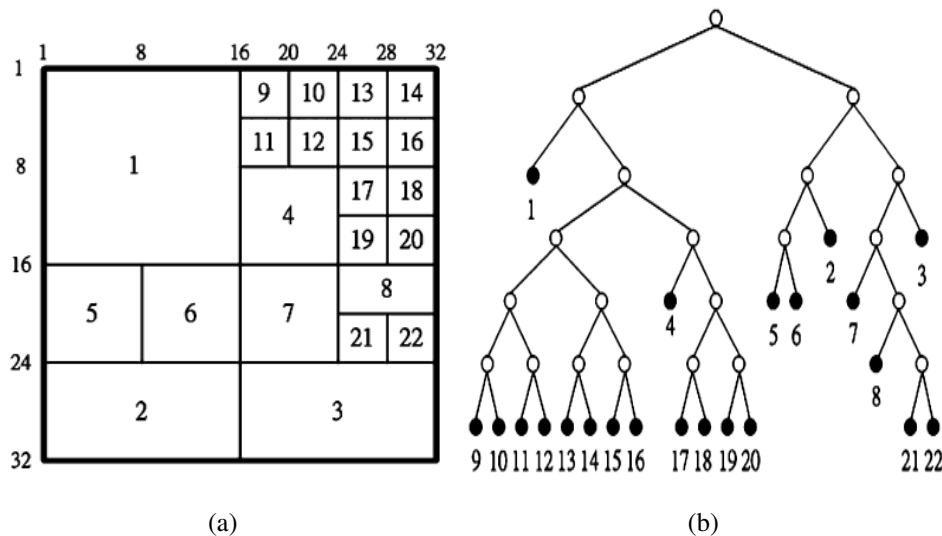


FIGURE 5.19 – (a). Un exemple de partitionnement d'image ; (b). La structure de construction binaire [10].

Tandis que la deuxième méthode, nommée ORMAN de *Overlapping Rectangular Non-Symmetry and Anti-packing Model*, est une combinaison entre trois méthodes lesquelles sont données par : *Overlapping Rectangular (OR)*, *Non-Symmetry and Anti-packing Model (NAM)* et l'approche *Gouraud shading*. En effet l'approche ORMAN consiste à étendre la méthode *Spatial Data Structures (SDS)*, laquelle est basée sur une représentation des images en niveaux de gris à partir des images binaires par le principe du *Non-Symmetry and Anti-packing Model*, par l'utilisation de la méthode *Overlapping Rectangular*, laquelle permet une bonne représentation des images binaires, et une extension de l'approche *Gouraud shading*.

Comme dans [10, 83], quatre images test en niveaux de gris, i.e. ; Lena, F16<sup>3</sup>, Barbara<sup>4</sup> et Baboon<sup>5</sup>, chacune de taille  $512 \times 512$  (voir Figure 5.20) et le peak signal-to-noise ratio (PSNR) sont utilisés à la fois pour montrer la performance de la méthode proposée. Aussi, pour la comparabilité des résultats, les erreurs de tolérance choisies sont identiques à celles présentées dans [10, 83]. Elles sont données par  $\varepsilon = \{10, 20, 30, 40\}$ . Tous les paramètres de ces deux méthodes sont fixés comme suggéré dans les travaux originaux. Pour notre approche, comme cité dans la remarque 4.4.1 la valeur optimale de  $\gamma$  est 4 et celle de  $h$  a été choisie de telle façon à obtenir une valeur maximale du PSNR.

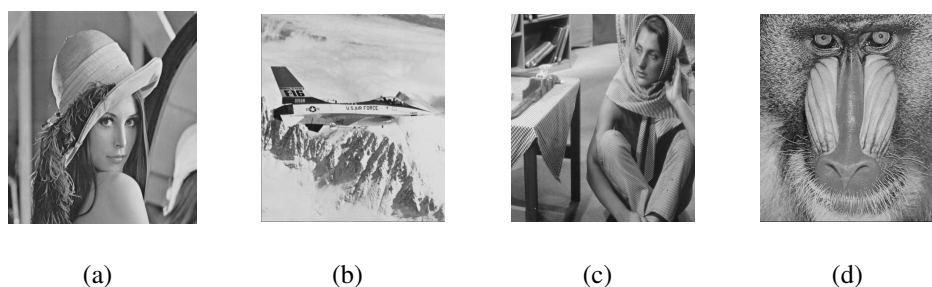


FIGURE 5.20 – Images originales : (a). Lena ; (b). F16 ; (c). Barbara ; (d). Baboon.

Le tableau 5.1 montre que la représentation de l'image basée sur la méthode SCSA est plus performante que les méthodes STC et ORNAM pour  $\varepsilon = 10$  et 20 ce qui signifie que la SCSA est plus appropriée pour une bonne représentation des images en niveaux de gris. Ceci est réalisable grâce aux propriétés des fonctions propres  $L^2$ -normalisées et du bon choix du paramètre semi-classique.

---

3. <http://sipi.usc.edu/database/database>

4. <http://perso.telecom-paristech.fr/delon/Demos/Impulse/>

5. <http://perso.telecom-paristech.fr/delon/Demos/Impulse/>

Algorithmes	$\varepsilon$	Lena	F16	Barbara	Baboon
STC [10]	10	38.52	39.13	39.85	40.33
	20	33.02	34.14	33.94	32.79
	30	29.49	30.88	29.91	28.81
	40	27.17	28.39	27.16	26.10
ORNAM [83]	10	37.90	37.90	38.78	40.55
	20	31.73	31.97	32.18	33.00
	30	28.22	28.57	28.43	28.87
	40	25.62	26.02	25.85	26.04
2D SCSA	10	44.62	44.66	41.83	41.29
	20	33.54	34.76	33.20	33.45
	30	29.49	30.92	26.80	27.46
	40	26.19	26.99	23.56	24.32

TABLE 5.1 – Comparaison du PSNR en dB entre les méthodes STC, ORNAM et SCSA en 2D pour la représentation des images.

## Conclusion

Ce dernier chapitre a fait l'objet d'une étude comparative entre la représentation d'images par la méthode de la SCSA en 2D et d'autres méthodes de représentation d'images qui sont STC et ORMAN. Nous avons, tout d'abord, introduit quelques notions d'images. Ensuite nous avons validé la SCSA en 2D, à l'aide des images test en niveaux de gris de différentes tailles. Cette validation nous a permis de noter que les différentes propriétés et résultats, obtenus en utilisant des fonctions académiques en 2D, resteront valables pour le cas d'images. La comparaison de la méthode SCSA en 2D avec les méthodes STC et ORMAN pour la représentation d'images nous a permis de conclure que l'approche proposée est plus appropriée à la présentation d'images.

# Conclusion

Dans ce mémoire de thèse, nous avons présenté une nouvelle approche de décomposition des fonctions bidimensionnelles laquelle est une généralisation en deux dimensions de l'approche *Semi-Classical Signal Analysis* (SCSA). La mise en place de cette approche a découlé de la problématique posée.

Par opposition aux méthodes de décomposition existantes, l'approche SCSA en 2D, laquelle respecte bien les conditions visées par la problématique, consiste à décomposer la fonction selon un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives. En effet, il s'agit d'interpréter une fonction à décomposer  $V_2$  comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnelle  $\mathcal{H}_{2,h}$  (formule 3.2), ensuite à utiliser uniquement un nombre fini  $K_h^\lambda$  de ses données spectrales  $\{\psi_{k,h}, \mu_{k,h}\}_{k=1}^{K_h^\lambda}$  lors de la décomposition de la fonction  $V_2$ .

Par ailleurs, nous avons souligné que l'ensemble des fonctions élémentaires adaptatives est donné par le carré d'un nombre fini  $K_h^\lambda$  de fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_{k,h}$  associées aux valeurs propres négatives  $\mu_{k,h}$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{2,h}$ . De plus, il a été démontré que les fonctions propres  $L^2$ -normalisées de l'opérateur de Schrödinger semi-classique sont localisées et oscillent graduellement avec une décroissance rapide de leurs amplitudes. Ce qui affirme que l'ensemble des fonctions propres  $L^2$ -normalisées au carré  $\{\psi_{k,h}^2\}_{k=1}^{K_h^\lambda}$ , lequel est un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives, contiennent l'information la plus pertinente du potentiel ainsi que les détails.

Cette thèse a ensuite donné lieu à l'étude de quelques propriétés liées au spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique  $\mathcal{H}_{2,h}$  en fonction du paramètre semi-classique  $h$  et à une preuve de convergence de l'approche SCSA en 2D. En effet, il a été démontré que plus le paramètre semi-classique  $h$  diminue et plus l'extraction des données spectrales est meilleure, ce qui aboutit à une décomposition précise de la fonction  $V_2$  par l'approche SCSA en 2D.

Cependant la mise en oeuvre de cette approche pose des problèmes de nature géométrique et topologique et engendre de lourds calculs. Pour les éviter, l'utilisation du produit tensoriel est recommandée. La reformulation et la mise en oeuvre de la SCSA en 2D par l'utilisation du produit tensoriel lors de l'écriture des fonctions propres ont été présentées antérieurement. L'efficacité de la SCSA en 2D ainsi que les propriétés du spectre discret ont été prouvées à travers différents exemples de représentation de fonctions académiques bidimensionnelles et d'images. En dernier, une comparaison avec d'autres méthodes de représentation d'images a eu lieu.

A l'issue de ce travail de nombreuses perspectives prometteuses pourraient s'ouvrir et se réaliser dans de nombreux domaines. Tout premièrement, il nous paraît intéressant de compléter l'étude

théorique des propriétés de la SCSA en 2D, comme par exemple s'interroger sur ce que représente l'ensemble des fonctions propres  $L^2$ -normalisées au carré  $\{\psi_{k,h}^2\}_{k=1}^{K_h^\lambda}$  et se demander si c'est une frame. Sinon, dans un autre contexte appliquer la SCSA en 2D pour la résolution de certain EDP (comme dans [24]), pour le calcul d'une dérivée ou pour le calcul d'une intégrale . . .

Une autre perspective de recherche consiste à compléter l'étude théorique dans le cas où l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{2,h}$  associé au potentiel  $V_2$  subirait une perturbation  $\omega$ . Les premiers résultats numériques du débruitage d'images obtenus et présentés dans [37, 38] sont prometteurs. Une comparaison de la SCSA en 2D avec la méthode K-SVD [82] pour l'image de Lena affectée par un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma = 40$  est présentée par les figures ci-dessous (figures 5.21 et 5.22) :



FIGURE 5.21 – (a). Image originale de Lena ; (b). Image bruitée avec  $\sigma = 40$  ; (c). Image débruitée par la K-SVD ; (d). Image débruitée par la SCSA en 2D.

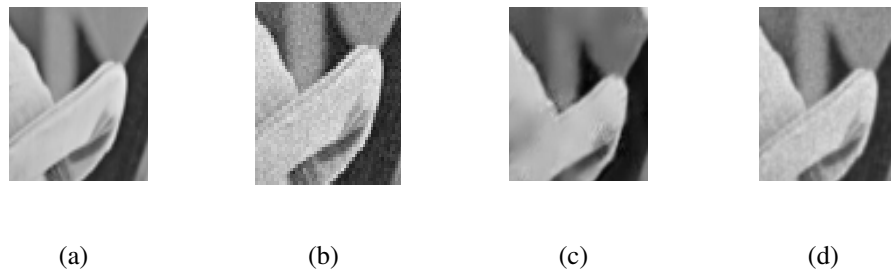


FIGURE 5.22 – Zoom sur : (a). Image originale de Lena ; (b). Image bruitée avec  $\sigma = 40$  ; (c). Image débruitée par la K-SVD ; (d). Image débruitée par la SCSA en 2D.

Et pour de différentes valeurs de variance  $\sigma$ , les résultats sont présentés dans le tableau 5.2 :

Noise variance	Proposed method			K-SVD	
$\sigma$	$h$	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	0.350	36.0	0.991	33.2	0.916
20	0.550	32.1	0.955	29.4	0.851
25	0.650	31.0	0.893	30.0	0.836
30	0.800	30.1	0.861	27.5	0.796
40	0.975	28.7	0.787	26.0	0.747
50	1.000	27.5	0.713	25.0	0.697
100	2.100	24.4	0.671	21.5	0.559

TABLE 5.2 – Comparaison du PSNR en dB et du SSIM [79] entre la méthode K-SVD et l’approche SCSA en 2D pour le débruitage de l’image de Lena.

D’un point de vue numérique, il manque à notre travail la réduction de la complexité du code Matlab dont un premier essai est présenté dans [8]. Il serait donc envisageable, afin d’améliorer aussi le temps de calcul, de déterminer une méthode d’optimisation fiable pour pouvoir estimer la valeur optimale du paramètre semi-classique  $h$  selon le contexte d’étude. Pour ce faire, on pourrait s’inspirer de la technique de Monte-Carlo [65].

En dernier, il est important de souligner que les résultats obtenus par l’utilisation de l’approche SCSA en 2D sans l’utilisation du produit tensoriel sur des fonctions bidimensionnelles académiques et des images de petites tailles sont prometteurs. Cette approche peut être utilisée dans des domaines utilisant des machines sophistiquées et performantes tels que l’astronomie, le guidage des missiles, la reconnaissance terrestre, . . .

Enfin, nous pouvons dire que les mathématiques sont partout : elles sont au cœur de la science contemporaine, mais aussi à la base d’innombrables réalisations technologiques et processus industriels. Elles fournissent des outils de modélisation et de prévision qui jouent un rôle croissant dans la conduite des affaires du monde. Partout, cette discipline reste méconnue.



# **Annexes**

# Annexe A

## Opérateur de Schrödinger et données de diffusion

Nous n'avons présenté, dans le premier chapitre, qu'une idée globale sur les résultats de la résolution spectrale de l'opérateur de Schrödinger en  $\pm\infty$ . Plus de détails seront donnés plus bas :

### A.1 Opérateur de Schrödinger : Cas point limite et cercle limite [3]

La distinction entre le cas point limite et cercle limite a été introduite par Weyl. Ce cercle fait référence à l'image de la droite réelle sous la transformation :

$$\xi \mapsto M(\xi) = -\frac{c_{\frac{\pi}{2}}(x)}{s_{\frac{\pi}{2}}(x)} \xi \frac{\frac{dc_{\frac{\pi}{2}}(x)}{dx}}{\xi \frac{ds_{\frac{\pi}{2}}(x)}{dx}}, \quad (\text{A.1})$$

où  $c_{\frac{\pi}{2}}$  et  $s_{\frac{\pi}{2}}$  sont solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre qui est dans notre cas l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_1(x)\psi(x) = z\psi(x), \quad 0 \leq x < x' \leq \infty, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (\text{A.2})$$

Posons  $z = k^2$ . Notons  $C(x, k)$  l'image de la droite réelle sous la transformation (A.1) et  $D(x, k)$  le disque fermé, de frontière  $C(x, k)$ . La théorie de Weyl affirme que pour  $0 < x_1 < x_2$ ,  $D(x_2, k) \subset D(x_1, k)$ . Ainsi, quand  $x \rightarrow x'$ ,  $C(x, k)$  tend, soit vers un point limite  $g(z)$ , soit vers un cercle limite lesquels se définissent par :

– **Cas cercle limite** : Pour tous  $z \in \mathbb{C}$ , toute solution de

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_1(x)\psi(x) = z\psi(x), \quad (\text{A.3})$$

où  $x \in [0, +\infty)$  est dans  $L^2([0, +\infty))$ .

– **Cas point limite :** Pour tous  $z \in \mathbb{C}$ , il n'existe pas plus d'une solution de

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_1(x)\psi(x) = z\psi(x), \quad (\text{A.4})$$

où  $x \in [0, +\infty)$  dans  $L^2([0, +\infty))$ .

Mais pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , il existe une fonction unique  $\psi \in L^2([0, +\infty))$  tels que  $-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_1(x)\psi(x) = z\psi(x)$ ,  $x \in [0, +\infty)$ ,  $\psi(0) = 1$  et  $\frac{d\psi}{dx}(0)$  est noté  $g(z)$ . Cette propriété assure que l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2} + V_1$ ,  $x \in [0, +\infty)$  soit auto-adjoint sans nécessité d'avoir des conditions aux limites à l'infini.

Dans le cas de la droite  $(-\frac{d^2}{dx^2} + V_1, x \in \mathbb{R})$ , le cas point limite se définit par :

Pour tous  $z \in \mathbb{C}^+$ , il existe des solutions uniques  $\psi_{\pm}(z, x)$  de  $-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_1\psi(x) = z\psi(x)$  telles que  $\psi_+ \in L^2(0, +\infty)$  et  $\psi_- \in L^2(-\infty, 0)$ .

## A.2 Solution de Jost et données de diffusion [11, 18, 42, 52]

Les solutions de Jost, notées  $f_{\pm}$  sont définies comme étant les solutions uniques de l'équation de Schrödinger en  $\pm\infty$ . Elles sont définies comme suit :

**Définition A.0.1.** On appelle équation intégrale de Schrödinger en  $\pm$ , l'équation intégrale suivante :

$$f_{\pm}(s, x) = e^{\pm isx} - \int_x^{\pm\infty} \frac{\sin[s(x-x')]}{s} V_1(x') f_{\pm}(s, x') dx', \quad (\text{A.5})$$

où  $\Im(s) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $V_1$  est une fonction intégrable, à valeurs réelles et qui décroît rapidement à l'infini.

L'existence et l'unicité des solution de Jost sont données par le théorème suivant :

**Théorème A.0.1.** Soient  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\Im(s) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $V_1$  est une fonction intégrable, à valeurs réelles. Alors l'équation intégrale de Schrödinger en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) admet une solution unique  $f_+$  (resp.  $f_-$ ) continûment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et qui vérifie (pour  $s \neq 0$ ) :

$$|f_+(s, x) - e^{+isx}| \leq e^{-x\Im(s)} |e^{\frac{1}{|s|} \int_x^{+\infty} |V_1(x')| dx'} - 1|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.6})$$

$$|\frac{df_+(s, x)}{dx} - ise^{+isx}| \leq |s| e^{-x\Im(s)} |e^{\frac{1}{|s|} \int_x^{+\infty} |V_1(x')| dx'} - 1|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.7})$$

resp.

$$|f_-(s, x) - e^{-isx}| \leq e^{x\Im(s)} |e^{\frac{1}{|s|} \int_x^{+\infty} |V_1(x')| dx'} - 1|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.8})$$

$$|\frac{df_-(s, x)}{dx} + ise^{-isx}| \leq |s| e^{x\Im(s)} |e^{\frac{1}{|s|} \int_x^{+\infty} |V_1(x')| dx'} - 1|, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.9})$$

Les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  lesquelles sont connues sous le nom "solution de Jost" sont des fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger associées aux valeurs propres  $s^2$  et vérifiant :

$$-\frac{df_{\pm}}{dx}(s, x) + V_1(x)f_{\pm}(s, x) = s^2 f_{\pm}(s, x), \quad (\text{A.10})$$

avec :

$$f_{\pm}(s, x) = e^{\pm isx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{A.11})$$

et

$$\frac{df_{\pm}}{dx}(s, x) = \pm ise^{\pm isx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (\text{A.12})$$

Ainsi, nous avons :

**Corollaire A.0.1.** *Les fonctions  $f_{\pm}$ ,  $\frac{df_{\pm}}{dx}$  sont analytiques en  $s$  pour  $\Im(s) > 0$  et continues en  $s$  pour  $\Im(s)$ ,  $s \neq 0$ .*

Pour une classe plus large des potentiels les fonctions de Jost sont exprimées comme suit :

**Théorème A.0.2.** *Soit  $V_1 \in L^1_1(\mathbb{R})$  une fonction à valeurs réelles. Alors, pour tous  $s \in \mathbb{C}$  avec  $\Im(s) \geq 0$ , l'équation intégrale de Schrödinger en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) admet une solution unique  $f_+$  (resp.  $f_-$ ) continûment dérivable et qui vérifie :*

$$|f_+(s, x) - e^{isx}| \leq \frac{Ce^{-x\Im(s)}}{1+|s|} (1 + \max(-x, 0)) \int_x^{+\infty} (1+|x'|) |V(x')| dx', \quad (\text{A.13})$$

$$\left| \frac{df_+}{dx}(s, x) - ise^{isx} \right| \leq \frac{Ce^{-x\Im(s)}}{1+|s|} \int_x^{+\infty} (1+|x'|) |V(x')| dx', \quad (\text{A.14})$$

resp.

$$|f_-(s, x) - e^{-isx}| \leq \frac{Ce^{x\Im(s)}}{1+|s|} (1 + \max(x, 0)) \int_x^{+\infty} (1+|x'|) |V(x')| dx', \quad (\text{A.15})$$

$$\left| \frac{df_-}{dx}(s, x) + -ise^{-isx} \right| \leq \frac{Ce^{x\Im(s)}}{1+|s|} \int_x^{+\infty} (1+|x'|) |V(x')| dx', \quad (\text{A.16})$$

où  $C$  est une constante qui dépend uniquement de  $V_1$ .

Les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  sont les fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger associées aux valeurs propres  $s^2$  vérifiant :

$$-\frac{df_{\pm}}{dx}(s, x) + V_1(x)f_{\pm}(s, x) = s^2 f_{\pm}(s, x), \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$f_{\pm}(s, x) = e^{\pm isx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{A.18})$$

et

$$\frac{df_{\pm}}{dx}(s, x) = \pm ise^{\pm isx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (\text{A.19})$$

Les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  sont appelées les solutions de Jost.

**Proposition A.0.1.** Soit  $V_1$  une fonction continue, intégrable à valeurs réelles. Alors, le Wronskien  $W(f_1, f_2)$  de deux solution  $f_1$  et  $f_2$  de l'équation

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + V_1 f = s^2 f$$

est constant et nous avons :

$$W(f_+(s, x), f_+(-s, x)) = -2is, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.20})$$

et

$$W(f_-(s, x), f_-(-s, x)) = 2is, \quad s \in \mathbb{R} \quad (\text{A.21})$$

Le Wronskien de deux solutions de l'équation de Schrödinger est non nul si et seulement si ces solutions sont linéairement indépendantes. Il existe alors des coefficients unique  $a_{\pm}(s)$  et  $b_{\pm}(s)$ , tels que pour tout  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  :

$$f_{\pm}(s, x) = b_{\mp}(s)f_{\mp}(s, x) + a_{\mp}(s)f_{\mp}(-s, x) \quad (\text{A.22})$$

Comme  $\overline{f_{\pm}(s, x)} = f_{\pm}(-s, x)$ , alors :

$$\overline{a_{\pm}(s)} = a_{\pm}(-s), \quad \overline{b_{\pm}(s)} = b_{\pm}(-s). \quad (\text{A.23})$$

Calculons le Wronskien entre  $f_-(s, x)$  et  $f_-(-s, x)$  en fonction de  $a_{\pm}(s)$  et de  $b_{\pm}(s)$ . En effet :

$$\begin{aligned} W(f_-(s, x), f_-(-s, x)) &= W(b_+(s)f_+(s, x) + a_+(s)f_+(-s, x), \\ &\quad b_+(-s)f_+(-s, x) + a_+(-s)f_+(s, x)), \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

d'où,

$$\begin{aligned} W(f_-(s, x), f_-(-s, x)) &= b_+(s)b_+(-s)W(f_+(s, x), f_+(-s, x)) \\ &\quad + a_+(s)a_+(-s)W(f_+(-s, x), f_+(s, x)). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Sachant que :

$$W(f_+(s, x), f_+(-s, x)) = \mp 2is, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.26})$$

alors,

$$|a_+(s)|^2 + |b_+(s)|^2 = 1, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.27})$$

De la même manière nous avons :

$$a_+(s) = \frac{1}{2ik} W(f_-(s, x), f_+(s, x)), \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.28})$$

$$b_+(s) = -\frac{1}{2is} W(f_-(s, x), f_+(-s, x)), \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.29})$$

$$|a_-(s)|^2 + |b_-(s)|^2 = 1, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.30})$$

$$a_-(s) = \frac{1}{2ik} W(f_+(s, x), f_-(s, x)), \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.31})$$

et

$$b_-(s) = \frac{1}{2is} W(f_+(s, x), f_-(-s, x)), \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.32})$$

On en déduit :

$$a_+(s) = a_-(s), \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.33})$$

Notons :

$$T(s) = \frac{1}{a_+(s)} = \frac{1}{a_-(s)}, \quad \mathcal{R}_{r(l)}(s) = \frac{b_{\pm}(s)}{a_{\pm}(s)} = \frac{b_{\pm}(s)}{a_{\mp}(s)}. \quad (\text{A.34})$$

$T(s)$  est appelé coefficient de transmission et  $\mathcal{R}_{r(l)}(s)$  sont appelés coefficients de réflexion par la gauche et par la droite respectivement. En réécrivant la formule (A.22) en fonction de  $T(s)$  et  $\mathcal{R}_{r(l)}(s)$ , nous obtenons :

$$f_{\pm}(s, x) = \frac{\mathcal{R}_{r(l)}(s)}{T(s)} f_{\mp}(s, x) + \frac{1}{T(s)} f_{\mp}(-s, x). \quad (\text{A.35})$$

Lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $f_{\pm}(s, x) = e^{\pm isx} + o(1)$ , ainsi nous avons :

$$f_{\pm}(s, x) = \frac{\mathcal{R}_{r(l)}(s) e^{\mp isx}}{T(s)} + \frac{e^{\pm isx}}{T(s)} + o(1), \quad x \rightarrow \pm \quad (\text{A.36})$$

Le phénomène de diffusion lié à l'opérateur de Schrödinger ainsi que quelques propriétés des coefficients de réflexion et de transmission ont été présentées dans le premier chapitre. Dans la partie qui suit, nous présentons d'autres.

**Proposition A.0.2.** *Pour tout potentiel  $V_1 \in L_1^1(\mathbb{R})$ , nous avons :*

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} T(s) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \mathcal{R}(s) = 0. \quad (\text{A.37})$$

**Proposition A.0.3.** *Soit  $V_1 \in L_1 s^1(\mathbb{R})$ , alors :*

$$\begin{aligned} T(s) &= 1 + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad |s| \rightarrow +\infty, \quad \Im(s) \geq 0, \\ \mathcal{R}_{r(l)}(s) &= O\left(\frac{1}{s}\right), \quad |s| \rightarrow +\infty, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

*Si de plus,  $V_1$  a  $m$  dérivées dans  $L^1(\mathbb{R})$  alors :*

$$\mathcal{R}_{r(l)}(s) = O\left(\frac{1}{s^{m+1}}\right), \quad |s| \rightarrow +\infty, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.39})$$

# Annexe B

## Espaces séparables, bases et frames

Le but ici est de rappeler quelques concepts mathématiques importants liés à la notion de la base, de la frame et aux espaces séparable.

### B.1 Bases des espaces de Hilbert [53]

#### Espace de Banach

Les signaux sont souvent considéré comme des vecteurs. Pour définir une distance, on travaille dans un espace vectoriel  $\mathbf{H}$  qui admet une norme. Une norme vérifie les propriétés suivante :

$$\forall f \in \mathbf{H}, \quad \|f\| \geq 0 \text{ et } \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad (\text{B.2})$$

$$\forall f, g \in \mathbf{H}, \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad (\text{B.3})$$

Avec une telle norme, la convergence de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  dans  $\mathbf{H}$  signifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0. \quad (\text{B.4})$$

Pour garantir qu'on reste dans  $\mathbf{H}$  en passant à de telles limites, on impose une propriété de complétude en utilisant la notion de *suite de Cauchy*. Une suite  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy si, pour tout  $\epsilon > 0$ , si  $n$  et  $p$  sont assez grands, alors  $\|f_n - f_p\| < \epsilon$ . L'espace  $\mathbf{H}$  est dit complet si toute suite de Cauchy dans  $\mathbf{H}$  converge vers un élément de  $\mathbf{H}$ .

#### Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert  $\mathbf{H}$  est un espace de Banach avec un produit scalaire. Le produit scalaire de deux vecteurs  $\langle f, g \rangle$  est linéaire par rapport à son premier argument :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle. \quad (\text{B.5})$$

Il possède une symétrie hermitienne :

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*. \quad (\text{B.6})$$

De plus

$$\langle f, f \rangle \leq 0 \text{ et } \langle f, f \rangle \Leftrightarrow f = 0. \quad (\text{B.7})$$

## Bases des espaces de Hilbert

Une famille  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans un espace de Hilbert  $\mathbf{H}$  est orthogonale si, pour  $n \neq p$ ,

$$\langle e_n, e_p \rangle = 0. \quad (\text{B.8})$$

Un espace de Hilbert qui admet une base orthogonale est dit *séparable*.

La base est *orthonormée* si  $\|e_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Le calcul du produit scalaire de  $g$  et  $f$  de  $\mathbf{H}$  donne la relation de Parseval sur les bases orthonormée :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle \langle g, e_n \rangle^*. \quad (\text{B.9})$$

Quand  $g = f$ , on obtient la relation de conservation de l'énergie appelée formule de Plancherel :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2. \quad (\text{B.10})$$

## Frames

La théorie des frames analyse la complétude, la stabilité et la redondance des représentation discrète d'un signal [53]. Une frame est une famille de vecteurs  $\{\phi_n\}_{n \in \Lambda}$  permettant de caractériser tout signal  $f$  par ses produits scalaires  $\{\langle f, \phi_n \rangle\}_{n \in \Lambda}$ . L'ensemble d'indice  $\Lambda$  peut être fini ou infini.

Une frame vérifie la propriété de conservation d'énergie qui permet d'inverser l'opérateur  $U$  défini par :

$$\forall n \in \Lambda, \quad Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle. \quad (\text{B.11})$$

Ainsi, la frame est définie comme suit :

**Définition B.0.2.** La famille  $\{\phi_n\}_{n \in \Lambda}$  est une frame de  $\mathbf{H}$  s'il existe deux constantes  $A > 0$  et  $B > 0$  telles que pour tous  $f \in \mathbf{H}$ ,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Lambda} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (\text{B.12})$$

Si  $A = B$ , la frame est dite *ajustée*.

La condition (B.12) est une condition nécessaire et suffisante pour que  $U$  soit inversible sur son image.

## B.2 Espace séparable [15, 35, 53]

### Produit tensoriel

Les produits tensoriels sont utilisés pour étendre des espaces de signaux monodimensionnels à des espaces de signaux multidimensionnels. Un produit tensoriel  $f_1 \otimes f_2$  entre vecteurs de deux espace de Hilbert  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  vérifie les propriétés suivantes :

– Linéarité :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda(f_1 \otimes f_2) = (\lambda f_1) \otimes f_2 = f_1 \otimes (\lambda f_2). \quad (\text{B.13})$$

– Distributivité :

$$(f_1 + g_1) \otimes (f_2 + g_2) = (f_1 \otimes f_2) + (f_1 \otimes g_2) + (g_1 \otimes f_2) + (g_1 \otimes g_2). \quad (\text{B.14})$$

### Espace séparable

Le théorème suivant prouve que les ensembles de fonctions élémentaires d'un espace produit tensoriel s'obtiennent par produit séparable de deux ensembles de fonctions élémentaires. Cela fournit une méthode simple et rapide pour construire des ensembles de fonctions élémentaires pour des signaux multidimensionnels à partir d'un ensemble de fonctions élémentaires monodimensionnels.

**Théorème B.0.3.** *Soit  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2$ . Si  $\{e_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{e_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux ensembles de fonctions élémentaires de  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  respectivement, alors  $\{e_n^1 \otimes e_m^2\}_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$  est un ensemble de fonctions élémentaires  $\mathbf{H}$ .*

**Remarque B.0.1.** *Le produit de fonctions  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $g \in L^2(\mathbb{R})$  définit un produit tensoriel :*

$$f(x)g(y) = f \otimes g(x, y), \quad (\text{B.15})$$

et nous avons :

$$L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \quad (\text{B.16})$$

## B.3 Théorème de superposition de Kolmogorov [43]

En 1957 Kolmogorov a montré que toute fonction multidimensionnel peut s'écrire sous la forme d'un produit de fonctions monodimensionnels.

**Théorème B.0.4.** *Toute fonction continue définie sur l'hypercube identité,  $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $d \geq 2$ , peut s'écrire comme somme et compositions de fonctions monodimensionnelles continues :*

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{q=0}^{2d} \phi_q \left( \sum_{p=1}^d \psi_{q,p}(x_p) \right), \quad (\text{B.17})$$

où  $\phi_q$  et  $\psi_{q,p}$  sont appelée des fonctions externe et interne respectivement.

# Bibliographie

- [1] T. Aktosun and M. Klaus, *Inverse theory : problem on the line*. Academic Press, London, 2001.
- [2] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2005.
- [3] F.V. Atkinson, *On the location of the Weyl circles*. Proceedings of the Royal Society of Edinburg, vol. 88A, (2005), 345–356.
- [4] J.P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover Publication, Inc., 2<sup>ed</sup> edition, 2000.
- [5] J.L. Basdevant, *Mécanique quantique*. Ecole Polytechnique, Ellipse, Palaiseau, France, 2000.
- [6] F. Calogero and A. Degasperis, *Spectral transform and soliton*. North Holland, 1982.
- [7] K. Chadan and P.C. Sabatier, *Inverse problems in quantum scattering theory*. Springer, New York, Second edition, 1989.
- [8] A. Charara, Z. Kaisserli, H. Ltaief, D. Keyes and T-M. Laleg-Kirati, *Accelerating image denoising algorithm using squared eigenfunctions of the Schrödinger operator on multicore architectures*. In International Computational Science and Engineering Conference (ICSEC15).
- [9] C.K. Chui, *An introduction to Wavelets*. Texas A&M University, College Station, Texas, 1992.
- [10] K.L. Chung, Y.W. Liu and W.M. Yan, *A hybrid gray image representation using spatial and DCT-based approach with application to moment computation*. J.Vis. Commun. Image R, vol. 17, (2006), 1209–1226.
- [11] P.A. Deift and E. Trubowitz, *Inverse scattering on the line*. Communications on Pure and applied Mathematics, XXXII, (1979), 121-251.
- [12] M. Dimassi and J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*. Cambridge U Press, 1999.
- [13] M.N. Do and M. Vetterli, *The finite ridgelet transform for image representation*. IEEE trans. Image Processing, vol. 12, No. 1, (January 2003), 16–28.
- [14] B.A. Dubrovin, V.B. Matveev and S.P. Novikov, *Nonlinear equations of Korteweg-de Vries finite-zone linear operators, and Abelian varieties*. Russian Math. Surveys, vol. 31(1), (1976), 59–146.
- [15] D.E. Dudgeon and R.M. Mersereau, *Multidimensional digital signal processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

- [16] E.P. D'Alché, *Comprendre la Physiologie Cardiovasculaire*. Médecine-Sciences Flammarion, 2nd edition, 2003.
- [17] F. Eleiwi, T. M. Laleg Kirati, S. Khelladi and F. Bakir, *A semi-classical signal analysis method for the analysis of turbo-machinery flow unsteadiness*. Word Academy of Science, Engineering and Technology, vol. 59, (2011), 215–218.
- [18] L.D. Faddeev, *Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation*. Trudy Math. Inst. Steklov, vol. 73, (1964), 314–336.
- [19] H. Friedrich, *Scattering Theory*. Lecture notes in physics 872, Springer, 2013.
- [20] D. Gabor, *Theory of communication*. IEEE, vol. 93, (1946), 429 - 457.
- [21] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura, *Korteweg-de Vries equation and generalization VI. Methods for exact soliton*. In Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXVII, (1974), 97–133.
- [22] C. Gasquet and P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications : Filtrage, calcul numérique et ondelettes*. 2<sup>e</sup> cycle universitaire, école d'ingénieurs, Edition Dunod, Juillet 2001.
- [23] I.M. Gel'fand and B.M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*. Amer. Math. Soc. Transl, vol. 2(1), (1955), 253–304.
- [24] J.F. Gerbeau and D. Lombardi, *Approximated Lax pairs for the reduced order integration of nonlinear evolution equations*. Journal of Computational Physics, vol. 265, (2014), 246–269.
- [25] F. Gesztesy and H. Holden, *Trace formula and conservation laws for nonlinear evolution equations*. Reviews in Mathematical Physics, vol. 6(1), (1994), 51–95.
- [26] D. Gottlieb, M.Y. Hussaini and S.A. Orszag, *Theory and applications of spectral methods*. In Spectral Methods for Partial Differential Equation, R. Voigt, Eds., (1984), 1 – 54.
- [27] R. Guantes and S.C. Farantos, *High order difference algorithms for solving the Schrödinger equation in molecular dynamics*. Journal of Chimical Physics, vol. 111(24), (December 1999), 1827–1835.
- [28] B. Helffer, *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and application*. Lecture notes in mathematics, Springer, 1988.
- [29] B. Helffer, *h-Pseudodifferential operator and application*. Elsevier, (2006), 701 – 712.
- [30] B. Helffer and T.M. Laleg-Kirati, *On semi-classical questions related to signal analysis*. Asymptotic Analysis Journal, vol. 75, No. 3-4, (2011), 125–144.
- [31] B. Helffer and D. Robert, *Riesz means of bound states and semi-classical limit connected with a Lieb-Thirring's conjecture I*. Asymptotic Analysis Journal, vol. 3, (1990), 91–103.
- [32] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis : Discrete Fourier Analysis - Cauchy Integrals - Construction of Conformal Maps - Univalent Functions*. John Wiley and Sons. Vol. 3. Inc., New York, NY. 1986.
- [33] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.C. Wu, H.H. Shih, N.C. Yen, C.C. Tung and H. Liu, *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis*. Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 454, (1998), 903–995.

- [34] A.R. Its and V.B. Matveev, *Schrödinger operators with finite-gap spectrum and N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation*. Theor. Math. Phys., vol. 23, (1975), 343–355.
- [35] A.K. Jain, *Fundamentals of digital image processing*. Prentice-Hall, 1989.
- [36] Z. Kaisserli, T. M. Laleg-Kirati and A. Lahmar-Benbernou, *Image reconstruction using squared eigenfunctions of the Schrödinger operator*. Digital Signal Processing Journal, vol. 40, (2015), 80–87.
- [37] Z. Kaisserli and T. M. Laleg-Kirati, *Image representation and denoising using squared eigenfunctions of the 2D Schrödinger operator*. 2nd KAUST-NSF Research Conference on Electronic Materials, Devices And Systems For A Sustainable Future, KAUST, KSA, February, 14-16, 2015.
- [38] Z. Kaisserli and T. M. Laleg-Kirati, *Image denoising using the squared eigenfunctions of the Schrödinger operator*. Submitted.
- [39] G.E. Karadzhov, *Semi-classical asymptotic of spectral function for some Schrödinger operator*. Math. Nachr., vol. 128 (1986), 103–114.
- [40] D.J. Kaup and C. Newell, *Solitons as particles, oscillators, and in slowly changing media : a singular perturbation theory*. Proc. R. Soc. Lond. A1, vol. 361, (1978), 413–446.
- [41] S. Khelladi and M. Deligant and T.M. Laleg Kirati and F. Eleiwi and F. Ravelet and F. Bakir, *New indices for the analysis of turbomachinery features by a semi-classical signal analysis method*. Submitted.
- [42] E. Koelink, *Scattering theory*. Lecture notes, 2008.
- [43] A.N. Kolmogorov, *On the representation of continuous functions of many variables by superpositions of continuous functions of one variable and addition*. Doklady Akademii Nauk, USSR, vol. 14(5), (1957), 953–956.
- [44] T.M. Laleg-Kirati, *Analyse de signaux par quantification semi-classique. Application à l'analyse des signaux de pression artérielle*. Institut de Recherche en Informatique et en Automatique, INRIA Centre Paris Rocquencourt, Université Versailles Saint Quentin en Yvelines, 2008.
- [45] T.M. Laleg-Kirati, E. Crépeau and M. Sorine, *Semi-classical signal analysis*. Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS) Journal, vol. 25, issue 1, (2013), 37–61.
- [46] T.M. Laleg-Kirati, C. Médigue, F. Cottin and M. Sorine, *Arterial blood pressure analysis based on scattering transform II*. In Proc. EMBC, Sciences and Technologies for Health, Lyon, France, (2007).
- [47] T.M. Laleg-Kirati, C. Médigue, Y. Papelier, F. Cottin and A. Van de Louw, *Validation of a semi-classical signal analysis method for stroke volume variation assessment : a comparison with the Picco technique*. Annals of Biomedical Engineering, vol. 38, No. 12, (2010), 3618–3629.
- [48] G.L. Lamb, *Elements of Soliton Theory*. J. Wiley & sons, 1980.

- [49] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory*. vol. 3. Pergamon Press, 1958.
- [50] A. Laptev and T. Weidl *Sharp Lieb-Thirring inequalities in high dimensions*. Acta Mathematica, vol. 184, No. 1, (2000), 87–111.
- [51] D.Y. Liu and T.M. Laleg-Kirati, *Mathematical properties of a semi-classical signal analysis method : noisy signal case*, 1st International Conference on Systems and Computer Science, Villeneuve dascq, France, 2012.
- [52] V.A. Maechenko, *Sturm-Liouville operators and applications*. Birkhäuser, Basel, 1986.
- [53] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing : The sparse way*. Third Edition, Elsevier, 2009.
- [54] A. Martinez, *An introduction to Semiclassical and microlocal analysis*. Springer - Verlag, New York, 2002.
- [55] A.C. Newell, *The inverse scattering Transform*. Topics in Current Physics, Springer-Verlag, New-York, vol. 17, (1980), 177–242.
- [56] A.C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.
- [57] T. Oberlin, *Approches mathématiques pour la décomposition modale empirique*. Master de Recherche en Mathématiques Appliquées. Université de Joseph Fourier, Grenoble, 2009.
- [58] T. Oberlin, *Différentes méthodes pour la décomposition modale empirique*. Rapport de TER, 2009.
- [59] M. Ohmiya, *On the Deift-Trubowitz trace formula for 1-Dimensional Schrödinger operator with integrable potential*. Funkcialaj Ekvacioj, Vol. 34, (1991), 375–390.
- [60] G. Olafsson and S. Zheng, *Function spaces associated with Schrödinger operators : the Pöschl-Teller potential*. Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 12(6), (2006), 653–674.
- [61] A.R. Osborne, *Nonlinear Fourier analysis for the infinite-interval Korteweg-de Vries equation I : An algorithm for the direct scattering transform*. Journal of Computational Physics, Vol. 94(2), (1991), 284–313.
- [62] A. Pankov, *Introduction to spectral theory of Schrödinger operators*. Available at <http://www.math.nsysu.edu.tw/amen/posters/Pankov.pdf>
- [63] A. Provenzale and A.R. Osborne, *Nonlinear Fourier analysis for infinite-interval Korteweg-de Vries equation II : Numerical tests of the Direct Scattering Transform*. Journal of Computational Physics, vol. 94, (1991), 314–351.
- [64] A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri, *Méthodes numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer, Varlag Italia, Milano, 2007.
- [65] S. Ramani, T. Blu and M. Unser, *Monte-Carlo Sure : A Black-Box Optimization of Regularization Parameters for General Denoising Algorithms*. IEEE Transactions on Image Processing, vol. 17, No. 9, (2008), 1540–1554.

- [66] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, IV. Analysis of operators theory*. Academic Press, New York, 1978.
- [67] G. Rilling and P. Flandrin, *Sur la Décomposition Modale Empirique des signaux échantillonnés*. <http://hdl.handle.net/2042/13876>, 2005.
- [68] G. Rilling, *Décompositions Modales Empiriques. Contributions à la Théorie, l'algorithmie et l'analyse de performances*. Thèse de Doctorat, ENS Lyon, 2007
- [69] G. Rilling and P. Flandrin, *One or two frequencies? The empirical mode decomposition answers*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, No. 1, (2008), 85–95.
- [70] A.C. Scott, F.Y.F. Chu and D.W. McLaughlin, *The soliton : A new concept in applied science*. Proceedings of the IEEE, vol. 61, No. 10, (October 1973), 1443–1483.
- [71] R.C. Sharpley and V. Vatchev, *Analysis of the Intrinsic Mode Functions*. 2006.
- [72] S. Silbernagl and A. Despopoulos, *Atlas de Poche de Physiologie*. Médecine-Sciences Flammarion, 3rd edition, 2002.
- [73] B. Simon, *Schrödinger operator in the twentieth century*. Journal of Mathematical Physics, vol. 41(6), (2000), 3523–3555.
- [74] A.C. Singer, *Signal Processing and Communication with solitons*. Thèse de Doctorat, The research of electronics massachusetts. Institute of technology, Cambridge, Juin 1996.
- [75] E.C. Titchmarsh, *Eigenfunctions expressions associated with second order differential equations*. Oxford at the Clarendon Press, Edition, V. I. S., 1962.
- [76] L.N. Trefethen, *Finite difference and spectral methods for ordinary partial differential equations*. Available at <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethen/pdetext.html>, 1996.
- [77] L.N. Trefethen, *Spectral methods in Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [78] J. Ville, *Théorie et applications de la notion de signal analytique*. Cables et Transm., vol. 2A(1), (1948), 61–74.
- [79] Z. Wang, A.C. Bovik, H.R. Sheikh, and E.P. Simoncelli, *Image quality assessment : from error visibility to structural similarity*. IEEE Transaction on Image Processing. Volume 4, Number 13, (2004), 1 – 14.
- [80] E.P. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*. Phys. Rev., vol. 40, (1932), 749–759.
- [81] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*. J. Wiley & sons, 1999.
- [82] L. Zhang, W. Dong, D. Zhang, and G. Shi, *Two-stage image denoising by principal component analysis with local pixel grouping*. Pattern Recognition Elsevier. Volume 43, (2010), 1531 – 1549.
- [83] Y. Zheng, Z. Yu, J. You and M. Sarem, *A novel gray image representation using overlapping rectangular NAM and extended shading approach*. J.Vis. Commun. Image R, vol. 23, (2012), 972–983.

# Index des notations

Dans tout ce manuscrit, les notations suivantes seront utilisées. En cas de modification, elles seront redéfinies conformément aux différentes articulations de la partie.

DST	: Transformée de diffusion directe (Direct Scattering Transform).
EMD	: Décomposition modale empirique (Empirical Mode Decomposition).
EQM	: Erreur moyenne quadratique.
IMF	: Fonctions modales intrinsèques (Intrinsic Mode Function).
INV <sub>1</sub>	: Premier invariant global.
INV <sub>2</sub>	: Deuxième invariant global.
IST	: Transformée de diffusion inverse (Inverse Scattering Transform).
KdV	: Korteweg-de Vries.
$p.p$	: Presque partout.
PSNR	: Maximum du rapport signal sur bruit (Peak Signal to Noise Ratio).
SCSA	: Semi-Classical Signal Analysis.
SNR	: Rapport signal sur bruit (Signal to Noise Ratio).
SSIM	: Similarité entre images numériques (Structural SIMilarity).
1D	: Unidimensionnel.
2D	: Bidimensionnel.
$\mathbb{C}^+$	: Demi plan complexe supérieur.
$\overline{\mathbb{C}^+}$	: $\overline{\mathbb{C}^+} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ .
$\mathcal{C}^\infty$	: Espace des fonctions infiniment continûment différentiables.
$\mathbf{H}^2$	: Espace de Sobolev d'ordre 2.
$L^p(\mathbb{R})$	: $\{f \text{ mesurable sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty}  f(x) ^p dx < \infty\}$ , $1 \leq p < \infty$ .
$L^p_{loc}(\mathbb{R})$	: $\{f \in L^p(\Lambda) \text{ pour tout compact } \Lambda \subset \mathbb{R}\}$ , $1 \leq p < \infty$ .
$L^1_1(\mathbb{R})$	: $\{f \text{ mesurable sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_{\mathbb{R}} (1 +  x ) f(x)  dx < \infty\}$ .
$\Delta$	: Opérateur Laplacien.
$W(f, g)$	: Wronskien de $f$ et $g$ .
$L_{n,\gamma}^{cl}$	: Constante universelle semi-classique de dimension $n$ .
$h$	: Paramètre semi-classique en lien avec la constante de Planck.

$\Im(Z)$	: Partie imaginaire de $Z$ .
$\Re(Z)$	: Partie réelle de $Z$ .
$\sigma$	: spectre.
$\sigma_c$	: spectre continue.
$\sigma_d$	: spectre discret.
$S_\gamma(h, \lambda)$	: Moyenne de Riesz.
$\mathcal{H}_n(V_n)$	: Opérateur de Schrödinger associé au potentiel $V_n$ de dimension $n$ , $n = 1, 2$ .
$\mathcal{D}(\mathcal{H}_n)$	: Domaine de définition de $\mathcal{H}_n(V_n)$ .
$K$	: Nombre de valeurs propre négative de $\mathcal{H}_n(V_n)$ .
$\mu_k$	: Valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_n(V_n)$ , $k = 1, \dots, K$ .
$\psi_k$	: Fonction propre $L^2$ -normalisée associée à la valeur propre négative $\mu_k$ .
$c_{l,k}$	: Constante de normalisation par la gauche associée à $\mathcal{H}_1(V_1)$ .
$c_{r,k}$	: Constante de normalisation par la droite associée à $\mathcal{H}_1(V_1)$ .
$f_+(s, x)$	: Fonction de Jost par la gauche associée à $\mathcal{H}_1(V_1)$ .
$f_-(s, x)$	: Fonction de Jost par la droite associée à $\mathcal{H}_1(V_1)$ .
$\mathcal{R}_l(s)$	: Coefficient de réflexion par la gauche associée à $\mathcal{H}_1(V_1)$ .
$\mathcal{R}_r(s)$	: Coefficient de réflexion par la droite associée à $\mathcal{H}_1(V_1)$ .
$T(s)$	: Coefficient de transmission associée à $\mathcal{H}_1(V_1)$ .
$\mathcal{S}(s)$	: Matrice de diffusion.
$\mathcal{H}_{n,h}(V_n)$	: Opérateur de Schrödinger semi-classique associé au potentiel $V_n$ de dimension $n$ .
$\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,h})$	: Domaine de définition de $\mathcal{H}_{n,h}(V_n)$ .
$f_{+,h}(s, x)$	: Fonction de Jost par la gauche associée à $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$ .
$f_{-,h}(s, x)$	: Fonction de Jost par la droite associée à $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$ .
$\mathcal{R}_{l,h}(s)$	: Coefficient de réflexion par la gauche associée à $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$ .
$\mathcal{R}_{r,h}(s)$	: Coefficient de réflexion par la droite associée à $\mathcal{H}_{1,h}(V_1)$ .
$K_h$	: Nombre de valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{n,h}(V_n)$ .
$K_h^\lambda$	: Nombre de valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{n,h}(V_n)$ inférieures à $\lambda$ , $\lambda \in \mathbb{R}_-$ .
$\mu_{k,h}, \kappa_{k,h}, \rho_{k,h}$	: Valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{n,h}(V_n)$ avec $k = 1, \dots, K_h$ ou $k = 1, \dots, K_h^\lambda$ .
$\psi_{k,h}, \varphi_{k,h}, \phi_{k,h}$	: Fonctions propres $L^2$ -normalisées associées à aux valeurs propres négati- ves $\mu_{k,h}, \kappa_{k,h}, \rho_{k,h}$ respectivement.
$V_1^\omega$	: Potentiel perturbé de l'opérateur de Schrödinger.
$\omega$	: Bruit blanc Gaussien de moyenne nulle.
$K_h^\omega$	: Nombre de valeurs propres négatives de $\mathcal{H}_{1,h}(V_1^\omega)$ .
$\mu_{k',h}^\omega$	: Valeur propre négative associée à $\mathcal{H}_{1,h}(V_1^\omega)$ avec $k' = 1, \dots, K_h^\omega$ .
$\psi_{k',h}^\omega$	: Fonction propre $L^2$ -normalisée associée à $\mu_{k',h}^\omega$ .

# Table des figures

1.1	Phénomène de diffusion de l'opérateur de Schrödinger. . . . .	12
1.2	Les états bornés de l'opérateur de Schrödinger. . . . .	14
2.1	Algorithme de reconstruction d'une fonction unidimensionnelle par la SCSA. . . . .	26
2.2	Variation de l'erreur moyenne quadratique (Fig. (a)) et du nombre des valeurs propres négatives $K_h$ (Fig. (b)) en fonction de $h$ pour $V_1(x) = x^2 - 36$ sur $[-6, 6]$ . . . . .	28
2.3	Variation de quelques valeurs propres en fonction de $h$ pour $V_1(x) = x^2 - 36$ sur $[-6, 6]$ . . . . .	28
2.4	(a). Reconstruction de $V_1(x) = x^2 - 36$ sur $[-6, 6]$ , (b). Erreur relative correspondante pour $h = 0.2764$ ( $K_h = 65$ ). . . . .	29
2.5	Les valeurs propres négatives $\mu_{k,h}$ , $k = 1, \dots, K_h$ de $-h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_1(x)$ , $x \in [-6, 6]$ sont toutes comprises entre $-\max V_1$ et 0. . . . .	29
2.6	Allure de la première, deuxième, dixième et dernière fonction propre $L^2$ -normalisée $\psi_{k,h}^2$ dans le cas où $h = 0.2764$ pour $V_1(x) = x^2 - 36$ sur $[-6, 6]$ . . . . .	30
2.7	Valeurs propres réelles et estimées dans le cas où $h = 0.2764$ pour $V_1(x) = x^2 - 36$ sur $[-6, 6]$ . . . . .	30
2.8	Relation entre le pas de discrétisation $\Delta x$ et le paramètre semi-classique $h$ pour $V_1(x) = x^2 - 36$ sur $[-6, 6]$ . . . . .	31
2.9	Variation de l'erreur moyenne quadratique (Fig. (a)) et du nombre de valeurs propres négatives $K_h^\varpi$ en fonction de $h$ (Fig. (b)) pour $I_1^\varpi[j] = j^2 - 36 + \varpi[j]$ pour $j = 1, \dots, M$ . . . . .	34
2.10	Variation de quelques valeurs propres en fonction de $h$ pour $V_1^\omega(x) = x^2 - 36 + \omega(x)$ sur $[-6, 6]$ . . . . .	35
2.11	(a). Débruitage de $I_1^\varpi[j] = j^2 - 36 + \varpi[j]$ pour $j = 1 \dots, M$ ; (b). Erreur relative correspondante pour $h = 0.9564$ . . . . .	35
2.12	Allure du carré de la première, deuxième, dixième et la dernière fonction propre $L^2$ -normalisée dans le cas où $h = 0.9564$ pour $I_1^\varpi[j] = j^2 - 36 + \varpi[j]$ pour $j = 1, \dots, M$ . . . . .	36
2.13	Valeurs propres réelles et estimées dans le cas où $h = 0.9564$ pour $I_1^\varpi[j] = j^2 - 36 + \varpi[j]$ pour $j = 1, \dots, M$ . . . . .	37
2.14	Représentation du signal original $I_1[j] = j^2 - 36$ et du signal débruité $I_1^\varpi[j] = j^2 - 36 + \varpi[j]$ pour $j = 1, \dots, M$ dans le cas où $h = 0.2764$ . . . . .	37

2.15 Allure du carré de quelques fonctions propres  $L^2$ -normalisées dans le cas où  $h = 0.2765$  pour  $V_{1,h}(x)$  et  $V_{1,h}^\omega(x)$  avec  $x \in [-6, 6]$ . . . . . 38

2.16 Débruitage de  $V_1^\omega(x) = x^2 - 36 + \omega(x)$  avec  $x \in [-6, 6]$  pour différentes valeurs du SNR ; (a). SNR = 35 dB, PSNR = 51.08 dB ; (c). SNR = 25 dB, PSNR = 45.30 dB ; (e). SNR = 15, PSNR = 37.80 dB ; (g). SNR = 5 dB, PSNR = 27.52 dB ; (b). ; (d). ; (f). et (h). Erreur relative correspondante, respectivement. . . . . 39

2.17 Algorithme de reconstruction d'une fonction par la SCSA (Cas général) en une dimension. . . . . 43

2.18 (a). Reconstruction de  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $x \in [-6, 6]$  ; (c). Erreur relative correspondante, pour  $\lambda = 0$ , différentes valeurs de  $\gamma$  et  $h = 0.2764$ . (b)., (d). Zoom sur une partie des Figures (a) et (c) respectivement . . . . . 44

2.19 (a). Reconstruction de  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $x \in [-6, 6]$  ; (c). Erreur relative correspondante, pour  $\lambda = 0$ , différentes valeurs de  $\gamma$  et  $h = 0.1$ . (b)., (d). Zoom sur une partie des Figures (a) et (c) respectivement . . . . . 45

2.20 (a). Reconstruction de  $V_1(x) = x^2 - 36$  sur  $x \in [-2, 2]$  ; (b). Zoom sur la reconstruction de  $V_1$  ; (c). Erreur relative, pour  $\lambda = -30$ ,  $h = 0.007$  et différentes valeurs de  $\gamma$ . . . . . 46

4.1 Algorithme de reconstruction d'une fonction bidimensionnelle par la SCSA en 2D. 63

4.2  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ . (a). Variation de  $\frac{1}{\|V_2 - V_{2,h,\gamma,0}\|^2}$  ; (b).  $V_{2,0.13,4,0}(x, y)$  ; (c).  $V_2(-0, 742, y)$ ,  $V_{2,0.13,4,0}(-0, 7426, y)$  ; (d). Erreur relative entre la fonction et son estimée. . . . . 65

4.3 Nombre de valeurs propres négatives  $N_h M_h$  (Fig. (a)) et erreur quadratique en fonction de  $h$  (Fig. (b)) pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ . . . 66

4.4 Variation de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en fonction de  $h$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ . . . . . 66

4.5 Les valeurs propres négatives sont toutes comprises entre  $-V_2(x, y) = 4x^2 + 6y^2 - 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$  et 0 pour  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$ . (a). Première valeur propre négative ; (b). Dernière valeur propre négative . . . . . 67

4.6 Allure de la première fonction propre dans le cas où  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ . . . . . 67

4.7 Allure de la deuxième fonction propre dans le cas où  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ . . . . . 68

4.8 Allure de la vingt cinquième fonction propre dans le cas où  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ . . . . . 68

4.9 Allure de la dernière fonction propre dans le cas où  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$  pour  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  sur  $[-1, 1] \times [-2, 2]$ . . . . . 68

4.10 (a). Reconstruction de  $V_2(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 28$  pour  $h = 0.13$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = -1.5$  ; (b). L'erreur relative correspondante. . . . . 69

4.11  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ . (a). Variation de  $\frac{1}{\|V_2 - V_{2,h,\gamma,0}\|^2}$ ; (b).  $V_{2,0.006,4,0}(x, y)$ ; (c).  $V_2(-0.62, y)$ ,  $V_{2,0.006,4,0}(-0.62, y)$ ; (d). Erreur relative entre la fonction et son estimée. . . . . 70

4.12 Nombre de valeurs propres négatives  $N_h M_h$  (Fig. (a)) et erreur moyenne quadratique (Fig. (b)) en fonction de  $h$  pour  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ . . . . . 70

4.13 Variation de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en fonction de  $h$  pour  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ . 71

4.14 Les valeurs propres négatives sont toutes comprises entre  $-V_2(x, y) = -\sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) - 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$  et 0 pour  $h = 6 \times 10^{-3}$ . (a). Première valeur propre négative; (b). Dernière valeur propre négative. . . . . 71

4.15 (a). Allure de la première fonction propre; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la première fonction pour  $h = 6 \times 10^{-3}$  et  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ . . . . . 72

4.16 (a). Allure de la deuxième fonction propre; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la deuxième fonction pour  $h = 6 \times 10^{-3}$  et  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ . . . . . 72

4.17 (a). Allure de la dernière fonction propre; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la dernière fonction pour  $h = 6 \times 10^{-3}$  et  $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y) + 1$  sur  $[-1, 3] \times [-1, 3]$ . . . . . 72

5.1 (a). Image de Lena en noir et blanc; (b). Image de Lena en niveaux de gris; (c). Image de Lena en couleur. . . . . 75

5.2 Image originale de Lena. . . . . 76

5.3 (a). Inverse de l'erreur moyenne quadratique; (b). Reconstruction de l'image de Lena; (c). Représentation de la 100<sup>ième</sup> ligne de l'image de Lena et de son estimée; (d). Erreur relative entre l'image de Lena et son estimée. . . . . 77

5.4 Nombre de valeurs propres négatives  $N_h^0 M_h^0$  (Fig. (a)) et erreur moyenne quadratique (Fig. (b)) en fonction de  $h$  pour l'image de Lena. . . . . 78

5.5 Variation de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en fonction de  $h$  pour l'image de Lena. . . . . 78

5.6 Première valeur propre négative (Fig. (a)) et dernière valeur propre négative (Fig. (b)) de l'image de Lena pour  $h = 0.2$ ,  $\gamma = 4$  et  $\lambda = 0$ . . . . . 79

5.7 (a). Allure de la première fonction propre; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la première fonction propre dans le cas où  $h = 0.2$  pour l'image de Lena. . . . . 79

5.8 (a). Allure de la deuxième fonction propre; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la deuxième fonction propre dans le cas où  $h = 0.2$  pour l'image de Lena. . . . . 79

5.9 (a). Allure de la dixième fonction propre; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la dixième fonction propre dans le cas où  $h = 0.2$  pour l'image de Lena. . . . . 80

5.10 (a). Allure de la dernière fonction propre; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la dernière fonction propre dans le cas où  $h = 0.2$  pour l'image de Lena. . . . . 80

5.11	Image originale de Peppers. . . . .	80
5.12	(a). Inverse de l'erreur moyenne quadratique ; (b). Reconstruction de l'image de Peppers ; (c). Représentation de la 30 <sup>ième</sup> ligne de l'image de Peppers et de son estimée ; (d). Erreur relative entre l'image originale et son estimée. . . . .	81
5.13	Nombre de valeurs propres négatives $N_h^0 M_h^0$ (Fig. (a)) et erreur moyenne quadratique (Fig. (b)) en fonction de $h$ pour l'image de Peppers. . . . .	82
5.14	Variation de quelques valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en fonction de $h$ pour l'image de Peppers. . . . .	82
5.15	Première valeur propre négative (Fig. (a)) et dernière valeur propre négative (Fig. (b)) de l'image de Peppers pour $h = 0.18$ , $\gamma = 4$ et $\lambda = 0$ . . . . .	82
5.16	(a). Allure de la première fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la première fonction propre dans le cas où $h = 0.18$ pour l'image de Peppers. . . . .	83
5.17	(a). Allure de la troisième fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la troisième fonction propre dans le cas où $h = 0.18$ pour l'image de Peppers. . . . .	83
5.18	(a). Allure de la dernière fonction propre ; (b). et (c). Zoom sur l'allure de la dernière fonction propre dans le cas où $h = 0.18$ pour l'image de Peppers. . . . .	83
5.19	(a). Un exemple de partitionnement d'image ; (b). La structure de construction binaire [10]. . . . .	84
5.20	Images originales : (a). Lena ; (b). F16 ; (c). Barbara ; (d). Baboon. . . . .	85
5.21	(a). Image originale de Lena ; (b). Image bruitée avec $\sigma = 40$ ; (c). Image débruitée par la K-SVD ; (d). Image débruitée par la SCSA en 2D. . . . .	88
5.22	Zoom sur : (a). Image originale de Lena ; (b). Image bruitée avec $\sigma = 40$ ; (c). Image débruitée par la K-SVD ; (d). Image débruitée par la SCSA en 2D. . . . .	88

# Liste des tableaux

5.1	Comparaison du PSNR en dB entre les méthodes STC, ORNAM et SCSA en 2D pour la représentation des images. . . . .	86
5.2	Comparaison du PSNR en dB et du SSIM [79] entre la méthode K-SVD et l'approche SCSA en 2D pour le débruitage de l'image de Lena. . . . .	89

## تحليل طاقة مؤثر شرودنجر شبه كلاسيكي ثنائي الأبعاد : تطبيق لتمثيل الصور

الغرض من هذا العمل هو تعميم طريقة شبه كلاسيكية لتحليل الدوال إلى الدوال الثنائية الأبعاد تدعى تحليل شبه كلاسيكي للإشارات. تعتمد هذه الطريقة على تأويل الدالة المراد دراستها كطاقة لمؤثر شرودنجر شبه كلاسيكي. حل المشكل الطيفي لمؤثر شرودنجر تسمح بتقريب الدالة باستعمال القيم الذاتية السالبة الناتجة و الدوال الذاتية المرتبطة. بتفصيل أدق، يعبر التقريب بواسطة مجموع مقطوع لمربع الدوال الذاتية ال- $L^2$  موحدة، مرجحة بالقيم الذاتية السالبة المرتبطة. الجديد الناتج عن هذه الطريقة هو استعمال مجموعة الدوال الأساسية التكيفية خلافا عن الطرق الموجودة. دقة التقريب المعتمدة على الوسيط شبه الكلاسيكي  $h$  وكذلك خواص الدوال الذاتية هي مدروسة. من منظور عددي، يمكن تعميم التحليل إلى الأبعاد الأكبر من 1 بسهولة باستخدام الجداء المؤثري. لتوضيح فعالية هذه الطريقة في البعد الثاني، نعرض بعض النتائج لدوال عددية و صور رمادية اللون وكذلك مقارنة مع طرق مماثلة. لهذه الطريقة عدة منظورات نظرية التي من الممكن أن تحسن عدة طرق لمعالجة الصور وذلك لاحتياجات مختلفة.

**الكلمات المفتاحية:** تحليل شبه كلاسيكي؛ مؤثر شرودنجر؛ طيف منفصل؛ القيم الذاتية السالبة؛ مربع الدوال الذاتية ال- $L^2$  موحدة؛ تمثيل الصور.

---

## Décomposition du potentiel de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel: Application à la représentation d'images

Cette thèse porte sur la généralisation en deux dimensions d'une approche semi-classique, dite *Semi-Classical Signal Analysis*, de décomposition de fonctions. L'approche SCSA consiste à interpréter la fonction à analyser comme le potentiel de l'opérateur de Schrödinger semi-classique. La résolution du problème spectral de l'opérateur de Schrödinger permet de faire une approximation de la fonction à l'aide des valeurs propres négatives résultantes et des fonctions propres qui y sont associées. Plus précisément, l'approximation est exprimée comme la somme tronquée des carrés des fonctions propres,  $L^2$ -normalisées, pondérée par les valeurs propres négatives associées. La nouveauté qu'apporte cette approche est l'utilisation d'un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives contrairement aux méthodes de décomposition existantes. La finesse de l'approximation dépendant du paramètre semi-classique  $h$ , ainsi que les propriétés des fonctions propres ont été étudiées. D'un point de vue numérique, l'analyse peut être étendue aux dimensions supérieures assez facilement par le biais de produit tensoriel. Afin d'illustrer la performance de la SCSA en 2D des résultats de simulations sur des fonctions académiques et d'images test en niveaux de gris ainsi qu'une comparaison avec d'autres méthodes de représentation sont présentés dans ce mémoire. La SCSA en 2D ouvre par ailleurs de nouvelles perspectives théoriques lesquelles devraient permettre la mise au point de nombreux algorithmes de traitement d'images répondant à divers besoins comme le débruitage, la compression ou l'analyse des singularités.

**Mots-Clés:** Analyse semi-classique; Opérateur de Schrödinger; Spectre discret; Valeurs propres négatives; Fonctions propres  $L^2$ -normalisées au carré; Représentation d'images.

---

## Decomposition of the potential of the two dimensional semi-classical Schrödinger operator: Application to images representation

This work emphasizes on the generalization to two dimensions of a new approach of function decomposition based on a semi-classical quantification namely *Semi-Classical Signal Analysis*. The SCSA approach consists in considering the function, to be analyzed, as a potential of a semi-classical Schrödinger operator. The resolution of the spectral problem of the Schrödinger operator allows approximating the function using the resulting negative eigenvalues and its corresponding eigenfunctions. Precisely, the approximation is expressed as the truncated sum of the squared  $L^2$ -normalized eigenfunctions weighted by the associated negative eigenvalues. The novelty of this approach is the fact that the underlying basis functions are dependent on the function itself. The relation between the approximation accuracy and the semi-classical parameter together with the eigenfunctions' interesting features are studied. Furthermore, the extension of the method to higher dimensions, using tensor product, is investigated. Numerical results on both academic functions of two variables and standard gray test images illustrate the performance of the proposed approach. Through the promising results, the SCSA opens great perspectives on theoretical developments that can handle several image processing questions including denoising, compression and analysis of singularities.

**Key Words:** Semi-classical analysis, Schrödinger operator; Discrete spectrum; Negative eigenvalues; squared  $L^2$ -normalized eigenfunctions; Image representation.