



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES
DE LA NATURE ET DE LA VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de
Magister en Mathématiques

Par

Laïd DJILALI

Sujet du magister

APPLICATION DE TECHNIQUES D'ANALYSE
HARMONIQUE RÉELLE A L'ÉTUDE DE LA RÉGULARITÉ
D'UNE CLASSE DES ÉQUATIONS MAGNETO-MICROPOLAIRE

Composition du jury de soutenance :

Berrabah	BENDOUKHA	Président	Prof	U. MOSTAGANEM
Mohamed	BEKKAR	Examineur	Prof	U. ORAN ES-SENIA
Amina	LAHMAR-BENBERNOU	Examinatrice	Prof	U. MOSTAGANEM
Sadek	GALA	Encadreur	M.C	U. MOSTAGANEM

Année Universitaire : 2009 - 2010

Dédicaces

Je dédie ce travail

Pour mon regretté cher père, et ma chère mère

A mon épouse

A mon fils et ma fille

A ma famille. A mes amis.

Remerciments

Je souhaiterais tout d'abord adresser mes sincères remerciements à mon Professeur Monsieur Sadek GALA Maître de Conférences à l'université de Mostaganem, qui a oeuvré par ça contribution dans l'élaboration de ce travail de recherche.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon professeur Amina LAHMAR-BENBERNOU par sa générosité et son intelligence. Elle ma guidé tout au long de mes études et m'a permis d'améliorer mes capacités d'analyse et de conception.

Et je tiens à remercier,

Monsieur Berrabah Bendoukha professeur à l'université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Monsieur Mohamed BEKKAR professeur à l'université d'Oran Es Senia, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et me fait l'honneur d'être Examineur.

INTRODUCTION

Dans ce travail, on considère l'équation de fluide magneto-micropolaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - (\mu + \chi) \Delta u - b \cdot \nabla b + \nabla (p + b^2) - \chi \nabla \times w = 0, \\ \partial_t w - \gamma \Delta w - \kappa \nabla \operatorname{div} w + 2\chi w + u \cdot \nabla w - \chi \nabla \times u = 0, \\ \partial_t b - \nu \Delta b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u = 0, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \end{array} \right. \quad (0.0.1)$$

où $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^3$, $w = w(x, t) \in \mathbb{R}^3$, $b = b(x, t) \in \mathbb{R}^3$ et $p = p(x, t)$ indiquant respectivement le champ de vecteur de la vitesse, la vitesse micro-rotationnel, le champ magnétique et la pression de fluide au point $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T)$. ∇ est l'opérateur différentiel $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ noté vectoriellement, $\nabla \cdot u$ est la divergence du champ u , Δ est l'opérateur de Laplace $\nabla \cdot \nabla$, tandis que $u \cdot \nabla$ est l'opérateur de dérivation partielle $u_1 \partial_{x_1} + u_2 \partial_{x_2} + u_3 \partial_{x_3}$. u_0, w_0, b_0 sont les données initiales avec $\nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0$ au sens des distributions. Pour simplifier, on suppose que les forces extérieures ont un scalaire potentiel qui est inclus dans le gradient de la pression. Les constantes $\mu, \chi, \kappa, \gamma, \nu$ sont des nombres positifs, qui ont une relation avec la nature de la matière. Désignant par μ la viscosité cinématique, χ viscosité vortex, κ, γ les moments cinétiques des viscosités, et $\frac{1}{\nu}$ est le nombre magnétique de Reynold. Quand $w = 0$ le problème (0.0.1) se réduit à l'équation magneto-hydrodynamique standard.

La théorie du fluide micropolaire a été mise au point par Eringen [4] en 1966, ce qui nous permet de considérer certains phénomènes physiques qui ne peuvent pas être traitées par les équations de Navier-Stokes classique pour les fluides visqueux incompressibles, par exemple, la notion du sang animal, les cristaux liquide, etc.

L'existence de solutions faibles et fortes ont été étudié par Galdi et Rionero [7], et par Yamaguchi [21], respectivement. Si on outre, la viscosité vortex (tourbillonnerie) $\chi = 0$, la vitesse u ne dépend pas du champ de micro-rotationnel w , et la première équation dans (0.0.1) se réduit à l'équation classique de Navier-Stokes, qui a été largement étudiée, voir par exemple,

les classiques livres de Ladyzhenskaya [11], Lions [13] et Lemarié-Rieusset [12]. Si on ignore la micro-rotation des particules, l'équation (0.0.1) se réduit aux équations magnétohydrodynamiques visqueux incompressible, qui a également été étudiée par détail, voir [1, 2, 3, 9, 17]. Il est intéressant de noter que He et Xin [9], Zhou [25, 26] ont démontré des critères de régularité des solutions faibles pour les équations MHD en imposant seulement des conditions sur le champ de vitesse u ou ∇u (resp. $\nabla \times u$) ou bien sur la pression p et son gradient ∇p . Plus tard, He et Wang [8] ont prolongé ses résultats au cas des espaces de Lorentz (espace de Lebesgue faible) [9].

Tous ceci indique que le champ de vitesse u joue un rôle dominant que le champ magnétique b pour étudier le problème de régularité des solutions faibles pour les équations MHD.

D'autre part, le système (0.0.1) a été étudié par Galdi et Rionero dans [7]. Dans [14], Rojas-Medar a établie l'existence et l'unicité des solutions fortes en temps local en utilisant la méthode de Galerkin. Plus tard, Ortega-torres et Rojas-Medar [15] ont prouvé l'existence des solutions fortes globales pour une donnée initiale très petites. Ensuite, Rojas-Medar et Boldrini [16] ont démontré l'existence de solutions faibles par la méthode de Galerkin et l'unicité des solutions faibles uniquement dans le cas deux dimensions.

Récemment, Ferreira et Villamizar-Roa [5] ont examiné l'existence et la stabilité de la solution du système (0.0.1) dans le cas des domaines extérieurs. Villamizar-Roa et Rodriguez-Bellido [20] ont étudié le système (0.0.1) dans un domaine borné en utilisant l'approche des semi-groupes dans L^p , en montrant l'existence de solutions fortes globales pour une petite donnée initiale et le comportement asymptotique et la stabilité de la solution.

Les critères de régularité des solutions faibles pour le système (0.0.1) jouent un rôle important pour comprendre la notion physique du système micropolaire. Comme il est démontré dans la référence [8, 9], nous montrons également que, pour assurer la régularité des solutions faibles du système (0.0.1), il suffit d'imposer des conditions sur le champ de vitesse u . Très récemment, des critères de régularité ont été établi dans [24] en termes des espaces L^p .

Le but de ce travail traite la question de régularité des solutions faibles pour les équations magneto-micropolaire pour une donnée initiale dans les espaces de multiplicateurs ou les espaces de Morrey-Campanato, qui généralise les résultats précédents.

Ce travail se décompose en deux chapitres : Le premier chapitre est destiné à rappeler certains

espaces qui seront utilisés par la suites et le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la régularité de solutions faibles des équations magneto-micropolaire dans les espaces de Morrey-Campanato et les espaces de multiplicateurs.

CHAPITRE 1

1.1 Espaces de Sobolev homogènes

On commence par définir les espaces de Sobolev.

Définition 1.1.1 Soit $|r| < \frac{3}{2}$. On définit l'espace de Sobolev $\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ muni de la norme

$$\|u\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} = \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty .$$

Si $r = 0$, $\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$ coïncide avec $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Lemme 1.1.1 Soit $f \in \dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$. Posons $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\lambda > 0$. Alors

$$\|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{r-\frac{3}{2}} \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}, \quad \forall r \in \left[0, \frac{3}{2}\right[.$$

Preuve. On a par définition

$$\|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} |\widehat{f}_\lambda(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} \lambda^{-6} \left| \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{\frac{2r-3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |w|^{2r} |\widehat{f}(w)|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et l'on a finalement

$$\|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{r-\frac{3}{2}} \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} .$$

□

Nous nous servirons systématiquement dans ce mémoire de la remarque suivante.

Lemme 1.1.2 *Pour tout $0 \leq r \leq 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|w\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \leq C \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \|w\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^r .$$

Preuve. Pour $r = 1$ et $r = 0$, la démonstration est triviale.

Pour $0 < r < 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|w\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} &= \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\xi \widehat{w}(\xi)|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi \right]^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Il vient grâce à l'inégalité de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi \widehat{w}(\xi)|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi \widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \right)^r \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1-r} .$$

Ceci entraîne que

$$\left[\int_{\mathbb{R}^3} |\xi \widehat{w}(\xi)|^{2r} |\widehat{w}(\xi)|^{2-2r} d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{r}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1-r}{2}} .$$

On utilise le théorème de Planchrel, il vient

$$(2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} |w(x)|^2 dx .$$

Finalement, on déduit que

$$\|w\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \leq C \|w\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^r \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} .$$

□

Le lemme est complètement démontré. Alors, on a l'inclusion remarquable suivante.

Corollaire 1.1.1

$$L^2(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^r(\mathbb{R}^3), \quad \forall r \in [0, 1].$$

Théorème 1.1.1 (Les inclusions de Sobolev) Si $0 < r < \frac{3}{2}$, l'espace $\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$ s'injecte continûment dans $L^{\frac{6}{3-2r}}(\mathbb{R}^3)$.

Remarque 1.1.1 L'indice $p = \frac{6}{3-2r}$ peut-être deviné grâce à un argument d'homogénéité.

En effet, on a

$$\|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \quad \text{et} \quad \|f_\lambda\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{r-\frac{3}{2}} \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}$$

Pour que les deux quantités $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$ et $\|\cdot\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}$ ont la même homogénéité, c'est -à-dire qu'elle se comportent de la même manière par changement d'échelle, il faut que $r - \frac{3}{2} = -\frac{3}{p}$, donc $p = \frac{6}{3-2r}$.

1.2 Les espaces de Morrey - Campanato

Nous allons nous limiter au cas des espaces de Morrey-Campanato homogène $\dot{\mathcal{M}}_{p,q}$.

Définition 1.2.1 Pour tous $1 < p \leq q \leq +\infty$, on définit l'espace de Morrey-Campanato $\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3)$ par :

$$\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3) : \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{R > 0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,R))} < \infty \right\},$$

où $B(x, R)$ est la boule de \mathbb{R}^3 de centre x et de rayon R .

On vérifie aisément la propriété suivante :

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3)}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Il est facile de démontrer les inégalités de Hölder suivante [10, 19]

Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s}$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{t} = \frac{1}{w}$, alors

$$\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3) \cdot \dot{\mathcal{M}}_{r,t}(\mathbb{R}^3) \subseteq \dot{\mathcal{M}}_{s,w}(\mathbb{R}^3).$$

De plus, pour tout $1 \leq p \leq q < +\infty$, on a

$$L^q(\mathbb{R}^3) = \dot{\mathcal{M}}_{q,q}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3).$$

1.2.1 Le predual $\mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3)$

Définition 1.2.2 ([12]) *Soit $1 \leq q' \leq p' < \infty$. On définit l'espace homogène suivant :*

$$\mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3) = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^{q'}(\mathbb{R}^3) / f \stackrel{L^{q'}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k, \text{ où } (g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L_{comp}^{p'}(\mathbb{R}^3) \\ \text{et } \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k^{3(\frac{1}{q'} - \frac{1}{p'})} \|g_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} < +\infty \text{ où } \forall k \in \mathbb{N}, d_k = \text{diam}(\text{supp } g_k) < +\infty \end{array} \right\}.$$

$\mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3)} = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k^{3(\frac{1}{q'} - \frac{1}{p'})} \|g_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)}, \text{ tel que } f = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k \right\},$$

où l'inf est défini sur toutes les décompositions de f en séries atomiques.

Maintenant que la définition est clarifiée, nous en tirons le résultat important suivant.

Lemme 1.2.1 *Soit $1 \leq q' \leq p' < +\infty$. Alors si on prend p et q tels que*

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1, \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1,$$

on a

$$\left(\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3) \right)^* = \mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3). \quad (*)$$

Preuve. Pour établir (*), on remarque que $L_{comp}^{p'} \subset \mathcal{Z}^{p',q'}$ et donc $(\mathcal{Z}^{p',q'})^* \subset L_{loc}^p$. Soient $f \in \mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3)$ et $h \in \dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3)$. Alors on a pour toute $f \stackrel{L^{p'}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} f h \, dx \right| &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{B(x_k, d_k)} |g_k h| \, dx \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k^{3(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|g_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} d_k^{3(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left(\int_{B(x_k, d_k)} |h|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|h\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3)} \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k^{3(\frac{1}{q'} - \frac{1}{p'})} \|g_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

On passe à l'inf, on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} f h \, dx \right| \leq \|h\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3)} \|f\|_{\mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3)}.$$

Alors

$$\dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3) \subset \left(\mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3) \right)^* .$$

En sens inverse, soit $h \in \left(\mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3) \right)^* \subset L_{loc}^p(\mathbb{R}^3)$. Alors, il existe $C_h > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3)$,

$$|\langle f, h \rangle| \leq C_h \|f\|_{\mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3)} .$$

Soient $x \in \mathbb{R}^3$ et $R > 0$. Posons

$$f = \bar{h} |h|^{p-2} \mathcal{X}_{B(x,R)} \in L_{comp}^{p'} .$$

On observe que

$$\begin{aligned} |\langle f, h \rangle| &= \int_{B(x,R)} |h(y)|^p dy \leq C_h R^{3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p'}\right)} \|\bar{h} |h|^{p-2} \mathcal{X}_{B(x,R)}\|_{L^{p'}} \\ &\leq C_h R^{3\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\int_{B(x,R)} |h(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

Ainsi, il vient que

$$R^{3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(x,R)} |h(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_h ,$$

d'où $h \in \dot{\mathcal{M}}_{p,q}(\mathbb{R}^3)$. □

Nous en déduisons immédiatement la propriété suivante.

Lemme 1.2.2 ([12]) *Soient $1 \leq q' \leq p' < 2$ et $r = \frac{3}{q}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $\forall v \in \dot{H}^r(\mathbb{R}^3)$,*

$$\|uv\|_{\mathcal{Z}^{p',q'}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} .$$

1.3 Les espaces de multiplicateurs

Nous allons présenter maintenant les espaces de multiplicateurs singuliers sur les espaces de Sobolev, introduit par Lemarié-Rieusset [12] dans ces travaux en généralisant le théorème d'unicité de J. Serrin [18].

Nous commençons par donner la définition suivante.

Définition 1.3.1 Pour tout $r \geq 0$, on définit

$$\dot{X}_r(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) : \forall g \in \dot{H}^r(\mathbb{R}^3), fg \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}.$$

Il s'agit bien des espaces de Banach normés par :

$$\|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} = \sup_{\|g\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \leq 1} \|fg\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

On vérifie sans peine que $(\forall x_0 \in \mathbb{R}^3)$,

$$\|f(\cdot + x_0)\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} = \|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)},$$

De plus, on a

$$L^\infty(\mathbb{R}^3) \subset \dot{X}_r(\mathbb{R}^3) \subset \dot{X}_s(\mathbb{R}^3) \text{ pour tout } 0 \leq r \leq s < \frac{3}{2}.$$

Proposition 1.3.1 Soit $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\|f_\lambda\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{-r} \|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}.$$

Preuve. L'inégalité $\|f_\lambda\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \leq \lambda^{-r} \|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}$ est triviale.

D'autre part,

$$\|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} = \left\| (f_\lambda)_{\frac{1}{\lambda}} \right\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{-r} \|f_\lambda\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}.$$

Donc

$$\|f_\lambda\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \geq \lambda^{-r} \|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}.$$

Ceci complète la preuve. □

Exemple 1.3.1 On a

$$\frac{1}{|x|} \in \dot{X}_1(\mathbb{R}^3).$$

En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla g(x) + \alpha \frac{x}{|x|^2} g(x) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla g(x)|^2 dx + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|g(x)|^2}{|x|^2} dx + 2\alpha \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla g(x) \cdot \frac{x}{|x|^2} \cdot \bar{g}(x) \right) dx \right) \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} 2\alpha \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla g(x) \cdot \frac{x}{|x|^2} \bar{g}(x) \right) dx \right) &= \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \nabla |g(x)|^2 \cdot \frac{x}{|x|^2} dx \\ &= -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} |g(x)|^2 \operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|^2} \right) dx \end{aligned}$$

Or,

$$\operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|^2} \right) = \frac{1}{|x|^2},$$

ceci implique que

$$2\alpha \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla g(x) \cdot \frac{x}{|x|^2} \bar{g}(x) \right) dx \right) = -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|g(x)|^2}{|x|^2} dx,$$

c'est-à-dire,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla g(x)|^2 dx + \alpha(\alpha - 1) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|g(x)|^2}{|x|^2} dx.$$

En particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|g(x)|^2}{|x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla g(x)|^2 dx.$$

Enfin,

$$\left\| \frac{1}{|x|} \right\|_{\dot{X}_1(\mathbb{R}^3)} = \sup_{\|g\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} \leq 1} \left\| \frac{1}{|x|} g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2 < +\infty.$$

Ce qui implique $\frac{1}{|x|} \in \dot{X}_1(\mathbb{R}^3)$.

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant.

Lemme 1.3.1 Pour tout $0 \leq r < \frac{3}{2}$,

$$L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{X}_r(\mathbb{R}^3).$$

Preuve. Soit $f \in L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$. En utilisant l'inclusion $\dot{H}^r(\mathbb{R}^3) \subset L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{r}{3}$ et l'inégalité de Hölder, il vient que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \|g\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Cela revient à écrire que

$$\|f\|_{\dot{X}_r} = \sup_{\|g\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \leq 1} \|fg\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Considérons le cas particulier où $p = 2$, on a alors

Lemme 1.3.2 *Pour tout $0 \leq r < \frac{3}{2}$, on a,*

$$\dot{X}_r(\mathbb{R}^3) \subset \dot{\mathcal{M}}_{2, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3).$$

Preuve. Soient $f \in \dot{X}_r(\mathbb{R}^3)$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que $\phi = 1$ sur $B(\frac{x_0}{R}, 1)$. On a

$$\begin{aligned} R^{r-\frac{3}{2}} \left(\int_{|x-x_0| \leq R} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &= R^{r-\frac{3}{2}} \left(\int_{|y-\frac{x_0}{R}| \leq 1} R^3 |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq R^r \left(\int_{y \in \mathbb{R}^3} |f(y)\phi(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = R^r \|f\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq R^r \|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\phi\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \|f\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

D'où $f \in \dot{\mathcal{M}}_{2, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$. □

D'autre part, $\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{X}_r(\mathbb{R}^3)$ pour tout $2 < p < \frac{3}{r}$, $r < \frac{3}{2}$. Cette inclusion est très techniques et nous renvoyons à [12] pour tous les détails.

Lemme 1.3.3 (Gronwall) *Soient $T \in \mathbb{R}_+$ et $C \in \mathbb{R}_+$. Soit $\varphi \in L^1([0, T])$ une fonction positive, et soit enfin $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ positive, vérifiant :*

$$f(t) \leq C + \int_0^t \varphi(s) f(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors f vérifie :

$$f(t) \leq C \exp \left(\int_0^t \varphi(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Voici une autre version du lemme, pour les fonctions dérivables.

Corollaire 1.3.1 *Soit $T \in \mathbb{R}_+$. Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ une fonction positive, et soit $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ positive, dérivable sur $[0, T]$, et vérifiant :*

$$f'(t) \leq \varphi(t) f(t), \quad \forall t \in [0, T] .$$

Alors f vérifie :

$$f(t) \leq f(0) \exp \left(\int_0^t \varphi(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T] .$$

Preuve. Il suffit d'intégrer l'hypothèse :

$$f(t) \leq f(0) + \int_0^t \varphi(s) f(s) ds ,$$

et d'appliquer le lemme précédent. □

Régularité des solutions faibles des équations magneto-micropolaire

Les équations magneto-micropolaire incompressibles en dimension trois ont la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - (\mu + \chi) \Delta u - b \cdot \nabla b + \nabla (p + b^2) - \chi \nabla \times w = 0 \\ \partial_t w - \gamma \Delta w - \kappa \nabla \operatorname{div} w + 2\chi w + u \cdot \nabla w - \chi \nabla \times u = 0 \\ \partial_t b - \nu \Delta b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u = 0 \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \end{array} \right. \quad (2.0.1)$$

où $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^3$, $w = w(x, t) \in \mathbb{R}^3$, $b = b(x, t) \in \mathbb{R}^3$ et $p = p(x, t) \in \mathbb{R}$ indiquant respectivement, le champ vitesse, la vitesse micro-rotationnel, le champ magnétique et la pression de fluide au point $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T)$, tandis que u_0, w_0, b_0 sont les données initiales avec $\nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0$ au sens des distributions. Rappelons que

$$\nabla \times f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^T$$

Posons

$$C_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^3) = \{ \varphi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^3)) : \operatorname{div} \varphi = 0 \} \subseteq (C_0^\infty(\mathbb{R}^3)) ,$$

$$L_\sigma^2(\mathbb{R}^3) = \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^3)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = \{ u \in L^2(\mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0 \} ,$$

L'espace $H_\sigma^r(\mathbb{R}^3)$ est la fermeture de l'espace $C_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^3)$ respectant la norme

$$\|u\|_{H^r(\mathbb{R}^3)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\| (1 - \Delta)^{\frac{r}{2}} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \text{ pour } r \geq 0.$$

2.1 Régularité des solutions des équations magneto-micropolaire dans les espaces de Morrey-Campanato

Dans ce paragraphe, on va étudier les critères de régularités des solutions faibles au sens de Leray du système de l'équation de fluide magneto-micropolaire dans les espaces de Morrey-Campanato.

Définition 2.1.1 ([16]) *Soient $(u_0, b_0) \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3), w_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $T > 0$. Une fonction mesurable (u, w, b) sur $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ est dite solution faible de (2.0.1) sur $(0, T)$ si*

a)

$$(u, b) \in L^\infty((0, T); L_\sigma^2) \cap L^2((0, T); H_\sigma^1)$$

et

$$w \in L^\infty((0, T); L^2) \cap L^2((0, T); H^1);$$

b) *Pour tout $(\phi, \varphi) \in H^1((0, T); H_\sigma^1)$ et $\psi \in H^1((0, T); H^1)$ avec*

$$\phi(T) = \varphi(T) = \psi(T) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \{ - \langle u, \partial_t \phi \rangle + \langle u \cdot \nabla u, \phi \rangle + (\mu + \chi) \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \} d\tau \\ & - \int_0^T \{ \langle b \cdot \nabla b, \phi \rangle + \chi \langle \nabla \times w, \phi \rangle \} d\tau = - \langle u_0, \phi(0) \rangle, \\ & \int_0^T \{ - \langle w, \partial_t \varphi \rangle + \gamma \langle \nabla w, \nabla \varphi \rangle + \kappa \langle \nabla \cdot w, \nabla \cdot \varphi \rangle \} d\tau \\ & + \int_0^T \{ 2\chi \langle w, \varphi \rangle + \langle u \cdot \nabla w, \varphi \rangle - \chi \langle \nabla \times u, \varphi \rangle \} d\tau \\ & = - \langle w_0, \varphi(0) \rangle, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_0^T \{ - \langle b, \partial_t \psi \rangle + \langle u \cdot \nabla b, \psi \rangle + \nu \langle \nabla b, \nabla \psi \rangle - \langle b \cdot \nabla u, \psi \rangle \} d\tau \\ & = - \langle b_0, \psi(0) \rangle. \end{aligned}$$

Avec cette définition, on a le résultat fondamental suivant .

Théorème 2.1.1 *Soit $(u_0, b_0) \in \dot{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^3)$ et $w_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. On suppose que*

$$(u, b) \in \mathcal{C} \left((0, T); \dot{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^3) \right) \cap \mathcal{C} \left((0, T); \dot{H}_\sigma^2(\mathbb{R}^3) \right),$$

$$w \in \mathcal{C} \left((0, T); \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \right) \cap \mathcal{C} \left((0, T); \dot{H}^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

est une solution régulière du système (2.0.1) . Si u vérifie l'une des conditions suivantes :

1.

$$u \in L^{\frac{2}{1-r}} \left((0, T); \dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \right) \text{ pour } 0 < r < 1 \text{ et } 2 < p < \frac{3}{r}$$

2.

$$u \in \mathcal{C} \left((0, T); \dot{\mathcal{M}}_{p, 3}(\mathbb{R}^3) \right) \text{ pour } 2 < p < 3 ,$$

alors la solution (u, b, w) peut s'étendre par continuité au delà de $t = T$.

Preuve. Supposons que $u \in L^{\frac{2}{1-r}} \left(0, T, \dot{\mathcal{M}}_{p, 3}(\mathbb{R}^3) \right)$. On dérive les équations du système (2.0.1) par rapport à la variable x_i avec $i \in \{1, 2, 3\}$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \partial_{x_i} u + (\partial_{x_i} u \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) \partial_{x_i} u - (\mu + \chi) \Delta \partial_{x_i} u - \partial_{x_i} b \cdot \nabla b - b \cdot \nabla \partial_{x_i} b + \nabla \partial_{x_i} (p + b^2) \\ -\chi \nabla \times \partial_{x_i} w = 0, \\ \partial_t \partial_{x_i} w - \gamma \Delta \partial_{x_i} w - \kappa \nabla \operatorname{div} \partial_{x_i} w + 2\chi \partial_{x_i} w + \partial_{x_i} u \cdot \nabla w + u \cdot \nabla \partial_{x_i} w - \chi \nabla \times \partial_{x_i} u = 0, \\ \partial_t \partial_{x_i} b - \nu \Delta \partial_{x_i} b + \partial_{x_i} u \cdot \nabla b + u \cdot \nabla \partial_{x_i} b - \partial_{x_i} b \cdot \nabla u - b \cdot \nabla \partial_{x_i} u = 0. \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Le produit scalaire de chaque équation du système (2.1.1) avec $\partial_{x_i} u$, $\partial_{x_i} w$, $\partial_{x_i} b$ respectivement, donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \partial_t \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u \rangle + \langle (\partial_{x_i} u \cdot \nabla) u, \partial_{x_i} u \rangle + \langle (u \cdot \nabla) \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u \rangle - (\mu + \chi) \langle \Delta \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u \rangle \\ - \langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla b, \partial_{x_i} u \rangle - \langle b \cdot \nabla \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} u \rangle + \langle \nabla \partial_{x_i} (p + b^2), \partial_{x_i} u \rangle - \chi \langle \nabla \times \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} u \rangle = 0, \\ \langle \partial_t \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle - \gamma \langle \Delta \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle - \kappa \langle \nabla \operatorname{div} \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle + 2\chi \langle \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle \\ + \langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla w, \partial_{x_i} w \rangle + \langle u \cdot \nabla \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle - \chi \langle \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w \rangle = 0, \\ \langle \partial_t \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b \rangle - \nu \langle \Delta \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b \rangle + \langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla b, \partial_{x_i} b \rangle + \langle u \cdot \nabla \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b \rangle - \langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla u, \partial_{x_i} b \rangle \\ - \langle b \cdot \nabla \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} b \rangle = 0. \end{array} \right.$$

On déduit que

$$\left. \begin{array}{l} \langle \partial_t \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u \rangle + \langle (\partial_{x_i} u \cdot \nabla) u, \partial_{x_i} u \rangle + \langle (u \cdot \nabla) \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u \rangle \\ - (\mu + \chi) \langle \Delta \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u \rangle - \langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla b, \partial_{x_i} u \rangle - \langle b \cdot \nabla \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} u \rangle \\ + \langle \nabla \partial_{x_i} (p + b^2), \partial_{x_i} u \rangle - \chi \langle \nabla \times \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} u \rangle + \langle \partial_t \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle \\ - \gamma \langle \Delta \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle - \kappa \langle \nabla \operatorname{div} \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle + 2\chi \langle \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle \\ + \langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla w, \partial_{x_i} w \rangle + \langle u \cdot \nabla \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle - \chi \langle \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w \rangle \\ + \langle \partial_t \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b \rangle - \nu \langle \Delta \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b \rangle + \langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla b, \partial_{x_i} b \rangle \\ + \langle u \cdot \nabla \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b \rangle - \langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla u, \partial_{x_i} b \rangle - \langle b \cdot \nabla \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} b \rangle = 0. \end{array} \right\} \quad (2.1.2)$$

Or,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w \rangle &= \langle \nabla \times \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} u \rangle, \\ \langle b \cdot \nabla \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} u \rangle + \langle b \cdot \nabla \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} b \rangle &= 0, \\ \langle u \cdot \nabla \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u \rangle &= \langle u \cdot \nabla \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b \rangle = \langle u \cdot \nabla \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle = 0, \end{aligned}$$

et comme $\nabla \cdot u = 0$, il vient que

$$\langle \nabla \partial_{x_i} (p + b^2), \partial_{x_i} u \rangle = 0.$$

Enfin, le système (2.1.2) se réduit à

$$\langle \partial_t \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u \rangle + \langle \partial_t \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle + \langle \partial_t \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b \rangle$$

$$\begin{aligned}
 -(\mu + \chi) &< \Delta \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u > -\gamma < \Delta \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w > -\nu < \Delta \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b > \\
 -\kappa &< \nabla \operatorname{div} \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w > + 2\chi < \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w > \\
 &= - < \partial_{x_i} u \cdot \nabla u, \partial_{x_i} u > + < \partial_{x_i} b \cdot \nabla b, \partial_{x_i} u > - < \partial_{x_i} u \cdot \nabla b, \partial_{x_i} b > \\
 + &< \partial_{x_i} b \cdot \nabla u, \partial_{x_i} b > - < \partial_{x_i} u \cdot \nabla w, \partial_{x_i} w > + 2\chi < \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w > \\
 - &< u \cdot \nabla \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w > .
 \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
 < \partial_t \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u > &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \partial_{x_i} u \overline{\partial_{x_i} u} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d}{dt} (\partial_{x_i} u \overline{\partial_{x_i} u}) dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_i} u|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_{x_i} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .
 \end{aligned}$$

De même

$$< \partial_t \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w > = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_{x_i} w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

et

$$< \partial_t \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b > = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_{x_i} b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

De plus,

$$-(\mu + \chi) < \Delta \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u > = -(\mu + \chi) < \nabla \cdot \nabla \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u > = (\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 \left\| \partial_{x_i x_j}^2 u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ,$$

$$-\gamma < \Delta \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w > = \gamma \sum_{j=1}^3 \left\| \partial_{x_i x_j}^2 w \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ,$$

$$-\nu < \Delta \partial_{x_i} b, \partial_{x_i} b > = \nu \sum_{j=1}^3 \left\| \partial_{x_j x_i}^2 b \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ,$$

$$-\kappa < \nabla \operatorname{div} \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w > = \kappa \|\nabla \cdot \partial_{x_i} w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ,$$

et

$$2\chi < \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w > = 2\chi \|\partial_{x_i} w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} b)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + (\mu + \chi) \sum_{j=1}^3 \left\| \partial_{x_i x_j}^2 u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \gamma \sum_{j=1}^3 \left\| \partial_{x_i x_j}^2 w \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
 & + \nu \sum_{j=1}^3 \left\| \partial_{x_i x_j}^2 b \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \kappa \|\nabla \cdot \partial_{x_i} w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\chi \|\partial_{x_i} w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
 = & - \langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla u, \partial_{x_i} u \rangle + \langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla b, \partial_{x_i} u \rangle - \langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla b, \partial_{x_i} b \rangle + \langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla u, \partial_{x_i} b \rangle \\
 - & \langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla w, \partial_{x_i} w \rangle + 2\chi \langle \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w \rangle - \langle u \cdot \nabla \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} w \rangle .
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} b)\|_{L^2}^2 \\
 & + \sum_{j=1}^3 \left((\mu + \chi) \left\| \partial_{x_i x_j}^2 u \right\|_{L^2}^2 + \gamma \left\| \partial_{x_i x_j}^2 w \right\|_{L^2}^2 + \nu \left\| \partial_{x_i x_j}^2 b \right\|_{L^2}^2 \right) \\
 & + \kappa \|\nabla \cdot \partial_{x_i} w\|_{L^2}^2 + 2\chi \|\partial_{x_i} w\|_{L^2}^2 \\
 \leq & |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla u, \partial_{x_i} u \rangle| + |\langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla b, \partial_{x_i} u \rangle| + |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla b, \partial_{x_i} b \rangle| \\
 & + |\langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla u, \partial_{x_i} b \rangle| + |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla w, \partial_{x_i} w \rangle| + 2\chi |\langle \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w \rangle| \\
 = & \sum_{k=1}^6 A_k .
 \end{aligned}$$

Pour A_1 , on a

$$\begin{aligned}
 A_1 & = |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla u, \partial_{x_i} u \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla u \cdot \partial_{x_i}^2 u \, dx \right| \\
 & \leq \|D^2 u \cdot \nabla u\|_{\mathcal{Z}_{p', \frac{3}{3-r}}(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}
 \end{aligned}$$

En appliquant les lemmes 1.1.2, et 1.3.3, on obtient

$$\begin{aligned}
 A_1 & \leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{H^r(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \\
 & \leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^r \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\
 & \leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^r \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\
 & \leq \left(\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1+r}{2}} \left(\|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1-r}{2}}
 \end{aligned}$$

L'inégalité de Young donne finalement que

$$A_1 \leq \frac{\chi}{4} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

Pour A_2 , on a

$$A_2 = |\langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla b, \partial_{x_i} u \rangle| = \left| - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i}^2 b \cdot \nabla b \cdot u \, dx \right|$$

En utilisant les inégalités de Hölder et Young, on aura

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \|D^2 b \cdot \nabla b\|_{\mathcal{Z}_{p', \frac{3}{3-r}}(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^r \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\ &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^r \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\ &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1+r} \left(\|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1-r}{2}} \\ &\leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 . \end{aligned}$$

Donc

$$A_2 \leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{C_r}{3} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

De la même manière, on trouve

$$A_3 \leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{C_r}{3} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ,$$

$$A_4 \leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{C_r}{3} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

Pour A_5 , on a

$$A_5 = |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla w, \partial_{x_i} w \rangle| = \left| - \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla w \cdot \partial_{x_i}^2 w \, dx \right| .$$

Donc,

$$A_5 \leq \|D^2 w \cdot \nabla w\|_{\mathcal{Z}_{p', \frac{3}{3-r}}(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|D^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla w\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \|D^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla w\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^r \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\
&\leq \frac{\gamma}{6} \|D^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .
\end{aligned}$$

Enfin, pour A_6 , on a

$$\begin{aligned}
A_6 &= 2\chi |\langle \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w \rangle| \\
&\leq \frac{\chi}{2} \|\nabla \times \partial_{x_i} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{2}{3} \chi \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .
\end{aligned}$$

Par sommation sur les $i = \overline{1, 3}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \|(\nabla u, \nabla w, \nabla b)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + (2\mu + 2\chi) \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&+ 2\gamma \|D^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\kappa \|\nabla \cdot \text{div} w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\leq \frac{3\chi}{2} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \nu \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&+ \gamma \|D^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 3C_r \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|(\nabla u, \nabla b, \nabla w)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ,
\end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \|(\nabla u, \nabla w, \nabla b)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \left(2\mu + \frac{1}{2}\chi\right) \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \gamma \|D^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&+ \nu \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\kappa \|\nabla \cdot \text{div} w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\leq C_r \|u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|(\nabla u, \nabla b, \nabla w)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on déduit que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|(\nabla u(t), \nabla w(t), \nabla b(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|(\nabla u_0, \nabla w_0, \nabla b_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \exp \left(C \int_0^t \|u(s)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} ds \right) .$$

Passons à la preuve de la seconde assertion du théorème (2.1.1). On commence par décomposer $u = u_1 + u_2$ tel que pour tout $T > 0$,

$$\|u_1\|_{u \in \mathcal{C}((0, T); \dot{\mathcal{M}}_{p, 3}(\mathbb{R}^3))} \leq \epsilon , \quad \sup_{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^3} |u_2(t, x)| < K(\epsilon) .$$

On peut choisir

$$u_2(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{pour } |u(t, x)| < K , \\ 0 & \text{pour } |u(t, x)| \geq K , \end{cases}$$

où K est suffisamment grand.

Pour A_1 , on a

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla u \cdot \partial_{x_i}^2 u \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |u| |D^2 u| |\nabla u| \, dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_1| |D^2 u| |\nabla u| \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} |u_2| |D^2 u| |\nabla u| \, dx \\
 &\leq \|D^2 u \cdot \nabla u\|_{\mathcal{Z}_{p', \frac{3}{2}}} \|u_1\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,3}} + \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u_2 \cdot \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
 &\leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} \|u_1\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,3}} + K(\epsilon) \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
 &\leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\|\nabla u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} \|u_1\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,3}} + K(\epsilon) \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \\
 &\leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\epsilon \|\nabla u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} + K(\epsilon) \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \\
 &\leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\epsilon \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K(\epsilon) \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \\
 &\leq \epsilon \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + K(\epsilon) \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
 &\leq \frac{\chi}{4} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + K(\epsilon) \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .
 \end{aligned}$$

Donc

$$A_1 \leq \frac{\chi}{4} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + K(\epsilon) \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

Pour A_2 , on obtient

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \left| - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i}^2 b \cdot \nabla b \cdot u \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_i}^2 b| |\nabla b| |u| \, dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |D^2 b| |\nabla b| |u| \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} |D^2 b| |\nabla b| |u_1 + u_2| \, dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |D^2 b| |\nabla b| |u_1| \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} |D^2 b| |\nabla b| |u_2| \, dx \\
 &\leq \|D^2 b \cdot \nabla b\|_{\mathcal{Z}_{p', \frac{3}{2}}} \|u_1\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,3}} + \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u_2 \cdot \nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} \|u_1\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p,3}} + K(\epsilon) \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\epsilon \|\nabla b\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} + K(\epsilon) \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\epsilon \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K(\epsilon) \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) .
 \end{aligned}$$

Cela conduit à

$$A_2 \leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{K(\epsilon)}{3} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

Pour A_3 , on a

$$\begin{aligned} A_3 &= \left| - \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla b \cdot \partial_{x_i}^2 b \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |u| |\nabla b| |D^2 b| \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_1| |\nabla b| |D^2 b| \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} |u_2| |\nabla b| |D^2 b| \, dx \\ &\leq \|D^2 b \cdot \nabla b\|_{\mathcal{Z}_{p', \frac{3}{2}}} \|u_1\|_{\mathcal{M}_{p,3}} + \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u_2 \cdot \nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \|u_1\|_{\mathcal{M}_{p,3}} + K(\epsilon) \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\epsilon \|\nabla b\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} + K(\epsilon) \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \\ &\leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{K(\epsilon)}{3} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 , \end{aligned}$$

et par suite

$$A_3 \leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{K(\epsilon)}{3} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

Pour A_4 , on trouve

$$A_4 \leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{K(\epsilon)}{3} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

De manière analogue, on trouve pour A_5 ,

$$\begin{aligned} A_5 &= \left| - \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla w \cdot \partial_{x_i}^2 w \, dx \right| \\ &\leq \frac{\nu}{6} \|D^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + K(\epsilon) \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 . \end{aligned}$$

Après sommation sur les $i = \overline{1, 3}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|(\nabla u, \nabla w, \nabla b)\|_{L^2}^2 + \left(2\mu + \frac{\lambda}{2}\right) \|D^2 u\|_{L^2}^2 + \gamma \|D^2 w\|_{L^2}^2 + \nu \|D^2 b\|_{L^2}^2 \\ &+ 2\kappa \|\nabla \cdot \operatorname{div} w\|_{L^2}^2 \\ &\leq K(\epsilon) \|(\nabla u, \nabla b, \nabla w)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Grownwall, on trouve

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|(\nabla u(t), \nabla b(t), \nabla w(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|(\nabla u_0, \nabla b_0, \nabla w_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \exp(K(\epsilon) T) ,$$

et le théorème 2.1.1 est démontré. \square

Théorème 2.1.2 Soit $(u_0, b_0) \in \dot{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^3)$ et $w_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. On suppose que

$$(u, b) \in \mathcal{C}\left((0, T); \dot{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^3)\right) \cap \mathcal{C}\left((0, T); \dot{H}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)\right)$$

et

$$w \in \mathcal{C}\left((0, T); \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\right) \cap \mathcal{C}\left((0, T); \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)\right)$$

est une solution régulière du système (2.0.1). Si u vérifie la condition suivante

$$\int_0^T \|\nabla u(\tau)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{2-r}} d\tau < \infty \text{ pour } 0 < r < 2 \text{ et } 2 < p < \frac{3}{r}$$

alors la solution (u, b, w) peut s'étendre par continuité à $t = T$.

Preuve. Supposons que $\nabla u \in L^{\frac{2}{2-r}}\left((0, T); \dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}\right)$.

En suivant la même méthode dans la démonstration du théorème 2.1.1, on arrive à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} b)\|_{L^2}^2 \\ & + \sum_{j=1}^3 \left((\mu + \chi) \|\partial_{x_i x_j}^2 u\|_{L^2}^2 + \gamma \|\partial_{x_i x_j}^2 w\|_{L^2}^2 + \nu \|\partial_{x_i x_j}^2 b\|_{L^2}^2 \right) \\ & + \kappa \|\nabla \cdot \partial_{x_i} w\|_{L^2}^2 + 2\chi \|\partial_{x_i} w\|_{L^2}^2 \\ \leq & |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla u, \partial_{x_i} u \rangle| + |\langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla b, \partial_{x_i} u \rangle| + |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla b, \partial_{x_i} b \rangle| \\ & + |\langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla u, \partial_{x_i} b \rangle| + |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla w, \partial_{x_i} w \rangle| + 2\chi |\langle \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w \rangle| \\ = & \sum_{k=1}^6 B_k \end{aligned}$$

On commence par estimer B_1 . On a

$$\begin{aligned} B_1 &= |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla u, \partial_{x_i} u \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i} u \cdot \nabla u \cdot \partial_{x_i} u dx \right| \\ &\leq \|Du \cdot Du\|_{\mathcal{Z}_{p', \frac{3}{3-r}}} \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}} \\ &\leq \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}} \|Du\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^r \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\ &\leq \left(\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{r}{2}} \left(\|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{2-r}{2}} \\ &\leq \frac{\chi}{4} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$B_1 \leq \frac{\chi}{4} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}^{\frac{2}{2-r}}} \left\| Du \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

Pour B_2 , on trouve

$$\begin{aligned} B_2 &= |\langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla b, \partial_{x_i} u \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i} b \cdot \nabla b \cdot \partial_{x_i} u \, dx \right| \\ &\leq \|Db \cdot Db\|_{\mathcal{Z}_{p', \frac{3}{3-r}}} \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}} \\ &\leq \|Db\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}} \|Db\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|Db\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}} \|D^2b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^r \|Db\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\ &\leq \left(\|D^2b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{r}{2}} \left(\|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|Db\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{2-r}{2}} \\ &\leq \frac{\nu}{18} \|D^2b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|Db\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 . \end{aligned}$$

Alors,

$$B_2 \leq \frac{\nu}{18} \|D^2b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|Db\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

De manière similaire, on estime B_3 , B_4 , et B_5 , on aura

$$B_3 \leq \frac{\nu}{18} \|D^2b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|Db\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ,$$

$$B_4 \leq \frac{\nu}{18} \|D^2b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|Db\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ,$$

$$B_5 \leq \frac{\gamma}{6} \|D^2w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|Dw\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 .$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\nabla u, \nabla w, \nabla b)\|_{L^2}^2 + \left(\mu + \frac{\chi}{2} \right) \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|D^2w\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \|D^2b\|_{L^2}^2 \\ &+ \kappa \|\nabla \cdot \partial_{x_i} w\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_r \|\nabla u\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \|(\nabla u, \nabla b, \nabla w)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 . \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Grownwall, on aura

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|(\nabla u(t), \nabla w(t), \nabla b(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|(\nabla u_0, \nabla w_0, \nabla b_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \exp \left(C \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{p, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{2-r}} \, ds \right) .$$

Le théorème 2.1.2 est démontré. \square

2.2 Régularité des solutions des équations magneto-micropolaire dans les espaces de multiplicateurs

Dans cette partie, on va améliorer les critères de régularité des solutions des équations magneto-micropolaire dans les espaces de multiplicateurs. On montre que si le champ de vecteur u vérifie :

$$u \in L^{\frac{2}{1-r}} \left((0, T); \dot{X}_r(\mathbb{R}^3) \right) \text{ avec } r \in [0, 1) \text{ ou } u \in \mathcal{C} \left((0, T); \dot{X}_1(\mathbb{R}^3) \right)$$

alors les solutions du système (2.0.1) peut s'étendre par continuité au delà de T .

Théorème 2.2.1 *Soit $(u_0, b_0) \in \dot{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^3)$ et $w_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. On suppose que*

$$(u, b) \in \mathcal{C} \left((0, T); \dot{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^3) \right) \cap \mathcal{C} \left((0, T); \dot{H}_\sigma^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

et

$$w \in \mathcal{C} \left((0, T); \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \right) \cap \mathcal{C} \left((0, T); \dot{H}^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

est une solution continue de (2.0.1). Si la solution u vérifie l'une des conditions suivantes :

1.

$$u \in L^{\frac{2}{1-r}} \left((0, T); \dot{X}_r(\mathbb{R}^3) \right) \text{ pour } 0 \leq r < 1$$

2.

$$u \in \mathcal{C} \left((0, T); \dot{X}_1(\mathbb{R}^3) \right)$$

alors la solution (u, w, b) peut s'étendre par continuité au delà de T .

Preuve. En suivant les étapes de la démonstration du théorème 2.1.1, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w, \partial_{x_i} b)\|_{L^2}^2 \\
 & + \sum_{j=1}^3 \left((\mu + \chi) \left\| \partial_{x_i x_j}^2 u \right\|_{L^2}^2 + \gamma \left\| \partial_{x_i x_j}^2 w \right\|_{L^2}^2 + \nu \left\| \partial_{x_i x_j}^2 b \right\|_{L^2}^2 \right) \\
 & + \kappa \|\nabla \cdot \partial_{x_i} w\|_{L^2}^2 + 2\chi \|\partial_{x_i} w\|_{L^2}^2 \\
 & \leq |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla u, \partial_{x_i} u \rangle| + |\langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla b, \partial_{x_i} u \rangle| + |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla b, \partial_{x_i} b \rangle| \\
 & + |\langle \partial_{x_i} b \cdot \nabla u, \partial_{x_i} b \rangle| + |\langle \partial_{x_i} u \cdot \nabla w, \partial_{x_i} w \rangle| + 2\chi |\langle \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} w \rangle| \\
 & = \sum_{k=1}^6 A_k
 \end{aligned}$$

Pour A_1 , en utilisant les inégalités de Hölder et Young, on trouve

$$\begin{aligned}
 A_1 & \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_i} \partial_{x_i} u \cdot \nabla u \cdot u| \, dx \\
 & \leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u \cdot \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
 & \leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}
 \end{aligned}$$

On applique le lemme 1.1.2, et il vient

$$A_1 \leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^r \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r}.$$

Comme

$$\|\nabla u\|_{\dot{H}^1}^2 = \|D^2 u\|_{L^2}^2,$$

il vient que

$$\begin{aligned}
 A_1 & \leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1+r} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\
 & \leq \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1+r} \left(\|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1-r}{2}} \\
 & \leq \frac{\chi}{4} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
 & \leq \frac{\chi}{4} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2
 \end{aligned}$$

et d'où,

$$A_1 \leq \frac{\chi}{4} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i} b \cdot \nabla b \cdot \partial_{x_i} u \, dx \right| \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u \cdot \nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)}.
 \end{aligned}$$

On utilise le lemme 1.1.2, on trouve

$$\begin{aligned}
 A_2 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^r \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1+r} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1+r} \left(\|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1-r}{2}} \\
 &\leq \frac{\nu}{12} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
 &\leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{C_r}{3} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.
 \end{aligned}$$

De même pour A_3 , on a

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla b \cdot \partial_{x_i} \partial_{x_i} b \, dx \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u \cdot \nabla b \cdot \partial_{x_i} \partial_{x_i} b| \, dx \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u \cdot \nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^3)},
 \end{aligned}$$

et le lemme 1.1.2, donne

$$\begin{aligned}
 A_3 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^r \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1+r} \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-r} \\
 &\leq \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1+r} \left(\|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1-r}{2}} \\
 &\leq \frac{\nu}{12} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
 &\leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.
 \end{aligned}$$

Pour A_4 , A_5 , A_6 on trouve facilement,

$$\begin{aligned} A_4 &\leq \frac{\nu}{18} \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \\ A_5 &\leq \frac{\gamma}{6} \|D^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_r \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \\ A_6 &\leq \frac{\chi}{2} \|\nabla \times \partial_{x_i} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\chi \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|(\nabla u, \nabla w, \nabla b)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \left(2\mu + \frac{1}{2}\chi\right) \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \gamma \|D^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &+ \nu \|D^2 b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\kappa \|\nabla \operatorname{div} w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\leq C_r \|u\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} \left(\|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, il vient que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|(\nabla u(t), \nabla w(t), \nabla b(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|(\nabla u_0, \nabla w_0, \nabla b_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \exp \left(C \int_0^t \|u(s)\|_{\dot{X}_r(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{1-r}} ds \right).$$

Pour le cas $r = 1$, le calcul est semblable à celui que nous venons de faire au cas des espaces Morrey-Campanato. On peut alors reprendre, mot par mot, le raisonnement du cas $r = 1$. \square

PERSPECTIVES

Nous donnons ici quelques perspectives de recherche et prolongements envisageables du travail de ce mémoire.

Pour la partie concernant la régularité, il y a deux directions de recherche possibles, soit chercher à améliorer le critère de régularité au cas des espaces de Besov d'indices négatives, soit chercher à construire des solutions auto-similaires qui est une question ouverte intéressante. A notre connaissance il n'existe pas de résultats concernant le comportement asymptotique des solutions des équations magneto-micropolaire.

Bibliographie

- [1] Caffish, R.E., Klapper, I., Steel, G. : Remarks on singularities, dimension and energy dissipation for ideal hydrodynamics and MHD. *Comm. Math. Phys.* **184**, 443-455 (1997)
- [2] Cannone, M., Miao, C.X., Prioux, N., Yuan, B.Q. : The Cauchy Problem for the Magneto-hydrodynamic System. *Self-similar Solutions of Nonlinear PDE*, vol. 74, pp. 59-93. Banach Center Publications, Institute of Mathematics, Polish Academy of sciences, Warszawa (2006)
- [3] Duvant, G., Lions, J.L. : Inéquations en thermoélasticite et magnetohydrodynamique. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **46**, 241-279 (1972)
- [4] Eringen, A.C. : Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.* **16**, 1-18 (1996)
- [5] Ferreira, L.C.F., Villamizar-Roa, E.J. : On the existence and stability of solutions for the micropolar fluids in exterior domains. *Math. Appl. Sci.* **30**, 1185-1208 (2007)
- [6] Gala, S. : Regularity criteria for the 3D magneto-micropolar fluid equations in the multiplier space (2008)
- [7] Galdi, G.P., Rionero, S. : A note on the existence and uniqueness of solutions of the micropolar fluid equations. *Internat. J. Eng. Sci.* **15**, 105-108 (1997)
- [8] He, C., Wang, Y. : On the regularity criteria for weak solutions to the magnetohydrodynamic equations. *J. Differ. Equ.* **238**, 1-17 (2007)
- [9] He, C., Xin, Z.P. : On the regularity of weak solutions to the magnetohydrodynamic equations. *J. Differ. Eq.* **213**, 235-254 (2005)

-
- [10] Kato, T. : Strong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces. *Bol. Soc. Brasil. Math.*, **22** :127-155, 1992
- [11] Ladyzhenskaya, O. : *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*. Gordon and Breach, New York (1969)
- [12] Lemarié-Rieusset, P.G. : *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. Chapman & Hall/CRC, London (2002)
- [13] Lions, P.L : *Mathematical Topics in fluid Mechanics*. Oxford University Press Inc., New York (1996)
- [14] Marko, A., Rojas-Medar., Boldrini, J.L. : Magneto-micropolar fluid motion : existence and uniqueness of strong solutions. *Math. Nachr.* **188**, 301-319 (1997)
- [15] Ortega-Torres, E.E., Rojas-Medar, M.A. : Magneto-micropolar fluid motion : global existence of strong solutions. *Abstr. Appl. Anal.* **4**, 109-125 (1999)
- [16] Rojas-Medar., Marko, A., Boldrini, J.L. : Magneto-micropolar fluid motion : existence of weak solutions. *Rev. Mat. Complut.* **11**, 443-460 (1998)
- [17] Sermange, M., Temam, R. : Some mathematical questions related to the MHD equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **36**, 635-664 (1983)
- [18] Serrin, J. : Local behavior of solutions of quasi-linear equations, *Acta Math*, 111 (1964), 247-302.
- [19] Taylor, M.E., *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes equations and other evolutions equations*, *Comm.P.D.E.* 17 (1992), 1407-1456.
- [20] Villamizar-Roa, E.J., Rodriguez-Bellido, M.A : Global existence and exponential stability for the micropolar system. *Z. Angew. Math. Phys.* **59**, 790-809 (2008)
- [21] Yamaguchi, N. : Existence of global strong solution to the micropolar fluid system in a bounded domain. *Math. Meth. Appl. Sci.* **28**, 1507-1526 (2005)
- [22] Yong, Z., Gala, S. : Regularity criteria for the 3D magneto-micropolar fluid equations in the Morrey-Campanato space (2008)
- [23] Yong, Z. Gala, S. : Regularity criteria for the solutions to the 3D MHD equations in the multiplier space (2008)

-
- [24] Yuan, B.Q. : Regularity of weak solutions to magneto-micropolar fluid equations. *Acta Math. Sci.* (in press)
- [25] Zhou, Y. : Regularity criteria for the 3D MHD equations in terms of the pressure. *Intl. J. Non-Linear Mech.* **41**, 1174-1180 (2006)
- [26] Zhou, Y. : Remarks on regularities for the 3D MHD equations. *Discrete Continuous Dyn.Syst.* **12**, 881-886 (2005)

Table des matières

Introduction	ii
1 CHAPITRE 1	1
1.1 Espaces de Sobolev homogènes	1
1.2 Les espaces de Morrey - Campanato	3
1.2.1 Le predual $\mathcal{Z}^{p',q'}$ (\mathbb{R}^3)	4
1.3 Les espaces de multiplicateurs	5
2 Régularité des solutions faibles des équations magneto-micropolaire	10
2.1 Régularité des solutions des équations magneto-micropolaire dans les espaces de Morrey-Campanato	11
2.2 Régularité des solutions des équations magneto-micropolaire dans les espaces de multiplicateurs	22
Perspectives	26
Bibliographie	27
Table des Matières	I