



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

جامعة محمد العيد بن باديس - مستغانم

Abdelhamid Ibn Badis University of Mostaganem

كلية العلوم و التكنولوجيا

Faculty of Sciences and Technology

قسم الهندسة الميكانيكية

Department of Mechanical Engineering



N° d'ordre : M...../09/2020

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

## *Thème*

**EFFETS HYGROTHERMIQUES SUR LES CARACTERISTIQUES  
DE VIBRATION DES NANOPOUTRES FGM VISCOELASTIQUES BASEES  
SUR LA THEORIE DU GRADIENT DE DEFORMATION NON LOCALE**

Présenté par :

❖ Mened Adel

**Soutenu le 24/09/2020 devant le jury composé de :**

Président	Dr. M. Sahnoun	M.C.A. Université de Mostaganem
Examineur	Mme. A. Belhachemi	M.A.A. Université de Mostaganem
Encadreur	Pr. D.Ouinas	Université de Mostaganem

**Année Universitaire : 2019/2020**

**Je remercie tout d'abord le bon Dieu pour réussir ce modeste travail.**

**Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire  
pour m'orienter et m'aider.**

**Je désire remercier mes professeurs pour l'achèvement de mon parcours.**

**Je tiens à témoigner toute ma gratitude à mes parents pour leur soutien  
et encouragement durant mes études.**

## Résumé

Dans ce travail nous avons étudié les caractéristiques d'amortissement des vibrations des nanopoutres viscoélastiques fonctionnellement graduées (FG) soumises à l'effet hygrothermique et intégrées dans une fondation viscoélastique en utilisant la théorie de l'élasticité du gradient de déformation non locale. La modélisation de la nanopoutre est réalisée via une théorie de poutre fine d'ordre supérieur qui capture les influences de déformation de cisaillement inutiles de tout facteur de correction de cisaillement. La fondation viscoélastique est constituée d'une couche Winkler-Pasternak avec une couche visqueuse des dissipateurs parallèles infinis. Le modèle de la loi de puissance est adopté pour décrire la variation continue des propriétés des matériaux en fonction de la température de la nanopoutre FG. Les équations régissant la nanopoutre viscoélastique à gradient de déformation non locale dans le cadre de la théorie des poutres fine sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton et résolues en appliquant une solution analytique pour différentes conditions aux limites. On étudie les effets des couches de fondation : linéaires, de cisaillement et visqueux, le coefficient d'amortissement structurel, l'environnement hygrothermique, le paramètre non-local, le paramètre caractéristique du matériau, l'exposant de la loi de puissance, le numéro de mode, les conditions aux limites et le rapport d'élanement sur la réponse de la fréquence des nanopoutres viscoélastiques FG.

**Mots clés:** vibrations amorties, chargement hygrothermique, poutre FGM, fondation Visco-Pasternak, élasticité du gradient de déformation non locale.

## Abstract

This work investigates damping vibration characteristics of hygro-thermally affected functionally graded (FG) viscoelastic nanobeams embedded in viscoelastic foundation based on nonlocal strain gradient elasticity theory. The modeling of nanobeam is carried out via a higher order refined beam theory which captures shear deformation influences needless of any shear correction factor. The viscoelastic foundation is consisting of Winkler-Pasternak layer together with a viscous layer of infinite parallel dashpots. Power-law model is adopted to describe continuous variation of temperature-dependent material properties of FG nanobeam. The governing equations of nonlocal strain gradient viscoelastic nanobeam in the framework of refined beam theory are obtained using Hamilton's principle and solved implementing an analytical solution for different boundary conditions. The effects of linear, shear and viscous layers of foundation, structural damping coefficient, hygro-thermal environment, nonlocal parameter, material characteristic parameter, power-law exponent, mode number, boundary conditions and slenderness ratio on the frequency response of viscoelastic FG nanobeams are investigated.

**Keywords:** damping vibration, hygrothermal loading, FG nanobeam, Visco-Pasternak foundation, nonlocal strain gradient elasticity.

## مُلخَص

يدرس هذا العمل خصائص التخميد الاهتزازي للألواح النانوية اللزجة المرنة المتدرجة وظيفيا و المتأثرة بالحرارة و الرطوبة و المضمنة في أساس لزج مرن بناء على نظرية مرونة تدرج التشوه غير الموضوعي. يتم إجراء نمذجة اللوح النانوي من خلال نظرية اللوح الرفيعة ذات الرتبة العالية و التي تلتقط تأثيرات تشوه إجهاد القص التي لا داعي لها لأي عامل تصحيح للقص. يتكون الأساس اللزج المرن من طبقة Winkler-Pasternak مع طبقة لزجة من بالوعات الحرارة المتوازية اللانهائية. تم اعتماد نموذج قانون القوة لوصف التباين المستمر لخصائص المواد بدلالة درجة حرارة اللوح النانوي FG. يتم الحصول على المعادلات التي تنظم اللوح النانوي اللزج المرن مع تدرج التشوه غير الموضوعي في إطار نظرية الألواح الرفيعة باستخدام مبدأ هاملتون ويتم حلها عن طريق تطبيق حل تحليلي لشروط حدية مختلفة. تتم دراسة تأثيرات طبقات الأساس: الخطية، القصية و اللزجة ، معامل التخميد الهيكلي ، الوسط الحراري الرطب ، الوسيط اللاموضعي ، الوسيط المميز للمادة ، أس قانون القوة ، رقم الوضع، الشروط الحدية ونسبة النحافة على استجابة التردد للألواح النانوية اللزجة المرنة FG .

**الكلمات الرئيسية:** اهتزاز التخميد ، التحميل الحراري الرطب ، لوح نانوي متدرج وظيفيا، أساس-Visco Pasternak، مرونة تدرج التشوه غير الموضوعي

# Table des matières

**Introduction**

**Chapitre I**

**1. Théorie et formulation mathématique**

**1.1 Propriétés effectives d'une nanopoutre P-FGM basées sur la position de l'axe neutre**

**1.2 Relations cinématiques**

**1.3 Modèle d'élasticité du gradient de déformation non locale pour des nanopoutres FGM**

**Chapitre II**

**Procédure de solution**

**Conclusion**

## Introduction

Depuis le premier temps sur terre jusqu'aujourd'hui, le matériau a une importance supérieure dans la vie quotidienne. Au départ, le bronze un alliage d'étain et de cuivre, était le plus souvent utilisé, d'où l'appellation de l'âge du bronze. A la suite, le fer a été découvert et a attiré l'homme pour réaliser des objets et des outils d'où l'époque aussi s'est appelée l'âge du fer. Puis, l'innovation des alliages métaux et non métaux a dominé dans multiples secteurs. De nos jours, les composites fascinent les chercheurs grâce à leur large éventail d'applications. Ces matériaux sont plus légers et plus solides et ont une conception flexible et un coût abordable. Ils offrent aussi une résistance à la corrosion et à l'usure mais présentent une défaillance en forme de délaminage. Pour surmonter cet inconvénient, une nouvelle catégorie appelée matériaux fonctionnellement gradués a été apparue pour la première fois en 1984 par des chercheurs japonais ayant pour objectif de résister à la très haute température dans leur projet aérospatial. Jusqu'à présent, ils ont été utilisés dans presque tous les domaines, par exemple dans les domaines biomédical, chimique, nucléaire, minier. Les FGM se présentent dans la nature en forme d'os, de dents, de bambous, de peau humaine, etc. Les FGM remplacent la transition nette des propriétés par des propriétés variables lisses et continues du matériau telles que les propriétés physiques, chimiques et mécaniques telles que le module de Young, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement, la densité et le coefficient de dilatation thermique dans une direction spatiale souhaitée. Les changements progressifs de la fraction volumique du constituant et de la structure non identique dans la direction préférée donnent des propriétés graduelles continues telles que la conductivité thermique, la résistivité à la corrosion, la chaleur spécifique, la dureté et le rapport de rigidité. Tous ces avantages ont rendu les FGM bien meilleurs que les matériaux composites homogènes à utiliser dans de multiples applications. En raison des caractéristiques importantes des FGM, plusieurs efforts ont été déployés de temps à autre par les chercheurs pour améliorer les propriétés des FGM. Plusieurs types de FGM ont été introduits jusqu'à présent en fonction de leur taille et de leur structure. Ce travail aborde les effets hygrothermiques sur la vibration d'une nanopoutre viscoélastique fonctionnellement graduée. Pour ce faire, il est partagé en deux parties la théorie et la modélisation en forme de deux chapitres, d'abord le premier présente les propriétés effectives, la cinématique, le gradient de la déformation non locale ensuite le second présente le modèle mathématique proposé.

## Chapitre I

# **Théorie et développement mathématique**

## 1. Théorie et formulation

### 1.1 Propriétés effectives d'une nanopoutre P-FGM basées sur la position de l'axe neutre

On observe que l'axe neutre d'une nanopoutre FGM dû à la variation des fractions volumiques des phases matérielles peut ne pas coïncider avec son axe médian qui conduit au couplage flexion-extension. En considérant la position exacte de l'axe neutre, ce couplage peut être éliminé [1]. Pour capturer la position exacte de l'axe neutre, les dimensions  $z_{ms}$ ,  $z_{ns}$  sont mesurés à partir des surfaces médiane et neutre, respectivement comme le montre la figure 1.

En satisfaisant en premier temps par rapport au module de Young étant nul, la position exacte de l'axe neutre est déterminée comme suit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - h_0) dz_{ms} = 0 \quad (1)$$

Dans lequel l'axe neutre est défini par :

$$h_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (2)$$

Considérons une nanopoutre FG viscoélastique incorporée dans un milieu viscoélastique ayant une longueur  $a$ , une largeur  $b$  et une épaisseur  $h$  dont ses coordonnées sont représentées sur la figure 2. Les propriétés matérielles hygro-thermoélastiques de la nanopoutre FGM non-locale, incluant le module de Young  $E$ , la masse volumique  $\rho$ , la dilatation thermique  $\alpha$  et le coefficient de dilatation d'humidité  $\beta$  peuvent être représentés par:

$$E(z_{ns}) = (E_c - E_m) \left( \frac{z_{ns} + h_0}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m \quad (3a)$$

$$\rho(z_{ns}) = (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{z_{ns} + h_0}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m \quad (3b)$$

$$\alpha(z_{ns}) = (\alpha_c - \alpha_m) \left( \frac{z_{ns} + h_0}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \alpha_m \quad (3c)$$

$$\beta(z_{ns}) = (\beta_c - \beta_m) \left( \frac{z_{ns} + h_0}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \beta_m \quad (3d)$$

D'où  $p$  est l'exposant de la loi de puissance qui évalue la distribution des propriétés du matériau à travers l'épaisseur. Il est rapporté dans certaines études que la prise en compte des propriétés des matériaux dépendant de la température fournit des résultats très précis pour l'analyse des structures des FGM [2]. Par conséquent, la relation suivante peut être adoptée pour représenter les coefficients du matériau dépendant de la température :

$$P = P_0 (P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \tag{4}$$

Dans lequel  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2$  et  $P_3$  sont les coefficients des phases du matériau.

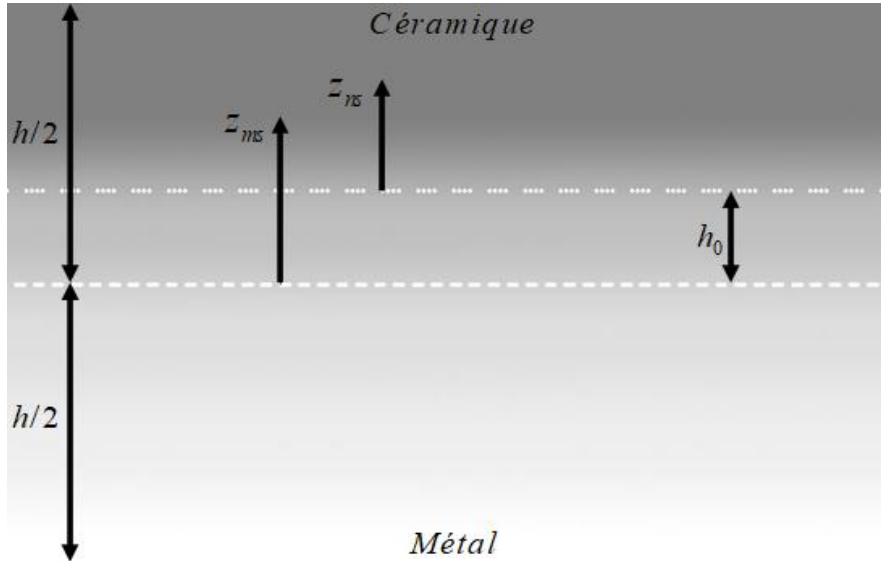


Figure 1. Schéma de nanopoutre.

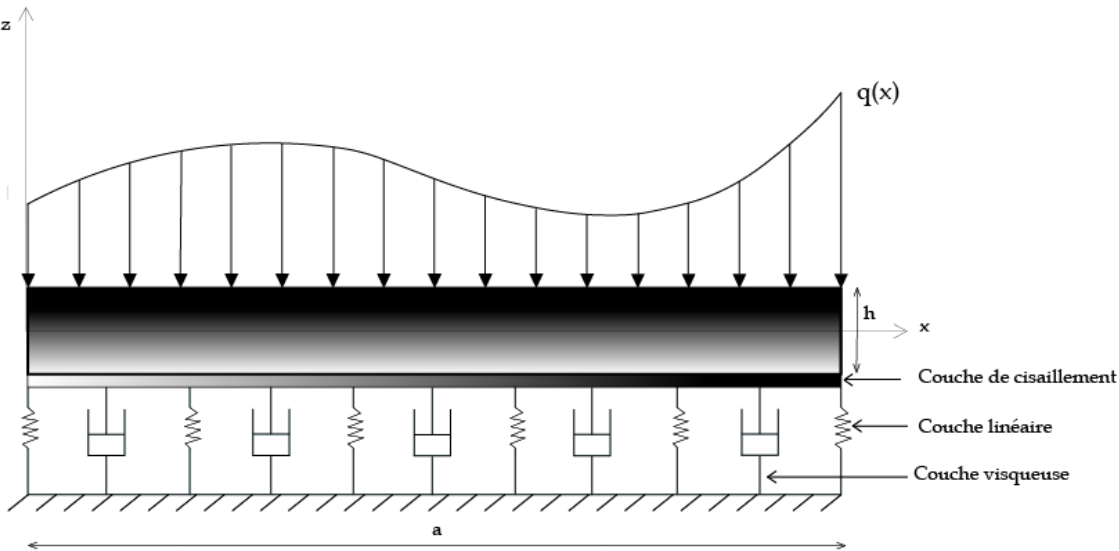


Figure 2. Nanopoutre en FGM avec amortissement.

## 1.2 Relations cinématiques

Le champ de déplacement d'un cisaillement fin d'une poutre FGM déformable peut être exprimé par :

$$u_x(x, z_{ns}) = u(x) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (5a)$$

$$u_z(x, z_{ns}) = w_b(x) + w_s(x) \quad (5b)$$

Où  $u$  est le déplacement axial médian et  $w_b$ ,  $w_s$  indiquent les composantes de flexion et du cisaillement du déplacement transversal respectivement. Aussi,  $f(z)$  est la fonction de forme représentant la distribution du cisaillement contrainte/déformation à travers l'épaisseur de la poutre laquelle pour la présente étude a une nature trigonométrique, donc un facteur de correction du cisaillement n'est pas requis [3] :

$$f(z_{ns}) = z_{ns} + h_0 - \tan[m(z_{ns} + h_0)] \quad (6)$$

Les déformations non nulles du modèle de la poutre proposé peuvent être exprimées comme suit

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z_{ns} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z_{ns}) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (7a)$$

$$\gamma_{xz} = g(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (7b)$$

Où  $g(z_{ns}) = 1 - df(z_{ns})/dz_{ns}$ .

Aussi, le principe de Hamilton énonce que :

$$\int_0^t \delta(U + V - K) dt = 0 \quad (8)$$

Ici  $U$  est l'énergie de déformation,  $V$  est le travail effectué par les forces extérieures et  $K$  est l'énergie cinétique. L'énergie de déformation virtuelle peut être écrite comme suit :

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (9)$$

En remplaçant les équations 5-7 dans 9, il en résulte

$$\delta U = \int_0^L \left( N \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + Q \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right) \quad (10)$$

Dans lequel les efforts et les moments exprimés dans l'équation ci-dessus sont définis comme

$$N = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} \sigma_{xx} dz_{ns}, \quad M_b = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} \sigma_{xx} z_{ns} dz_{ns}, \quad M_s = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} \sigma_{xx} f dz_{ns}, \quad Q = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} g \sigma_{xz} dA \quad (11)$$

La première variation du travail effectué par les efforts appliqués peut être écrite dans la forme

$$\delta V = \int_0^L \left( (N^T + N^H) \frac{\partial(w_s + w_b)}{\partial x} \frac{\partial \delta(w_s + w_b)}{\partial x} + q \delta(w_s + w_b) \right) dx \quad (12)$$

Où  $N^T$  et  $N^H$  sont les forces dues à la variation de la température et l'humidité

$$N^T = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns}) \alpha(z_{ns}) \Delta T dz_{ns}$$

$$N^H = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns}) \beta(z_{ns}) \Delta H dz_{ns} \quad (13)$$

Où  $\Delta T = T - T_0$  et  $\Delta H = H - H_0$  dans lequel  $T_0$  et  $H_0$  sont la concentration de la température et l'humidité de référence respectivement. Les charges transversales extérieures  $q$  d'un milieu viscoélastique sont exprimées par

$$q = -k_w (w_b + w_s) + k_p \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} - c_d \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial t} \quad (14)$$

Où  $k_w$ ,  $k_p$  et  $c_d$  sont respectivement les coefficients linéaire, de cisaillement et d'amortissement du milieu.

La variation de l'énergie cinétique est représentée par

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_m v \delta v dm = \int_V \rho (\dot{u}_x \delta \dot{u}_x + \dot{u}_z \delta \dot{u}_z) dV = \int_A \int_0^L \rho (\dot{u}_x \delta \dot{u}_x + \dot{u}_z \delta \dot{u}_z) dA dx \\ &= \int_A \int_0^L \rho \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} - z_{ns} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} - f(z_{ns}) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} \right) \left( \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} - z_{ns} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial t} - f(z_{ns}) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} \right) \right] dA dx \\ &= \int_0^L \left[ I_0 \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} \right) \right) - I_1 \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} \right) \right. \\ &\quad \left. + I_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial t} - J_1 \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} \right) + K_2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial t} \right. \\ &\quad \left. + J_2 \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial t} \right) \right] dx \quad (15) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} \rho(z_{ns}) dz_{ns}, & I_1 &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} \rho(z_{ns}) z_{ns} dz_{ns}, & J_1 &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} \rho(z_{ns}) f dz_{ns}, \\
I_2 &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} \rho(z_{ns}) z_{ns}^2 dz_{ns}, & J_2 &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} \rho(z_{ns}) z_{ns} f dz_{ns}, & K_2 &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} \rho(z_{ns}) f^2 dz_{ns},
\end{aligned}$$

Par la suite, le principe de Hamilton conduit à

$$\begin{aligned}
\int_0^t \delta(U + V - K) dt = 0 &\Rightarrow \int_0^L \left[ \int_0^t \left( N \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + Q \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (N^T + N^H) \frac{\partial(w_s + w_b)}{\partial x} \frac{\partial \delta(w_s + w_b)}{\partial x} \right) dt \right. \\
&\quad \left. + \left( -k_w(w_s + w_b) + k_p \frac{\partial^2(w_s + w_b)}{\partial x^2} - c_d \frac{\partial(w_s + w_b)}{\partial t} \right) \delta(w_s + w_b) \right. \\
&\quad \left. + \rho \left( \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - z_{ns} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} - f(z_{ns}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \right) (\delta u_x - z_{ns} \delta w_b - f(z_{ns}) \delta w_s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) (\delta w_b + \delta w_s) \right) \right] dx = 0 \\
&\Rightarrow \int_0^L \left[ -\frac{\partial N}{\partial x} \delta u - \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} \delta w_s - \frac{\partial Q}{\partial x} \delta w_s \right. \\
&\quad \left. + (N^T + N^H) \frac{\partial^2(w_s + w_b)}{\partial x^2} \delta(w_s + w_b) \right. \\
&\quad \left. + \left( -k_w(w_s + w_b) + k_p \frac{\partial^2(w_s + w_b)}{\partial x^2} - c_d \frac{\partial(w_s + w_b)}{\partial t} \right) \delta(w_s + w_b) \right. \\
&\quad \left. + \rho \left( \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - z_{ns} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} - f(z_{ns}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \right) (\delta u_x - z_{ns} \delta w_b - f(z_{ns}) \delta w_s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) (\delta w_b + \delta w_s) \right) \right] dx = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Les équations régissantes sont obtenues en insérant les équations (10)-(15) dans l'équation (8) quand les coefficients de  $\delta u$ ,  $\delta w_s$  et  $\delta w_b$  sont nuls

$$\frac{\partial N}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} - J_1 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} = & (N^T + N^H) \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + I_0 \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + I_1 \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2} \\ & + k_w (w_b + w_s) - k_p \frac{\partial^2 (w_s + w_b)}{\partial x^2} + c_d \frac{\partial (w_s + w_b)}{\partial t} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = & (N^T + N^H) \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + I_0 \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + J_1 \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2} \\ & + k_w (w_b + w_s) - k_p \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + c_d \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial t} \end{aligned} \quad (19)$$

### 1.3 Modèle d'élasticité du gradient de déformation non locale pour des nanopoutres FGM

Sur la base de la théorie du gradient de déformation non locale [4], la contrainte représente à la fois le champ de la contrainte élastique et le champ de la contrainte du gradient de déformation. Par conséquent, la contrainte peut être écrite par :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} - \frac{d\sigma_{ij}^{(1)}}{dx} \quad (20)$$

Où la contrainte  $\sigma_{xx}^{(0)}$  correspond à la déformation  $\varepsilon_{xx}$  et la contrainte d'ordre supérieur  $\sigma_{xx}^{(1)}$  correspond au gradient de la déformation  $\varepsilon_{xx,x}$  et sont définies par :

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \int_0^L C_{ijkl} \alpha_0(x, x', e_0 a) \varepsilon'_{kl}(x') dx' \quad (21a)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = l^2 \int_0^L C_{ijkl} \alpha_1(x, x', e_1 a) \varepsilon'_{kl,x}(x') dx' \quad (21b)$$

Dans lequel  $C_{ijkl}$  sont les constantes élastiques et  $e_0 a$  et  $e_1 a$  considèrent les influences du champ de la contrainte non locale, et  $l$  indique le paramètre d'échelle de longueur du matériau et capture les effets du champ de contrainte du gradient de déformation d'ordre supérieur. Quand les fonctions non locales remplissent les conditions développées par Eringen [5], la relation constitutive pour une nanopoutre FGM peut être déclarée comme

$$\left[ 1 - (e_1 a)^2 \nabla^2 \right] \left[ 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] \sigma_{ij} = C_{ijkl} \left[ 1 - (e_1 a)^2 \nabla^2 \right] \varepsilon_{kl} - C_{ijkl} l^2 \left[ 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] \nabla^2 \varepsilon_{kl} \quad (22a)$$

Dans lequel  $\nabla^2$  indique l'opérateur Laplacien. En supposant  $e_1 = e_0 = e$  et en éliminant les termes d'ordre  $O(\nabla^2)$ , la relation constitutive générale dans l'équation (22a) peut être réécrite comme [4] :

$$\left[ 1 - (ea)^2 \nabla^2 \right] \sigma_{ij} = C_{ijkl} \left[ 1 - l^2 \nabla^2 \right] \varepsilon_{kl} \quad (22b)$$

L'équation constitutive (22b) peut être développée pour capturer les influences du chargement hygrothermique comme :

$$\left[1 - (ea)^2 \nabla^2\right] \sigma_{ij} = C_{ijkl} \left[1 - l^2 \nabla^2\right] (\varepsilon_{kl} - \alpha_{ij} T - \beta_{ij} H) \quad (23)$$

Où  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  sont les coefficients de dilatation thermique et d'humidité respectivement ;  $T$  et  $H$  indiquent la variation de température et d'humidité respectivement. Donc, les relations constitutives pour une nanopoutre FG déformable par cisaillement fin non local peuvent être déclarées comme

$$\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E(z_{ns}) \left( \varepsilon_{xx} - \eta \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} - \alpha \Delta T - \beta \Delta H \right) \quad (24a)$$

$$\sigma_{xz} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} = G(z_{ns}) \left( \gamma_{xz} - \eta \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x^2} \right) \quad (24b)$$

Où  $\mu = ea^2$  et  $\eta = l^2$ . En appliquant le modèle de Kelvin aux matériaux élastiques avec le coefficient d'amortissement structurel viscoélastique et en intégrant l'équation (24) sur la section de la nanopoutre, les relations non locales suivantes pour un modèle fin de poutre FGM sont données par :

$$N - \mu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \left(1 - \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \left( A \frac{\partial u}{\partial x} - B \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - B_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) - N_x^T - N_x^H \quad (25)$$

$$M_b - \mu \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} = \left(1 - \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \left( B \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) - M_b^T - M_b^H \quad (26)$$

$$M_s - \mu \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} = \left(1 - \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \left( B_s \frac{\partial u}{\partial x} - D_s \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) - M_s^T - M_s^H \quad (27)$$

$$Q - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \left(1 - \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) A_s \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (28)$$

Où les rigidités transversales sont calculées comme suit

$$A = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns}) dz_{ns}, \quad B = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns}) z_{ns} dz_{ns}, \quad B_s = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns}) f dz_{ns}, \quad (29)$$

$$D = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns}) z_{ns}^2 dz_{ns}, \quad D_s = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns}) z_{ns} f dz_{ns}, \quad H_s = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns}) f^2 dz_{ns},$$

$$A_s = \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} G(z_{ns}) g^2 dz_{ns} \quad (30)$$

et

$$\begin{aligned}
N_x^T &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns})\alpha(z_{ns})(T-T_0)dz_{ns}, & M_b^T &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns})\alpha(z_{ns})(T-T_0)z_{ns}dz_{ns}, \\
M_s^T &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns})\alpha(z_{ns})(T-T_0)fdz_{ns}, & N_x^H &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns})\beta(z_{ns})(H-H_0)dz_{ns}, \\
M_b^H &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns})\beta(z_{ns})(H-H_0)z_{ns}dz_{ns}, & M_s^H &= \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_{ns})\beta(z_{ns})(H-H_0)fdz_{ns},
\end{aligned} \tag{31}$$

Les équations régissant la nanopoutre FGM viscoélastique déformable par cisaillement reposant sur un milieu viscoélastique à trois paramètres dans un milieu hygrothermique en termes de déplacements sont obtenues en insérant pour  $N$ ,  $M_b$ ,  $M_s$  et  $Q$  à partir des équations (25)-(28) respectivement dans les équations (17)-(19), il vient :

$$\begin{aligned}
&A\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right)-B\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3}+g\frac{\partial^4 w_b}{\partial t\partial x^3}\right)-B_s\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3}+g\frac{\partial^4 w_s}{\partial t\partial x^3}\right) \\
&-I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^3 w_b}{\partial x\partial t^2}+J_1\frac{\partial^3 w_s}{\partial x\partial t^2}+\mu\left(I_0\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}-I_1\frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3\partial t^2}-J_1\frac{\partial^5 w_s}{\partial x^3\partial t^2}\right)=0
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&B\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+g\frac{\partial^4 u}{\partial t\partial x^3}\right)-D\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}+g\frac{\partial^5 w_b}{\partial t\partial x^4}\right)-D_s\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}+g\frac{\partial^5 w_s}{\partial t\partial x^4}\right) \\
&-(N^T+N^H)\frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial x^2}-I_0\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}\right)-I_1\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}+I_2\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial t^2}+J_2\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial t^2} \\
&-k_w(w_b+w_s)+k_p\frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial x^2}-c_d\frac{\partial(w_b+w_s)}{\partial t}+\mu\left[(N^T+N^H)\frac{\partial^4(w_b+w_s)}{\partial x^4}+I_0\left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial t^2}\right)\right. \\
&\left.+I_1\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial t^2}-I_2\frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4\partial t^2}-J_2\frac{\partial^6 w_s}{\partial x^4\partial t^2}+k_w\frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial x^2}-k_p\frac{\partial^4(w_b+w_s)}{\partial x^4}+c_d\frac{\partial^3(w_b+w_s)}{\partial x^2\partial t}\right]=0
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&B_s\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+g\frac{\partial^4 u}{\partial t\partial x^3}\right)-D_s\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}+g\frac{\partial^5 w_b}{\partial t\partial x^4}\right)-H_s\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}+g\frac{\partial^5 w_s}{\partial t\partial x^4}\right) \\
&+A_s\left(1-\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+g\frac{\partial^3 w_s}{\partial t\partial x^2}\right)-(N^T+N^H)\frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial x^2}-I_0\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}\right)-J_1\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}+J_2\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial t^2} \\
&+K_2\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial t^2}-k_w(w_b+w_s)+k_p\frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial x^2}-c_d\frac{\partial(w_b+w_s)}{\partial t}+\mu\left[(N^T+N^H)\frac{\partial^4(w_b+w_s)}{\partial x^4}+I_0\left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial t^2}\right)\right. \\
&\left.+J_1\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial t^2}-J_2\frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4\partial t^2}-K_2\frac{\partial^6 w_s}{\partial x^4\partial t^2}+k_w\frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial x^2}-k_p\frac{\partial^4(w_b+w_s)}{\partial x^4}+c_d\frac{\partial^3(w_b+w_s)}{\partial x^2\partial t}\right]=0
\end{aligned} \tag{34}$$

**Chapitre II**  
**Modélisation mathématique**

## Procédure de solution

Ici, une solution analytique est utilisée pour résoudre les équations régissant les non locales d'une nanopoutre FG viscoélastique reposant sur un milieu viscoélastique à trois paramètres dans un environnement hygrothermique avec des extrémités simplement appuyés, encastres simplement appuyés et encastres.

Simplement supporté :  $w_b = w_s = M = 0$  à  $x = 0, L$

Encastres :  $u = w_b = w_s = 0$  à  $x = 0, L$

Pour satisfaire ces conditions aux limites, la solution suivante pour les variables de déplacement est :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \frac{\partial X_m(x)}{\partial X} e^{i\omega_n t} \quad (35)$$

$$w_b(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{bn} X_m(x) e^{i\omega_n t} \quad (36)$$

$$w_s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{sn} X_m(x) e^{i\omega_n t} \quad (37)$$

Dans lequel  $U_n$ ,  $w_{bn}$  et  $w_{sn}$  sont les coefficients de Fourier inconnus. En insérant les équations (35)-(37) dans les équations (32)-(34) respectivement, cela conduit à :

$$[[K] + [C]\omega + [M]\omega^2] \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (38)$$

Où  $[K]$ ,  $[C]$  et  $[M]$  sont les matrices de rigidité, d'amortissement et de masse respectivement pour une nanopoutre FG, respectivement.

$$k_{1,1} = A(\alpha_3 - \eta\alpha_{11}), \quad k_{1,2} = -B(\alpha_3 - \eta\alpha_{11}), \quad k_{1,3} = -B_s(\alpha_3 - \eta\alpha_{11}),$$

$$k_{2,1} = B(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}), \quad k_{2,2} = (N^T + N^H - k_p)(-\alpha_7 + \mu\alpha_{10}) - k_w(\alpha_5 - \mu\alpha_7) - D(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}),$$

$$k_{2,3} = (N^T + N^H - k_p)(-\alpha_7 + \mu\alpha_{10}) - k_w(\alpha_5 - \mu\alpha_7) - D_s(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}),$$

$$k_{3,1} = B_s(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}), \quad k_{3,2} = (N^T + N^H - k_p)(-\alpha_7 + \mu\alpha_{10}) - k_w(\alpha_5 - \mu\alpha_7) - D_s(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}),$$

$$k_{3,3} = (N^T + N^H - k_p)(-\alpha_7 + \mu\alpha_{10}) - k_w(\alpha_5 - \mu\alpha_7) + A_s(\alpha_7 - \eta\alpha_{10}) - H_s(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}),$$

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= Aig(\alpha_3 - \eta\alpha_{11}), \quad c_{1,2} = Big(\alpha_3 - \eta\alpha_{11}), \quad c_{1,3} = B_s ig(\alpha_3 - \eta\alpha_{11}), \\
c_{2,1} &= Big(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}), \quad c_{2,2} = -c_d i(\alpha_5 - \mu\alpha_7) - Dig(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}), \quad c_{2,3} = -c_d i(\alpha_5 - \mu\alpha_7) - D_s ig(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}), \\
c_{3,1} &= B_s ig(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}), \quad c_{3,2} = -D_s ig(\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}) - c_d i(\alpha_5 - \mu\alpha_7), \\
c_{3,3} &= -c_d i(\alpha_5 - \mu\alpha_7) + A_s (\alpha_7 - \eta\alpha_{10}) - H_s (\alpha_{10} - \eta\alpha_{15}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{1,1} &= (\alpha_1 - \mu\alpha_3)I_0, \quad m_{1,2} = -(\alpha_1 - \mu\alpha_3)I_1, \quad m_{1,3} = -(\alpha_1 - \mu\alpha_3)J_1, \\
m_{2,1} &= (\alpha_7 - \mu\alpha_{10})I_1, \quad m_{2,2} = (\alpha_5 - \mu\alpha_7)I_0 - (\alpha_7 - \mu\alpha_{10})I_2, \quad m_{2,3} = (\alpha_5 - \mu\alpha_7)I_0 - (\alpha_7 - \mu\alpha_{10})J_2, \\
m_{3,1} &= (\alpha_7 - \mu\alpha_{10})J_1, \quad m_{3,2} = (\alpha_5 - \mu\alpha_7)I_0 - (\alpha_7 - \mu\alpha_{10})J_2, \quad m_{3,3} = (\alpha_5 - \mu\alpha_7)I_0 - (\alpha_7 - \mu\alpha_{10})K_2,
\end{aligned}$$

Dans lequel

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= X'_m, \quad \alpha_3 = X''' , \quad \alpha_5 = X_m, \quad \alpha_7 = X''_m, \\
\alpha_{10} &= X_m'''' , \quad \alpha_{11} = X'''' , \quad \alpha_{15} = X'''' ,
\end{aligned}$$

## Conclusion

Le cheminement de ce mémoire est orienté sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs historiques, leurs évolutions et leurs domaines d'utilisation, ensuite un aperçu sur les aspects fondamentaux du comportement des matériaux hétérogènes.

Nous avons utilisé une théorie d'ordre supérieur pour analyser les poutres en FGM avec une haute précision, on analyse les vibrations avec amortissement des nanopoutres viscoélastiques soumises à l'effet hygrothermique en présence de fondations viscoélastiques en utilisant la théorie de l'élasticité du gradient de déformation non locale. A partir d'un champ de déplacement d'une fonction de forme proposée, nous pouvons déterminer les énergies de déformation et cinétique et le travail des efforts externes. Les équations du mouvement sont dérivées à partir du Principe d'Hamilton.

## Références

- [1] Al-Basyouni KS, Tounsi A, Mahmoud SR. Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position. *Compos Struct* 2015;125:621–30.
- [2] Ebrahimi F, Salari E. Thermo-mechanical vibration analysis of nonlocal temperature-dependent FG nanobeams with various boundary conditions. *Compos B Eng* 2015;78:272–90.
- [3] Mantari JL, Bonilla EM, Soares CG. A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates. *Compos B Eng* 2014;60:319–28.
- [4] Li L, Hu Y, Ling L. Flexural wave propagation in small-scaled functionally graded beams via a nonlocal strain gradient theory. *Compos Struct* 2015;133:1079–92.
- [5] Eringen AC. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *J Appl Phys* 1983;54(9):4703–10.