République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abdelhamid Ibn Badis – Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Thèse de Doctorat LMD

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème

Problème de transmission dans un domaine non borné avec la condition au limite de type Robin, dans les espaces des fonctions continues

Présenté par

Mme DOUARA Zineb

Soutenue le **09/04/2026** **devant le Jury**

Bendoukha	Berrabah	**Président**	Professeur	Université de Mostaganem
Medeghri	Ahmed	**Examinateur**	Professeur	École Nationale Supérieure de Mathématiques de Sidi Abdellah
Aziz Hamani	Karima	**Examinatrice**	Professeur	Université de Mostaganem
Limam	Kheira	**Directrice de thèse**	MCA	Université de Mostaganem

Année universitaire :2025_2026

Table des matières

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem.

Je tiens à exprimer ma profonde et sincère reconnaissance à ma directrice de thèse, Madame **Limam Kheira**, Maître de conférences, classe A, pour son entière disponibilité, sa patience exemplaire, sa bienveillance, son soutien indéfectible ainsi que ses encouragements éclairés, qui ont permis l'achèvement de ce travail malgré les difficultés rencontrées.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements au Professeur **Bendoukha Berrabah** pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury de cette thèse.

J'adresse également mes sincères remerciements au Professeur **Ahmed Medeghri** pour la pertinence de ses enseignements spécialisés, ainsi que pour les échanges scientifiques et discussions mathématiques enrichissantes qui ont marqué notre parcours doctoral. Je lui suis également très reconnaissant pour l'honneur qu'il me fait en participant à ce jury.

Je tiens à remercier de même la Professeure **Aziz Hamani Karima** pour avoir accepté de faire partie du jury et pour l'attention portée à ce travail.

Je remercie par ailleurs le Professeur **Rabah Labbas** pour le temps qu'il nous a consacré lors de sa visite à notre université et pour ses conseils précieux, qui ont considérablement enrichi mes travaux, ainsi que le Professeur **Benharrat Belaïdi**, président du comité de la formation doctorale, pour ses efforts et les enseignements qu'il a dispensés, lesquels ont grandement contribué à l'enrichissement de mes connaissances.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à ma famille pour sa patience et son soutien indéfectible, en particulier mon cher père — que Dieu ait son âme —, ma chère mère, mes frères et sœurs, ainsi que tous mes neveux et nièces, ainsi qu'à mon mari **Rafik** pour son soutien quotidien inestimable. Qu'ils reçoivent tous l'expression de ma sincère gratitude.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont, de près ou de loin, contribué à la réalisation de ce travail et m'ont apporté leur soutien précieux.

INTRODUCTION

0.1 Objectif et position du problème :

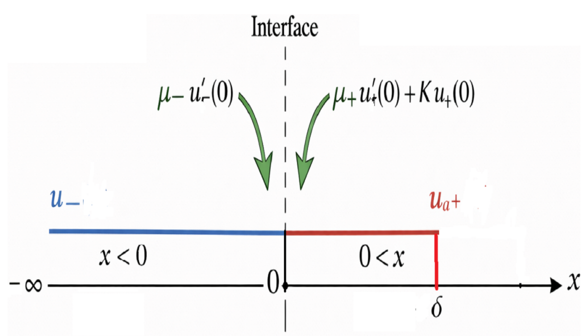
Ce travail porte sur l'analyse d'une famille d'équations différentielles abstraites du second ordre $(P_\delta)_{\delta>0}$, posées sur un domaine hétérogène non borné $]-\infty,0[\cup]0,\delta[$, s'écrivant sous la forme :

$$(u_\delta)''(x)+\mathcal{A}u_\delta(x)-\omega u_\delta(x)=g_\delta(x),\qquad x\in\,]-\infty,0[\cup]0,\delta[\,, \tag{P_δ}$$

avec paramètre spectral $\omega\geq 0$. Ici $\mathcal{A}$ désigne un opérateur linéaire fermé, défini sur un domaine $D(\mathcal{A})\subset E$, à valeurs dans un espace de Banach E, sans que ce domaine soit nécessairement dense dans E.

On associe à cette équation les conditions aux limites suivantes

$$u'_\delta(\delta)+\mathcal{H}u(\delta)=f_\delta^+,\text{ et } u(-\infty)=f_-. \tag{0.1.1}$$



Plus précisément, sur le bord $\{\delta\}$, on impose une condition au bord de type Robin faisant intervenir un coefficient opérateur linéaire fermé $\mathcal{H}:D(\mathcal{H})\subset E\to E$, tandis qu'au voisinage de l'infini, la condition est de type Dirichlet non classique, car la donnée f_- n'est pas imposée sur un point appartenant au bord du domaine, mais comme une valeur limite que la solution doit atteindre à l'infini, sous la forme

$$\lim_{x\to-\infty}u(x)=f_-.$$

Ce type de condition est courant dans les problèmes posés sur des domaines non bornés, où l'on remplace une condition au bord par une hypothèse de comportement asymptotique. Ici, les termes f_δ^+ et f_-, appartenant à l'espace de Banach E, décrivent les contraintes imposées.

À l'interface $\{0\}$, entre les deux milieux $]-\infty, 0[$ et $]0, \delta[$, on introduit les conditions de transmission suivante

$$u(0_-) = u(0_+) \text{ et } \mu_- u'(0_-) = \mu_+ u'(0_+) + \mathcal{K}u(0_+) \tag{0.1.2}$$

permettant d'assurer la continuité de la solution avec un déséquilibre contrôlé des flux entre les sous-domaines. Les coefficients $\mu_- > 0$ et $\mu_+ > 0$ représentent des propriétés physiques des milieux (par exemple, des coefficients de conductivité ou de diffusivité ....).

L'opérateur $\mathcal{K}$ peut être un simple coefficient scalaire ou un opérateur linéaire plus général (borné ou non borné), selon le cadre fonctionnel adopté, tandis que le terme $\mathcal{K}u(0_+)$ traduit une discontinuité du flux pondéré, et peut être vu comme une source, une perte, ou un effet de réaction locale concentrée un effet de perte ou d'interaction locale à l'interface $\{0\}$.

L'analyse du problème sous ces conditions aux limites et de transmission nécessite une attention particulière, notamment en raison de la non-densité du domaine de l'opérateur $D(\mathcal{A})$ et la présence des deux opérateurs linéaires fermés $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ rend le problème plus complexe.

Le but principal de cette thèse est l'étude de la famille (P_δ) avec les conditions $(0.1.1 - 0.1.2)$ dans le cadre continue, en considérant que le second membre $g_\delta = \left(g^-, g_\delta^+\right)$ est assez régulier, plus précisément

$$g^- \in BUC^{2\alpha}(]-\infty, 0[\,, E) \text{ et } g_\delta^+ \in C^{2\alpha}(]0, \delta[\,, E) \text{ avec } 0 < 2\alpha < 1,$$

où g^- et g_δ^+ sont les restrictions de g_δ sur $]-\infty, 0]$ et $[0, \delta]$ respectivement.

L'objectif est d'établir, sous des hypothèses appropriées sur les opérateurs ainsi que sur les données, l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte du problème posé. Plus précisément, il s'agit de trouver une fonction u_δ égal à u^- sur $]-\infty, 0]$ et à u_δ^+ sur

$[0,\delta]$, qui satisfait les équations différentielles, et vérifie

$$\begin{cases} u^- \in BUC^2\left(]-\infty,0];E\right) \cap BUC\left(]-\infty,0];D\left(\mathcal{A}\right)\right), \\ u_\delta^+ \in C^2\left([0,\delta];E\right) \cap C\left([0,\delta];D\left(\mathcal{A}\right)\right), \end{cases} \tag{0.1.3}$$

et satisfait la propriété de régularité maximale

$$\left(u^-\right)'',\ \mathcal{A}u^- \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right) \text{ avec } \left(u_\delta^+\right)'',\ \mathcal{A}u_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right).$$

où

* $BUC^2\left(]-\infty,0];E\right)$ désigne l'espace des fonctions deux fois continûment différentiables et uniformément continues et bornées.
* $BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)$ désigne l'espace des fonctions bornées, uniformément continues, et 2α-Höldériennes (avec $0 < 2\alpha < 1$), à valeurs dans l'espace de Banach E.

L'étude s'appuie sur l'analyse fonctionnelle, en particulier la théorie des opérateurs fermés, la théorie des espaces d'interpolation et la théorie des semi-groupes analytiques généralisés (voir par exemple [29]), pour obtenir une représentation explicite de la solution (ici la méthode fondée sur la transformation de Krein [21], également appelée réduction d'ordre). En suite, on utilise la théorie de la somme de deux opérateurs linéaires fermés ainsi que les résultats de Sinestrari [34] pour analyser en profondeur cette solution et démontrer la régularité de la solution stricte.

0.2 Motivation du problème abstrait et exemple concret :

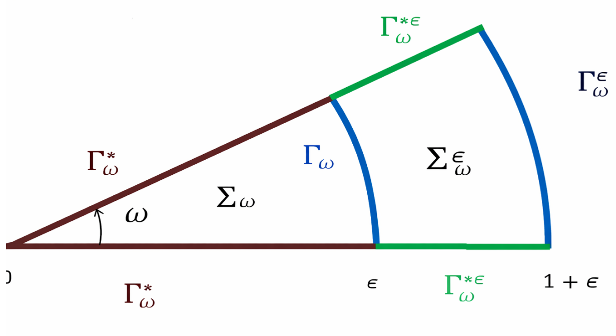
Les problèmes de transmission apparaissent naturellement dans les modèles décrivant des phénomènes physiques impliquant plusieurs milieux, comme la diffusion de la chaleur à travers des matériaux composites ou la propagation d'ondes entre milieux différents. Mathématiquement, ces problèmes consistent à résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP) dans des domaines séparés par une interface, avec des conditions de continuité imposées à cette interface.

Plusieurs phénomènes observés en physique et en biologie peuvent etre modélisés par des problèmes de transmissions abstraits, à titre d'illustration, on considère le problème de propagation de la chaleur modélisé par

$$\Delta w^\epsilon = h^\epsilon$$

posé dans un secteur hétérogène d'angle $\omega \in]0, \pi/2]$ et de sommet $S(0,0)$, défini par

$$\Omega_\omega^\epsilon = \Sigma_\omega \cup \Sigma_\omega^\epsilon.$$



La première partie du domaine est définie en coordonnées polaires par

$$\Sigma_\omega = \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) : \rho < 1 \text{ et } \phi \in]0, \omega[\},$$

avec frontière $\partial \Sigma_\omega = \Gamma_\omega \cup \Gamma_\omega^*$ où

$$\begin{cases} \Gamma_\omega := \{(\cos \phi, \sin \phi) : \phi \in]0, \omega[\}, \\ \Gamma_\omega^* := \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) : \rho \leq 1 \text{ et } \phi \in \{0, \omega\}\}, \end{cases}$$

et la seconde partie correspond à une couche d'éppaisseur $\varepsilon > 0$, définie également par

$$\Sigma_\omega^\epsilon := \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) : 1 < \rho < 1 + \epsilon \text{ et } \phi \in]0, \omega[\},$$

avec frontière $\partial \Sigma_\omega^\epsilon = \Gamma_\omega \cup \Gamma_\omega^\epsilon \cup \Gamma_\omega^{*\epsilon}$ où

$$\begin{cases} \Gamma_\omega^\epsilon := \{((1+\epsilon) \cos \phi, (1+\epsilon) \sin \phi) : \ \phi \in]0, \omega[\}, \\ \Gamma_\omega^{*\epsilon} := \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) : 1 < \rho \leq 1 + \epsilon \text{ et } \phi \in \{0, \omega\}\}. \end{cases}$$

On notera par la suite que w_- et h_- sont les restrictions respectives de w^ϵ et h^ϵ sur Σ_ω. De même, w_+^ϵ et h_+^ϵ désignent les restrictions de w^ϵ et h^ε sur Σ_ω^ϵ respectivement.

On s'intéresse principalement (au chapitre 4) à l'étude de l'existence et de la régularité de la solution stricte w^ε dans $\Sigma_\omega^\varepsilon$ et au voisinage du sommet S, lorsque le second membre est Höldérien par morceaux

$$\left(h_-, h_+^\varepsilon\right) \in C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega}\right) \times C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^\varepsilon}\right)$$

et satisfait la condition

$$h_-(0,0)=0$$

comme indiqué dans [31]. C'est-à-dire, on va montrer que la solution $\left(w_-,w_+^\varepsilon\right)$ appartient à l'espace $C^2\left(\overline{\Sigma_\omega}\right)\times C^2\left(\overline{\Sigma_\omega^\varepsilon}\right)$ puis montrer sa régularité, c'est-à-dire

$$\left(w_-,w_+^\varepsilon\right)\in C^{2,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega}\right)\times C^{2,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^\varepsilon}\right).$$

Où $C^{2,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^\varepsilon}\right)$ est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Sigma_\omega^\varepsilon}$ ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre deux, vérifiant que

$$\sum_{|j|=1}^{2}\sup_{(x,y),(x',y')\in\overline{\Sigma_\omega^\varepsilon}}\frac{|D^jw(x,y)-D^jw(x',y')|}{|(x,y)-(x',y')|^{2\alpha}}<\infty$$

où $j=(j_1,j_2)$, $|j|=j_1+j_2$ et $D^j=\dfrac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial^{j_1}x.\partial^{j_2}y}$. Pour plus d'informations sur ces espaces, voir [17].

Ici, on ne suppose pas que la fonction h^ε soit Höldérienne sur tout le secteur $\overline{\Omega_\omega^\varepsilon}$. Cependant, h^ε appartient à $C^{2\alpha}\left(\overline{\Omega_\omega^\varepsilon}\right)$ si et seulement si

$$\left(h_-,h_+^\varepsilon\right)\in C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega}\right)\times C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^\varepsilon}\right),\text{ avec } h_+^\varepsilon=h_-\text{ sur }\Gamma_\omega.$$

Ce modèle peut être décrit par le problème de transmission suivant

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{ll}\Delta w_-^\varepsilon=h_- & \text{dans } \Sigma_\omega\\ \Delta w_+^\varepsilon=h_+^\varepsilon & \text{dans } \Sigma_\omega^\epsilon\end{array}\right.\\ \left\{w_-^\varepsilon=w_+^\varepsilon,\ \mu_-\dfrac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial\eta}=\mu_+\dfrac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial\eta}\quad\text{sur }\Gamma_\omega\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial\eta}=l_+^\varepsilon\quad\text{sur }\Gamma_\omega^\varepsilon\\ w_-^\varepsilon=w_+^\varepsilon=0\quad\text{sur }\Gamma_\omega^*\cup\Gamma_\omega^{*\epsilon}.\end{array}\right.\end{array}\right.\tag{0.2.1}$$

Où, $\partial/\partial\eta$ désigne la dérivée normale extérieure, l_+^ε est une fonction donnée, et μ_-, μ_+ sont les coefficients de conductivité de Σ_ω et $\Sigma_\omega^\varepsilon$ respectivement.

Pour cet example, le point singulier situé au sommet S du secteur, est transformé en un point à l'infini par un changement de variable approprié. Cette transformation entraîne que la condition initialement imposée sur le second membre en S se traduit par une condition nulle au voisinage de l'infini. Cependant, une analyse approfondie de la limite de la solution révèle que cette limite correspond en réalité à une donnée f_- non nulle. Ce phénomène met en lumière une subtilité importante dans la formulation du problème, soulignant la nécessité d'étudier rigoureusement les conditions au voisinage de l'infini. Ainsi, notre example model vise à mieux comprendre ces comportements asymptotiques et à assurer la cohérence mathématique et physique du modèle sur un domaine non borné avec singularité géométrique.

On peut réécrire le problème (4.0.1) sous forme opérationnelle, pour plus de détails voir le chapitre 4

0.3 Recherches menées sur le même thème

Les problèmes de transmission apparaissent naturellement dans la modélisation de phénomènes physiques posés dans des milieux hétérogènes, séparés par une interface, où par exemple, la solution est soumise à des conditions de continuité de la température avec la continuité pondérée du flux thermique. L'etude de ce type s'inscrit dans un cadre mathématique et s'est développée progressivement selon trois axes

- le cadre fonctionnel adopté (L^p, Hölder, interpolation, ...),
- les méthodes analytiques utilisées (formulations variationnelles, intégrales de Dunford, semi-groupes, et enfin les approches numériques)
- la nature du domaine considéré (borné ou non, cylindrique ou non),.

Plusieurs chercheurs ont contribué à ce sujet dans différents espaces et avec diverses conditions aux limites. Par exemple,

Dans les espace de Hilbert et dans des domaines non réguliers, K. Lemrabet [25] à étudié des problèmes aux limites de Ventcel pour le laplacien. L'étude proposée fournit une description explicite des singularités au voisinage des sommets. Par ailleurs, dans le cas d'un domaine convexe borné de $\mathbb{R}^n$, l'auteur adopte une approche analytique rigoureuse, fondée sur les formulations variationnelles, les espaces de Sobolev, permettant de mieux comprendre la régularité des solutions dans des milieux non réguliers. Ce travail constitue une base importante pour le développement de la théorie des problèmes de transmission.

Dans les espaces de Hölder, O. Belhamiti et al. [2] ont étudié la régularité maximale d'une famille abstraite de problèmes de transmission, posés sur deux domaines rectangulaires juxtaposés (l'un est une couche mince d'épaisseur δ). En introduisant le concept d'opérateur d'impédance, ils utilisent une méthode d'analyse s'appuyant sur le calcul de Dunford et des outils issus de la théorie des opérateurs elliptiques. Ils établissent des résultats d'existence, d'unicité et des estimations précises, ouvrant la voie à une étude fine du comportement limite lorsque δ tend vers 0.

Une autre avancée notable concerne l'étude de ce type du problèmes de transmission [4], dans laquelle l'opérateur principal dépend explicitement de la variable x. Cette dépendance introduit une difficulté supplémentaire par rapport au cas classique à coefficients constants. L'analyse est réalisée dans le cadre des espaces de Hölder, sans supposer la différentiabilité des opérateurs résolvants. Les auteurs imposent à la famille d'opérateurs une condition structurante appelée hypothèse de Labbas–Terreni, inspirée de la théorie de la somme d'opérateurs linéaires. L'étude s'appuie aussi sur le calcul de Dunford, la théorie de l'interpolation, ainsi que la théorie des semi-groupes, pour aboutir à des résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale.

Dans [23], les auteurs étudient un problème elliptique posé sur un domaine hétérogène composé de trois régions distinctes, représentant des «habitats» interconnectés. Leur approche repose sur des outils fonctionnels puissants, tels que la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs, avec le H^{∞} calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels, ainsi que des propriétés fines des espaces d'interpolation réels. Afin de montrer, dans les espaces de Hölder, l'existence, l'unicité et la régularité de la solution en établissant des conditions nécessaires et suffisantes sur les données.

Dans la continuité de ces résultats obtenus dans le cadre continu, plusieurs auteurs se sont intéressés au traitement des mêmes problèmes dans les espaces L^p, afin de traiter des données moins régulières ou de modéliser des situations plus générales, ce qui permet d'élargir le champ d'applicabilité des résultats. Des contributions importantes dans cette direction ont été apportées notamment par Dore et al. [10], à travers l'utilisation de la théorie des opérateurs d'impédance et d'admittance et du calcul fonctionnel H^{∞} pour les opérateurs linéaires afin de montrer l'existence, l'unicité et la régularité des solutions.

Dans le même cadre fonctionnel, l'étude a été étendue au cas des domaines non bornés, qui posent des défis particuliers liés à la perte de compacité et donc au comportement à l'infini. Dans ce contexte, Limam [26] a étudié un problème de transmission elliptique par la théorie des semi groupes analytiques et la théorie de sommes d'opérateur linéaires de Dore-Venni.

En revanche, R. Labbas et ses collaborateurs [22] ont étudié certains problèmes de transmission posés dans des corps entourés d'une couronne d'épaisseur petite, il s'agit ici d'une applications concrete concernant la conduction dans les cellules biologiques. Après avoir utilisé un changement de variable naturel, les auteurs transforment le problème en une équation elliptique abstraite posée dans un domaines cylindriques non borné et grâce à une formulation abstraite et l'utilisation de la théorie des semi-groupes, ils démontrent l'existence, l'unicité, ainsi que la régularité maximale des solutions classiques pour tout paramètre $\delta > 0$.

Dans [24], les auteurs poursuivent leur analyse des problèmes de transmission dans un domaine hétérogène composé de trois sous-domaines "habitats", en considérant cette fois un autre cadre fonctionnel de type UMD. Ils examinent les conditions de transmission de type skewness aux interfaces entre les habitats, et sous des hypothèses appropriées concernant les données et les opérateurs, établissent des résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale pour la solution. L'approche repose notamment sur des techniques d'analyse fonctionnelle avancées adaptées au cadre L^p, en complément du cadre de Hölder étudié dans leurs travaux antérieurs.

Dib-Baghdadli et al. [9] ont analysé un système de réaction-diffusion posé sur deux habitats, modélisant la dispersion spatiale de triatomines, vecteurs de la maladie de Chagas. Les auteurs ont montré que l'opérateur de dispersion génère un semi-groupe analytique dans un espace fonctionnel adapté, ce qui leur permet d'établir l'existence locale de la solution du problème de Cauchy associé. Ce type de travail s'inscrit dans la dynamique actuelle qui vise à relier les modèles biologiques multi-domaines aux outils abstraits de l'analyse fonctionnelle, tels que la théorie des semi-groupes, les espaces d'interpolation, et la formulation variationnelle.

Récemment, dans [3], les auteurs abordent la régularité dans les espaces L^p pour un problème de transmission elliptique à conditions aux interfaces formulées par un opérateur, impliquant deux paramètres spectraux afin de modéliser des phénomènes plus complexes et d'affiner l'analyse fonctionnelle. L'étude est menée dans un cadre abstrait et repose sur une combinaison d'outils d'analyse fonctionnelle moderne et de techniques spectrales pour établir des conditions garantissant l'existence, l'unicité et la régularité optimale pour la solution classique, en mettant en évidence le rôle distinct de chacun des paramètres spectraux dans la structure du problème.

Cette thèse porte sur l'analyse des problèmes de transmission elliptiques dans les espaces de Hölder, dans le cas où le domaine est considéré non borné. Ce cadre soulève des difficultés spécifiques, liées à la fois à l'absence de compacité et au comportement de la solution à l'infini, contrairement aux situations classiques, le cas où la solution reste significative à l'infini exige [l'etude de nouveaux termes et donc utiliser des outils d'analyse plus fins.] On s'inscrit ainsi dans la continuité des travaux menés dans le cadre Höldérien, en élargissant l'analyse à des configurations plus générales et plus réalistes, telles que celles rencontrées dans des modèles physiques où la solution - par exemple une température ou une concentration - ne s'annule pas à grande distance.

0.4 Organisation de la thèse et synthèse des résultats principaux

Le présent travail est réparti en cinq chapitres :

Le premier chapitre est consacré à un ensemble de rappels théoriques indispensables à la compréhension du cadre abstrait utilisé dans l'analyse des problèmes de transmission abstraits. On y présente d'abord les notions fondamentales sur la théorie des opérateurs fermés et fermables, la théorie de semi-groupes non fortement continus, ainsi que les résultats classiques liés aux espaces d'interpolation, et en particulier sur les espaces de Hölder, en précisant leurs propriétés d'inclusion, de régularité et de densité utiles pour le traitement des équations différentielles. Certains résultats fondamentaux sur les intégrales de Dunford, les puissances imaginaires d'opérateurs, et ainsi que le principal théorème de Da Prato et Grisvard [6] cadre commutatif .

Le deuxième chapitre porte sur des lemmes techniques fondés sur la théorie des semi-groupes généralisés (cas de domaines non denses). Ces outils permettent de démontrer plusieurs résultats essentiels dans l'étude de l'höldérianité des composants figurant dans la représentation de la solution, en s'appuyant notamment sur les travaux de Sinestrari [34], de Lunardi [29], Eltaif et al [13], Cheggag et al [5] et Labbas et al [15], [16].

Le troisième chapitre est dédié à l'étude du problème (P_δ, 0.1.1, 0.1.1) dans un cas spécial, lorsque les opérateurs $\mathcal{H}$ et K sont supposés nuls, tout en conservant la donnée $f_- \neq 0$. Il s'agit donc à l'étude du problème de transmission abstrait suivant

$$\begin{cases} u_\delta''(x) + \mathcal{A}u_\delta(x) = g_\delta(x), \quad x \in]-\infty, 0[\cup]0, \delta[, \\ u_\delta(0_-) = u_\delta(0_+), \quad \mu_+ u_\delta'(0_+) = \mu_- u_\delta'(0_-) \\ \lim\limits_{x \to -\infty} u_\delta(x) = f_-, \quad u_\delta'(\delta) = f_\delta^+. \end{cases} \tag{P_δ}$$

Sous l'hypothèse fondamentale suivante : $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé, défini sur un domaine $D(\mathcal{A})$ non nécessairement dense dans l'espace E, et vérifie

$$\begin{cases} \rho(\mathcal{A}) \supset [0, +\infty[\text{ et il existe } C > 0 \text{ tel que} \\ \forall \lambda \in [0, +\infty[: \left\| (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \dfrac{C}{1 + \lambda} \end{cases} \tag{H.1}$$

où $\rho(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble résolvant de $\mathcal{A}$. Lorsque $\mathcal{A}$ possède cette propriété, le problème (P_δ) est appelé un problème de transmission elliptique selon Krein [21]. De plus, cette hypothèse permet de définir la racine carrée de l'opérateur $-\mathcal{A}$ (on utilise le résultat classique développée par Balakrishnan [1], lorsque le domaine de $\mathcal{A}$ est dense dans E), fondée sur le calcul opérationnel de Dunford, permettant de définir $\mathcal{A}^\alpha$ pour tout $\alpha > 0$, en particulier dans le cadre des opérateurs sectoriels.

Cependant, ce cas ne correspond pas à notre cadre d'étude, car nous considérons des opérateurs dont le domaine n'est pas nécessairement dense et par conséquent la théorie de Balakrishnan n'est plus applicable. Dans ce cas, une théorie alternative a été développée par Martinez [30], qui étend la notion de puissances fractionnaires aux opérateurs fermés dont le domaine n'est pas dense et de la théorie des semi-groupes généralisés. Cette extension permet de travailler dans des situations plus générales, tout en conservant des propriétés analytiques essentielles à l'étude des équations différentielles abstraites.

Il est bien connu que l'opérateur $-\sqrt{-\mathcal{A}} := \mathcal{B}$ génère un semi-groupe analytique, qui n'est toutefois pas nécessairement fortement continu à l'origine, en raison du fait que $\overline{D(\mathcal{A})} \subset E$ (voir, par exemple, [7] et [15]). La différence majeure avec les semi-groupes analytiques classiques réside dans le comportement de ce semi groupe au voisinage de zéro. En effet, ce semi-groupe vérifie $e^{\mathcal{B}t}x \in D\left(\mathcal{B}^k\right)$ pour $t > 0$, $x \in E$, $k \in \mathbb{N}^*$ et aussi, pour tout $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe $M_k > 0$ et une constante $a > 0$ tel que

$$\left\|t^k \mathcal{B}^k e^{\mathcal{B}t}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M_k e^{-at}.$$

voir [33].

On établit dans ce chapitre un résultat garantissant l'existence, l'unicité ainsi que la régularité maximale de la solution stricte, lorsque le second membre (g^-, g_δ^+) appartient à cet espace de Hölder

$$\mathcal{B}UC^{2\alpha}\left(]-\infty, 0] ; E\right) \times C^{2\alpha}\left([0, \delta] ; E\right)$$

avec $0 < 2\alpha < 1$, telles que

- g^- et g_δ^+ sont les restrictions de g_δ sur les intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, \delta]$ respectivement.
- $C^{2\alpha}\left([0, \delta] ; E\right)$ est l'espace des fonctions à valeurs vectorielles $f : [0, \delta] \to E$ satisfait une condition de Hölder suivante

$$[f]_{2\alpha} := \sup_{\substack{x,y \in [0,\delta] \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{|x - y|^{2\alpha}} < \infty,$$

  Cet espace muni de la norme $\|f\|_{2\alpha} = \|f\|_{C([0,\delta];E)} + [f]_{2\alpha}$ est un espace de Banach.
- $BUC^{2\alpha}(]-\infty, 0] ; E)$, est l'espace des fonctions continues, uniformément Hölderiennes et bornées $f :]-\infty, 0] \to E$ avec l'exposant 2α.

Les principaux résultats de ce chapitre sont présentés dans les deux théorèmes suivants, le premier théorème garantit l'existence et l'unicité d'une solution stricte du problème étudié, en précisant les conditions requises sur le second membre ainsi que sur les données f_- et f_δ^+.

Théorème 0.4.1 (solution strict) *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur fermé vérifiant l'hypothèse $(H.1)$ et soit*

$$\begin{cases} g^- \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty, 0] ; E\right) \text{ avec } g^-(-\infty) = 0 \\ g_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left([0, \delta] ; E\right) \end{cases},$$

où $0 < 2\alpha < 1$. Alors, (P_δ) admet une unique solution stricte si

$$\begin{cases} i)\ f_- \in D(\mathcal{A}) \text{ et } \mathcal{A}f_- \in \overline{D(\mathcal{A})} \\ ii)\ \ f_\delta^+ \in D\left(\sqrt{-\mathcal{A}}\right) \text{ et } \sqrt{-\mathcal{A}}f_\delta^+ \in \overline{D(\mathcal{A})} \\ iii)\ g_\delta^+(0) - g^-(0) \in \overline{D(\mathcal{A})}. \end{cases}$$

Le second Théorème porte sur la régularité maximale de cette solution, en précisant également les conditions requises sur le second membre et les données f_- et f_δ^+.

Théorème 0.4.2 (Régularité maximale) *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur fermé vérifiant l'hypothèse $(H.1)$ et soit*

$$\left\{\begin{array}{l} g^- \in BUC^{2\alpha}\left(\left]-\infty,0\right];E\right) \ \text{ avec } g^-\left(-\infty\right)=0 \\ g_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left(\left[0,\delta\right];E\right) \end{array}\right. ,$$

où $0<2\alpha<1$. Alors, la solution stricte du (P_δ) satisfait la propriété suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \left(u_\delta^+\right)'', \ \mathcal{A}u_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left(\left[0,\delta\right];E\right) \\ \left(u^-\right)'', \ \mathcal{A}u^- \in BUC^{2\alpha}\left(\left]-\infty,0\right];E\right) \end{array}\right.$$

si

$$\left\{\begin{array}{l} i) \ f_- \in D\left(\mathcal{A}\right) \ \text{ et } \mathcal{A}f_- \in D_{\mathcal{A}}\left(\alpha,\infty\right) \\ ii) \ \ f_\delta^+ \in D\left(\sqrt{-\mathcal{A}}\right) \ \text{ et } \sqrt{-\mathcal{A}}f_\delta^+ \in D_{\mathcal{A}}\left(\alpha,\infty\right) \\ iii) \ g_\delta^+\left(0\right)-g^-\left(0\right) \in D_{\mathcal{A}}\left(\alpha,\infty\right). \end{array}\right.$$

où $D_{\mathcal{A}}(\alpha,\infty)$ est l'espace d'interpolation réel associé a l'opérateur $\mathcal{A}$. Dans le cas ou $\mathcal{A}$ génere un semi groupe analytique généralisé (voir [34], [29]) cet espace est défini par

$$D_{\mathcal{A}}(\alpha,\infty):=\left\{x\in E:\sup_{t>0}t^{1-\alpha}\|\mathcal{A}e^{-t\mathcal{A}}x\|_E<\infty\right\},$$

muni de la norme

$$\|x\|_{D_{\mathcal{A}}(\alpha,\infty)}:=\|x\|_E+\sup_{t>0}t^{1-\alpha}\|\mathcal{A}e^{-t\mathcal{A}}x\|_E.$$

Les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet d'une publication intitulée « Maximal Hölder regularity of elliptic transmission problems in unbounded Domains», parue dans la revue Asia Pacific Journal of Mathematics (voir [11]).

Le quatrième chapitre, examine en détail le problème introduit dans la section de motivation. Afin de ramener le problème initial 4.0.1 à une forme abstraite exploitable, deux changements de variables consécutifs sont utilisés pour avoir appliquer les résultat du chapitre précedent.

Le premier changement de variable consiste à passer en coordonnées polaires avec les notations suivantes

$$\nu^\epsilon\left(\rho,\theta\right):=w^\epsilon(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta),$$

$$k^\epsilon\left(\rho,\theta\right):=h^\epsilon(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta),$$

$$L_+^\epsilon\left(\theta\right):=l_+^\epsilon\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$$

et les restrictions suivantes

$$k_{-} := k^{\epsilon}_{\diagup]0,1[\times]0,\omega[}, \quad k^{\epsilon}_{+} := k^{\epsilon}_{\diagup]1,1+\epsilon[\times]0,\omega[},$$

et

$$\nu_{-} := \nu^{\epsilon}_{\diagup]0,1[\times]0,\omega[}, \quad \nu^{\epsilon}_{+} := \nu^{\epsilon}_{\diagup]1,1+\epsilon[\times]0,\omega[}.$$

Le second changement de variable consiste à poser $\rho = e^{x}$, avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} u_{\delta}(x,\theta) &:= \nu^{\epsilon}(\rho,\theta), \\ g_{\delta}(x,\theta) &:= \rho^{2} k^{\epsilon}(\rho,\theta) \\ f^{+}_{\delta}(\theta) &:= (1+\epsilon) L^{\epsilon}_{+}(\theta), \end{aligned}$$

où $\delta = \ln(1+\epsilon)$ avec les restrictions suivantes

$$g^{-} := g_{\delta \diagup]-\infty,0[\times]0,\omega[}, \; g^{+}_{\delta} := g_{\delta \diagup]0,\delta[\times]0,\omega[},$$

et

$$u^{-} := u_{\delta \diagup]-\infty,0[\times]0,\omega[}, \; u^{+}_{\delta} := u_{\delta \diagup]0,\delta[\times]0,\omega[}.$$

Après application de ces deux changements de variables (le passage en coordonnées polaires puis la reparamétrisation de la variable ρ), le secteur angulaire $\Sigma^{\epsilon}_{\omega}$ se transforme successivement en un rectangle du type $]0,1+\epsilon[\times]0,\omega[$, puis en un domaine semi-infini de la forme $]-\infty,\delta[\times]0,\omega[$. En plus le problème initial (4.0.1) se transformé en la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (eqs) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^{-}(x,\theta) = g^{-}(x,\theta) & \text{dans }]-\infty,0[\times]0,\omega[\\ \Delta u^{+}_{\delta}(x,\theta) = g^{+}_{\delta}(x,\theta) & \text{dans }]0,\delta[\times]0,\omega[\end{array} \right. \\ (ct) \left\{ \begin{array}{l} u^{-}(0,\theta) = u^{+}_{\delta}(0,\theta), \\ \mu_{-}\dfrac{\partial u^{-}}{\partial x}(0,\theta) = \mu_{+}\dfrac{\partial u^{+}_{\delta}}{\partial x}(0,\theta), \end{array} \right. \quad \text{pour } \theta \in]0,\omega[\\ (cl) \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u^{+}_{\delta}}{\partial x}(\delta,\theta) = f^{+}_{\delta}(\theta) & \text{pour } \theta \in]0,\omega[\\ u^{-}(x,0) = u^{-}(x,\omega) = 0 & \text{pour } x \in]-\infty,0] \\ u^{+}_{\delta}(x,0) = u^{+}_{\delta}(x,\omega) = 0 & \text{pour } x \in [0,\delta]. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{0.4.1}$$

Pour étudier la régularité et établir un lien entre celle du problème initial (4.0.1) et celle du problème transformé (4.1.2), on a etabli deux propositions fondamentales.

Proposition 0.4.1 *Soit* $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. *Alors,*

$$\begin{aligned} h_- \in C_0^{2\alpha}\left(\overline{\Omega_\omega}\right) &\Leftrightarrow k_- \in C_0^{2\alpha}\left([0,1] \times [0,\omega]\right) \\ &\Leftrightarrow g^- \in C_b^{2\alpha}\left(]-\infty, 0] \times [0,\omega]\right). \end{aligned}$$

Proposition 0.4.2 *Soit* $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. *Alors,*

$$\begin{aligned} h_+^\epsilon \in C^{2\alpha}\left(\overline{\Omega_\omega^\epsilon}\right) &\Leftrightarrow k_+^\epsilon \in C^{2\alpha}\left([1, 1+\epsilon] \times [0,\omega]\right) \\ &\Leftrightarrow \quad g_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left([0,1] \times [0,\omega]\right). \end{aligned}$$

où

$$C_0^{2\alpha}\left(\Omega_\omega\right) := \left\{f \in C^{2\alpha}\left(\Omega_\omega\right) \ \textit{avec} \ f(0,0) = 0\right\},$$
$$C_0^{2\alpha}\left([0,1] \times [0,\omega]\right) := \left\{f \in C^{2\alpha}\left([0,1] \times [0,\omega]\right) \ \textit{avec} \ f = 0 \ \textit{sur} \ \{0\} \times [0,\omega]\right\}$$

et

$$\begin{aligned} C_b^{2\alpha}\left(]-\infty, 0] \times [0,\omega]\right) := \Bigg\{ & f \in C^{2\alpha}\left(]-\infty, 0] \times [0,\omega]\right) : \max_{\substack{x \in]-\infty, 0] \\ \theta \in [0,\omega]}} \left|g^-(x,\theta)\right| < \infty \\ & \textit{avec} \lim_{x \to -\infty} g^-(x,\theta) = 0 \ \textit{pour} \ \theta \in [0,\omega] \Bigg\} \end{aligned}$$

Ensuite, on ecrit (4.1.2) à l'aide des notations vectorielles usuelles suivante

$$u_\delta(x)(\theta) := u_\delta(x,\theta) \ \text{ et } \ g(x)(\theta) := g(x,\theta)$$

avec cette propriété

$$C_b^{2\alpha}\left(]-\infty, 0] \times [0,\omega]\right) = C_b^{2\alpha}\left(]-\infty, 0]; C\left([0,\omega]\right)\right) \cap L^\infty\left(]-\infty, 0]; C^{2\alpha}\left([0,\omega]\right)\right).$$

voir [32]. Pour rester dans le cadre höldérien on a traité le cas où le second membre

$$g^- \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty, 0]; C\left([0,\omega]\right)\right) \ \text{ et } \ g_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left([0,1], C\left([0,\omega]\right)\right).$$

Dans les chapitres précédent, On a considéré le cas où $f_- \neq 0$, avec un second membre g^- nul, dans ce **dernier** chapitre, nous étudions la situation plus générale où

$$\lim_{x \to -\infty} g^-(x) = \chi \neq 0.$$

Cette configuration conduit à un cas particulier dans lequel f_- dépend explicitement de χet de l'opérateur principal de l'équation. Par ailleurs, un autre opérateur $\mathcal{H}$ intervient désormais dans la condition au bord $\{\delta\}$, qui est de type Robin, ajoutant une difficulté supplémentaire à l'analyse du problème suivant

$$(P_\omega)\begin{cases} u_\delta''(x) + \mathcal{A}u_\delta(x) - \omega u_\delta(x) = g_\delta(x), \qquad x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, \delta\right[\\ u_\delta'(\delta) + \mathcal{H}u_\delta(\delta) = f_\delta^+ \\ u_\delta(0_-) = u_\delta(0_+) \text{ et } \mu_- u_\delta'(0_-) = \mu_+ u_\delta'(0_+) \end{cases}$$

On analyse la régularité de la solution stricte sous un ensemble d'hypothèses précises portant sur les deux opérateurs différentiels considérés, définis comme suit :

H.1 L'opérateur $\mathcal{A}_\omega$ est linéaire et fermé, de domaine $D(\mathcal{A}_\omega) \subset E$, non nécessairement dense. De plus, il existe des constantes $\omega_0 > 0$ et $C > 1$ telles que :

$$\begin{cases} \rho(\mathcal{A}_\omega) \supset [\omega_0\,, +\infty[\,, \text{ et pour tout } \lambda \in [\omega_0, +\infty[\\ \left\|(\mathcal{A}_\omega - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \dfrac{C}{1 + \lambda - \omega_0} \end{cases}$$

où $\rho(\mathcal{A}_\omega)$ est l'ensemble résolvant de l'opérateur $\mathcal{A}_\omega$, sous cette hypothèse on peut définir la racine carré de l'opérateur $-\mathcal{A}_\omega$, noté $\mathcal{B}_\omega := -\sqrt{-\mathcal{A}_\omega}$ (pour plus de détails voir Martinez [30] pour le cas non-dense). En plus cet opérateur génère un semi groupe analytique non fortement continu à l'origine.

H.2 L'opérateur $\mathcal{H}$ est linéaire fermé de domaine $D(\mathcal{H})$, en plus la somme $\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}$ est fermable, avec $0 \in \rho(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})$, et

$$\begin{cases} (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left((D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}\right) \subset D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H}), \\ \mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left((D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}\right) \subset (D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}, \end{cases}$$

H.3 On suppose aussi la commutativitée suivante

$$\mathcal{B}_\omega^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1} = \left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}.$$

H.4 On suppose que l'opérateur

$$\Pi_{\omega,b} := I + 2b\left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{H} - \mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}.$$

est fermé et d'inverse borné

H.5 On suppose en plus que les domaines $D(\mathcal{B}_\omega)$ et $D(\mathcal{H})$ sont liés par l'inclusion suivante

$$D(\mathcal{B}_\omega) \subset D(\mathcal{H}).$$

Sous ces hypothèses, on a établi les deux théorèmes fondamentaux suivants relatifs à l'unicité de la solution stricte et à sa régularité maximale.

Théorème 0.4.3 (Solution Stricte) *Soit* $\left(g^-,\ g_\delta^+\right) \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0]\,;E\right)\times C^{2\alpha}\left(]0,\delta]\,;E\right)$ *avec* $0 < 2\theta < 1$. *Sous les hypothèses* $(H.1) \sim (H.5)$, *le problème* (P_ω) *admet une unique solution stricte si*

$$\begin{cases} i)\ g_\delta^+(0) - g^-(0) \in \overline{D(\mathcal{B}_\omega)}, \\ ii)\ \overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} f_\delta^+ \in D\left(\mathcal{B}_\omega^2\right)\ \ et\ \mathcal{B}_\omega^2\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} f_\delta^+ \in \overline{D\left(\mathcal{B}_\omega\right)}, \\ iii)\ \overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} g_\delta^+(\delta) \in D(\mathcal{B}_\omega)\ \ et\ \mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} g_\delta^+(\delta) \in \overline{D(\mathcal{B}_\omega)}. \end{cases}$$

Théorème 0.4.4 (régularité maximale) *Soit* $g^- \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0]\,;E\right)$ *et* $g_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left(]0,\delta]\,;E\right)$ *où* $0 < 2\alpha < 1$. *Sous les hypothèses* $(H.1) \sim (H.5)$, *la solution stricte de problème* (P_ω) *satisfait la propriété de la régularité maximale suivante*

$$\begin{cases} \left(u_\delta^+\right)'',\ \mathcal{A}_\omega u_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left(]0,\delta]\,;E\right), \\ \left(u^-\right)'',\ \mathcal{A}_\omega u^- \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0]\,;E\right) \end{cases}$$

si

$$\begin{cases} i)\ g_\delta^+(0) - g^-(0) \in D_{\mathcal{B}_\omega}\left(2\alpha,+\infty\right), \\ ii)\ \overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} f_\delta^+ \in D\left(\mathcal{B}_\omega^2\right)\ \text{ et } \mathcal{B}_\omega^2\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} f_\delta^+ \in D_{\mathcal{B}_\omega}\left(2\alpha,+\infty\right), \\ iii)\ \overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} g_\delta^+(\delta) \in D(\mathcal{B}_\omega)\ \text{ et } \mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} g_\delta^+(\delta) \in D_{\mathcal{B}_\omega}\left(2\alpha,+\infty\right). \end{cases}$$

Enfin, une bibliographie rassemblant les principales références utilisées dans ce travail conclut cette thèse.

Chapitre 1

Rappels théoriques

Afin de préparer le cadre théorique de cette étude, nous rappelons ici plusieurs concepts essentiels, notamment les opérateurs linéaires fermés et fermables, les semi-groupes (C_0 semi goupe et semi groupe analytique), les espaces fonctionnels (espace de Hölder et petit Hölder) ainsi que la théorie de la somme d'opérateurs linéaire de Da prato et Grisvard. Pour plus de détails, on se réfère aux travaux de A. Lunardi [29], M. Haase [19], R. Dautray et J.-L. Lions [8], J. Engle et R. Nagel [14], T. Kato [20].

Dans la suite de ce chapitre, X et Y sont deux espaces de Banach complexes.

1.1 Notions fondamentales sur les opérateurs fermés

1.1.1 Définitions générales

1. Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to Y$ est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(\mathcal{A})$ (appelé domaine de $\mathcal{A}$) et à valeurs dans Y.
2. On désigne par $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, l'image de $\mathcal{A}$ qui correspond à $\mathcal{A}\left(D(\mathcal{A})\right)$.
3. On dit que $\mathcal{A}$ possède un domaine dense lorsque $\overline{D\left(\mathcal{A}\right)} = X$.
4. Le graphe de $\mathcal{A}$, noté $\mathcal{G}\left(\mathcal{A}\right)$, est le sous-espace vectoriel de $X \times Y$, défini par
$$\mathcal{G}\left(\mathcal{A}\right) := \left\{(x, \mathcal{A}x) \in X \times Y : x \in D\left(\mathcal{A}\right)\right\}.$$
5. La norme du graphe de $\mathcal{A}$, notée $\|.\|_{D(\mathcal{A})}$, est la norme définie sur $D\left(\mathcal{A}\right)$ par
$$\|x\|_{D(\mathcal{A})} = \|x\|_X + \|\mathcal{A}x\|_Y\,,$$
et donne ainsi à $D\left(\mathcal{A}\right)$ une structure d'espace normé.

6. Un opérateur $\mathcal{A}$ défini sur tout l'espace X (i.e $D(\mathcal{A}) = X$) est dit borné s'il existe $C > 0$ telle que :

$$\|\mathcal{A}x\|_Y \leq C \|x\|_X .$$

et l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans Y est noté par $\mathcal{L}(X,Y)$, cet espace muni de la norme opératorielle

$$\|x\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\mathcal{A}x\|_Y$$

est de Banach, lorsque $X = Y$, on écrit simplement $\mathcal{L}(X)$.

Définition 1.1.1 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux opérateurs linéaires. On dit que $\mathcal{B}$ est une extension (ou un prolongement) de $\mathcal{A}$ et on note $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ si*

$$\begin{cases} i) \ D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{B}) \\ ii) \ \forall \varphi \in D(\mathcal{A}), \ \mathcal{A}\varphi = \mathcal{B}\varphi. \end{cases}$$

Définition 1.1.2 (opérateur fermé) *Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to Y$ est dit **fermé** si son graphe $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est un sous-espace fermé de $X \times Y$. Autrement dit, un opérateur linéaire $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(\varphi_n) \subset D(\mathcal{A})$ vérifiant*

$$\varphi_n \to \varphi, \ \textit{dans } X, \ \textit{et } \mathcal{A}\varphi_n \to \phi \ \textit{dans } Y$$

alors $\varphi \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}\varphi = \phi$.
Dans ce cas $D(\mathcal{A})$ muni de la norme de graphe est un espace de Banach.

Remarque 1.1.1 *Si un opérateur $\mathcal{A}$ est borné et défini sur tout X, alors $\mathcal{A}$ est fermé.*

Exemple 1.1.1 *Dans l'espace $X = L^2(\mathbb{R})$; l'opérateur*

$$D(T) = H^1(\mathbb{R}) \ \textit{et } Tu = u',$$

est fermé.

Définition 1.1.3 *On dit que $\mathcal{A}$ est **fermable** si la fermeture de son graphe $G(\mathcal{A})$ dans $X \times Y$ est le graphe d'un opérateur linéaire fermé, appelé une extension fermée de $\mathcal{A}$. Parmi ces extensions, la plus petite est appelée la fermeture de $\mathcal{A}$, notée $\overline{\mathcal{A}}$ et $G(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{G(\mathcal{A})}$ est le graphe de $\overline{\mathcal{A}}$.*

De façon équivalente, un opérateur $\mathcal{A}$ est dit ***fermable*** *si et seulement si pour tout suite $(\varphi_n)_n \subset D(\mathcal{A})$ telle que*

$$\varphi_n \to 0 \text{ dans } X \text{ et } \mathcal{A}\varphi_n \to \phi \text{ dans } Y$$

alors $\phi = 0$

Exemple 1.1.2 *Considérons l'espace $L^2([0,1])$ l'opérateur*

$$D(\mathcal{A}) = C_c^\infty(0,1) \text{ et } \mathcal{A}u = u',$$

est fermable et sa fermeture est données par

$$\overline{\mathcal{A}}u{=}u' \text{ et } D(\overline{\mathcal{A}}) = H_0^1(0,1)$$

Théorème 1.1.1 (Du graphe fermé) *Soient X, Y deux espaces de Banach. Une application linéaire $f : X \to Y$, définie sur tout X, est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$.*

Définition 1.1.4 *Soient X un espace de Banach complexe, et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ un opérateurs linéaire (pas forcément borné). On appelle*

- Spectre de $\mathcal{A}$, l'ensemble

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\mathcal{A} - \lambda I) \text{ non inversible}\}.$$

- Ensemble résolvant de $\mathcal{A}$, le complémentaire du $\sigma(\mathcal{A})$ dans $\mathbb{C}$ noté $\rho(\mathcal{A})$, c'est -à-dire

$$\rho(\mathcal{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\mathcal{A} - \lambda I) : D(\mathcal{A}) \to X \text{ est bijectif, } (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \ \right\}.$$

- Résolvante de $\mathcal{A}$, l'opérateur $R(\lambda, \mathcal{A}) := (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.

Exemple 1.1.3 *Sur $X = C([0,1]; L^p(0,1))$, muni de la norme $\|u\|_X = \max\limits_{t\in[0,1]} \|u(t)\|_{L^p(0,1)}$, on défini l'opérateur $\mathcal{A}$ par*

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \{u \in \mathbb{C}^1([0,1]; L^p(0,1)) : u(0) = 0\} \\ \mathcal{A}u = -u'. \end{cases}$$

Cet opérateur est fermé et sa résolvante est donné par

$$\left\{(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} f\right\}(x) = \int_0^x e^{-\lambda(x-s)} f(s) ds$$

son spectre est vide (i.e. $\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$) donc $\rho(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.5 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux opérateurs linéaires fermés sur X tels que $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ et $\rho(\mathcal{B}) \neq \emptyset$. On dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ commutent au sens des résolvantes si et seulement si, pour tout $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ et tout $\mu \in \rho(\mathcal{B})$ on a*

$$R(\lambda, \mathcal{A})\, R(\mu, \mathcal{B}) = R(\mu, \mathcal{B})\, R(\lambda, \mathcal{A}).$$

Proposition 1.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire fermé. Pour tout $\lambda, \mu \in \rho(\mathcal{A})$, on appelle identité de la résolvante l'égalité suivante :*

$$(\lambda - \mu)\, R(\lambda, \mathcal{A})\, R(\mu, \mathcal{A}) = R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\mu, \mathcal{A}).$$

1.1.2 Propriétés

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs $D(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{B})$. On définit l'opérateur somme par

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} : D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}) \to X, \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$$

et l'opérateur produit $\mathcal{AB}$ (la composition) par

$$(\mathcal{AB})(\varphi) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\varphi),$$

pour tout $\varphi \in D(\mathcal{AB}) = \{\varphi \in D(\mathcal{B}) : \mathcal{B}\varphi \in D(\mathcal{A})\}$. On donne maintenant quelques propriétés importantes sur les opérateurs fermés et fermables.

1. Si $\mathcal{B}$ est borné et $\mathcal{A}$ est fermable, alors $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est également fermable.
2. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont fermés et $\mathcal{A}(D(\mathcal{A})) \subset D(\mathcal{B})$, alors $\mathcal{BA}$ est fermable.
3. Si $\mathcal{A}$ est fermé et $\mathcal{B}$ est borné, alors $\mathcal{BA}$ est fermé.
4. Si $\mathcal{A}$ est fermable et $\mathcal{B}$ est borné, alors $\mathcal{BA}$ est fermable.
5. Si $\mathcal{A}$ est fermé et injectif alors $\mathcal{A}^{-1}$ est fermé.
6. Si $\mathcal{A}$ est inversible, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}^n$ est fermé.
7. Si $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ alors $\mathcal{A}$ est fermé.
8. Si $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to Y$ est un opérateur fermable et sa fermeture $\overline{\mathcal{A}}$ de $D(\overline{\mathcal{A}})$ sur Y est bijectif. Alors, par le théorème du graphe fermé, l'opérateur inverse $\overline{\mathcal{A}} : Y \to D(\overline{\mathcal{A}})$

$$\overline{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X),$$

est un opérateur linéaire continue.

Cependant, $\mathcal{A}^{-1}$ n'est pas défini globalement, puisque $\mathcal{A}$ n'est pas fermé.

9. Si $\overline{\mathcal{A}}$ est fermé, bijectif, et a un inverse borné, alors pour tout opérateur $\mathcal{B}$ tel que :

$$\mathcal{B}\overline{\mathcal{A}}^{-1} \text{ est bien défini (sur un domaine stable),}$$

la composition $\mathcal{B}\overline{\mathcal{A}}^{-1}$ est bien définie et bornée si $\mathcal{B}$ est borné.

10. Pour des opérateurs non bornés, la compatibilité des domaines est essentielle pour que la composition ait un sens, il faut $\operatorname{Im}(\overline{\mathcal{A}}^{-1}) \subset D(\mathcal{B})$.

Remarque 1.1.2 *1) $\overline{\mathcal{A}}^{-1}$ est un opérateur linéaire borné défini sur tout Y.*
2) Les compositions suivantes sont valides :

$$\overline{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{A}}^{-1} = \mathrm{Id}_Y, \quad \overline{\mathcal{A}}^{-1}\overline{\mathcal{A}} = \mathrm{Id}_{D(\overline{\mathcal{A}})}.$$

3) On ne peut pas toujours composer $\mathcal{A}$ avec $\overline{\mathcal{A}}^{-1}$:

$$\overline{\mathcal{A}}^{-1}(Y) = D(\overline{\mathcal{A}}) \supset D(\mathcal{A}),$$

donc l'image de $\overline{\mathcal{A}}^{-1}$ n'est pas nécessairement contenue dans $D(\mathcal{A})$. Ainsi, $\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{A}}^{-1}$ n'est pas toujours bien défini. Mais sur $D(\mathcal{A})$, on a :

$$\overline{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A} = \mathrm{Id}_{D(\mathcal{A})}.$$

1.2 Intégrale de Dunford et opérateurs sectoriels

Définition 1.2.1 (Opérateurs sectoriels) *Soit $\mathcal{A}\colon D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé sur X. On dit que A est sectoriel d'angle $\theta \in [0, \pi)$ s'il satisfait :*
i) $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \overline{S_\theta}$, où

$$S_\theta = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\} & si\ 0 < \theta < \pi, \\ ]0, +\infty[& si\ \theta = 0 \end{cases},$$

ii) pour tout $\alpha \in]\theta, \pi[$,

$$\sup_{\mu \notin \overline{S_\alpha}} \left\| \mu (\mu I - \mathcal{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$$

et on note $\mathcal{A} \in Sect(\theta)$, voir [19] page 17.

Proposition 1.2.1 *Si $\mathcal{A}$ est un opérateur sectoriel d'angle $\theta \in [0, \pi[$, alors $\mathcal{A}$ est fermé. Par ailleurs, les propriétés fondamentales suivantes sont vérifiées :*

1. Si $\mathcal{A} \in Sect(\theta)$ et est injectif, alors son inverse $\mathcal{A}^{-1}$ appartient également à $Sect(\theta)$, et réciproquement.
2. Pour $\mathcal{A} \in Sect(\theta)$ et $a \geq 0$, l'opérateur $a\mathcal{A}$ est aussi sectoriel d'angle θ.
3. Pour $\mathcal{A} \in Sect(\theta)$ et $\epsilon \geq 0$, l'opérateur $\mathcal{A} + \epsilon I$ reste dans $Sect(\theta)$.

Définition 1.2.2 (Formule de Cauchy) *Soient*

- *f une fonction holomorphe sur U un ouvert de $\mathbb{C}$*
- *Γ un chemin fermé (positivement orienté) dans U qui entoure un point $z_0 \in U$,*

alors on a la formule intégrale de Cauchy suivante,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Définition 1.2.3 (Intégral de Dunford) *(Voir [19] page 27.) Soient*

**) $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire fermé défini sur un espace de Banach X,*

**) f une fonction holomorphe dans un ouvert U contenant le spectre $\sigma(\mathcal{A})$*

**) Γ un contour fermé dans U, orienté positivement, qui entoure $\sigma(\mathcal{A})$ et reste entièrement inclus dans le résolvant de $\mathcal{A}$.*

L'opérateur $f(\mathcal{A})$ est alors défini par la formule suivante

$$f(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (zI - \mathcal{A})^{-1} dz,$$

Cette construction repose sur une généralisation de la formule intégrale de Cauchy, et elle s'applique particulièrement aux opérateurs fermés dont le spectre est contenu dans un domaine où f est holomorphe.

1.3 Notions fondamentales sur les semi-groupes

Définition 1.3.1 (Semi- groupe fortement continus) *On appelle semi-groupe fortement continu (ou $\mathcal{C}_0$-semi-groupe), une famille d'opérateurs $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, vérifiant les trois propriétés suivantes* *a)* $\mathcal{T}(0) = I$,

b) $\mathcal{T}(t+s) = \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s), \ \ \forall t, s \geq 0$

c) pour tout $\varphi \in X$, *l'application* $t \mapsto \mathcal{T}(t)\varphi$ *est continue en* $t = 0$ *au sens fort, c'est-à-dire*

$$\lim_{t \to 0^+} \|\mathcal{T}(t)\varphi - \varphi\|_X = 0.$$

Exemple 1.3.1 *Soit* $X = L^p(\mathbb{R})$ *avec* $1 \leq p < \infty$. *Pour chaque* $t \geq 0$, *l'opérateur* $\mathcal{T}(t)$ *défini par*

$$\mathcal{T}(t)f(x) = f(x+t)$$

pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ *forme un semi-groupe fortement continu sur* X.

Exemple 1.3.2 *Si* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$, *alors la famille* $\mathcal{T}(t)_{t \geq 0}$, *définie par*

$$\mathcal{T}(t) = e^{t\mathcal{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathcal{A}^n$$

forme un semi-groupe fortement continu sur X.

Définition 1.3.2 (semi groupe uniformément continu) *Un semi groupe* $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$ *est appelé semi groupe uniformément continu d'opérateur linéaire borné si*

$$\lim_{t \to 0} \|\mathcal{T}(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Définition 1.3.3 (générateur infinitésimal) *On appelle* ***générateur infinitésimal*** *d'un semi-groupe* $\{\mathcal{T}(t)\}_{t>0}$, *l'opérateur linéaire* $\mathcal{A}$ *défini par*

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \left\{ \varphi \in X : \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{\mathcal{T}(t)\varphi - \varphi}{t} \ \text{ existe} \right\} \\ \mathcal{A}\varphi = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{\mathcal{T}(t)\varphi - \varphi}{t}. \end{cases}$$

Exemple 1.3.3 *Dans l'espace des fonctions uniformément continues et bornées sur* $[0; +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$ *(i.e* $X = BUC([0, +\infty[; \mathbb{R}))$, *la famille d'opérateurs* $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geqslant 0}$ *défnie par*

$$[\mathcal{T}(t)\varphi](s) = \varphi(t+s) \text{ pour tout } \varphi \in X, \ s, \ t \in \mathbb{R}^+,$$

est un $\mathcal{C}_0$*-semi groupe de contractions, dont le générateur infinitésimal est l'opérateur linéaire* $\mathcal{A}$ *défini par*

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \{\varphi \in X : \varphi' \text{ existe}, \ \varphi' \in X\} \\ \mathcal{A}\varphi = \varphi' \text{ pour tout } \varphi \in D(\mathcal{A}). \end{cases}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation complète des générateurs fortement continus ($\mathcal{C}_0-$semi-groupes) sur un espace de Banach

Théorème 1.3.1 (Hille-Yosida) *L'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ si et seulement si*

1. $D(\mathcal{A})$ est dense dans X.
2. Il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

et pour tout $\lambda > \omega$, $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\left\| (\lambda I - \mathcal{A})^{-k} \right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^k}.$$

En plus, ce semi-groupe $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ vérifiant $\|\mathcal{T}(t)\| \leq Me^{\omega t}$, pour tout $t \geq 0$.

Remarque 1.3.1 *Si $\|\mathcal{T}(t)\| \leq 1$ pout tout $t \geq 0$, c'est-à-dire si $\omega = 0$ et $M = 1$, on dit que $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe de* ***contraction.***

Définition 1.3.4 (Semi-groupes analytiques) *Un semi-groupe fortement continu $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ est dit analytique s'il existe un angle $\theta \in \left]0, \pi/2\right[$, tel que :*
**) $\mathcal{T}$ se prolonge en une famille d'opérateurs $\mathcal{T}(z)$ définie et holomporphe sur le secteur ouvert $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$, à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$.*
**) L'application $z \longrightarrow \mathcal{T}(z)\, x$ est analytique sur Σ_θ, pour tout $x \in X$,*
**) $\mathcal{T}(0) = I$ et $\lim\limits_{z \in \Sigma_\theta, z \longrightarrow 0} \mathcal{T}(z)\, x = x$ et $\mathcal{T}(z_1 + z_2) = \mathcal{T}(z_1)\,\mathcal{T}(z_2)$, pour tout $z_1, z_2 \in \Sigma_\theta$.*

Le théorème de Kato suivant donne une caractérisation précise des opérateurs engendrant des semi-groupes analytiques sur un espace de Banach X.

Théorème 1.3.2 (de Kato) *Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé vérifiant*

1) $\overline{D(\mathcal{A})} = X$

2) $\rho(\mathcal{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ et il existe $M > 0$ tel que pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\left\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{1+\lambda}.$$

Alors, $\mathcal{A}$ est le générateur d'un semi-groupe analytique, en plus

1) il existe $M > 0$, por tout $t > 0$ on a $\|\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$.

2) pour tout $t > 0$, on a $\mathcal{T}(t) \in \mathcal{L}(X, D(\mathcal{A}))$ et $\|\mathcal{A}\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M}{t}$.

Pour plus de détails, voir [29].

Exemple 1.3.4 *Soit $X = L^p(0,1)$, avec $1 < p < +\infty$ et on considère l'opérateur*

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \{u \in W^{2,p}(0,1) : u(0) = u(1) = 0\} \\ \mathcal{A}u = u''. \end{cases}$$

Cet opérateur est bien défini, fermé et densément défini dans $L^p(0,1)$. Son spectre est discret et donné par

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{-k^2\pi^2 : k = 1, 2, 3, ...\right\}$$

et les fonctions propres associées sont

$$e_k(x) = \sin(k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

En plus, pour tout $\lambda \notin \mathbb{R}_-$, on a l'estimation suivante

$$\left\|(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{|\lambda| \cos\frac{\theta}{2}}; \text{ où } \theta = \arg\lambda.$$

*Ainsi, $\mathcal{A}$ est le générateur d'un **semi-groupe analytique**.*

Remarque 1.3.2 *Lorsque le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ n'est pas dense, la famille $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ est appelée un semi-groupe **analytique généralisé** (ou encore un semi groupe analytique non fortement continu en zéro) pour plus détails voir [7] et [29].*

Proposition 1.3.1 (Voir [34] page 19-20.) *Si $\mathcal{A}$ génère un semi groupe analytique $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$, alors pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{T}(t)$ peut être représenté à l'aide de l'intégrale de Dunford par*

$$\mathcal{T}(t)x = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{tz} (zI - \mathcal{A})^{-1} x dz := e^{t\mathcal{A}}x.$$

où γ est une courbe simple définie par

$$\gamma = \{z \in C : |z| = 1 \text{ et } |\arg z| \leq \phi\} \cup \left\{z \in C : z = re^{\pm i\phi} \text{ et } r \geq 1\right\}.$$

ce semi groupe, vérifiant

i. $e^{\mathcal{A}(t+s)} = e^{\mathcal{A}t}e^{\mathcal{A}s}$ *pour* $t, s \geq 0$.

ii. $e^{\mathcal{A}t}x \in D\left(\mathcal{A}^k\right)$ *pour* $t > 0,\ x \in X,\ k \in \mathbb{N}^*$.

iii. *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe* M_k (*dépendent de* M *et* ϕ) *telle que*

$$\left\|t^k\mathcal{A}^k e^{\mathcal{A}t}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_k \qquad \text{pour } t > 0.$$

iv. *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $t > 0$, *dans* $\mathcal{L}(X)$ *on a*

$$\frac{d^k e^{\mathcal{A}t}}{dt^k} = \mathcal{A}^k e^{\mathcal{A}t}.$$

et $t \rightarrow e^{\mathcal{A}t}$ *peut-être se prolonger analytiquement dans un secteur contenant la demi-droit positive.*

v. $\mathcal{A}e^{\mathcal{A}t}x = e^{\mathcal{A}t}\mathcal{A}x$ *pour* $t > 0$ *et* $x \in D_{\mathcal{A}}$.

vi. $R(\lambda, \mathcal{A})\, e^{\mathcal{A}t} = e^{\mathcal{A}t}R(\lambda, \mathcal{A})$ *pour* $t > 0$ *et* $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.

Proposition 1.3.2 *Lorsque $\mathcal{A}$ vérifie l'hypothèse suivante*

$$\left\{\begin{array}{l} \rho(\mathcal{A}) \supset [0, +\infty[\text{ et il existe } C > 0 \text{ tel que} \\ \forall\lambda \in [0, +\infty[\,: \left\|(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C}{1+\lambda} \end{array}\right.$$

Alors, les propriétés énumérées ci-après sont satisfaites :

(i) pour $x \in \overline{D_{\mathcal{A}}}$, *on a* $\lim\limits_{t\to 0} e^{\mathcal{A}t}x = x$. *Réciproquement, s'il existe* $\lim\limits_{t\to 0} e^{\mathcal{A}t}x = y$ *alors* $x \in \overline{D_{\mathcal{A}}}$ *avec* $y = x$.

(ii) Pour $x \in X$ *et pour* $t > 0$ *on a* $\int\limits_0^t e^{\mathcal{A}\tau}x d\tau \in D_{\mathcal{A}}$ *avec* $\mathcal{A}\int\limits_0^t e^{\mathcal{A}\tau}x d\tau = e^{\mathcal{A}t}x - x$.

(iii) Pour tout $x \in X$ *et* $0 \leq s < t$, *il s'ensuit aussi que* $\int\limits_s^t e^{\mathcal{A}\tau}x d\tau \in D_{\mathcal{A}}$ *et que*

$$\mathcal{A}\int\limits_s^t e^{\mathcal{A}\tau}x d\tau = e^{\mathcal{A}t}x - e^{\mathcal{A}s}x.$$

Preuve. Les propriétés (i) et (ii) sont établies dans [34]. Pour (iii) en utilise les points (iv) et (v) de la Proposition 1.1 de [34] p. 19, on trouve

$$\begin{aligned}\int_s^t e^{\mathcal{A}\tau} x d\tau &= \int_s^t (\lambda - \mathcal{A}) e^{\mathcal{A}\tau} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} x d\tau \\ &= \lambda \int_s^t e^{\mathcal{A}\tau} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} x d\tau - \int_s^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{\mathcal{A}\tau} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} x \right) d\tau,\end{aligned}$$

puisque

$$\int_s^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{\mathcal{A}\tau} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} x \right) d\tau = e^{\mathcal{A}t} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} x - e^{\mathcal{A}s} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} x,$$

donc

$$\int_s^t e^{\mathcal{A}\tau} x d\tau = \lambda (\lambda - \mathcal{A})^{-1} \int_s^t e^{\mathcal{A}\tau} x d\tau - (\lambda - \mathcal{A})^{-1} e^{\mathcal{A}t} x + (\lambda - \mathcal{A})^{-1} e^{\mathcal{A}s} x,$$

comme $\int_s^t e^{\mathcal{A}\tau} x d\tau \in D_{\mathcal{A}}$, il est alors possible d'appliquer $(\lambda - \mathcal{A})$ des deux côtés de la relation précédente, il vient donc

$$(\lambda - \mathcal{A}) \int_s^t e^{\mathcal{A}\tau} x d\tau = \lambda \int_s^t e^{\mathcal{A}\tau} x d\tau - e^{\mathcal{A}t} x + e^{\mathcal{A}s} x,$$

par conséquent $\mathcal{A} \int_s^t e^{\mathcal{A}\tau} x d\tau = e^{\mathcal{A}t} x - e^{\mathcal{A}s} x$.

1.4 Notions de base sur les espaces d'interpolation

Les définition et résultats de cette section sont issues de [18], [6], [27], [35], et [34]. Dans cette section on désigne par X_0, X_1 deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé X et on consédère les espaces de Banach suivants $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$ munis des normes

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1},$$

et

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{x = x_0 + x_1, \quad x_i \in E_i} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} \right).$$

Le couple $\{X_0, X_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.4.1 (Espace intermédiare) *Soit $\{X_0, X_1\}$ un couple d'interpolation. On appelle un espace intermédiare entre X_0 et X_1, tout espace X qui contient continûment l'intersection $X_0 \cap X_1$ et qui est continûment inclus dans la somme $X_0 + X_1$.*

Exemple 1.4.1 *Les espaces X_i, $i = 0, 1$ sont des espaces intermédiaires.*

Définition 1.4.2 (espace d'interpolation) *Soient $\theta \in \left]0, 1\right[$ et $p \in [1, +\infty]$. On appelle espace d'interpolation (ou espace de moyenne) entre X_0 et X_1 l'espace $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ définit par*

$$x \in (X_0, X_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} i)\ \forall t > 0, \exists u_i\,(t) \in X_i \quad (i = 0, 1) : x = u_0\,(t) + u_1\,(t) \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L^p_*\,(R_+, X_0)\,, \quad t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*\,(R_+, X_1) \end{cases}$$

où $L^p_*(X)$ désigne l'ensemble des fonctions f de $\left]0, \infty\right[$ dans X, fortement mesurables, telles que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \|f(t)\|^p_X \frac{dt}{t}$ soit finie.

Proposition 1.4.1 *Soient $p \in \left[1, +\infty\right[$ et $\theta \in \left]0, 1\right[$. Alors*

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_1, X_0)_{1-\theta,p}$$

Les espaces d'interpolation entre le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ et l'espace X, noté

$$(D(\mathcal{A}), X)_{\theta,p} := D_{\mathcal{A}}\,(1 - \theta, p)$$

offrent un cadre essentiel pour étudier l'existence et la régularité des solutions stricte de certains équations différentielles abstraites, à cet effet, on donne ici certain caractérisation de ces espaces d'interpolation, notamment si $\mathcal{A}$ génère un semi groupe analytique ou un C_0-semi groupe.

Théorème 1.4.1 (de Lions) *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in \left]0, 1\right[$. Si $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue noté $\left(e^{\mathcal{A}t}\right)_{t \geqslant 0}$, alors*

$$(D(\mathcal{A}), X)_{\theta,p} = \left\{x \in X : \left\|t^{\theta-1}\left(e^{\mathcal{A}t} - I\right)x\right\|_X \in L^p_*\right\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{(D(\mathcal{A}),X)_{\theta,p}} = \|x\|_X + \left(\int\limits_0^{+\infty} \left\|t^{\theta-1}\left(e^{\mathcal{A}t} - I\right)x\right\|^p_X \frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

est un espace de Banach, avec les modifications usuelles lorsque $p = \infty$.

Proposition 1.4.2 *Si $\mathcal{A}$ génère un semi groupe analytique, on défini*

$$D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty)=\left\{x\in X:\|x\|_{\theta}=\sup_{t>0}\left\|t^{1-\theta}\mathcal{A}e^{\mathcal{A}t}x\right\|<\infty\right\}$$

pour tout $\theta\in\left]0,1\right[$, cet espace muni de la norme

$$\|x\|_{D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty)}=\|x\|+\|x\|_{\theta}.$$

est un espace de Banach et le sous-espace $D_{\mathcal{A}}(\theta)$ de $D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty)$ défini par

$$D_{\mathcal{A}}(\theta)=\left\{x\in X:\lim_{t\to 0}t^{1-\theta}\mathcal{A}e^{\mathcal{A}t}x=0\right\}.$$

muni de la norme de $D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty)$ est aussi un espace de Banach.

Théorème 1.4.2 (Réitération) *Soient $p\in[1,+\infty]$, $\theta\in]0,1[$ et $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire fermé sur X, pour tout $m\in\mathbb{N}$ tels que $m\theta\notin\mathbb{N}$ on a*

$$D_{\mathcal{A}^m}(\theta,\ p)=D_{\mathcal{A}}(m\theta,\ p)$$

en particulier $m=2$, on a

$$D_{\mathcal{A}^2}(\theta,\ p)=D_{\mathcal{A}}(2\theta,\ p)\ si\ \theta\neq\frac{1}{2}.$$

Définition 1.4.3 *Pour tout $\theta\in\left]0,1\right[$, $p\in[1,+\infty]$ et $k\in\mathbb{N}$, on a*

$$D_{\mathcal{A}}(\theta+k,p)=\left\{x\in D(\mathcal{A}^k):\mathcal{A}^kx\in D_{\mathcal{A}}(\theta,p)\right\},$$

$$D_{\mathcal{A}}(\theta+k)=\left\{x\in D(\mathcal{A}^k):\mathcal{A}^kx\in D_{\mathcal{A}}(\theta)\right\},$$

avec la norme

$$\|x\|_{D_{\mathcal{A}}(\theta+k,p)}=\|x\|_X+\left\|\mathcal{A}^kx\right\|_{D_{\mathcal{A}}(\theta,p)}.$$

Remarque 1.4.1 *Si $\mathcal{A}$ génère un semi groupe analytique, alors*

$$D_{\mathcal{A}}(\theta+1,\infty)=\left\{x\in D(\mathcal{A}):\sup_{t>0}\left\|t^{1-\theta}\mathcal{A}e^{\mathcal{A}t}x\right\|<\infty\right\},$$

de la même manière, on trouve

$$D_{\mathcal{A}}(\theta+1)=\left\{x\in D(\mathcal{A}):\lim_{t\to 0}\left\|t^{1-\theta}\mathcal{A}e^{\mathcal{A}t}x\right\|=0\right\}$$

Proposition 1.4.3 *([34] page 24) Pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$, on a*

$$D(\mathcal{A}) \subset D_{\mathcal{A}}(\theta) \subset D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty) \subset \overline{D(\mathcal{A})}.$$

Proposition 1.4.4 ([34] pages 23-26) *Soit $\mathcal{A} \in Sect(\theta)$ vérifie*

$$\begin{aligned} X_0 &= \overline{D_{\mathcal{A}}} \text{ (avec la norme de } X\text{)} \\ D_{\mathcal{A}_0} &= \left\{ x \in D_{\mathcal{A}},\ \mathcal{A}x \in \overline{D_{\mathcal{A}}} \right\} \\ \mathcal{A}_0 &: D_{\mathcal{A}_0} \subset X_0 \to X_0 \\ \mathcal{A}_0 x &= \mathcal{A}x \quad \text{pour } x \in D_{\mathcal{A}_0} \end{aligned}$$

Alors, l'opérateur $\mathcal{A}_0$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné $t \to e^{\mathcal{A}_0 t}$ dans X_0 qui est fortement continue pour $t \geq 0$. De plus, on a $e^{\mathcal{A}_0 t}x = e^{\mathcal{A}t}x$ pour $t \geq 0$ et $x \in \overline{D_{\mathcal{A}}}$. En plus, on a

$$D_{\mathcal{A}_0}(\theta,\infty) = D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty) \text{ et } D_{\mathcal{A}_0}(\theta) = D_{\mathcal{A}}(\theta)$$

Si on note $\overline{D}^{\theta}_{\mathcal{A}_0}$ la fermeture de $D_{\mathcal{A}_0}$ dans $D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty)$, alors on a $\overline{D}^{\theta}_{\mathcal{A}_0} = D_{\mathcal{A}}(\theta)$.

Proposition 1.4.5 ([34] page 27) *Soit $\theta \in \left]0,1\right[$. L'espace $D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty)$ est invariant par $\mathcal{A}^n e^{\mathcal{A}t}$ et $R(\lambda,\mathcal{A})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ en plus on a*

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}^n e^{\mathcal{A}t} \right\|_{\mathcal{L}(D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty))} &\leq \left\| \mathcal{A}^n e^{\mathcal{A}t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \left\| R(\lambda,\mathcal{A}) \right\|_{\mathcal{L}(D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty))} &\leq \left\| R(\lambda,\mathcal{A}) \right\|_{\mathcal{L}(X)}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.6 ([34] page 29) *Si $x \in X$, alors on a les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned} x \in D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty) &\Longleftrightarrow \|x\|^*_\theta = \sup_{t>0} \frac{\left\| e^{\mathcal{A}t}x - x \right\|}{t^\theta} < \infty \\ x \in D_{\mathcal{A}}(\theta,\infty) &\Longleftrightarrow \|x\|^{**}_\theta = \sup_{t>0} \left\| t^{2-\theta} \mathcal{A}^2 e^{\mathcal{A}t} x \right\| < \infty. \end{aligned}$$

1.5 Puissances fractionnaires d'opérateurs sectoriels

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La question naturelle est de savoir, sous quelle conditions sur l'opérateur $\mathcal{A}$ (souvent $\mathcal{A} \in Sect(\theta)$ injectif avec $\theta \in \left]0,\pi\right[$), on peut définir la puissance fractionnaire $\mathcal{A}^\alpha$

cette dernière dépend du signe de la partie réelle de α , par exemple si $\operatorname{Re}\alpha > 0$, elle est définie directement par le calcul fonctionnel holomorphe

$$\mathcal{A}^{\alpha} = (z^{\alpha})(\mathcal{A})$$

où z^{α} désigne la détermination principale de la fonction "puissance α " caractérisée par

$$z^{\alpha} = e^{\alpha(\ln r + i\theta)} \text{ si } z = re^{i\theta},\ r > 0\ ,\ \theta \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

et lorsque $\operatorname{Re}\alpha < 0$, elle est définie via l'inverse de la puissance positive correspondante, à savoir

$$\mathcal{A}^{\alpha} = \left(\mathcal{A}^{-\alpha}\right)^{-1}$$

ce qui nécessite que $\mathcal{A}$ soit inversible pour que cette définition soit bien posée.

Proposition 1.5.1 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, on a les proprités suivante*

1) $\mathcal{A}^{\alpha}$ est un opérateur fermé de X.

2) $\mathcal{A}^{\alpha+\beta} = \mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{A}^{\beta} = \mathcal{A}^{\beta}\mathcal{A}^{\alpha}$.

3) Si $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha$, alors $D\left(\mathcal{A}^{\beta}\right) \subset D\left(\mathcal{A}^{\alpha}\right)$ et en particulier si $\operatorname{Re}\alpha < 1$, alors

$$D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A}^{\alpha}).$$

4) Si $\mathcal{A}$ est injective alors $\mathcal{A}^{\alpha}$ l'est aussi et $(\mathcal{A}^{-1})^{\alpha} = (\mathcal{A}^{\alpha})^{-1}$.

5) Si $\mathcal{A}$ inversible alors $0 \in \rho(\mathcal{A}^{\alpha})$.

6) Si $\mathcal{A}$ est borné alors $\mathcal{A}^{\alpha} \in \mathcal{L}(X)$. Si de plus $\mathcal{A}$ admet un inverse borné alors, pour $\operatorname{Re}\alpha > 0$,

$$\left(\mathcal{A}^{-1}\right)^{\alpha} = \mathcal{A}^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X).$$

la proposition suivante donne les propriété de $\mathcal{A}^{\alpha}$ avec partie réelle quelconque.

Proposition 1.5.2 *On considère $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et on suppose que $\mathcal{A}$ est injectif. Alors*

1) $\mathcal{A}^{\alpha}$ est un opérateur fermé de X.

2) $\mathcal{A}^{\alpha}$ est injectif et $(\mathcal{A}^{\alpha})^{-1} = \mathcal{A}^{-\alpha} = (\mathcal{A}^{-1})^{\alpha}$.

3) $\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{A}^{\beta}$ est un prolongement de $\mathcal{A}^{\alpha+\beta}$ i.e, $\mathcal{A}^{\alpha+\beta} \subset \mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{A}^{\beta}$.

1.6 Notions fondamentales sur les espaces fonctionnels

Dans toute cette partie $(X, \|.\|_X)$ est un espace de Banach (réel ou complexe), Ω est un ouvert non vide $\mathbb{R}^n$ de (non nécessairment borné) et $k \in \mathbb{N}$. Pour un multi-indice $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, on note

$$\partial^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} \text{ et } |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

- L'ensemble $C^k(\Omega; X)$ désigne l'espace des fonctions, de Ω à valeurs vectorielles dans X, possédant des dérivées continues jusqu'à l'ordre k. En d'autres termes pour tout β, $|\beta| \leq k$, la fonction $x \to \partial^\beta f(x)$ existe et est continue.
- $C_b^k(\Omega; X)$ est le sous espace vectoriel de $C^k(\Omega; X)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées sur Ω, cet espace muni de la norme

$$\|f\|_{C_b^k(\Omega, X)} = \sum_{|\beta| \leqslant k} \sup_{x \in \Omega} \left\|\partial^\beta f(x)\right\|_X,$$

  est un espace de Banach. Dans le cas où $X = \mathbb{C}$, on écrit simplement $C_b^k(\Omega)$.
- L'espace $BUC^k(\Omega; X)$: désigne l'espace vectoriel des éléments de $C^k(\Omega; E)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont uniformément continues et bornées sur Ω. Il est muni de la norme naturelle

$$\|f\|_{BUC^k(\Omega; X)} = \sum_{|\beta| \leqslant k} \sup_{x \in \Omega} \left\|\partial^\beta f(x)\right\|_X,$$

  Avec cette norme, $BUC^k(\Omega; X)$ devient un espace de Banach.

On complète maintenant l'étude des espaces fonctionnels avec **les espaces de Hölder** $C^\alpha(\Omega; X)$, avec $0 < \alpha < 1$. pour plus d'infomation voir [17].

- $C^\alpha(\Omega; X)$ désigne l'ensemble des fonctions α-Hölderiennes de Ω dans X, c'est-à-dire l'espace des fonction $f : \Omega \to X$ pour lesquelles, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $x, y \in \Omega$ on a

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq C \|x - y\|_2^\alpha$$

  où $\|.\|_2$ désigne la norme euclidienne. On munit cet espace de la norme de Hölder suivante

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_X + \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \Omega}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_X}{\|x - y\|_2^\alpha} = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$$

ce qui en fait un espace de Banach. Par ailleurs, si $\alpha \geq \beta$, alors l'espace $C^{\alpha}(\Omega; X)$ est inclus dans $C^{\beta}(\Omega; X)$ avec injection continue. En effet, toute fonction $\alpha-$Hölderienne est également $\beta-$Hölderienne, et sa norme en C^{β} peut être contrôlée par sa norme en C^{α}. Si en plus Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha > \beta$, alors l'inclusion $C^{\alpha}(\Omega; X) \subset C^{\beta}(\Omega; X)$ est compacte. Autrement dit, toute suite bornée dans $C^{\alpha}(\Omega; X)$ possède une sous-suite convergente dans $C^{\beta}(\Omega; X)$ voir [36].

- L'espace $BUC^{\alpha}(\Omega; X)$, désigne l'ensemble des fonctions bornées et α-Hölderiennes de Ω dans X, c'est-à-dire l'espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow X$ telles que

$$\begin{cases} \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|_X < \infty \\ \exists C > 0 : \forall x, y \in \Omega \quad \|f(x) - f(y)\|_X \leq C \|x - y\|_2^{\alpha}. \end{cases}$$

cet espace muni de la norme $\|f\|_{\alpha} = \|f\|_{\infty} + [f]_{\alpha}$, est un espace de Banach.

- Les espaces $h^{\alpha}(\Omega; X)$ appelés espaces de petit Hölder, sont des sous espaces de $C^{\alpha}(\Omega; X)$ définis par

$$h^{\alpha}(\Omega; X) = \left\{ f \in C^{\alpha}(\Omega; X) : \lim_{\delta\to 0} \sup_{0<\|x-y\|_2\leq\delta} \frac{\|f(x) - f(y)\|_X}{\|x - y\|_2^{\alpha}} = 0 \right\}.$$

Muni de la norme induite (héritée) de $C^{\alpha}(\Omega; X)$, cet espace est un espace de Banach.

1.7 Sommes d'opérateurs linéaires de Da Prato et Grisvard

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux opérateurs linéaires fermés dans l'espace de Banach X, de domaine $D(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{B})$ respectivement, $\rho(\mathcal{A})$ et $\rho(\mathcal{B})$ leurs ensembles résolvants non vides. Da Prato et Grisvard se sont intéressés à la résolution de l'équation opérationnelle suivante

$$\mathcal{A}u + \mathcal{B}u - \lambda u = f. \tag{1.7.1}$$

où $\lambda > 0$ et $f \in X$. Leur approche repose sur la construction de l'inverse de $\mathcal{A}+\mathcal{B}-\lambda I$ sous des hypothèses sur les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

(H.DG.1) Il existe des constantes positives $C_{\mathcal{A}}$, $C_{\mathcal{B}}$, et des angles $\theta_{\mathcal{A}}, \theta_{\mathcal{B}} \in]0, \pi[$ tels que

- Le résolvant de $\mathcal{A}$ contient un secteur $S_{\theta_{\mathcal{A}}} = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg(z)| < \pi - \theta_{\mathcal{A}}\}$ et pour tout $z \in S_{\theta_{\mathcal{A}}}$

$$\left\|(\mathcal{A} - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C_{\mathcal{A}}}{|z|}.$$

- Le résolvant de $\mathcal{B}$ contient un secteur $S_{\theta_{\mathcal{B}}}$ et pour tout $z \in S_{\theta_{\mathcal{B}}}$

$$\left\|(\mathcal{B}-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C_{\mathcal{B}}}{|z|}.$$

- La sommes des angles satisfait $\theta_{\mathcal{A}}+\theta_{\mathcal{B}}<\pi$.
- La sommes des domaine est dense dans X i.e, $\overline{D(\mathcal{A})+D(\mathcal{B})}=X$.

(H.DG.2) les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ commutent au sens des résolvantes

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}(\mathcal{B}-\mu I)^{-1}=(\mathcal{B}-\mu I)^{-1}(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}$$

pour tout $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ et tout $\mu \in \rho(\mathcal{B})$.

Ces auteurs ont montré (voir [6]), sous ces hypothèses et pour $f \in D_{\mathcal{A}}(\alpha,p)+D_{\mathcal{B}}(\alpha,p)$, où $\alpha \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty]$ que l'équation (1.7.1) admet une solution stricte et unique u donnée explicitement par l'intégrale de Dunford

$$u=(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\lambda I)^{-1}f=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_\lambda}(\mathcal{B}+zI)^{-1}(\mathcal{A}-\lambda-zI)^{-1}f\,dz$$

ou γ_λ est une courbe simple orientée de $\infty e^{-i\theta_0}$ à $\infty e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]\theta_{\mathcal{B}},\pi-\theta_{\mathcal{A}}[$, demeurant dans $S_{\theta_{\mathcal{A}-\lambda}} \cap S_{\theta_{-\mathcal{B}}}$. De plus, cette solution a la régularité suivate

$$\mathcal{A}u,\ \mathcal{B}u \in D_{\mathcal{A}}(\alpha,p)\ \text{(respectivement } D_{\mathcal{B}}(\alpha,p)\text{)}.$$

Chapitre 2

Préliminaires et lemmes techniques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques lemmes techniques fondamentaux, qui seront utilisés dans les chapitres suivants pour l'étude de la continuité et de la régularité Höldérienne des différentes composantes apparaissant dans les représentations de la solution.
On considère $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé satisfait l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \rho(\mathcal{A}) \supset [0,+\infty[\text{ et il existe } C>0 \text{ tel que} \\ \forall\lambda \in [0,+\infty[: \left\|(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C}{1+\lambda} \end{cases} \tag{H.1}$$

et que $\mathcal{B} := -\sqrt{-\mathcal{A}}$. Dans les preuves de certains lemmes techniques on va utliser le fait que la fonction $x \to |x|^{2\alpha}$ est $2\alpha-$Höldérienne c'est à dire il existe une constante positive C telle que

$$\left||x|^{2\alpha} - |y|^{2\alpha}\right| \leq C\,|x-y|^{2\alpha}\,.$$

Lemme 2.0.1 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur satisfaisant l'hypothèse $(H.1)$. Alors, pour tout $\varphi \in D(\mathcal{B})$, on a*

1) $x \mapsto \mathcal{B}e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\varphi$, $x \mapsto \mathcal{B}e^{x\mathcal{B}}\varphi \in C([0,\delta],E)$ si et seulement si $\mathcal{B}\varphi \in \overline{D(\mathcal{A})}$.

2) $x \mapsto \mathcal{B}e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\varphi$, $x \mapsto \mathcal{B}e^{x\mathcal{B}}\varphi \in C^{2\alpha}([0,\delta],E)$ si et seulement si

$$\varphi \in D_{\mathcal{A}}(1/2+\alpha,+\infty).$$

Preuve. En appliquant le résultat de Sinestrari [34, Theorem 3.1 et Remark page 39], puis en utilisant le fait que $\overline{D(\mathcal{B})} := \overline{D(\mathcal{A})}$ avec ce résultat de réitération

$$D_{\mathcal{B}}(1+2\alpha,+\infty) = D_{\mathcal{B}^2}(\frac{1}{2}\,(1+2\alpha)\,,+\infty) = D_{\mathcal{A}}(1/2+\alpha,+\infty).$$

Lemme 2.0.2 *Si $\mathcal{A}$ vérifie l'hypothèse $(H.1)$ et $g_\delta^+ \in C^{2\alpha}([0,\delta];E)$, alors*

$$x \mapsto e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(x) - g_\delta^+(\delta)\right) \in C^{2\alpha}([0,\delta];E).$$

Preuve. Pour tout $0 \leq s < x \leq \delta$, on écrit

$$e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right) - e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(x) - g_\delta^+(\delta)\right) := J_1(x,s) + J_2(x,s)$$

où

$$J_1(x,s) = e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(x)\right)$$

et

$$\begin{aligned} J_2(x,s) &= \left(e^{(\delta-s)\mathcal{B}} - e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\right)\left(g_\delta^+(x) - g_\delta^+(\delta)\right) \\ &= \mathcal{B}\int_{\delta-s}^{\delta-x} e^{\tau\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(x) - g_\delta^+(\delta)\right) d\tau. \end{aligned}$$

Les estimations de semi groupe et l'höldérianité de g_δ^+, montre que

$$\|J_1(x,s)\| \leq M_0(x-s)^{2\alpha}\left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha},$$

et que

$$\begin{aligned} \|J_2(x,s)\| &\leq M_1.\left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha}\int_{\delta-s}^{\delta-x}\frac{d\tau}{\tau}(\delta-x)^{2\alpha} \leq M_1.\left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha}\int_{\delta-x}^{\delta-s}\frac{d\tau}{\tau^{1-2\alpha}} \\ &\leq M_1.(x-s)^{2\alpha}\left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha}, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'höldérianité de $x \mapsto e^{x\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(x) - g_\delta^+(\delta)\right)$ sur $[0,\delta]$.

Lemme 2.0.3 *Soit $\mathcal{A}$ vérifiant $(H.1)$. Alors on a les propriétes suivantes*

1. Pour tout $\varphi \in \overline{D(\mathcal{A})}$, la fonction $x \mapsto e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi$ est uniformément continue et bornée sur $]-\infty,0]$ c'est-à-dire

$$x \mapsto e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi \in BUC(]-\infty,0];E),$$

2. En plus, si $\varphi \in D_{\mathcal{A}}(\alpha,+\infty)$, alors la fonction $x \mapsto e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi$ est 2α-Hölderienne, bornée et uniformément continue sur $]-\infty,0]$ c'est à dire

$$x \mapsto e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi \in BUC^{2\alpha}(]-\infty,0];E),$$

3. Pour tout $\varphi \in D(\mathcal{A})$, tel que $\mathcal{A}\varphi \in \overline{D(\mathcal{A})}$, on a

$$x \mapsto \mathcal{A}\left(e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi\right) \in BUC\left(\left]-\infty, 0\right]; E\right),$$

4. En plus si $\varphi \in D(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}\varphi \in D_{\mathcal{A}}(\alpha, +\infty)$, on trouve que

$$x \mapsto \mathcal{A}\left(e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi\right) \in BUC^{2\alpha}\left(\left]-\infty, 0\right]; E\right).$$

Preuve. 1. Soient $x \in \left]-\infty, -1\right]$ et $h > 0$. On sait que

$$\left(e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi\right) - \left(e^{-(x-h)\mathcal{B}}\varphi - \varphi\right) = \mathcal{B}\int_{x-h}^{x} e^{-s\mathcal{B}}\varphi ds$$

donc

$$\left\|\mathcal{B}\int_{x-h}^{x} e^{-s\mathcal{B}}\varphi ds\right\|_E \leq M_1 \int_{x-h}^{x} \frac{e^{-as}ds}{s} \|\varphi\|_E \leq M_1 \int_{x-h}^{x} ds \|\varphi\|_E \leq M_1 h \|\varphi\|_E.$$

Ainsi, la fonction $x \to e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi$ est lipschitzienne sur l'intervalle $\left]-\infty, -1\right]$ et par conséquent, elle est uniformément continue sur $\left]-\infty, -1\right]$. C'est-à-dire, pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout (x, y) appartient à $\left]-\infty, -1\right]^2$ il existe $\eta_1 > 0$, tel que $|x - y| \leq \eta_1$, alors

$$\left\|e^{-x\mathcal{B}}\varphi - e^{-y\mathcal{B}}\varphi\right\|_E \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

D'autre part, sur le segment $[-1, 0]$, et lorsque $\varphi \in \overline{D(\mathcal{B})} = \overline{D(\mathcal{A})}$, on sait que la fonction

$$x \mapsto e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi$$

est continue (elle est continue sur un compact), par conséquent, elle est uniformément continue, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $(x, y) \in [-1, 0]^2$, il existe $\eta_2 > 0$, tels que $|x - y| \leq \eta_2$, alors

$$\left\|e^{-x\mathcal{B}}\varphi - e^{-y\mathcal{B}}\varphi\right\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, il s'ensuit que $x \to e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi$ est uniformément continue sur $\left]-\infty, 0\right]$.
En effet, soit $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $x, y \in \left]-\infty, 0\right]$ il existe

$$\eta \in \{\eta_1, \eta_2, \inf(\eta_1, \eta_2)\} > 0,$$

tel que $|x-y| \leq \eta$, alors

$$\left\|e^{-x\mathcal{B}}\varphi - e^{-y\mathcal{B}}\varphi\right\|_E \leq \varepsilon.$$

Si on prend comme exemple le cas $x \leq -1 \leq y \leq 0$, donc on peut ecrire $|x-y|$ sous la forme

$$|x-y| = |(x-(-1)) - (y-(-1))|,$$

on en déduit que

$$|x-y| \geq |x-(-1)| \text{ et } |x-y| \geq |y-(-1)|,$$

dans ce cas, il suffit de prendre $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$ satisfait $|x-y| \leq \eta$, puisque

$$|x-(-1)| \leq |x-y| \leq \eta \leq \eta_1 \text{ et } |y-(-1)| \leq |x-y| \leq \eta \leq \eta_2,$$

alors

$$\left\|e^{-x\mathcal{B}}\varphi - e^{-y\mathcal{B}}\varphi\right\|_E \leq \left\|e^{-y\mathcal{B}}\varphi - e^{-\mathcal{B}}\varphi\right\|_E + \left\|e^{-\mathcal{B}}\varphi - e^{-x\mathcal{B}}\varphi\right\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En conclusion, la fonction $x \to e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi$ est uniformément continue sur $]-\infty, 0]$ lorsque $\varphi \in \overline{D(\mathcal{A})}$. Cependant, il est clair que la fonction $x \to e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi$ est bornée, puisque pour tout $x \in]-\infty, 0]$ on a

$$\left\|e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi\right\|_E \leq (M_0 + 1)\|\varphi\|_E$$

ce qui signifie que, la fonction $x \to e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi \in BUC(-\infty, 0; E)$.

2) Soit maintenant $\varphi \in D_{\mathcal{A}}(\alpha, \infty)$. Selon le théorème de réitération

$$D_{\mathcal{A}}(\alpha, +\infty) = D_{\sqrt{-\mathcal{A}}}(2\alpha, +\infty) = D_{\mathcal{B}}(2\alpha, +\infty),$$

il s'ensuit que $\varphi \in D_{\mathcal{A}}(\alpha, \infty)$, si et seulement si

$$\sup_{t>0} \left\|t^{1-2\alpha}\mathcal{B}e^{\mathcal{B}t}\varphi\right\| < \infty.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, 0]$, on a

$$\begin{aligned}\left\|\left(e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi\right) - \left(e^{-(x-h)\mathcal{B}}\varphi - \varphi\right)\right\| &\leq \int_{x-h}^{x} \frac{1}{s^{1-2\alpha}} \left\|s^{1-2\alpha}\mathcal{B}e^{-s\mathcal{B}}\varphi\right\| ds \\ &\leq \|\varphi\|_{2\alpha} \int_{x-h}^{x} \frac{ds}{s^{1-2\alpha}},\end{aligned}$$

et comme

$$\left| \int\limits_{x-h}^{x} \frac{ds}{s^{1-2\alpha}} \right| = \left| x^{2\alpha} - (x-h)^{2\alpha} \right| \leq \left| x - (x-h) \right|^{2\alpha}$$

par conséquent, on trouve

$$\left\| \left(e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi \right) - \left(e^{-(x-h)\mathcal{B}}\varphi - \varphi \right) \right\|_E \leq \frac{1}{2\alpha}.h^{2\alpha}. \left\| \varphi \right\|_{2\alpha}.$$

Ce qui montre que $x \to e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi \in BUC^{2\alpha}\left( ]-\infty, 0] ; E \right).$

Pour les points 3) et 4), et puisque $\varphi \in D(\mathcal{A})$ donc $e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi \in D(\mathcal{A})$, et comme $D\left(\mathcal{A} \right) = D\left(\mathcal{B}^2 \right)$, alors

$$\mathcal{B}^2 \left(e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \varphi \right) = e^{-x\mathcal{B}}\mathcal{B}^2\varphi - \mathcal{B}^2\varphi = \mathcal{A}\varphi - \mathcal{A}e^{-x\mathcal{B}}\varphi.$$

D'après le premier point, il s'ensuit que

$$x \to -\mathcal{A}e^{-x\mathcal{B}}\varphi + \mathcal{A}\varphi \in BUC\left( ]-\infty, 0] ; E \right)$$

lorsque $\mathcal{A}\varphi \in \overline{D(\mathcal{A})}$. On fait aussi appel au deuxième point et le fait que $\mathcal{A}\varphi \in D_{\mathcal{A}}(\alpha, +\infty)$, pour deduire que

$$x \mapsto -\mathcal{A}e^{-x\mathcal{B}}\varphi + \mathcal{A}\varphi \in BUC^{2\alpha}\left( ]-\infty, 0] ; E \right).$$

Lemme 2.0.4 *Soit $\mathcal{A}$ vérifiant l'hypothèse $(H.1)$. Pour toute fonction $g_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left([0, \delta] ; E \right)$ avec $0 < 2\alpha < 1$, on a*

1. $x \longmapsto \mathcal{B} \int\limits_0^x e^{(x-s)\mathcal{B}} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0) \right) ds \in C^{2\alpha}\left([0, \delta] ; E \right),$
2. $x \longmapsto \mathcal{B} \int\limits_x^\delta e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(x) \right) ds \in C^{2\alpha}\left([0, \delta] ; E \right).$

Preuve. La continuité de Hölder de la première application est assurée par Sinestrari [34]. Pour la seconde application, on peut l'obtenir en procédant de manière analogue à la démonstration de Sinestrari. En effet, pour $x \in [0, \delta]$, on note $g_\delta^+(\delta - x) := h_+(x)$ et $y := \delta - x \in [0, \delta]$, donc

$$\begin{aligned} \int\limits_x^\delta e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(x) \right) ds &= \int\limits_0^{\delta - x} e^{(\delta - x - t)\mathcal{B}} \left(g_\delta^+(\delta - t) - g_\delta^+(x) \right) dt \\ &= \int\limits_0^y e^{(y-t)\mathcal{B}} \left(h_+(t) - h_+(y) \right) dt := w^\delta(y). \end{aligned}$$

Il résulte de ce qui précède que $w^{\delta}(y) \in D(\mathcal{B})$ (losque $y = 0$ est évident) pour tout $y \in [0, \delta]$. De plus, on a

$$\left\|\mathcal{B}w^{\delta}(y)\right\|_E \leq M_1 \left(\int_0^y (y-t)^{2\alpha-1} \, dt \right) \|h_+\|_{2\alpha} \leq M_1 \frac{y^{2\alpha}}{2\alpha} \left\|h_+^{\delta}\right\|_{2\alpha},$$

donc

$$\left\| \int_x^{\delta} \mathcal{B}e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g_{\delta}^{+}(s) - g_{\delta}^{+}(x)\right) ds \right\|_E \leq M_1 \frac{\delta^{2\alpha}}{2\alpha} \left\|g_{\delta}^{+}\right\|_{2\alpha},$$

Ainsi, il reste à prouver que $\mathcal{B}w^{\delta} \in C^{2\alpha}([0,\delta]; E)$. En effet, pour tout $h > 0$, et $0 \leq y < y + h < \delta$, on a

$$\begin{aligned}
&w^{\delta}(y+h) - w^{\delta}(y) \\
&= \int_0^{y+h} e^{(y+h-t)\mathcal{B}} \left(h_+(t) - h_+(y+h)\right) dt - \int_0^{y} e^{(y-t)\mathcal{B}} \left(h_+(t) - h_+(h)\right) dt \\
&= w_1^{\delta}(y) + w_2^{\delta}(y) + w_3^{\delta}(y),
\end{aligned}$$

où

$$w_1^{\delta}(y) = \int_0^y \left(e^{(y+h-t)\mathcal{B}} - e^{(y-t)\mathcal{B}}\right) \left(h_+(t) - h_+(h)\right) dt,$$

$$w_2^{\delta}(y) = -\int_0^y e^{(y+h-t)\mathcal{B}} \left(h_+(y+h) - h_+(h)\right) dt,$$

et

$$w_3^{\delta}(y) = \int_y^{y+h} e^{(y+h-t)\mathcal{B}} \left(h_+(t) - h_+(y+h)\right) dt.$$

Concernant la première fonction, on peut écrire

$$\mathcal{B}\left(e^{(y+h-t)\mathcal{B}} - e^{(y-t)\mathcal{B}}\right) \left(h_+(t) - h_+(y)\right) = \int_{y-t}^{y+h-t} \mathcal{B}^2 e^{\tau\mathcal{B}} \left(h_+(t) - h_+(y)\right) d\tau$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{B}w_1^{\delta}(x)\right\| &\leq |y-t|^{2\alpha} \left\| \int_{y-t}^{y+h-t} \mathcal{B}^2 e^{\tau\mathcal{B}} d\tau \right\| \|h_+\|_{2\alpha} \\
&\leq M_2 (y-t)^{2\alpha} \left| \int_{y-t}^{y+h-t} \frac{d\tau}{\tau^2} \right| \|h_+\|_{2\alpha} \\
&\leq M_2 (y-t)^{2\alpha-1} (y+h-t)^{-1} h \, \|h_+\|_{2\alpha}
\end{aligned}$$

Par ce changement de variable $y-t=h\tau$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{B}w_1^\delta(x)\right\| &\leq M_2.h^{2\alpha}.\left\|h_+\right\|_{2\alpha}.\int_0^\infty \tau^{2\alpha-1}\left(\tau+1\right)^{-1}d\tau\\ &\leq C.M_2.h^{2\alpha}.\left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha}.\end{aligned}$$

grâce à la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^\infty \tau^{2\alpha-1}\left(\tau+1\right)^{-1}d\tau$.

Pour la seconde fonction, en utilisant ce changement $y+h-t=s$, $ds=-dt$, et le fait que

$$\int_0^y e^{(y+h-t)\mathcal{B}}dt=\int_h^{y+h} e^{s.\mathcal{B}}ds,$$

pour prouver que

$$\mathcal{B}w_2^\delta(y)=-e^{(x+h)\mathcal{B}}\left(h_+(y+h)-h_+(h)\right)+e^{h.\mathcal{B}}\left(h_+(y+h)-h_+(h)\right),$$

donc

$$\left\|\mathcal{B}w_2^\delta(y)\right\|\leq 2M_0.h^{2\alpha}.\left\|h_+\right\|_{2\alpha}\leq 2M_0.h^{2\alpha}.\left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha}.$$

Par ailleurs, pour tout $t\in[y,y+h]$ on a

$$\left\|\mathcal{B}e^{(y+h-t)\mathcal{B}}\left(h_+(t)-h_+(y+h)\right)\right\|\leq M_1.\left(y+h-t\right)^{2\alpha-1}.\left\|h_+\right\|_{2\alpha},$$

donc

$$\left\|\mathcal{B}w_3^\delta(y)\right\|\leq M_1.\left\|h_+\right\|_{2\alpha}.\int_y^{y+h}\left(y+h-t\right)^{2\alpha-1}dt\leq M_1.\frac{h^{2\alpha}}{2\alpha}.\left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha},$$

on en déduit que

$$\left\|\mathcal{B}w^\delta\left(y+h\right)-\mathcal{B}w^\delta\left(y\right)\right\|\leq\left(C.M_2+2M_0+\frac{M_1}{2\alpha}\right).h^{2\alpha}.\left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha},$$

et par conséquent $\mathcal{B}w^\delta\in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right)$ en plus, on a

$$\left\|\mathcal{B}w^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}\leq\left(C.M_2+2M_0+\frac{M_1}{2\alpha}\right).\left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha}.$$

Lemme 2.0.5 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur vérifiant l'hypothèse $(H.1)$. Pour toute fonction $g^-\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)$ avec $0<2\alpha<1$, on a*

1.$x\longmapsto\mathcal{B}\int_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-\left(s\right)ds\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)$,

2.$x\longmapsto\mathcal{B}\int_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}}\left(g^-(s)-g^-(x)\right)ds\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)$.

Preuve 1. On vérifie que l'intégrale est bien définie, lorsque $x \in \left]-\infty, 0\right]$, en effet

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^{-}(s)\, ds \right\|_E &\leq M_0 \int_{-\infty}^{x} e^{-a(x-s)} ds \max_{s \in]-\infty, 0]} \left\| g^{-}(s) \right\| \\
&\leq M_0 \left[\frac{e^{-a(x-s)}}{a} \right]_{-\infty}^{x} \left\| g^{-} \right\|_{2\alpha} \\
&\leq \frac{M_0}{a} \left\| g^{-} \right\|_{2\alpha},
\end{aligned}$$

Étant donné que g^{-} est uniformément continue sur $]-\infty, 0]$, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in]-\infty, 0]$, si $|y - x| \leq \eta$, alors

$$\left\| g^{-}(y) - g^{-}(x) \right\|_E \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in]-\infty, 0]$, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^{-}(s)\, ds &= \int_{-\infty}^{x-1} \mathcal{B} e^{(x-s)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) ds \\
&+ \int_{x-1}^{x} \mathcal{B} e^{(x-s)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) ds \\
&+ \int_{-\infty}^{x} \mathcal{B} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^{-}(x)\, ds \\
&:= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x).
\end{aligned}$$

Pour le premier (puisque $s \leq x - 1$ donc $(x-s)^{2\alpha-1} \leq 1$), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| I_1(x) \right\|_E &= \left\| \int_{-\infty}^{x-1} \mathcal{B} e^{(x-s)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) ds \right\| \\
&\leq M_1 \int_{-\infty}^{x-1} \frac{1}{x-s} e^{-a(x-s)} (x-s)^{2\alpha} \left\| g^{-} \right\|_{2\alpha} \\
&\leq M_1 \int_{-\infty}^{x-1} e^{-a(x-s)\mathcal{B}} ds \left\| g^{-} \right\|_{BUC^{2\alpha}} (-\infty, 0; E) \\
&\leq M_1 \int_{-\infty}^{x-1} e^{-a(x-s)\mathcal{B}} ds \left\| g^{-} \right\|_{2\alpha} \leq \frac{M_1}{a}. \left\| g^{-} \right\|_{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Pour le second cas, on a

$$\begin{aligned}
\|I_2(x)\|_E &\leq \int\limits_{x-1}^{x} \left\|\mathcal{B}e^{(x-s)\mathcal{B}}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \left\|g^-(s)-g^-(x)\right\|_E ds \\
&\leq M_1 \int\limits_{x-1}^{x} (x-s)^{2\alpha-1} ds \left\|g^-\right\|_{2\alpha} \\
&\leq \frac{M_1}{2\alpha}\left[-(x-s)^{2\alpha}\right]_{x-1}^{x} \left\|g^-\right\|_{2\alpha} \\
&\leq \frac{M_1}{2\alpha}\left\|g^-\right\|_{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Pour le dernier, il est clair que

$$I_3(x) = \lim_{r\to+\infty} \mathcal{B}\int\limits_{-r}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^-(x)\, ds,$$

et que

$$\mathcal{B}\int\limits_{-r}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^-(x)\, ds = \left(e^{(x+r)\mathcal{B}} - I\right) g^-(x),$$

cependant

$$\left\|e^{(x+r)\mathcal{B}} g^-(x)\right\|_E \leq M_0 e^{-a(x+r)} \left\|g^-\right\|_{2\alpha},$$

lorsque r tend vers l'infini, ce dernier tend vers 0, donc $I_3(x) = -g^-(x)$, et par conséquent

$$\|I_3(x)\|_E = \left\|-g^-(x)\right\|_E \leq \left\|g^-\right\|_{2\alpha}.$$

En conclusion,

$$\left\|\mathcal{B}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^-(s)\, ds\right\| \leq \left(\frac{M_1}{a} + \frac{M_1}{2\alpha} + 1\right) \left\|g^-\right\|_{2\alpha},$$

cela montre que $x \to \mathcal{B}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^-(s)\, ds$ est bornée. Il reste à prouver qu'elle est uniformément Hölder continue. Soit maintenant $x, y \in]-\infty, 0]$ avec $x < y$, et on note $\zeta = y - x > 0$. On peut alors écrire cette différence sous la forme

$$\mathcal{B}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{(y-s)\mathcal{B}} g^-(s)\, ds - \mathcal{B}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^-(s)\, ds = \sum_{i=1}^{5} I_i(\zeta, x, y)$$

telles que les fonctions $I_i(\zeta, x, y)$ sont définies comme suit

$$I_1(\zeta, x, y) = \mathcal{B} \int\limits_{-\infty}^{x-\zeta} \left(e^{(y-s)\mathcal{B}} - e^{(x-s)\mathcal{B}}\right)\left(g^-(s) - g^-(x)\right) ds,$$

$$I_2(\zeta, x, y) = \mathcal{B} \int\limits_{x-\zeta}^{x} \left(e^{(y-s)\mathcal{B}} - e^{(x-s)\mathcal{B}}\right)\left(g^-(s) - g^-(x)\right) ds,$$

$$I_3(x, y) = \mathcal{B} \int\limits_{x}^{y} e^{(y-s)\mathcal{B}} \left(g^-(s) - g^-(y)\right) ds,$$

$$I_4(x, y) = \mathcal{B} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(e^{(y-s)\mathcal{B}} - e^{(x-s)\mathcal{B}}\right) g^-(x)\, ds,$$

et $I_5(x, y) = \mathcal{B} \int\limits_{x}^{y} e^{(y-s)\mathcal{B}} g^-(y)\, ds$.
l'étude de la première fonction donne

$$\left\| I_1(\zeta, x, y) \right\|_E \leq \int\limits_{-\infty}^{x-\zeta} \left\| \mathcal{B}e^{(y-s)\mathcal{B}} - \mathcal{B}e^{(x-s)\mathcal{B}} \right\| \left\| g^-(s) - g^-(x) \right\|_E ds,$$

et comme

$$\mathcal{B}e^{(y-s)\mathcal{B}} - \mathcal{B}e^{(x-s)\mathcal{B}} = \int\limits_{x-s}^{y-s} \mathcal{B}^2 e^{t\mathcal{B}} dt$$

puisque $y - s > 0$ et $x - s > 0$ pour tout $s \leq x - \zeta$, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\left\| I_1(\zeta, x, y) \right\|_E &\leq M_2 \int\limits_{-\infty}^{x-\zeta} \int\limits_{x-s}^{y-s} \frac{dt}{t^2} (x-s)^{2\alpha} \left\| g^- \right\|_{2\alpha} ds \\
&\leq M_2 \left\| g^- \right\|_{2\alpha} \int\limits_{-\infty}^{x-\zeta} \frac{y-x}{(y-s)(x-s)} (x-s)^{2\alpha} ds \\
&\leq M_2 (y-x) \left\| g^- \right\|_{2\alpha} \int\limits_{-\infty}^{x-\zeta} (x-s)^{2\alpha-2} ds \\
&\leq \frac{M_2}{1-2\alpha} \left\| g^- \right\|_{2\alpha} (y-x)^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Passons à la seconde fonction,

$$\begin{aligned}
\left\|I_2\left(\zeta,x,y\right)\right\|_E &\leq \int\limits_{x-\zeta}^{x} \left\|\mathcal{B}e^{(y-s)\mathcal{B}}-\mathcal{B}e^{(x-s)\mathcal{B}}\right\| \left\|g^-\left(s\right)-g^-\left(x\right)\right\| ds \\
&\leq \int\limits_{x-\zeta}^{x} \left(\frac{M_1}{y-s}+\frac{M_1}{x-s}\right)\left(x-s\right)^{2\alpha}\left\|g^-\right\|_{2\alpha} ds \\
&\leq 2M_1\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\int\limits_{x-\zeta}^{x}\left(x-s\right)^{2\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{M_1}{\alpha}\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\left[-\left(x-s\right)^{2\alpha}\right]_{x-\zeta}^{x} \leq \frac{M_1}{\alpha}\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\left(y-x\right)^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la troisième, on a

$$\left\|I_3\left(x,y\right)\right\| \leq \int\limits_{x}^{y}\frac{M_1}{y-s}\left(y-s\right)^{2\alpha}\left\|g\right\|_{2\alpha} ds \leq \frac{M_1}{2\alpha}\left\|g\right\|_{2\alpha}\left(y-x\right)^{2\alpha}.$$

Pour ce qui est de la quatrième, il est important de remarquer que

$$I_4\left(x,y\right) = \lim_{r\to+\infty}\mathcal{B}\int\limits_{-r}^{x}\left(e^{(y-s)\mathcal{B}}-e^{(x-s)\mathcal{B}}\right)g^-\left(x\right)ds,$$

avec

$$\mathcal{B}\int\limits_{-r}^{x}\left(e^{(y-s)\mathcal{B}}-e^{(x-s)\mathcal{B}}\right)g^-\left(x\right)ds = \left[\left(I-e^{(y-x)\mathcal{B}}\right)+\left(e^{(y+r)\mathcal{B}}-e^{(x+r)\mathcal{B}}\right)\right]g^-\left(x\right),$$

En plus, on a

$$\left\|\left(e^{(y+r)\mathcal{B}}-e^{(x+r)\mathcal{B}}\right)g^-\left(x\right)\right\|_E \leq M_0\left(e^{-a(y+r)}-e^{-a(x+r)}\right)\left\|g^-\right\|_{2\alpha},$$

ce dernier tend vers 0, lorsque r tend vers l'infini, par conséquent $I_4\left(x,y\right)=\left(I-e^{(y-x)\mathcal{B}}\right)g^-\left(x\right)$. En ce qui concerne la cinquième fonction $I_5\left(x,y\right)=\left(e^{(y-x)\mathcal{B}}-I\right)g^-\left(y\right)$ on va la traiter avec I_4, en remarquant que

$$\begin{aligned}
\left\|I_4\left(x,y\right)+I_5\left(x,y\right)\right\| &= \left\|g^-\left(x\right)-g^-\left(y\right)+e^{(y-x)\mathcal{B}}\left(g^-\left(y\right)-g^-\left(x\right)\right)\right\| \\
&\leq \left\|\left(e^{(y-x)\mathcal{B}}-I\right)\right\|\left\|g^-\left(y\right)-g^-\left(x\right)\right\| \\
&\leq \left(M_0+1\right)\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\left(y-x\right)^{2\alpha}
\end{aligned}$$

En résumé, la fonction $x \mapsto \mathcal{B} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^{-}(s)\, ds$ est 2α-höldérienne avec

$$\left\| \mathcal{B} \int_{-\infty}^{y} e^{(y-s)\mathcal{B}} g^{-}(s)\, ds - \mathcal{B} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^{-}(s)\, ds \right\| \leq C \left\| g \right\|_{2\alpha} (y-x)^{2\alpha},$$

où $C = \dfrac{M_2}{1-2\alpha} + \dfrac{3M_1}{2\alpha} + M_0 + 1.$

2. Montrons maintenant la continuité de Hölder uniforme de la fonction

$$x \mapsto \mathcal{B} \int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) ds$$

sur l'intérvalle $]-\infty, 0[$. En effet, pour tous $x \leq y \leq 0$, on a

$$\mathcal{B} \int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) ds - \mathcal{B} \int_{y}^{0} e^{(s-y)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(y) \right) ds$$

$$= \mathcal{B} \int_{x}^{y} e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) ds + \mathcal{B} \int_{y}^{0} \left[e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) - e^{(s-y)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(y) \right) \right] ds$$

et en plus le dernier terme s'ecrit aussi sous la forme

$$\begin{aligned} & \mathcal{B} \int_{y}^{0} \left[e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) - e^{(s-y)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(y) \right) \right] ds \\ &= \mathcal{B} \int_{y}^{0} \left(e^{(s-x)\mathcal{B}} - e^{(s-y)\mathcal{B}} \right) \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) ds \\ &+ \mathcal{B} \int_{y}^{0} e^{(s-y)\mathcal{B}} \left(g^{-}(y) - g^{-}(x) \right) ds \end{aligned}$$

donc, on peut récrire

$$\mathcal{B} \int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) ds - \mathcal{B} \int_{y}^{0} e^{(s-y)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(y) \right) ds = \sum_{i=1}^{3} I_i(x,y)$$

telles que

$$I_1(x,y) = \mathcal{B} \int_{x}^{y} e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g^{-}(s) - g^{-}(x) \right) ds,$$

$$I_2(x,y) = \mathcal{B}\int\limits_y^0 \left(e^{(s-x)\mathcal{B}} - e^{(s-y)\mathcal{B}}\right)\left(g^-(y) - g^-(x)\right) ds,$$

et $I_3(x,y) = \mathcal{B}\int\limits_y^0 e^{(s-x)\mathcal{B}} \left(g^-(s) - g^-(y)\right) ds.$

En étudiant la première intégrale, on remarque que

$$\begin{aligned}\|I_1(x,y)\| &\leq M_1 \int\limits_x^y \frac{1}{s-x}(s-x)^{2\alpha} ds \left\|g^-\right\|_{2\alpha} \\ &\leq \frac{M_1}{2\alpha}(y-x)^{2\alpha}\left\|g^-\right\|_{2\alpha}.\end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale, on utilise le fait que $e^{(s-x)\mathcal{B}} - e^{(s-y)\mathcal{B}} = \mathcal{B}\int\limits_{s-y}^{s-x} e^{\tau\mathcal{B}} d\tau$, il vient que

$$\begin{aligned}|I_2(x,y)| &= \left|\mathcal{B}^2\int\limits_y^0\int\limits_{s-y}^{s-x} e^{\tau\mathcal{B}}\left(g^-(y) - g^-(x)\right) d\tau ds\right| \\ &\leq M_2.\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\int\limits_y^0\int\limits_{s-y}^{s-x}\frac{d\tau}{\tau^2}(s-y)^{2\alpha} ds \\ &\leq M_2(y-x)\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\int\limits_y^0 \frac{(s-y)^{2\alpha-1}}{(s-x)} ds \\ &\leq M_2(y-x)\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\int\limits_y^0 \frac{(s-y)^{2\alpha-1}}{(s-y+y-x)} ds,\end{aligned}$$

Grâce à ce changement de variable $s-y = t(y-x)$, il s'ensuit que

$$|I_2(x,y)| \leq M_2(y-x)^{2\alpha}\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{t^{2\alpha-1}}{t+1} dt,$$

ce dernier intégral impropre converge et prend la valeur C. Pour la troisième intégrale, on a

$$\|I_3(x,y)\| \leq M_1\left|\int\limits_y^0 (s-x)^{2\alpha-1} ds\right|\left\|g^-\right\|_{2\alpha} \leq \frac{M_1}{2\alpha}(y-x)^{2\alpha}\left\|g^-\right\|_{2\alpha}$$

donc

$$\begin{aligned}&\left\|\mathcal{B}\int\limits_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(x)\right) ds - \mathcal{B}\int\limits_y^0 e^{(s-y)\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(y)\right) ds\right\| \\ &\leq \left(M_1 + M_2.C + \frac{M_1}{2\alpha}\right)(y-x)^{2\alpha}\left\|g^-\right\|_{2\alpha}.\end{aligned}$$

Lemme 2.0.6 *Soit $\mathcal{A}$ vérifiant l'hypothèse $(H.1)$. Pour toute fonction $g^- \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)$, on a*

$$x \longmapsto e^{-x\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right) \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right).$$

Preuve. Il est clair que la fonction $x \to e^{-x\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right)$ est bornée, car pour chaque $x \in \left]-\infty,0\right]$ on a

$$\left\|e^{-x\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right)\right\|_E \leq 2M_0\left\|g^-\right\|_{2\alpha},$$

et pour tout $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|e^{-x\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right) - e^{-(x-h)\mathcal{B}}\left(g^-(x-h) - g^-(0)\right)\right\| \\
&= \left\|\left(e^{-x\mathcal{B}} - e^{-(x-h)\mathcal{B}}\right)\left(g^-(x) - g^-(0)\right) + e^{-(x-h)\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(x-h)\right)\right\| \\
&\leq \left\|\mathcal{B}\int_{x-h}^{x} e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right)ds\right\| + \left\|e^{-(x-h)\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(x-h)\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Par la suite,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{B}\int_{x-h}^{x} e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right)ds\right\| &\leq M_1\left(\int_{x-h}^{x}\frac{ds}{-s}(-x)^{2\alpha}\right)\left\|g^-\right\|_{2\alpha} \\
&\leq M_1\left(\int_{x-h}^{x}\frac{ds}{(-s)^{1-2\alpha}}ds\right)\left\|g^-\right\|_{2\alpha},
\end{aligned}$$

d'où

$$\left\|\mathcal{B}\int_{x-h}^{x} e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right)ds\right\| \leq M_1 h^{2\alpha}\left\|g^-\right\|_{2\alpha},$$

or, on a

$$\left\|e^{-(x-h)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(x) - g_\delta^+(x-h)\right)\right\| \leq M_0.h^{2\alpha}.M\left\|g^-\right\|_{2\alpha}$$

puisque la constante de Hölder reste inchangée par rapport à x et $x+h$, alors la fonction $x \to e^{-x\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right)$ est bornée et uniformément Hölderienne sur $\left]-\infty,0\right]$.

Lemme 2.0.7 *Soit $\mathcal{A}$ vérifiant l'hypothèse $(H.1)$. Pour toute fonction $g_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right)$ avec $0 < 2\alpha < 1$, les valeurs suivantes*

$$\mathcal{B}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right)ds,\ \ \mathcal{B}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right)ds.$$

appartiennent à l'espace d'interpolation $D_{\mathcal{B}}(2\alpha,+\infty)$.

Preuve. Pour démontrer ce résultat, rappelons que

$$\|x\|_{D_{\mathcal{B}}(2\alpha,+\infty)} := \|x\|_{2\alpha} = \|x\| + [x]_{2\alpha}$$

où $[x]_{2\alpha} = \sup\limits_{t>0} \left\| t^{1-2\alpha}\mathcal{B}e^{\mathcal{B}t}x \right\| < \infty$.
Pour le premier élément, en effet

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{B}\int_0^{\delta} e^{s\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right)ds\right]_{2\alpha} &= \left\|\int_0^{\delta} t^{1-2\alpha}\mathcal{B}^2 e^{(t+s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right)ds\right\| \\ &\leq M_2 \left\|\int_0^{\delta} \frac{t^{1-2\alpha}s^{2\alpha}}{(t+s)^2}ds\right\| \left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha},\end{aligned}$$

À cette étape, le passage à la variable $s = t\tau$, permet de montrer que

$$\left\|\int_0^{\delta} t^{1-2\alpha}\mathcal{B}^2 e^{(t+s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right)ds\right\| \leq M_2 \left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\tau^{2\alpha}}{(1+\tau)^2}d\tau < \infty,$$

de la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^{\delta} t^{1-2\alpha}\mathcal{B}^2 e^{(t+\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right)ds\right\| &\leq M_2 \left\|\int_0^{\delta} \frac{t^{1-2\alpha}(\delta-s)^{2\alpha}}{(t+\delta-s)^2}ds\right\| \left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha} \\ &\leq M_2 \left\|g_\delta^+\right\|_{2\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{2\alpha}}{(1+\tau)^2}d\tau < \infty,\end{aligned}$$

par conséquent $\left\|\mathcal{B}\int_0^{\delta} e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right)ds\right\|_{2\alpha} < \infty$.

Lemme 2.0.8 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur vérifiant l'hypothèse (H.1). Pour toute fonction $g^- \in BUC^{2\alpha}(]-\infty,0];E)$ avec $0 < 2\alpha < 1$, on a*

$$x \to \mathcal{B}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(0)\right)ds \in D_{\mathcal{B}}(2\alpha,\infty).$$

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(0)\right)ds \\ &= \mathcal{B}\int_{-\infty}^{-1} e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(s)\right)ds + \mathcal{B}\int_{-1}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(0)\right)ds\end{aligned}$$

Pour le premier terme, il est clair grâce au propriétées des semi groupe que,

$$\mathcal{B}\int_{-\infty}^{-1} e^{-s\mathcal{B}}\left(g^{-}(s)-g^{-}(0)\right)ds \in D(\mathcal{B}^{k}) \subset D_{\mathcal{B}}(2\alpha,\infty)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, en effet

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{B}^{k+1}\int_{-\infty}^{-1} e^{-s\mathcal{B}}\left(g^{-}(s)-g^{-}(0)\right)ds\right\| &\leq M_{k+1}\int_{-\infty}^{-1}\frac{(-s)^{2\alpha}}{(-s)^{k+1}}ds.\left\|g^{-}\right\|_{2\alpha} \\ &\leq M_{k+1}\int_{1}^{\infty}\frac{ds}{s^{k+1-2\alpha}}.\left\|g^{-}\right\|_{2\alpha}<\infty\end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale, on a

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{B}\int_{-1}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\left(g-(s)-g-(0)\right)ds\right]_{2\alpha} &= \left\|\int_{-1}^{0} t^{1-2\alpha}\mathcal{B}^{2}e^{(t-s)\mathcal{B}}\left(g^{-}(s)-g-(0)\right)ds\right\| \\ &\leq M_{2}\left\|\int_{-1}^{0}\frac{t^{1-2\alpha}(-s)^{2\alpha}}{(t-s)^{2}}ds\right\|\left\|g^{-}\right\|_{2\alpha}\end{aligned}$$

Pour $-s=t\tau$, il suit que

$$\int_{-1}^{0}\frac{t^{1-2\alpha}(-s)^{2\alpha}}{(t-s)^{2}}ds = -\int_{\frac{1}{t}}^{0}\frac{t^{1-2\alpha}(t\tau)^{2\alpha}}{(t+t\tau)^{2}}td\tau = \int_{0}^{\frac{1}{t}}\frac{\tau^{2\alpha}}{(1+\tau)^{2}}d\tau<\infty,$$

Ainsi $\mathcal{B}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\left(g-(s)-g-(0)\right)ds \in D_{\mathcal{B}}(2\alpha,\infty)$.

Chapitre 3

Analyse d'un problème de transmission abstrait sur domaine non borné : Cas f_- non nul et second membre nul au voisinage de l'infini

3.1 Présentation du problème

On se propose d'etudier le problème de transmission abstrait suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u''_\delta(x) + \mathcal{A}u_\delta(x) = g_\delta(x), \quad x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, \delta\right[, \text{ avec } \delta > 0 \\ u_\delta(0_-) = u_\delta(0_+), \quad \mu_+ u'_\delta(0_+) = \mu_- u'_\delta(0_-) \\ \lim\limits_{x \to -\infty} u_\delta(x) = f_-, \quad u'_\delta(\delta) = f_\delta^+. \end{array}\right. \tag{P_δ}$$

où μ_- et μ_+ sont deux nombres positifs réels, f_δ^+ et f_- sont des éléments donnés dans un espace de Banach complexe E.

Supposons ici, que $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(\mathcal{A}) \subset E$ (n'est pas nécessairement dense dans l'espace E) vérifie l'hypothèse suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \rho(\mathcal{A}) \supset \left[0, +\infty\right[, \exists C > 0 \text{ tel que} \\ \forall \lambda \in \left[0, +\infty\right[\quad \left\|(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{1+\lambda} \end{array}\right. \tag{H.1}$$

dite d'ellipticité au sens de Krein [21]. Lorsque $\mathcal{A}$ possède cette propriété, on peut définir $\sqrt{-\mathcal{A}}$ en plus, l'opérateur $-\sqrt{-\mathcal{A}} := \mathcal{B}$ génère un semigroupe analytique qui n'est pas nécessairement fortement continu à l'origine car $\overline{D(\mathcal{A})} \subset E$, voir par exemple [7] et [15].

Dans la suite, g^- et g_δ^+ désignent les restrictions de la fonction g_δ aux intervalles $\left]-\infty, 0\right]$ et $[0, \delta]$ respectivement. De manière similaire, les notations u^- et u_δ^+ désignent les restrictions de la solution u_δ sur ces mêmes intervalles.

L'étude est menée ici dans le cas où le second membre est $2\alpha-$Höldérien sur chaque intervalles $]-\infty,0]$ et $[0,\delta]$ c'est-à-dire

$$g^{-}\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right),\ \text{ et } g_{\delta}^{+}\in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right),$$

ce qui joue un rôle essentiel dans l'analyse de la régularité de la solution.

On s'intéresse ici à la solution stricte du problème (P_{δ}) c'est-à-dire on doit trouver une fonction $u_{\delta}=\left(u^{-},u_{\delta}^{+}\right)$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} u^{-}\in BUC^{2}\left(]-\infty,0];E\right)\cap BUC\left(]-\infty,0];D\left(\mathcal{A}\right)\right),\\ u_{\delta}^{+}\in C^{2}\left([0,\delta];E\right)\cap C\left([0,\delta];D\left(\mathcal{A}\right)\right),\end{array}\right. \tag{3.1.1}$$

et cette solution à la régularité maximale suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \left(u^{-}\right)'',\mathcal{A}u^{-}\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)\\ \left(u_{\delta}^{+}\right)'',\ \mathcal{A}u_{\delta}^{+}\in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right).\end{array}\right.$$

3.2 Représentation explicite de la solution

3.2.1 Problèmes auxiliaires

La structure du domaine $]-\infty,0[\,\cup\,]0,\delta[$ permet de décomposer le problème (P_{δ}) en deux problèmes auxiliaires, chacun associé à un intervalle, le premier est

$$\left\{\begin{array}{l} \left(u_{\delta}^{+}\right)''(x)+\mathcal{A}u_{\delta}^{+}(x)=g_{\delta}^{+}(x),\quad x\in\,]0,\delta[\,,\\ \left(u_{\delta}^{+}\right)(\delta)=f_{\delta}^{+},\ \text{ et }\ u_{\delta}^{+}(0)=\psi,\end{array}\right. \tag{P_{+}}$$

posé sur $(0,\delta)$ et le deuxième posé sur la demi-droite négative

$$\left\{\begin{array}{l} \left(u^{-}\right)''(x)+\mathcal{A}u^{-}(x)=g^{-}(x),\quad x\in\,]-\infty,0[\,,\\ \left(u^{-}\right)'(0)=\varphi,\ \text{ et }\ u^{-}(-\infty)=f_{-},\end{array}\right. \tag{P_{-}}$$

où ψ et φ sont des éléments auxiliaires données dans E.

Pour résoudre les deux problèmes (P_{-}) et (P_{+}), on résout l'équation abstraite

$$u_{\delta}''(x)+\mathcal{A}u_{\delta}(x)=g(x) \tag{3.2.1}$$

pour tout $x\in[a,b]$, à l'aide de la théorie des semi-groupes et la transformation du Krein, suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \nu(x)=-\mathcal{B}^{-1}u_{\delta}'(x)\\ y(x)=\dfrac{1}{2}(u_{\delta}(x)-\nu(x))\\ z(x)=\dfrac{1}{2}(u_{\delta}(x)+\nu(x))\end{array}\right.$$

où $\mathcal{B} := -\sqrt{-\mathcal{A}}$. La dérivée de y est

$$y'(x) = \frac{1}{2}(u_\delta'(x) - \nu'(x)) = \frac{1}{2}(u_\delta'(x) + \mathcal{B}^{-1}u_\delta''(x)).$$

En utilisant l'équation (3.2.1) c'est-à-dire $u_\delta''(x) = \mathcal{B}^2 u_\delta(x) + g(x)$, on trouve

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}(u_\delta'(x) + \mathcal{B}u_\delta(x) + \mathcal{B}^{-1}g(x)) \\ &= \frac{1}{2}(-\mathcal{B}\nu(x) + \mathcal{B}u_\delta(x) + \mathcal{B}^{-1}g(x)), \end{aligned}$$

donc y vérifie le problème de Cauchy abstrait suivant

$$\begin{cases} y'(x) = \mathcal{B}y(x) + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}g(x), \quad x \in [a,b] \ , \\ y(a) = \xi_0, \end{cases}$$

de même, la fonction z vérifie le problème de Cauchy abstrait suivant

$$\begin{cases} z'(x) = -\mathcal{B}z(x) - \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}g(x), \ x \in [a,b] \ , \\ z(b) = \xi_1, \end{cases}$$

Il est connu que, pour tout $x \in [a,b]$, les solutions y, et z sont

$$\begin{cases} y(x) = \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int\limits_a^x e^{(x-s)\mathcal{B}}g(s)ds + e^{(x-a)\mathcal{B}}\xi_0, \\ z(x) = \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int\limits_x^b e^{(s-x)\mathcal{B}}g(s)ds + e^{(b-x)\mathcal{B}}\xi_1, \end{cases}$$

et comme $u_\delta(x) = y(x) + z(x)$, alors la solution u_δ est donné par

$$u_\delta(x) = e^{(x-a)\mathcal{B}}\xi_0 + e^{(b-x)\mathcal{B}}\xi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int\limits_a^x e^{(x-s)\mathcal{B}}g(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int\limits_x^b e^{(s-x)\mathcal{B}}g(s)ds, \ x \in \left]a,b\right[.$$

Par conséquent, sur l'intérvalle $]0,\delta[$, la solution est de la forme

$$u_\delta^+(x) = e^{x\mathcal{B}}\xi_0 + e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\xi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int\limits_0^x e^{(x-s)\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int\limits_x^\delta e^{(s-x)\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds, \qquad (3.2.2)$$

où ξ_0 et ξ_1 sont des constantes arbitraires dans E, pour les déterminer en utilisant les conditions aux limites

$$u_\delta^+(0) = \psi, \text{ et } \left(u_\delta^+\right)'(\delta) = f_\delta^+.$$

En dérivant u_δ^+, il vient que

$$\left(u_\delta^+\right)'(x) = \mathcal{B}e^{x\mathcal{B}}\xi_0 - \mathcal{B}e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{B}} g_\delta^+(s)ds - \frac{1}{2}\int_x^\delta e^{(s-x)\mathcal{B}} g_\delta^+(s)ds,$$

ensuite, pour $x=\delta$ et $x=0$, il en résulte

$$\begin{cases} \left(u_\delta^+\right)'(\delta) = \mathcal{B}e^{\delta\mathcal{B}}\xi_0 - \mathcal{B}\xi_1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^{(\delta-s)\mathcal{B}} g_\delta^+(s)ds = f_\delta^+, \\ u_\delta^+(0) = \xi_0 + e^{\delta\mathcal{B}}\xi_1 + \dfrac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\displaystyle\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}} g_\delta^+(s)ds = \psi \end{cases}$$

Cela nous conduit au système suivant

$$\begin{cases} \mathcal{B}e^{\delta\mathcal{B}}\xi_0 - \mathcal{B}\xi_1 = f_\delta^+ - \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^{(\delta-s)\mathcal{B}} g_\delta^+(s)ds \\ \xi_0 + e^{\delta\mathcal{B}}\xi_1 = \psi - \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\displaystyle\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}} g_\delta^+(s)ds, \end{cases}$$

qui admet pour déterminant l'opérateur $\Delta := \mathcal{B}(I+e^{2\delta\mathcal{B}})$, cet opérateur est inversible et son inverse $\Delta^{-1} = (I+e^{2\delta\mathcal{B}})^{-1}\mathcal{B}^{-1}$ (pour $(I+e^{2\delta\mathcal{B}})$ voir Lunardi [29, Proposition 2.3.6 page 60]) donc la solution du système est

$$\xi_0 = (I+e^{2\delta\mathcal{B}})^{-1}\left[\psi + \mathcal{B}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ - \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta \left(I+e^{2(\delta-s)\mathcal{B}}\right)e^{s\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds\right], \tag{3.2.3}$$

et

$$\xi_1 = (I+e^{2\delta\mathcal{B}})^{-1}\left[-\mathcal{B}^{-1}f_\delta^+ + e^{\delta\mathcal{B}}\psi + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta \left(I-e^{2s\mathcal{B}}\right)e^{(\delta-s)\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds\right]. \tag{3.2.4}$$

Passons maintenant au deuxième problème auxiliaire, en fixant $b=0$ et en faisant tendre $a\to-\infty$ on obtient une famille de solutions sur $(-\infty,0]$. Ce passage à la limite doit être effectué avec soin c'est-à-dire il faut vérifier la convergence des solutions, la validité des intégrales intervenant dans la représentation, ainsi que la bonne définition de l'action du semi-groupe sur un tel domaine non borné.

Dans le cas où $u^-(-\infty) = 0$ et $g^-(-\infty) = 0$, les solutions sont de la forme

$$u^-(x) = e^{-x\mathcal{B}}\xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}g^-(s)ds, \tag{3.2.5}$$

voir [26], on utilise la condition $u^-(0) = \varphi$ il vient

$$\xi_2 = -\mathcal{B}^{-1}\varphi + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds.$$

Dans le cas où $u^-(-\infty) = f_- \neq 0$, on utilise ce changement de fonction $\nu_-(x) = u^-(x) - f_-$.

Donc, pour $f_- \in D(\mathcal{A})$, le problème (P_-) se transforme au problème suivant

$$\begin{cases} \nu_-''(x) + \mathcal{A}\nu_-(x) = -\mathcal{A}f_- + g^-(x), \\ \nu_-'(0) = \varphi, \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} \nu_-(x) = 0, \end{cases} \tag{$\widetilde{P}$}$$

la solution de ce dernier est de la forme

$$\begin{aligned} \nu_-(x) = {} & e^{-x\mathcal{B}}\xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}f_-ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}\int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}f_-ds \\ & + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}g^-(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds, \end{aligned}$$

On a remplacé le second membre dans (3.2.5) par $-\mathcal{A}f_- + g^-(.)$ et $-\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

Pour déterminer la constante ξ_2, en dérivant ν_- pour $x \in\,]-\infty, 0]$,

$$\begin{aligned} \nu_-'(x) = {} & -\mathcal{B}e^{-x\mathcal{B}}\xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}^2\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}f_-ds - \frac{1}{2}\mathcal{B}^2\int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}f_-ds \\ & + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds - \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}g^-(s)ds \end{aligned}$$

en posant $x = 0$, il vient

$$\nu_-'(0) = -\mathcal{B}\xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}^2\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}f_-ds + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds,$$

donc,

$$\xi_2 = -\mathcal{B}^{-1}\varphi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\mathcal{B}f_-ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds,$$

et par conséquent

$$e^{-x\mathcal{B}}\xi_2 = -\mathcal{B}^{-1}e^{-x\mathcal{B}}\varphi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+x)\mathcal{B}}\mathcal{B}f_- ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-(x+s)\mathcal{B}}g^-(s)ds.$$

Ainsi la solution du problème (P_-) est de la forme

$$\begin{aligned} u^-(x) &= f_- + \frac{1}{2}\mathcal{B}\int_{-\infty}^{x} e^{-\tau\mathcal{B}}f_- d\tau + e^{-x\mathcal{B}}\xi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}g^-(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds \end{aligned}$$

avec

$$e^{-x\mathcal{B}}\xi_2 = -\mathcal{B}^{-1}e^{-x\mathcal{B}}\varphi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+x)\mathcal{B}}\mathcal{B}f_- ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-(x+s)\mathcal{B}}g^-(s)ds.$$

Remarque 3.2.1 *Puisque $f_- \in D(\mathcal{B})$, alors, on a* $\mathcal{B}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}f_- ds = \int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\mathcal{B}f_- ds$.

Remarque 3.2.2 *Si $f_- \in E$. On note $d_-(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-s\mathcal{B}}f_- ds$ définie sur $]-\infty, 0[$. Alors*

1) Pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $d_-(x) \in D(\mathcal{B})$ et que

$$\mathcal{B}d_-(x) = \mathcal{B}\int_{-\infty}^{x} e^{-s\mathcal{B}}f_- ds = -e^{-x\mathcal{B}}f_-.$$

2) Si $f_- \in \overline{D(\mathcal{B})}$, alors

$$\mathcal{B}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}f_- ds = -f_-.$$

Preuve. 1) Soit $x \in \mathbb{R}_-$, on prouve que $d_-(x) \in D(\mathcal{B})$. Soit $\lambda \in \rho(\mathcal{B})$ (on peut prendre

$\lambda = 0$). Alors pour $r > 0$ assez grand

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{x} e^{-s\mathcal{B}} f_- ds &= \int_{-r}^{x} (\lambda I - \mathcal{B})\, e^{-s\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- ds \\
&= \lambda \int_{-r}^{x} e^{-s\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- ds - \int_{-r}^{x} \mathcal{B} e^{-s\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- ds \\
&= \lambda \int_{-r}^{x} e^{-s\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- ds + \int_{-r}^{x} \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-s\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- \right) ds \\
&= \lambda \int_{-r}^{x} e^{-s\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- ds + e^{-x\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- - e^{r\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- .
\end{aligned}$$

Par conséquent $\int_{-r}^{x} e^{-s\mathcal{B}} f_- ds \in D(\mathcal{B})$. Or on a

$$\left\| e^{r\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- \right\| \leq M_0 . e^{-ar} . \left\| f_- \right\|_E$$

lorsque r tend vers $+\infty$, on trouve que

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-s\mathcal{B}} f_- ds = \lambda \int_{-\infty}^{x} e^{-s\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- ds + e^{-x\mathcal{B}} (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} f_- ,$$

En appliquant $(\lambda I - \mathcal{B})$ des deux côtés, on obtient

$$\mathcal{B} \int_{-\infty}^{x} e^{-s\mathcal{B}} f_- ds = -e^{-x\mathcal{B}} f_- .$$

2) soit $f_- \in \overline{D(\mathcal{B})}$, alors

$$\mathcal{B} \int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}} f_- ds = -f_- .$$

Ainsi, la solution u^- du problème (P_-) , s'écrit

$$\begin{aligned}
u^-(x) &= f_- - \frac{1}{2} e^{-x\mathcal{B}} f_- + e^{-x\mathcal{B}} \xi_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathcal{B}^{-1} \int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}} g^-(s) ds + \frac{1}{2} \mathcal{B}^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}} g^-(s) ds
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

où

$$e^{-x\mathcal{B}}\xi_2 = -\mathcal{B}^{-1}e^{-x\mathcal{B}}\varphi - \frac{1}{2}e^{-x\mathcal{B}}f_- + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-(x+s)\mathcal{B}}g^-(s)ds, \tag{3.2.7}$$

D'autre part, on a supposé que $f_- \in D(\mathcal{A}) \subset \overline{D(\mathcal{B})}$, alors

$$\begin{aligned} u^-(x) &= f_- - e^{-x\mathcal{B}}f_- + e^{-x\mathcal{B}}\xi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}g^-(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds \end{aligned}$$

avec

$$\xi_2 = -\mathcal{B}^{-1}\varphi + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds.$$

Remarque 3.2.3 *La condition au voisinage de l'infini est satisfaite, car*

$$\begin{aligned} \left\|u^-(x) - f_-\right\| &\leq \left\|e^{-x\mathcal{B}}\left(\xi_2 - f_-\right)\right\| + \frac{1}{2}\left\|\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds\right\| \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\|\mathcal{B}^{-1}\int_{x}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}g^-(s)ds\right\| \end{aligned}$$

Cependant, il existe $a > 0$ et $M_0 > 0$ tel que

$$\left\|e^{-x\mathcal{B}}\left(\xi_2 - f\right)\right\| \leq M_0 e^{ax}\left\|\xi_2 - f_-\right\|,$$

et

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds\right\| &\leq M_0\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E)}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-a(x-s)}ds\right)\sup_{s\leq x}\left\|g^-(s)\right\| \\ &\leq \frac{M_0}{a}\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E)}\sup_{s\leq x}\left\|g^-(s)\right\| \end{aligned}$$

Donc, lorsque x tend vers $-\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty}\left\|e^{-x\mathcal{B}}\left(\xi_2 - f\right)\right\| = 0 \;\; et \;\; \lim_{x\to-\infty}\sup_{s\leq x}\left\|g^-(s)\right\| = 0$$

Puisque la fonction g^- est uniformément Höldérienne et bornée sur $]-\infty, 0]$ *, et sa limite tend vers* 0 *lorsque* $x \to -\infty$*. Par conséquent*

$$\lim_{x\to-\infty}\left\|\mathcal{B}^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds\right\| = 0.$$

On décompose le troisième terme sous la forme

$$\frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int\limits_{x}^{\frac{x}{2}} e^{(s-x)\mathcal{B}}g^-(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}g^-(s)ds := I_1(x) + I_2(x)$$

Pour le premier, en effet

$$\begin{aligned}\|I_1(x)\| &\leq \frac{M_0}{2}\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\|\left(\int\limits_{x}^{\frac{x}{2}} e^{-a(s-x)}ds\right)\sup_{s\in\left[x,\frac{x}{2}\right]}\left\|g^-(s)\right\| \\ &\leq \frac{M_0}{2a}\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\|\left(e^{a\frac{x}{2}}-1\right)\sup_{s\in\left[x,\frac{x}{2}\right]}\left\|g^-(s)\right\|\end{aligned}$$

Puisque $g^-(-\infty) = 0$*, alors la limite de* $\sup_{s\in\left[x,\frac{x}{2}\right]}\|g^-(s)\|$ *est aussi nulle lorsque* $x \to -\infty$*. Cela implique que* $\lim\limits_{x\to-\infty}\|I_1(x)\| = 0$.
Pour le dernier terme, on a

$$\begin{aligned}\|I_2(x)\| &\leq \left\|\frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{0} e^{(s-x)\mathcal{B}}g^-(s)ds\right\| \\ &\leq \frac{M_0}{2}\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\|\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{0} e^{-a(s-x)}ds \\ &\leq \frac{M_0}{2}\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\|\left\|g^-\right\|_{2\alpha}\left[e^{ax}-e^{a\frac{x}{2}}\right]\end{aligned}$$

lorsque $\left(e^{ax}-e^{a\frac{x}{2}}\right)$ *tend vers* 0 *lorsque* $x \to -\infty$*, alors*

$$\lim_{x\to-\infty}\left\|u^-(x) - f_-\right\| = 0.$$

3.2.2 Expression explicite de la solution complète

En utilisant les formules de u^- et u_δ^+ définies respectivement par (3.2.6-3.2.7) et (3.2.2-3.2.3-3.2.4), ainsi que les conditions de transmission ci-dessous,

$$u^-(0) = \psi \text{ et } \varphi = \mu\left(u_\delta^+\right)'(0),$$

où $\mu = \frac{\mu_+}{\mu_-}$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{-1}\varphi + \psi = b_1 \\ \varphi - \mu\mathcal{B}(I + e^{2\delta\mathcal{B}})^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}})\psi = b_2 \end{cases} \tag{3.2.8}$$

telles que

$$b_1 = f_- + \int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\mathcal{B}f_- ds + \mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds$$

et

$$b_2 = 2\mu(I + e^{2\delta\mathcal{B}})^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ - \mu(I + e^{2\delta\mathcal{B}})^{-1}\int_0^\delta \left(e^{s\mathcal{B}} + e^{(2\delta-s)\mathcal{B}}\right) g_\delta^+(s)ds.$$

Le déterminant symbolique de ce système est de la forme

$$(I + e^{2\delta\mathcal{B}})^{-1}\left(I + e^{2\delta\mathcal{B}} + \mu(I - e^{2\delta\mathcal{B}})\right) := (I + e^{2\delta\mathcal{B}})^{-1}D_\mu$$

L'opérateur D_μ admet un inverse borné voir ([26, Lemme 7.]), il en résulte que le produit $(I+e^{2\delta\mathcal{B}})^{-1}D_\mu$ est lui-même un opérateur inversible d'inverse $D_\mu^{-1}(I+e^{2\delta\mathcal{B}})$. Par conséquent, le système (3.2.8) admet une solution unique (φ, ψ), explicitement déterminée par

$$\psi = -2\mu D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ + D_\mu^{-1}(I + e^{2\delta\mathcal{B}})f_- + D_\mu^{-1}(I + e^{2\delta\mathcal{B}})\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\mathcal{B}f_- ds$$

$$+ \mu D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta \left(e^{s\mathcal{B}} + e^{(2\delta-s)\mathcal{B}}\right) g_\delta^+(s)ds + D_\mu^{-1}\left(I + e^{2\delta\mathcal{B}}\right)\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds.$$

et

$$\varphi = 2\mu D_\mu^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ + \mu D_\mu^{-1}\mathcal{B}(I - e^{2\delta\mathcal{B}})f_- + \mu D_\mu^{-1}\mathcal{B}(I - e^{2\delta\mathcal{B}})\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}\mathcal{B}f_- ds$$

$$- \mu D_\mu^{-1}\int_0^\delta \left(e^{s\mathcal{B}} + e^{(2\delta-s)\mathcal{B}}\right) g_\delta^+(s)ds + \mu D_\mu^{-1}\left(I - e^{2\delta\mathcal{B}}\right)\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds.$$

En remplaçant ces expressions dans les formules de ξ_0, ξ_1 et ξ_2 . Aprés quelques simplifications, on obtient

$$\xi_0 = (1-\mu)\, D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ - \frac{1-\mu}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds$$

$$- \frac{1-\mu}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{(2\delta-s)\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds + D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds,$$

$$\xi_1 = -\left(1+\mu\right)\mathcal{B}^{-1}D_\mu^{-1}f_\delta^+ - \frac{(1-\mu)}{2}e^{\delta\mathcal{B}}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds$$

$$+\frac{1+\mu}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds + e^{\delta\mathcal{B}}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds,$$

et

$$\xi_2 = -2\mu\mathcal{B}^{-1}D_\mu^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ + \frac{1}{2}D_\mu^{-1}\left[I+e^{2\delta\mathcal{B}} - \mu(I-e^{2\delta\mathcal{B}})\right]\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds$$

$$+\mu\mathcal{B}^{-1}D_\mu^{-1}\int_0^\delta\left(e^{s\mathcal{B}}+e^{(2\delta-s)\mathcal{B}}\right)g_\delta^+(s)ds.$$

3.3 Résultats principaux

Les deux théorèmes suivants constituent les résultats fondamentaux relatifs à l'analyse du problème (P_δ). Le premier théorème établit l'existence et l'unicité d'une solution stricte du problème, sous certaines conditions sur les données. Les données f_- et f_δ^+ expriment l'effet des bords du domaine tandis que la différence $g_\delta^+(0) - g^-(0)$ traduit l'effet de l'interface entre les deux milieux.

Théorème 3.3.1 (solution stricte) *Supposons que $\mathcal{A}$ saisfait l'hypothèse $(H.1)$. Soient*

$$g^- \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right), \text{ avec } g^-(-\infty)=0$$

et $g_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right)$ où $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$. Alors, le problème (P_δ) admet une solution stricte unique si

$$\begin{cases} i)\ f_- \in D(\mathcal{A}) \text{ et } \mathcal{A}f_- \in \overline{D(\mathcal{A})}. \\ ii)\ f_\delta^+ \in D\left(\sqrt{-\mathcal{A}}\right) \text{ et } \sqrt{-\mathcal{A}}f_\delta^+ \in \overline{D(\mathcal{A})} \\ iii)\ g_\delta^+(0) - g^-(0) \in \overline{D(\mathcal{A})}. \end{cases}$$

Le second théorème renforce ce résultat en établissant que, sous des conditions plus régulières sur ces mêmes données f_-, f_δ^+ et $g_\delta^+(0) - g^-(0)$ la solution régularité maximale.

Théorème 3.3.2 *Supposons que $\mathcal{A}$ saisfait l'hypothèse $(H.1)$. Soient*

$$g^- \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right), \text{ avec } g^-(-\infty)=0$$

et $g_\delta^+ \in C^{2\alpha}([0,\delta];E)$ où $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$. Alors, la solution stricte de (P_δ) satisfait à la propriété de régularité maximale suivante

$$\begin{cases} \left(u_\delta^+\right)'', \ \mathcal{A}u_\delta^+ \in C^{2\alpha}([0,\delta];E) \\ (u^-)'', \ \mathcal{A}u^- \in BUC^{2\alpha}(]-\infty,0];E) \end{cases}$$

si

$$\begin{cases} i) \ f_- \in D(\mathcal{A}) \ \text{ et } \mathcal{A}f_- \in D_{\mathcal{A}}(\alpha,\infty). \\ ii) \ f_\delta^+ \in D\left(\sqrt{-\mathcal{A}}\right) \ \text{ et } \sqrt{-\mathcal{A}}f_\delta^+ \in D_{\mathcal{A}}(\alpha,\infty) \\ iii) \ g_\delta^+(0) - g^-(0) \in D_{\mathcal{A}}(\alpha,\infty). \end{cases}$$

3.3.1 Démonstration des théorèmes

Afin d'appliquer les lemmes techniques cité dans le chapitre 2, on présente la solution sous la forme suivante

$$u^-(x) = \left(f_- - e^{-x\mathcal{B}}f_-\right) + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}e^{-x\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right) + e^{-x\mathcal{B}}\xi_2^* - \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}g^-(x)$$
$$+ \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(x)\right)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds,$$

pour $x \in]-\infty,0]$ et

$$u_\delta^+(x) = e^{x\mathcal{B}}\xi_0^* + e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\xi_1^* + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(x) - g_\delta^+(\delta)\right) - \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}\left(g_\delta^+(x) - g_\delta^+(0)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-1}\int_x^\delta e^{(s-x)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(x)\right)ds,$$

pour $x \in [0,\delta]$, où

$$\xi_0^* = \xi_0 + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}g_\delta^+(0) = (1-\mu)D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ + D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds$$
$$+ \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}g_\delta^+(0) - \frac{1-\mu}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta \left(e^{s\mathcal{B}} + e^{(2\delta-s)\mathcal{B}}\right)g_\delta^+(s)ds,$$

$$\xi_1^* = \xi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}g_\delta^+(\delta) = \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}g_\delta^+(\delta) - (1+\mu)\mathcal{B}^{-1}D_\mu^{-1}f_\delta^+ + e^{\delta\mathcal{B}}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds$$
$$- \frac{1-\mu}{2}e^{\delta\mathcal{B}}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds + \frac{1+\mu}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}}g_\delta^+(s)ds,$$

et

$$\xi_2^* = \xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}g^-(0) = -2\mu\mathcal{B}^{-1}D_\mu^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ + \mu\mathcal{B}^{-1}D_\mu^{-1}\int_0^\delta \left(e^{s\mathcal{B}} + e^{(2\delta-s)\mathcal{B}}\right)g_\delta^+(s)ds$$

$$+\frac{1}{2}D_\mu^{-1}\left(I + e^{2\delta\mathcal{B}} - \mu(I - e^{2\delta\mathcal{B}})\right)\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}}g^-(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}g^-(0).$$

Après simplification, on trouve

$$\xi_0^* = (1-\mu)\,D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ + D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-2}\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right)$$

$$-\frac{1-\mu}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right)ds - \frac{1-\mu}{2}D_\mu^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right)ds$$

$$+D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(0)\right)ds - \frac{1-\mu}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-2}\left(e^{\delta\mathcal{B}} - I\right)e^{\delta\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(\delta) - g_\delta^+(0)\right),$$

$$\xi_1^* = -\left(1+\mu\right)\mathcal{B}^{-1}D_\mu^{-1}f_\delta^+ - \frac{1-\mu}{2}e^{\delta\mathcal{B}}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right)ds$$

$$+e^{\delta\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-2}D_\mu^{-1}\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) + e^{\delta\mathcal{B}}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(0)\right)ds$$

$$+\frac{1+\mu}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right)ds$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}D_\mu^{-1}\left[(1+\mu) + (I-\mu)\,e^{\delta\mathcal{B}}\right]e^{\delta\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(\delta) - g_\delta^+(0)\right),$$

et

$$\xi_2^* = -2\mu\mathcal{B}^{-1}D_\mu^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+ + \frac{1}{2}D_\mu^{-1}\left[I + e^{2\delta\mathcal{B}} - \mu(I - e^{2\delta\mathcal{B}})\right]\mathcal{B}^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(0)\right)ds$$

$$+\mu\mathcal{B}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}D_\mu^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right)ds + \mu D_\mu^{-1}\mathcal{B}^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right)ds$$

$$+\mu\mathcal{B}^{-2}D_\mu^{-1}\left(e^{2\delta\mathcal{B}} - I\right)\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) + \mu D_\mu^{-1}e^{\delta\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-2}\left(I - e^{\delta\mathcal{B}}\right)\left(g_\delta^+(\delta) - g_\delta^+(0)\right).$$

D'après les Lemmes (2.0.2)-(2.0.4)- (2.0.6) et Lemme (2.0.8), il est clair que,

$$x \to e^{-x\mathcal{B}}\left(g^-(x) - g^-(0)\right) + \mathcal{B}\int_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}}\left(g^-(s) - g^-(x)\right)ds + \mathcal{B}\int_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}}g^-(s)ds,$$

appartient à l'espace $BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)$, de même

$$x\rightarrow\left(e^{(\delta-x)\mathcal{B}}-I\right)\left(g_{\delta}^{+}(x)-g_{\delta}^{+}(\delta)\right)+\mathcal{B}\int_{0}^{x}e^{(x-s)\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(s)-g_{\delta}^{+}(0)\right)ds+\mathcal{B}\int_{x}^{\delta}e^{(s-x)\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(s)-g_{\delta}^{+}(x)\right)ds$$

appartient à l'espace $C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right)$.

D'autre part, on sait grâce aux Lemmes (2.0.6), (2.0.7) et Lemme (2.0.8), que les applications suivantes

$$x\rightarrow e^{-x\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}\int_{0}^{\delta}e^{s\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(s)-g_{\delta}^{+}(0)\right)ds\right),\ x\rightarrow e^{-x\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}\int_{0}^{\delta}e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(s)-g_{\delta}^{+}(\delta)\right)ds\right)$$

et $x\rightarrow e^{-x\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}\int_{-\infty}^{0}e^{-s\mathcal{B}}\left(g^{-}(s)-g^{-}(0)\right)ds\right)$ sont bornées et uniformément Höldériennes avec un exposant 2α sur $]-\infty,0]$. De même, on déduit du Lemme (2.0.2) que les fonctions suivantes

$$x\rightarrow e^{x\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}\int_{0}^{\delta}e^{s\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(s)-g_{\delta}^{+}(0)\right)ds\right),\ x\rightarrow e^{x\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}\int_{0}^{\delta}e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(s)-g_{\delta}^{+}(\delta)\right)ds\right),$$

$$x\rightarrow e^{x\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}\int_{-\infty}^{0}e^{-s\mathcal{B}}\left(g^{-}(s)-g^{-}(0)\right)ds\right),\ x\rightarrow e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}\int_{0}^{\delta}e^{s\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(s)-g_{\delta}^{+}(0)\right)ds\right)$$

et

$$x\rightarrow e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}\int_{0}^{\delta}e^{(\delta-s)\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(s)-g_{\delta}^{+}(\delta)\right)ds\right),\ x\rightarrow e^{(\delta-x)\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}\int_{-\infty}^{0}e^{-s\mathcal{B}}\left(g^{-}(s)-g^{-}(0)\right)ds\right)$$

appartiennent aussi à l'espace $C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right)$. Or, pour $\delta>0$, on sait que

$$e^{\delta\mathcal{B}}\chi,\ \mathcal{B}e^{\delta\mathcal{B}}\chi\in D\left(\mathcal{B}^{k}\right)\subset D_{\mathcal{B}}\left(2\alpha,\infty\right),$$

pour tous $\chi\in E$, par conséquent, les fonctions suivantes

- ► $x\rightarrow e^{x\mathcal{B}}\mathcal{B}e^{\delta\mathcal{B}}f_{\delta}^{+}$,
- ► $x\rightarrow e^{(\delta-x)\mathcal{B}}e^{\delta\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(0)-g^{-}(0)\right)$,
- ► $x\rightarrow e^{x\mathcal{B}}e^{\delta\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(\delta)-g_{\delta}^{+}(0)\right)$
- ► $x\rightarrow e^{(\delta-x)\mathcal{B}}e^{\delta\mathcal{B}}\left(g_{\delta}^{+}(\delta)-g_{\delta}^{+}(0)\right)$

appartiennent à $C^{2\alpha}([0,\delta];E)$.

De même, les fonctions suivantes

- ► $x \to e^{\delta\mathcal{B}}\left(I - e^{\delta\mathcal{B}}\right)\left(g_\delta^+(\delta) - g_\delta^+(0)\right)$,
- ► $x \to \mathcal{B}e^{-x\mathcal{B}}e^{\delta\mathcal{B}}f_\delta^+$,
- ► $x \to e^{-x\mathcal{B}}e^{2\delta\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right)$

appartiennent à $BUC^{2\alpha}(]-\infty,0];E)$.

Par la suite, et grâce à cette notation

$$g \simeq_{2\alpha} h \text{ si et seulement si } g - h \in C^{2\alpha},$$

il vient que

$$\mathcal{A}u^-(x) \simeq_{2\alpha} \mathcal{A}\left(f_- - e^{-x\mathcal{B}}f_-\right) + \mu D_\mu^{-1}e^{-x\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right), \tag{3.3.1}$$

et

$$\mathcal{A}u_\delta^+(x) \simeq_{2\alpha} (1+\mu)\,D_\mu^{-1}\mathcal{B}e^{(\delta-x)\mathcal{B}}f_\delta^+ - e^{x\mathcal{B}}D_\mu^{-1}\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right). \tag{3.3.2}$$

L'étape suivante consiste à examiner en détail les termes liés aux données f_-, f_δ^+ et $\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right)$ dans (3.3.1) et (3.3.2). Afin de garantir l'existence d'une solution stricte, il est nécessaire d'imposer certaines conditions sur les données. Dans (3.3.1) on observe que :

- Lorsque $f_- \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}f_- \in \overline{D(\mathcal{A})}$, alors le Lemme (2.0.3) confirme que la fonction $x \mapsto \mathcal{A}\left(f_- - e^{-x\mathcal{B}}f_-\right)$ est bornée et uniformément continue sur $]-\infty,0]$.
- Lorsque $g_\delta^+(0) - g^-(0) \in \overline{D(\mathcal{A})}$, le Lemme (2.0.6) garantit l'Höldérienneté de la fonction

$$x \mapsto \mu D_\mu^{-1}e^{-x\mathcal{B}}\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right).$$

Il s'ensuit que $\mathcal{A}u^-$ est borné et uniformément continu sur $]-\infty,0]$. En vertu de l'équation différentielle $\mathcal{A}u^- + (u^-)'' = g^-$, il vient que $(u^-)''$ possède aussi ces propriétés de bornitude et de continuité uniforme c'est-à-dire

$$u^- \in BUC^2(]-\infty,0];E) \cap BUC(]-\infty,0];D(\mathcal{A})).$$

On examine également la régularité de ces termes : en remarquant que si les données

$$\mathcal{A}f_- \text{ et } g_\delta^+(0) - g^-(0) \in D_\mathcal{B}(2\alpha,\infty)$$

alors

$$\mathcal{A}u^{-},\left(u^{-}\right)''\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right).$$

De même, dans (3.3.1), on observe que :

- Si $f_{\delta}^{+}\in D\left(\mathcal{B}\right)$ et $\mathcal{B}f_{\delta}^{+}\in\overline{D\left(\mathcal{A}\right)}$, alors le Lemme 2.0.1 assure que la fonction

$$x\mapsto\left(1+\mu\right)D_{\mu}^{-1}\mathcal{B}e^{(\delta-x)\mathcal{B}}f_{\delta}^{+}$$

  est continue sur $[0,\delta]$.

- Si $g_{\delta}^{+}(0)-g^{-}(0)\in\overline{D\left(\mathcal{A}\right)}$, alors le Lemme 2.0.2 confirme la continuité de

$$x\mapsto e^{x\mathcal{B}}D_{\mu}^{-1}\left(g_{\delta}^{+}(0)-g^{-}(0)\right).$$

  sur $[0,\delta]$.

Par conséquent $\mathcal{A}u_{\delta}^{+}\in C\left([0,\delta];E\right)$ et ensuite

$$u_{\delta}^{+}\in C^{2}\left([0,\delta];E\right)\cap C\left([0,\delta];D(\mathcal{A})\right)\ \text{si}\ ,$$

pour la régularité, on applique aussi les deux Lemmes (2.0.1), (2.0.2) et le fait que $\mathcal{B}f_{\delta}^{+}$, $g_{\delta}^{+}(0)-g^{-}(0)\in D_{\mathcal{B}}\left(2\alpha,\infty\right)$ pour assurer que les deux fonctions

$$x\mapsto\left(1+\mu\right)D_{\mu}^{-1}\mathcal{B}e^{(\delta-x)\mathcal{B}}f_{\delta}^{+},\ \text{et}\ x\mapsto e^{x\mathcal{B}}D_{\mu}^{-1}\left(g_{\delta}^{+}(0)-g^{-}(0)\right).$$

sont Höldérienne avec exposant 2α sur $[0,\delta]$. En conclusion

$$\mathcal{A}u_{\delta}^{+},\ \ \left(u_{\delta}^{+}\right)''\in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right)$$

si $g_{\delta}^{+}(0)-g^{-}(0)$, $\mathcal{B}f_{\delta}^{+}\in D_{\mathcal{A}}\left(\alpha,\infty\right)=D_{\mathcal{B}}\left(2\alpha,\infty\right)$.

3.4 Exemple

On considère pour $0<2\alpha<1$ l'espace

$$E=C_{0}^{2\alpha}\left(0,1\right)=\left\{\psi\in C^{2\alpha}\left(0,1\right):\psi(0)=\psi(1)=0\right\}$$

et l'opérateur

$$\left\{\begin{array}{l}D\left(\mathcal{B}\right)=\{\psi,\psi'\in C^{1+2\alpha}\left(0,1\right):\psi\left(0\right)=\psi'\left(0\right)=0\}:=C_{0}^{1+2\alpha}\left(0,1\right)\\ \mathcal{B}\psi=-\psi'\end{array}\right.$$

A l'aide de cet opérateur on définit l'opérateurs $\mathcal{A} := -\mathcal{B}^2$, par

$$\begin{cases} \mathcal{A}\psi = -\psi'' \\ D(\mathcal{A}) = \{\psi \in C^{2+2\alpha}(0,1) : \psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0\} := C_0^{2+2\alpha}(0,1) \end{cases}$$

Il est connue que $\overline{D(\mathcal{A})} = \overline{D(\mathcal{B})} = h_0^{2\alpha}(0,1) \neq E$, où

$$h^{2\alpha}(0,1) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} : \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\substack{x,y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{2\alpha}} = 0 \right\},$$

avec $\|f\|_{h^{2\alpha}(0,1)} = \|f\|_{\|f\|_{C^{2\alpha}(0,1)}}$ donc le domaine ici n'est pas dense en plus l'hypothèse $(H.1)$ peut se vérifier par un calcul direct de sa résolvante (see [7, Example 14.2 page 318]).

En utilisant [28, Example 1.25 page 37 et Example 5.15 page 142] ou [29, Corollary 1.2.19 page 32], on peut caractériser les espaces d'interpolation réelle $D_{\mathcal{B}}(2\alpha, +\infty)$ comme

$$\left(C_0^{1+2\alpha}(0,1), C_0^{2\alpha}(0,1)\right)_{1-2\alpha,\infty} = \left(C_0^{2\alpha}(0,1), C_0^{1,2\alpha}(0,1)\right)_{2\alpha,\infty} = C_0^{4\alpha}(0,1),$$

Alors, le résultat principal concernant le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u^-(x,y) - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u^-(x,y) = g^-(x,y) \quad \text{dans }]-\infty, 0[\times]0,1[\\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u_\delta^+(x,y) - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u_\delta^+(x,y) = g_\delta^+(x,y) \quad \text{dans }]0,\delta[\times]0,1[\end{cases} \\ \begin{cases} u^-(0,y) = u_\delta^+(0,y) \\ \mu_- \dfrac{\partial u^-}{\partial x}(0,y) = \mu_+ \dfrac{\partial u_\delta^+}{\partial x}(0,y) \end{cases} \qquad \text{pour } y \in]0,1[\\ \begin{cases} \dfrac{\partial u_\delta^+}{\partial x}(\delta, y) = f_\delta^+(y), \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} u^-(x,y) = f_-(y) \quad \text{pour } y \in]0,1[\\ u^-(x,0) = \dfrac{\partial u^-}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial^2 u^-}{\partial y^2}(x,0) = 0 \qquad \text{pour } x \in]-\infty, \delta[\\ u_\delta^+(x,0) = \dfrac{\partial u_\delta^+}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial^2 u_+}{\partial y^2}(x,0) = 0 \qquad \text{pour } x \in]0,\delta[. \end{cases} \end{array} \right. \tag{3.4.1}$$

est donné par la proposition suivante, en tant que conséquence immédiate des deux théorèmes établis dans ce chapitre.

Proposition 3.4.1 *Soit* $g^- \in BUC^{2\alpha}(]-\infty,0]; C_0^{2\alpha}(0,1))$ *avec* $g^-(-\infty,y) = 0$ *et* $g_\delta^+ \in C^{2\alpha}([0,\omega]; C_0^{2\alpha}(0,1))$ *avec* $0 < 2\alpha < 1$*, pour* $f_- \in C_0^{2+2\alpha}(0,1)$ *et* $f_\delta^+ \in C_0^{1+2\alpha}(0,1)$*,*

1) Le problème (3.4.1) admet une unique solution stricte c'est-à-dire,

$$\begin{cases} u^- \in BUC^2(-\infty, 0; C_0^{2\alpha}(0,1)) \cap BUC\left(-\infty, 0; C_0^{2+2\alpha}(0,1)\right), \\ u_\delta^+ \in C^2(0,\delta; C_0^{2\alpha}(0,1)) \cap C\left(0,\delta; C_0^{2+2\alpha}(0,1)\right), \end{cases}$$

si $\dfrac{\partial}{\partial y}f_{\delta}^{+},\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f_{-},\ g_{\delta}^{+}(0,.)-g^{-}(0,.)\in h_0^{2\alpha}(0,1)$.

2) La solution stricte satisfait la propriété de la régularité maximale suivante

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_{\delta}^{+},\ \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}u_{\delta}^{+}\in C^{2\alpha}\left([0,\delta];C_0^{2\alpha}(0,1)\right)\\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u^{-},\ \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}u^{-}\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];C_0^{2\alpha}(0,1)\right)\end{array}\right.$$

si $\dfrac{\partial}{\partial y}f_{\delta}^{+},\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f_{-},\ g_{\delta}^{+}(0,.)-g^{-}(0,.)\in C_0^{4\alpha}(0,1)$.

Chapitre 4

Application des résultats de régularité au problème de Poisson sur un secteur hétérogène à coin.

Ce chapitre est consacré à une application concrète visant à illustrer certaines hypothèses, adoptées dans le cadre abstrait développé précédemment, notamment le comportement de la solution et du second membre au voisinage de l'infini.

Plus précisément, pour tout angle $\omega \in \left]0, \pi/2\right]$, on considère le modèle suivant

$$\Delta w^{\epsilon} = h^{\epsilon}$$

posé dans le secteur hétérogène $\Omega_{\omega}^{\epsilon}$ avec un point d'angle $S(0,0)$.

Ce type de problème provient de la théorie des équations de réaction-diffusion et s'applique notamment à des phénomènes en dynamique des populations (organismes, particules, bactéries, insectes, etc....). Il permet notamment de modéliser la concentration d'une substance chimique ou la densité d'une population dans un régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque cette densité reste constante au cours du temps.

Le secteur $\Omega_{\omega}^{\epsilon}$ est composé de deux régions, la première étant

$$\Sigma_{\omega} = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho < 1 \text{ et } \theta \in \left]0, \omega\right[\right\},$$

de frontière $\partial\Sigma_{\omega} = \Gamma_{\omega} \cup \Gamma_{\omega}^{*}$ où

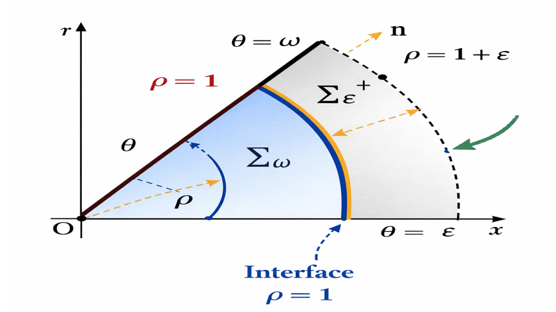
$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma_{\omega} := \left\{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in \left]0, \omega\right[\right\}, \\ \Gamma_{\omega}^{*} := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho \leq 1 \text{ et } \theta \in \{0, \omega\}\right\}. \end{array}\right.$$

la seconde région, est

$$\Sigma_{\omega}^{\epsilon} := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 1 < \rho < 1+\epsilon \text{ et } \theta \in]0, \omega[\},$$

pour tout $\epsilon > 0$ et de frontière $\partial\Sigma_{\omega}^{\epsilon} = \Gamma_{\omega} \cup \Gamma_{\omega}^{\epsilon} \cup \Gamma_{\omega}^{*\epsilon}$ telles que

$$\begin{cases} \Gamma_{\omega}^{\epsilon} := \{((1+\epsilon)\cos\theta, (1+\epsilon)\sin\theta) : \ \theta \in]0, \omega[\}, \\ \Gamma_{\omega}^{*\epsilon} := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 1 < \rho \leq 1+\epsilon \text{ et } \theta \in \{0, \omega\}\}. \end{cases}$$



Il est important de noter que les fonctions w^{ϵ} et h^{ϵ} ne sont pas continues sur Γ_{ω}, pour cela on note dans la suite que

$$w_{-} := w^{\epsilon}{}_{/\Sigma_{\omega}}, \text{ et } h_{-} := h^{\epsilon}{}_{/\Sigma_{\omega}}$$

sont les restrictions de w^{ϵ} et h^{ϵ} respectivement sur Σ_{ω}, tandis que

$$w_{+}^{\epsilon} := w^{\epsilon}{}_{/\Sigma_{\omega}^{\epsilon}}, \text{ et } h_{+}^{\epsilon} := h^{\epsilon}{}_{/\Sigma_{\omega}^{\epsilon}}$$

désignent leur restrictions sur $\Sigma_{\omega}^{\epsilon}$.

On s'interesse ici à établir l'existence et la régularité de la solution stricte w^{ϵ} dans $\Omega_{\omega}^{\epsilon}$ et aux voisinage de S, lorsque le second membre $\left(h_{-}, h_{+}^{\epsilon}\right)$ est supposé Höldérienne sur chaque sous-région du domaine c'est-à-dire

$$\left(h_{-}, h_{+}^{\epsilon}\right) \in C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_{\omega}}\right) \times C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_{\omega}^{\epsilon}}\right)$$

et satisfait la condition suivante $h_{-}(0,0) = 0$ comme dans la thèse de Moussaoui [31].

Remarque 4.0.1 *Ici, on ne suppose pas que la fonction h^{ϵ} est Höldérienne sur tout le secteur hétérogène $\overline{\Omega_{\omega}^{\epsilon}}$, mais si tel est le cas, c'est-à-dire h^{ϵ} appartient à $C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_{\omega}^{\epsilon}}\right)$ si et seulement si*

$$\left(h_{-}, h_{+}^{\epsilon}\right) \in C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_{\omega}}\right) \times C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_{\omega}^{\epsilon}}\right), \text{ avec } h_{+}^{\epsilon} = h_{-} \text{ sur } \Gamma_{\omega}.$$

Notre objectif est de trouver une solution stricte i.e,

$$\left(w_-, w_+^\epsilon\right) \in C^2\left(\overline{\Sigma_\omega}\right) \times C^2\left(\overline{\Sigma_\omega^\epsilon}\right)$$

et de montrer la régularité de cette solution, c'est-à-dire

$$\left(w_-, w_+^\epsilon\right) \in C^{2,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega}\right) \times C^{2,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^\epsilon}\right).$$

Où $C^{2,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^\epsilon}\right)$ est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Sigma_\omega^\epsilon}$ ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre deux, vérifiant que

$$\sum_{|j|=1}^{2} \sup_{(x,y),(x',y')\in\overline{\Sigma_\omega^\epsilon}} \frac{|D^j w(x,y) - D^j w(x',y')|}{|(x,y)-(x',y')|^{2\alpha}} < \infty$$

où $j = (j_1, j_2)$, $|j| = j_1 + j_2$ et $D^j = \dfrac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial^{j_1}x.\partial^{j_2}y}$.

Ce modèle peut être représenté sous la forme du problème de transmission suivant

$$\begin{cases} (e.q)\begin{cases} \Delta w_-^\epsilon(\sigma,\eta) = h_-(\sigma,\eta) & \text{dans } \Sigma_\omega \\ \Delta w_+^\epsilon(\sigma,\eta) = h_+^\epsilon(\sigma,\eta) & \text{dans } \Sigma_\omega^\epsilon \end{cases} \\ (t.c)\begin{cases} w_-^\epsilon = w_+^\epsilon, \ \ \mu_-\dfrac{\partial w_-^\epsilon}{\partial\nu} = \mu_+\dfrac{\partial w_+^\epsilon}{\partial\nu} & \text{sur } \Gamma_\omega \end{cases} \\ (b.c)\begin{cases} \dfrac{\partial w_+^\epsilon}{\partial\nu} = l_+^\epsilon & \text{sur } \Gamma_\omega^\epsilon \\ w_-^\epsilon = w_+^\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_\omega^* \cup \Gamma_\omega^{*\epsilon}. \end{cases} \end{cases} \tag{4.0.1}$$

Où,

- $\partial/\partial\nu$ désigne la dérivée normale extérieure,
- l_+^ϵ est une fonction donnée,
- μ_-, μ_+ sont les coefficients de conductivité de Σ_ω et Σ_ω^ϵ respectivement.

4.1 Changement de variables

On utilise les coordonnées polaires avec les notations suivantes

$$\begin{cases} \nu^\epsilon(\rho,\theta) := w^\epsilon(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \\ k^\epsilon(\rho,\theta) = h^\epsilon(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \\ L_+^\epsilon(\theta) = l_+^\epsilon(\cos\theta, \sin\theta). \end{cases}$$

Alors, le problème (4.0.1) devient

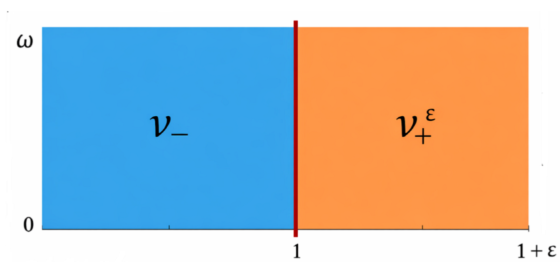
$$\begin{cases} (eq) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \nu_-^\epsilon}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 \nu_-^\epsilon}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \nu_-^\epsilon}{\partial \rho} = k_- \text{ dans }]0,1[\times]0,\omega[\\ \dfrac{\partial^2 \nu_+^\epsilon}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 \nu_+^\epsilon}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \nu_+^\epsilon}{\partial \rho} = k_+^\epsilon \text{ dans }]1,1+\epsilon[\times]0,\omega[\end{cases} \\ (ct) \begin{cases} \nu_-(1,\theta) = \nu_+^\epsilon(1,\theta), \\ \mu_- \dfrac{\partial \nu_-^\epsilon}{\partial \rho}(1,\theta) = \mu_+ \dfrac{\partial \nu_+^\epsilon}{\partial \rho}(1,\theta), \end{cases} \quad \text{pour } \theta \in]0,\omega[\\ (cl) \begin{cases} \dfrac{\partial \nu_+^\epsilon}{\partial \rho}(1+\epsilon,\theta) = L_+^\epsilon(\theta), & \text{pour } \theta \in]0,\omega[\\ \nu_-^\epsilon(\rho,0) = \nu_-^\epsilon(\rho,\omega) = 0 & \text{pour } \rho \in [0,1] \\ \nu_+^\epsilon(\rho,0) = \nu_+^\epsilon(\rho,\omega) = 0 & \text{pour } \rho \in]1,1+\epsilon]. \end{cases} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où

$$k_- := k^\epsilon_{\diagup]0,1[\times]0,\omega[}, \quad k_+^\epsilon := k^\epsilon_{\diagup]1,1+\epsilon[\times]0,\omega[},$$

et

$$\nu_- := \nu^\epsilon_{\diagup]0,1[\times]0,\omega[}, \; \nu_+^\epsilon := \nu^\epsilon_{\diagup]1,1+\epsilon[\times]0,\omega[}.$$

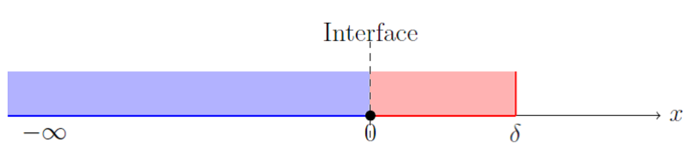


Ensuite on utilise ce changement de variable $\rho = e^x$, avec les notations suivantes

$$\begin{cases} u_\delta(x,\theta) = \nu^\epsilon(\rho,\theta), \\ g_\delta(x,\theta) = \rho^2 k^\epsilon(\rho,\theta) \\ f_\delta^+(\theta) = (1+\epsilon) L_+^\epsilon(\theta), \end{cases}$$

en remarquons que le rectangle $]0,1+\epsilon[\times]0,\omega[$ se transforme en $]-\infty,\delta[\times]0,\omega[$, où

$$\delta = \ln(1+\epsilon)$$



en plus, le problème (4.1.1) se transforme au problème suivant

$$\begin{cases} (eq) \begin{cases} \Delta u^- (x,\theta) = g^- (x,\theta) & \text{dans }]-\infty,0[\times]0,\omega[\\ \Delta u_\delta^+ (x,\theta) = g_\delta^+ (x,\theta) & \text{dans }]0,\delta[\times]0,\omega[\end{cases} \\ (ct) \begin{cases} u^- (0,\theta) = u_\delta^+ (0,\theta), \\ \mu_- \dfrac{\partial u^-}{\partial x} (0,\theta) = \mu_+ \dfrac{\partial u_\delta^+}{\partial x} (0,\theta), \end{cases} \quad \text{pour } \theta \in]0,\omega[\\ (cl) \begin{cases} \dfrac{\partial u_\delta^+}{\partial x} (\delta,\theta) = f_\delta^+ (\theta) & \text{pour } \theta \in]0,\omega[\\ u^- (x,0) = u^- (x,\omega) = 0 & \text{pour } x \in]-\infty,0] \\ u_\delta^+ (x,0) = u_\delta^+ (x,\omega) = 0 & \text{pour } x \in [0,\delta]. \end{cases} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

ici on a

$$g^- := g_{\delta\diagup]-\infty,0[\times]0,\omega[}, \ g_\delta^+ := g_{\delta\diagup]0,\delta[\times]0,\omega[},$$

$$u^- := u_{\delta\diagup]-\infty,0[\times]0,\omega[} \text{ et } u_\delta^+ := u_{\delta\diagup]0,\delta[\times]0,\omega[}.$$

Dans la suite on va utiliser les définitions suivantes

$$C_0^{2\alpha} (\Sigma_\omega) := \left\{ f \in C^{2\alpha} (\Sigma_\omega) \text{ avec } f(0,0) = 0 \right\},$$

$$C_0^{2\alpha} ([0,1] \times [0,\omega]) := \left\{ f \in C^{2\alpha} ([0,1] \times [0,\omega]) \text{ avec } f = 0 \text{ sur } \{0\} \times [0,\omega] \right\}$$

et

$$C_b^{2\alpha} (]-\infty,0] \times [0,\omega]) := \left\{ f \in C^{2\alpha} (]-\infty,0] \times [0,\omega]) : \max_{\substack{x\in]-\infty,0] \\ \theta\in[0,\omega]}} \left| g^- (x,\theta) \right| < \infty \right. \\ \left. \text{avec } \lim_{x\to-\infty} g^- (x,\theta) = 0 \text{ pour } \theta \in [0,\omega] \right\}$$

Par la suite de ces deux changements de variables, un lien entre les seconds membres doit être précisé. Celui-ci est formulé dans les deux propositions suivantes.

Proposition 4.1.1 *Soit* $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. *Alors,*

$$\begin{aligned} h_- \in C_0^{2\alpha} \left(\overline{\Sigma_\omega}\right) &\Leftrightarrow k_- \in C_0^{2\alpha} ([0,1] \times [0,\omega]) \\ &\Leftrightarrow g^- \in C_b^{2\alpha} (]-\infty,0] \times [0,\omega]). \end{aligned}$$

Preuve.

$*$) Soit $h_- \in C_0^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega}\right)$ avec $0 < 2\alpha < 1$, alors h_- est continue et nulle à l'origine, ce qui signifie que

$$h_-(0,0) = 0 = \lim_{\rho\to 0} h_-(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \lim_{\rho\to 0} k_-(\rho,\theta),$$

alors la fonction k_- est nulle sur $\{0\}\times[0,\omega]$. De plus, pour ρ, $\rho^{'} \in [0,1]$ avec $\rho < \rho^{'}$ et θ, $\theta' \in [0,\omega]$, on a

$$|k_-(\rho,\theta) - k_-(\rho',\theta')| = \left|h_-\left(\rho e^{i\theta}\right) - h_-\left(\rho' e^{i\theta'}\right)\right| \le M\left|\rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'}\right|^{2\alpha}.$$

où M est la constante de Hölder liée à h_-. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left|\rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'}\right| &\le \left|(\rho-\rho')e^{i\theta} + \rho'\left(e^{i\theta} - e^{i\theta'}\right)\right| \\
&\le |\rho-\rho'| + \sqrt{2}.\rho'\sqrt{1-\cos(\theta-\theta')} \\
&\le |\rho-\rho'| + 2\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)} \\
&\le c\left[|\rho-\rho'| + |\theta-\theta'|\right]
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité

$$|k_-(\rho,\theta) - k_-(\rho',\theta')| \le C\left[|\rho-\rho'| + |\theta-\theta'|\right]^{2\alpha}.$$

$*$) Supposons maintenant que $k_- \in C^{2\alpha}([0,1]\times[0,\omega])$. Ainsi, k_- est continue par rapport à chaque variable ; en particulier, elle est continue et bornée par rapport à ρ, alors, du fait de ce changement

$$g_\delta(x,\theta) = \rho^2 k^\epsilon(\rho,\theta) = e^{2x}k^\epsilon(e^x,\theta),$$

on obtient

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^2 k_-(\rho,\theta) = 0 = \lim_{x\to-\infty} g^-(x,\theta) = 0,$$

ce qui signifie que S se transformé en $\{-\infty\}\times[0,\omega]$.

Cependant, pour (x,θ) et (x',θ') sont dans $]-\infty,0]\times[0,\omega]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|g^-(x,\theta) - g^-(x',\theta')\right| \\
&\le \left|e^{2x}k_-(e^x,\theta) - e^{2x'}k_-(e^x,\theta)\right| + e^{2x'}\left|k_-(e^x,\theta) - k_-\left(e^{x'},\theta'\right)\right| \\
&\le |k_-(e^x,\theta)|\left|e^{2x} - e^{2x'}\right| + \left|k_-(e^x,\theta) - k_-\left(e^{x'},\theta'\right)\right|.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \left]x, x'\right[$, tel que

$$\left| e^{2x} - e^{2x'} \right| \leq 2e^{c} \left| x' - x \right| \leq 2 \left| x' - x \right| .$$

De plus, la fonction k_{-} est continue sur $[0,1] \times [0, \omega]$, alors

$$\left| k_{-} \left(e^{x}, \theta \right) \right| \leq \sup_{[0,1]\times[0,\omega]} \left| k_{-} \left(\rho, \theta \right) \right| = C.$$

Cependant, on a

$$0 \leq \lim_{\sigma \to 0} \sup_{|x'-x| \leq \sigma} \frac{\left| e^{2x} - e^{2x'} \right|}{\left| x' - x \right|^{2\alpha}} \leq \lim_{\sigma \to 0} \sup_{|x'-x| \leq \sigma} \frac{2}{\left| x' - x \right|^{2\alpha - 1}} = 0.$$

alors

$$\left| e^{2x} - e^{2x'} \right| \leq \epsilon \left| x' - x \right|^{2\alpha},$$

donc

$$\left| g^{-} \left(x, \theta \right) - g^{-} \left(x', \theta' \right) \right| \leq 2.\epsilon.C \left| x' - x \right|^{2\alpha} + M \left| \left(e^{x}, \theta \right) - \left(e^{x'}, \theta' \right) \right|^{2\alpha}$$

où M est la constante de Hölder liée à k_{-}. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left\| \left(e^{x}, \theta \right) - \left(e^{x'}, \theta' \right) \right\| &\leq \left| e^{x} - e^{x\prime} \right| + \left| \theta - \theta' \right| \\ &\leq 2 \left(\left| x - x' \right| + \left| \theta - \theta' \right| \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| g^{-} \left(x, \theta \right) - g^{-} \left(x', \theta' \right) \right| &\leq 2\epsilon C \left| x' - x \right|^{2\alpha} + 2^{2\alpha} M \left(\left| x - x' \right| + \left| \theta - \theta' \right| \right)^{2\alpha} \\ &\leq \left(2\epsilon C + 2^{2\alpha} M \right) . \left(\left| x - x' \right| + \left| \theta - \theta' \right| \right)^{2\alpha}, \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left| g^{-} \left(x, \theta \right) - g^{-} \left(x', \theta' \right) \right| \leq M. \left\| \left(x, \theta \right) - \left(x', \theta' \right) \right\|^{2\alpha}.$$

Remarquons, que la fonction g^{-} est nécessairement bornée sur $\left]-\infty, 0\right] \times [0, \omega]$. En effet

$$\left| g^{-} \left(x, \theta \right) \right| = \left| e^{2x} k_{-} \left(e^{x}, \theta \right) \right| \leq \left| k_{-} \left(e^{x}, \theta \right) \right| \leq \max_{(\rho,\theta) \in [0,1]\times[0,\omega]} \left| k_{-} \left(\rho, \theta \right) \right| .$$

$*$) Supposons que $g^{-} \in C_{b}^{2\alpha} \left(\left]-\infty, 0\right] \times [0, \omega] \right)$. Pour cette étape, on s'inspire du travail [31, Lemme 2]. D'après la relation suivante

$$h^{\epsilon}(\rho e^{i\theta}) = \rho^{-2} g_{\delta} \left(\ln \rho, \theta \right),$$

et lorsque $(\rho e^{i\theta})$, $(\rho' e^{i\theta'}) \in \overline{\Sigma_\omega}$, tels que $0 < \rho < \rho' \leq 1$ et $\left\| \rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'} \right\| \leq \epsilon$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| h_-(\rho e^{i\theta}) - h_-(\rho' e^{i\theta'}) \right| \\
&\leq \left| \rho^{-2} \left(g^- (\ln \rho, \theta) - g^- (\ln \rho', \theta') \right) \right| + \left| \left(\rho^{-2} - (\rho')^{-2} \right) g^- (\ln \rho', \theta') \right| \\
&\leq \rho^{-2} \left[\left| \ln \rho - \ln \rho' \right| + \left| \theta - \theta' \right| \right]^{2\alpha} \sup \frac{\left| g^- (\ln \rho, \theta) - g^- (\ln \rho', \theta') \right|}{\left[\left| \ln \rho - \ln \rho' \right| + \left| \theta - \theta' \right| \right]^{2\alpha}} \\
&+ \left| \left(\rho^{-2} - (\rho')^{-2} \right) g^- (\ln \rho', \theta') \right|.
\end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \left]\rho, \rho'\right[$, tel que

$$\left| \ln \rho - \ln \rho' \right| \leq \frac{1}{c} \left| \rho - \rho' \right| \text{ et } \left| \rho^{-2} - (\rho')^{-2} \right| \leq \frac{1}{c} \left| \rho - \rho' \right|.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left| h_-(\rho e^{i\theta}) - h_-(\rho' e^{i\theta'}) \right| &\leq \rho^{-2} c^{-2\alpha} \left[\left| \rho - \rho' \right| + c \left| \theta - \theta' \right| \right]^{2\alpha} M \\
&+ \frac{1}{c} . \sup_{\rho', \theta'} \left| g^- (\ln \rho', \theta') \right| \left| \rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'} \right|.
\end{aligned}$$

De l'inégalité triangulaire $\left| \rho - \rho' \right| \leq \left| \rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'} \right|$ et le fait que ρ, $\rho\prime \in \left]0, 1\right]$, on en déduit qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\left[\left| \rho - \rho' \right| + \rho \left| \theta - \theta' \right| \right]^{2\alpha} \leq C_1 \left| \rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'} \right|^{2\alpha},$$

et

$$\frac{1}{c} \sup_{\rho', \theta'} \left| g^- (\ln \rho', \theta') \right| \left| \rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'} \right| \leq C_2 \left| \rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'} \right|^{2\alpha}.$$

La deuxième estimation est vraie car

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\left\| \rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'} \right\| \leq \epsilon} \frac{\sup_{\rho', \theta'} \left| g^- (\ln \rho', \theta') \right|}{c \left| \rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'} \right|^{2\alpha - 1}} = 0;$$

par conséquent

$$\left| h_-(\rho e^{i\theta}) - h_-(\rho' e^{i\theta'}) \right| \leq C \left| \rho e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta'} \right|^{2\alpha}.$$

Remarque 4.1.1 *Il est clair que, si* $\lim_{x \to -\infty} h^\epsilon(e^{x+i\theta})$ *existe et est égale à* $h^\epsilon(0,0)$*, alors, en utilisant le fait que* $g_\delta(x, \theta) = e^{2x} h^\epsilon(e^{x+i\theta})$ *et la continuité uniforme, on trouve que*

$\lim\limits_{x\to-\infty} g^-(x,\theta) = 0$, *mais cela ne signifie pas* $h^\epsilon(0,0) = 0$. *Dans le cas, où* $h^\epsilon(0,0) = 0$, *alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} g_\delta(x,\theta) = 0$ *ce qui signifie que* $|g_\delta(x,\theta)| \leq \epsilon e^{2x}$ *au voisinage de* $-\infty$. *Par conséquent, près de l'infini, la solution* u^- *peut être non nulle parce que* $\lim\limits_{x\to-\infty} u^-(x,\theta) = \lim\limits_{\rho\to 0} \nu_-(\rho,\theta)$, *ainsi, on peut imposer sur* $\{+\infty\} \times [0,\omega]$ *la condition suivante*

$$\lim_{x\to-\infty} u^-(x,\theta) = f_-(\theta).$$

De la même manière, on donne la proposition suivante qui donne un lien entre les secondes membre dans la deuxième régions

Proposition 4.1.2 *Soit* $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. *Alors,*

$$\begin{aligned} h_+^\epsilon \in C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^\epsilon}\right) &\Leftrightarrow h_+^\epsilon \in C^{2\alpha}([1,1+\epsilon]\times[0,\omega]) \\ &\Leftrightarrow \quad g_\delta^+ \in C^{2\alpha}([0,1]\times[0,\omega]). \end{aligned}$$

Remarque 4.1.2 *La fonction* g_δ *est Hölderienne sur* $]-\infty,\delta]$ *si et seulement si*

$$g_\delta^+(0) = g^-(0).$$

Traduisons maintenant les régularités de $\left(w_-, w_+^\epsilon\right)$ à partir de $\left(\nu_-, \nu_+^\epsilon\right)$, puis de ces derniers à $\left(u^-, u_\delta^+\right)$. Pour la première étape, nous utilisons le fait que $w^\epsilon(\rho e^{i\theta}) = \nu^\epsilon(\rho,\theta)$. Et pour la deuxième, nous utilisons le fait que $u_\delta(x,\theta) = \nu^\epsilon(\rho,\theta)$ et les relations suivantes

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} u_\delta(x,\theta) = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \nu^\epsilon(\rho,\theta), \\ &\frac{\partial^2}{\partial^2 x} u_\delta(x,\theta) = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \nu^\epsilon(\rho,\theta) + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 \rho} \nu^\epsilon(\rho,\theta), \\ &\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_\delta(x,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nu^\epsilon(\rho,\theta), \\ &\frac{\partial}{\partial \theta} u_\delta(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \nu^\epsilon(\rho,\theta), \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x \partial \theta}(x,\theta) = \rho \frac{\partial^2 \nu^\epsilon}{\partial \rho \partial \theta}(\rho,\theta), \quad \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial \theta \partial x}(x,\theta) = \rho \frac{\partial^2 \nu^\epsilon}{\partial \theta \partial \rho}(\rho,\theta),$$

il suffit donc d'examiner l'höldériènité de la fonction

$$(x,\theta) \longrightarrow u_\delta(x,\theta) := e^{mx} \nu^\epsilon(e^x,\theta)$$

sur $]-\infty,0] \times [0,\omega]$, quand $\nu^\epsilon \in C_0^{2\alpha}([0,1]\times[0,\omega])$.

Lemme 4.1.1 *Soit* $\nu^{\epsilon} \in C_0^{2\alpha}([0,1] \times [0,\omega])$, $0 < 2\alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$. *Alors, la fonction* u^- *définie sur* $]-\infty, 0] \times [0,\omega]$ *par*

$$u^-(x,\theta) = e^{mx}\nu_-(e^x,\theta)$$

est dans $C_b^{2\alpha}(]-\infty,0] \times [0,\omega])$.

Preuve. Il suffit d'ajuster la dernière étape de la démonstration dans la Proposition 4.1.1.

Remarque 4.1.3 *Le même résultat reste valable pour* u_δ^+.

En conclusion,

1) $\left(h_-, h_+^{\epsilon}\right) \in C_0^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega}\right) \times C^{2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^{\epsilon}}\right)$ si, et seulement si

$$\left(g^-, g_\delta^+\right) \in C_b^{2\alpha}(]-\infty,0] \times [0,\omega]) \times C^{2\alpha}([0,1] \times [0,\omega]).$$

2) $\left(w_-, w_+^{\epsilon}\right) \in C_0^{1,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega}\right) \times C^{1,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^{\epsilon}}\right)$ si, et seulement si

$$\left(u^-, u_\delta^+\right) \in C_b^{1,2\alpha}(]-\infty,0] \times [0,\omega]) \times C^{1,2\alpha}([0,1] \times [0,\omega]).$$

3) $\left(w_-, w_+^{\epsilon}\right) \in C_0^{2,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega}\right) \times C^{2,2\alpha}\left(\overline{\Sigma_\omega^{\epsilon}}\right)$ si, et seulement si

$$\left(u^-, u_\delta^+\right) \in C_b^{2,2\alpha}(]-\infty,0] \times [0,\omega]) \times C^{2,2\alpha}([0,1] \times [0,\omega]).$$

4.2 Formulation abstraite

Rappelons que l'espace $C_b^{2\alpha}(]-\infty,0] \times [0,\omega])$ désigne l'ensemble des fonctions bornées, $2\alpha-$höldériennes uniformément sur le domaine $]-\infty,0] \times [0,\omega]$. Cet espace peut être reformulé comme l'intersection de deux espaces distincts (Voir [32])

- d'une part, de $C_b^{2\alpha}(]-\infty,0]; C([0,\omega]))$ l'ensemble des fonctions $2\alpha-$Höldériennes uniformément sur $]-\infty,0]$, à valeurs dans $C([0,\omega])$.
- d'autre part, de $L^\infty(]-\infty,0]; C^{2\alpha}([0,\omega]))$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées en norme Höldérienne $C^{2\alpha}([0,\omega])$ presque partout sur $]-\infty,0]$.

Cette égalité fonctionnelle entre espaces de Hölder

$$C_b^{2\alpha}(]-\infty,0] \times [0,\omega]) = C_b^{2\alpha}(]-\infty,0]; C([0,\omega])) \cap L^\infty\left(]-\infty,0]; C^{2\alpha}([0,\omega])\right)$$

joue un rôle fondamental dans le traitement abstrait des équations d'évolution, car elle permet de découpler la régularité conjointe sur le domaine $]-\infty,0]\times[0,\omega]$ en une régularité dans un espace fonctionnel en x et une régularité uniformément en θ.

Ce travail se concentre exclusivement sur le cas où la régularité Hölder porte uniquement sur la première variable, afin de bénéficier des résultats abstraits développés précédemment.

D'une manière précise, on considère le cas où le second membre

$$\left(g^{-},g_{\delta}^{+}\right)\in C_{b}^{2\alpha}\left(]-\infty,0\right];C\left([0,\omega]\right))\times C^{2\alpha}\left([0,1];C\left([0,\omega]\right)\right).$$

En cachant la variable θ, à l'aide des notations vectorielles classiques suivantes

$$u_{\delta}\left(x,\theta\right)=u_{\delta}\left(x\right)\left(\theta\right)\ \text{ et } g_{\delta}\left(x,\theta\right)=g_{\delta}\left(x\right)\left(\theta\right)$$

le problème (4.1.2 peut être reformulé, dans l'espace de Banach complexe $E=C\left([0,\omega]\right)$, sous la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} u_{\delta}''(x)+\mathcal{A}u_{\delta}(x)=g_{\delta}(x), \quad x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,\delta\right[, \\ u_{\delta}(0_{-})=u_{\delta}(0_{+}), \quad \mu_{+}u_{\delta}'(0_{+})=\mu_{-}u_{\delta}'(0_{-}) \\ \lim\limits_{x\to-\infty}u_{\delta}(x)=f_{-}, \quad u_{\delta}'(\delta)=f_{\delta}^{+}. \end{cases}$$

où :

- l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\begin{cases} D\left(\mathcal{A}\right)=\left\{\psi\in C^{2}\left([0,\omega]\right):\psi\left(0\right)=\psi\left(\omega\right)=0\right\}:=C_{0}^{1}\left([0,\omega]\right)\cap C^{2}\left([0,\omega]\right). \\ \left(\mathcal{A}\psi\right)\left(\theta\right)=\psi''\left(\theta\right), \end{cases}$$

  ici $\psi=u_{\delta}\left(x\right)$.

- le second membre du problème est supposé

$$g^{-}\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0\right];E)\ \text{ et } g_{\delta}^{+}\in C^{2\alpha}\left([0,1],E\right).$$

Par un calcul direct de la résolvante de cet opérateur, on peut montrer qu'il satisfait l'hypothèse $(H.1)$. En plus, on sait que

$$\begin{aligned}\overline{D\left(\mathcal{A}\right)}&=\left\{\psi\in C\left([0,\omega]\right):\psi\left(0\right)=\psi\left(\omega\right)=0\right\}\\ &:=C_{0}\left([0,\omega]\right),\end{aligned}$$

ce qui indique que le domaine $\overline{D\left(\mathcal{A}\right)}$ n'est pas dense dans E,.

D'autre part, l'espace d'interpolation $D_{\mathcal{A}}(\alpha,+\infty)$ est caractérisé par

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{A}}(\alpha,+\infty) &= \left\{\psi \in C^{2\alpha}([0,\omega]) : \psi(0)=\psi(\omega)=0\right\} \\ &:= C_0^{2\alpha}([0,\omega]). \end{aligned}$$

Remarque 4.2.1 *En raison des difficultés liées à la détermination précise de la racine carrée de $-\mathcal{A}$ dans le domaine continu $E = C([0,\omega])$ et afin d'éviter cela, on considère $f_\delta^+ = 0$.*

Dans la proposition suivante, on présente le résultat principal de régularité concernant le problème 4.1.2 (par rapport aux variables (x,θ)) comme conséquences immédiates des résultats du chapitre précident.

Proposition 4.2.1 *Soit $g^- \in BUC^{2\alpha}(]-\infty,0]; C([0,\omega]))$, avec $g^-(-\infty,\theta) = 0$ et $g_\delta^+ \in C^{2\alpha}([0,\omega], C([0,\omega]))$ avec $0 < 2\alpha < 1$. Pour $f_- \in C_0^1([0,\omega]) \cap C^2([0,\omega])$,*

1) Le problème (4.1.2) a dmet une unique solution stricte , c'est-à-dire.,

$$\begin{cases} u^- \in BUC^2(]-\infty,0]; C([0,\omega])) \cap BUC(]-\infty,0]; C_0^1([0,\omega]) \cap C^2([0,\omega])), \\ u_\delta^+ \in C^2(0,\delta; C([0,\omega])) \cap C(0,\delta; C_0^1([0,\omega]) \cap C^2([0,\omega])), \end{cases}$$

si

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_-,\ g_\delta^+(0,.) - g^-(0,.) \in C_0([0,\omega]).$$

2) La solution stricte satisfait cette propriété de régularité maximale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u_\delta^+,\ \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} u_\delta^+ \in C^{2\alpha}([0,\delta]; C([0,\omega])) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u^-,\ \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} u^- \in BUC^{2\alpha}(]-\infty,0]; C([0,\omega])) \end{cases}$$

si

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_-, g_\delta^+(0,.) - g^-(0,.) \in C_0^{2\alpha}([0,\omega]).$$

Remarque 4.2.2 *Pour revenir au problème concret $\Delta w^\epsilon = h^\epsilon$, on doit étudier le problème abstrait dans l'espace*

$$\left(g^-,\ g_\delta^+\right) \in L^{-\infty}\left(]-\infty,0]; C^{2\alpha}([0,\omega])\right) \times C\left([0,1], C^{2\alpha}([0,\omega])\right)$$

Puis on utilise les équivalences entre u_δ et w^ϵ (voir la Remarque 4.1.3), et entre g_δ et h^ϵ (voir les Propositions 4.1.1 et 4.1.2).

Chapitre 5

Etude d'un Problème de transmission avec condition aux limites de type Robin

5.1 Position du problème et hypothèses

Considérons dans l'espace de Banach E, le problème de transmission spectrale suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u_\delta''(x) + \mathcal{A}u_\delta(x) - \omega u_\delta(x) = g_\delta(x),\ x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, \delta\right[, \\ u_\delta'(\delta) + \mathcal{H}u_\delta(\delta) = f_\delta^+ \\ u_\delta(0_-) = u_\delta(0_+) \\ \mu_+ u_\delta'(0_+) = \mu_- u_\delta'(0_-) \end{array}\right. \qquad (P_\omega)$$

pour $\delta \in \left]0, 1\right]$ et $\omega > 0$.

Ici,

- les coefficients μ_- et μ_+ sont des constantes réelles strictement positives et distinctes, représentant les propriétés physiques du milieu de chaque côté de l'interface $\{0\}$.
- le terme $f_\delta^+ \in E$ apparaît comme un terme source non homogène dans la condition aux limites abstraite de Robin.
- Les deux opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ supposés linéaires et fermés, avec domaines $D(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{H})$ respectivement, qui ne sont pas nécessairement denses dans E.

Dans ce qui suit, on suppose que $\mathcal{A}_\omega := \mathcal{A} - \omega I$,

$$u_\delta(x) = \left\{\begin{array}{ll} u^-(x), & x \in \left]-\infty, 0\right[, \\ u_\delta^+(x), & x \in \left]0, \delta\right[, \end{array}\right.$$

et

$$g_\delta(x) = \begin{cases} g^-(x) \ , \ x \in \left]-\infty, 0\right[, \\ g_\delta^+(x) \ , \ x \in \left]0, \delta\right[. \end{cases}$$

où le second membre (g^-, g_δ^+) est considéré dans $BUC^{2\alpha}\left(\left]-\infty, 0\right]; E\right) \times C^{2\alpha}\left(\left[0, \delta\right]; E\right)$ avec $0 < 2\alpha < 1$,

L'objectif est d'établir des hypothèses appropriées sur les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$, ainsi que des conditions sur les données f_δ^+ et g_δ, pour que le problème (P_ω) admette une solution stricte et unique. Plus précisément, on cherche une fonction $u_\delta = (u^-, u_\delta^+)$ vérifie

$$\begin{cases} u^- \in BUC^{2\alpha}\left(-\infty, 0; E\right) \cap BUC\left(-\infty, 0; D\left(\mathcal{A}\right)\right) \\ u_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left(0, \delta; E\right) \cap C\left(0, \delta; D\left(\mathcal{A}\right)\right) \\ u_\delta^+(\delta) \in D\left(\mathcal{H}\right) . \end{cases} \tag{Strict-S}$$

en plus, on doit aussi examiner la régularité maximale suivante

$$\begin{cases} (u^-)'' , \ \mathcal{A}u^- \in BUC^{2\alpha}\left(\left]-\infty, 0\right]; E\right) \\ \left(u_\delta^+\right)'' , \ \mathcal{A}u_\delta^+ \in C^{2\alpha}\left(\left[0, \delta\right]; E\right) . \end{cases}$$

Pour cela, on va résoudre ces deux problèmes auxiliaires

$$\begin{cases} \left(u_\delta^+\right)''(x) + \mathcal{A}_\omega u_\delta^+(x) = g_\delta^+(x), \quad x \in \left]0, \delta\right[, \\ \left(u_\delta^+\right)'(\delta) + \mathcal{H}u_\delta^+(\delta) = f_\delta^+, \ \text{et} \ u_\delta^+(0_+) = \psi, \end{cases} \tag{P_ω^+}$$

et

$$\begin{cases} u^-(x) + \mathcal{A}_\omega u^-(x) = g^-(x), \ \text{pour} \ x \in \left]-\infty, 0\right[, \\ (u^-)'(0_-) = \varphi, \end{cases} \tag{P_ω^-}$$

tels que ψ et φ sont des éléments auxiliaires donnés dans E.

5.2 Hypothèses et principaux résultats

Dans ce chapitre, on suppose que les opérateurs $\mathcal{A}_\omega$ et $\mathcal{H}$ vérifient les conditions suivantes :

1. L'hypothèse principale d'ellipticité : L'opérateur $\mathcal{A}_\omega$ est linéaire et fermé de domaine $D(\mathcal{A}_\omega) \subset E$, pas nécessairement dense. De plus, il existe deux constantes $\omega_0 > 0$ et $C > 1$ telles que :

$$\begin{cases} \rho(\mathcal{A}_\omega) \supset \left[\omega_0 \, , +\infty\right[, \ \text{et pour tout} \ \lambda \in \left[\omega_0, +\infty\right[\\ \left\|(\mathcal{A}_\omega - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \dfrac{C}{1 + \lambda - \omega_0} \end{cases} \tag{A1}$$

cette hypothèse reste vraie pour tout $\omega > \omega_0$.

On utilisera également les hypothèses suivantes de fermabilité et d'inversibilité

$$\begin{cases} \mathcal{H} \text{ est un opérateur linéaire fermé de domaine } D(\mathcal{H}) \\ \mathcal{B}_\omega - \mathcal{H} \text{ est fermable, et } 0 \in \rho(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}), \\ (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left((D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}\right) \subset D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H}), \\ \mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left((D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}\right) \subset (D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}, \end{cases} \tag{A2}$$

avec cette relation de commutativité

$$\mathcal{B}_\omega{}^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1} = \left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega{}^{-1}. \tag{A3}$$

On suppose aussi que l'opérateur

$$\Pi_{\omega,b} := I + 2b\left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{H} - \mathcal{B}_\omega}\right)^{-1},$$

est inversible pour tout $b \in [-1, 1]$ c'est à dire

$$0 \in \rho\left(\Pi_{\omega,b}\right). \tag{A4}$$

Pour garantir la définition de certain compositions on impose l'hypothèse

$$D\left(\mathcal{B}_\omega\right) \subset D\left(\mathcal{H}\right) \tag{A5}$$

Cependant, certains travaux récents ont examiné la situation inverse, à savoir $D\left(\mathcal{H}\right) \subset D\left(\mathcal{B}_\omega\right)$, qui correspond à un cadre analytique différent avec ses propres exigences particulières.

5.3 Remarques et conséquences supplémentaires des hypothèses

Voici quelques remarques et conséquences qui découlent des hypothèses précédentes

1. Sous hypothèse $(A1)$, l'opérateur $\mathcal{B}_\omega$ est inversible et génère un semi-groupe analytique (pas fortement continue en 0), ensuite, pour $\omega \geq \omega_0$, l'opérateur $\mathcal{B}_\omega$ est un opérateur sectoriel d'angle strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Plus précisément, il existe un angle $\theta_{\mathcal{A}} \in (0, \pi)$ tel que :

$$\sigma(\mathcal{B}_\omega) \subset \overline{\mathbb{S}_{\frac{\theta_{\mathcal{A}}}{2}}} := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \frac{\theta_{\mathcal{A}}}{2} \right\}$$

et

$$\|(\lambda I-\mathcal{B}_\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1+|\lambda|}, \quad \forall \lambda \notin \mathbb{S}_\varphi,\ \frac{\theta_{\mathcal{A}}}{2}<\varphi<\pi,$$

où C est une constante positive indépendante de ω, ici le secteur $\mathbb{S}_\theta$ est défini par :

$$\mathbb{S}_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,:\, |\arg(z)|<\theta\}.$$

On peut alors résumer les propriétés de $\mathcal{B}$ comme suit :

$$0 \in \rho(\mathcal{B}_\omega), \quad \mathcal{B}_\omega \in Sect(\tfrac{\theta_{\mathcal{A}}}{2}) \quad \text{pour certains } \tfrac{\theta_{\mathcal{A}}}{2} \in [0,\pi/2[. \tag{5.3.1}$$

2. Si $\mathcal{H}$ vérifie le même type d'hypothèse que $\mathcal{B}_\omega$ c'est-à-dire

$$0 \in \rho(-\mathcal{H}), \quad -\mathcal{H} \in Sect(\theta_{\mathcal{H}}) \quad \text{pour certains } \theta_{\mathcal{H}} \in [0,\pi/2[, \tag{5.3.2}$$

et que

$$\overline{D(\mathcal{B}_\omega)+D(\mathcal{H})}=E, \quad \mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}\mathcal{H}^{-1}=\mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}_{\omega_0}^{-1}.$$

$$\forall \lambda \geq \omega : (\mathcal{A}_\omega-\lambda I)^{-1}\mathcal{H}^{-1}=\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{A}_\omega-\lambda I)^{-1}$$

or, sous l'hypothèse $(A.5)$ et lorsque $\overline{D(\mathcal{H})}=E$, on trouve que

$$\overline{D(\mathcal{B}_\omega)+D(\mathcal{H})}=\overline{D(\mathcal{H})}=E.$$

Dans ce cas, l'opérateur $\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}$ est fermable d'inverse borné, selon la théorie de Da Prato et Grisvard [6], Théorème 3.7, p. 324 et Théorème 3.11, p. 328.

Dans ce cas, les hypothèses $(A.2)$ et $(A.5)$ sont réduit au

$$\begin{cases} \mathcal{H} \text{ est un opérateur linéaire fermé de domaine dense } D(\mathcal{H}) \supset D(\mathcal{B}_\omega). \\ \mathcal{B}_\omega-\mathcal{H} \text{ est fermable, et } 0 \in \rho(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}}), \\ (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}((D(\mathcal{B}_\omega),X)_{1-\theta,\infty}) \subset D(\mathcal{B}_\omega), \\ \mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}((D(\mathcal{B}_\omega),X)_{1-\theta,\infty}) \subset (D(\mathcal{B}_\omega),X)_{1-\theta,\infty}, \end{cases} \tag{A' 2}$$

Dans l'autre cas $D(\mathcal{H}) \subset D(\mathcal{B}_\omega)$, on a $D(\mathcal{B}_\omega)+D(\mathcal{H})=D(\mathcal{B}_\omega)$, donc pour que

$$\overline{D(\mathcal{B}_\omega)+D(\mathcal{H})}=E.$$

on doit supposer $\overline{D(\mathcal{B}_\omega)}=E$.

3. Sous l'hypothèse $(A1)$, l'opérateur $\left(I+be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)$ est inversible d'inverse borné, pour tout $b\in[-1,1]$ voir [26]. Ce résultat peut également être obtenu en utilisant une approche alternative basée sur le paramètre spectral ω, et une estimation du semi-groupe analytique établie par Dore et Yakubov [12] Lemme 2.6, p. 11., pour tout $\sigma>0$, il existe une constante $C>1$ tel que :

$$\|(\mathcal{A}-\omega I)^{\alpha}e^{-x(\mathcal{A}-\omega I)^{1/2}}\|\leq Ce^{-\sigma x|\omega|^{1/2}},\quad \alpha\in\mathbb{R},\ x\geq x_0>0.$$

La constante C est indépendante de ω, ce qui donne une borne uniforme sur la norme :

$$\left\|be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right\|\leq Ce^{-2\sigma\delta|\omega|^{1/2}}$$

Par conséquent, pour ω assez grand (ici $|b|\leq 1$), on a $\left\|be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right\|\leq 1$, ce qui implique que l'opérateur

$$\left(I+be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\in\mathcal{L}\left(E\right)$$

est borné et inversible. De plus, pour tout $|b|\leq 1$ suffisamment petit, l'opérateur $(I-be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}$ *est stable sur l'espace d'interpolation réel* $(D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}$*, pour tout* $\theta\in(0,1)$ *: i.e,*

$$(I-be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\in\mathcal{L}\left((D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}\right).$$

Cela découle du fait que les calculs fonctionnels holomorphes des générateurs de semi-groupes analytiques préservent la structure des espaces d'interpolation. *(Voir [29] et [34]). Pour la même raison, on a*

$$(\Pi_{\omega,b})^{-1}\in\mathcal{L}\left((D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}\right).$$

4. Si l'opérateur somme $\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}$ est fermé et inversible, c'est-à-dire. $0\in\rho(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})$, alors, l'hypothèse $(A2)$ est toujours vérifié, et l'hypothèse $(\mathcal{A}3)$ devient

$$\mathcal{B}_\omega{}^{-1}\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right)^{-1}=\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega{}^{-1}. \tag{A'3}$$

5. Sous $(A1)$, $(A2)$, et $(A3)$, et comme $D(\mathcal{B}_\omega)\subset(D(\mathcal{B}_\omega),X)_{1-\theta,\infty}$, il est alors facile de vérifier que

$$\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}(D(\mathcal{B}_\omega))\subset D(\mathcal{B}_\omega)\cap D(\mathcal{H}),$$

et que

$$\mathcal{B}\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}(D(\mathcal{B}_\omega))\subset(D(\mathcal{B}_\omega),X)_{1-\theta,\infty}.$$

5.4 Lemmes techniques

On donne maintenant quelques lemmes techniques qui seront utiles pour la suite de ce chapitre.

Lemme 5.4.1 *Sous hypothèses* $(A1)$-$(A3)$*, on a les commutativité suivantes*

$$\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1} = (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega.$$

sur $D(\mathcal{B}_\omega)$*, et*

$$\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\mathcal{H} = \mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}.$$

sur $D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H})$.

Preuve. Puisque $\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})} = (\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})$ sur $D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H})$, donc pour $\phi \in D(\mathcal{B}_\omega)$, donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\phi &= \mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega{}^{-1}\mathcal{B}_\omega\phi \\
&= \mathcal{B}_\omega\mathcal{B}_\omega{}^{-1}(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega\phi \\
&= (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega\phi.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $\phi \in (D(\mathcal{B}_\omega), X)_{1-\theta,\infty}$, on a

$$(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\phi = \phi,$$

en plus

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\phi &= -(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\phi + \mathcal{B}_\omega\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\phi \qquad (5.4.1)\\
&= -\phi + \mathcal{B}_\omega\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\phi.
\end{aligned}$$

remarquons aussi que

$$\mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\phi \in (D(\mathcal{B}_\omega), X)_{1-\theta,\infty}$$

Or, pour tout $\phi \in D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H})$, on a

$$\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})\phi = \phi$$

donc,

$$\begin{aligned}
\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\mathcal{H}\phi &= -\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})\phi + \overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\mathcal{B}_\omega\phi \qquad (5.4.2)\\
&= -\phi + \overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\mathcal{B}_\omega\phi.
\end{aligned}$$

Par conséquent, sur $D(\mathcal{B}_\omega)$, l'hypothèse $(A3)$ donne

$$\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1} = (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega.$$

ainsi, par (5.4.1) et (5.4.2) , on en déduit que, pour $\phi \in D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H})$,

$$\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\mathcal{H}\phi = \mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\phi.$$

Lemme 5.4.2 *Sous les hypothèses* $(A1) \sim (A3)$, *les opérateurs* $\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}$ *et* $\left(I - e^{2\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}$ *commutent.*

Preuve. Il est bien connu que

$$\left(I - e^{2\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1} = I + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'} \frac{e^{2z}}{1 - e^{2z}} \left(\lambda I - \mathcal{B}_\omega\right)^{-1} dz$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1} \left(I - e^{2\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1} \\
&= \left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'} \frac{e^{2z}}{1 - e^{2z}} \left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1} \left(\lambda I - \mathcal{B}_\omega\right)^{-1} dz \\
&= \left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'} \frac{e^{2z}}{1 - e^{2z}} \left(\lambda I - \mathcal{B}_\omega\right)^{-1} \left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1} dz \\
&= \left(I - e^{2\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1} \left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

On peut également établir que

$$\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1} e^{x\mathcal{B}_\omega} = e^{x\mathcal{B}_\omega} \left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}$$

En conséquence, l'opérateur $\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}$ commute avec

1) $S_{\omega,b} = -be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}$, et donc commute aussi avec $V_{\omega,b}$ défini par $V_{\omega,b} + I = (I + S_{\omega,b})^{-1}$. Ici on a utiliser ce résultat "Si un opérateur inversible T dans E commute avec un opérateur borné $\mathcal{A}$", alors T^{-1} commute avec $\mathcal{A}$ voir [20], p.171, Problème 5.37. Par conséquent $(I + S_{\omega,b})^{-1}$ est stable par l'interpolation c'est-à-dire

$$(I + S_{\omega,b})^{-1} \left(D_{\mathcal{B}_\omega}(\theta, \infty)\right) \subset D_{\mathcal{B}_\omega}(\theta, \infty).$$

2) $T_{\omega,b} = 2b\left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{H} - \mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}$, et par conséquent commute aussi avec

$$\Pi_{\omega,b} = (I + T_{\omega,b})^{-1} \text{ et } \Pi_{\omega,b}^{-1}.$$

3) $U_{\omega,b} = -T_{\omega,b}(I + T_{\omega,b})^{-1}$,

Pour $\omega \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, considérons la famille d'opérateurs linéaires de domaines

$$D\left(\Lambda_{\omega,b}\right) = D\left(\mathcal{H}\right) \cap D\left(\mathcal{B}_\omega\right)$$

défini par

$$\Lambda_{\omega,b} = (\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega + \mathcal{H}).$$

Lemme 5.4.3 *Sous les hypothèses (A1)-(A4). Alors, pour tout $\omega \geq 0$ et $b \in [-1, 1]$ l'opérateur $\Lambda_{\omega,b}$ est fermable, sa fermeture est inversible avec*

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1} = (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1},$$

et

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1} = (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left(I + W_{\omega,b}\right),$$

où $W_{\omega,b} \in \mathcal{L}(E)$,

$$(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}W_{\omega,b} = W_{\omega,b}(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}$$

et

$$W_{\omega,b}(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{B}_\omega^k).$$

Preuve. On adapte ici la démonstration du Lemme 2.1 donné dans [5]. L'opérateur $\Lambda_{\omega,b}$ peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\omega,b} &= (\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega + \mathcal{H}) \\
&= (\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + 2be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega \\
&= \left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + 2be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur borné et $(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})$ est fermable, alors il s'ensuit que l'opérateur

$$\Lambda_{\omega,b} = \left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + 2b\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}$$

est fermable, étant la combinaison d'un opérateur borné et d'un opérateur fermable, par somme et produit (voir Kato [20] pour plus de détails sur la fermabilité de ces combinaisons d'opérateurs)

De plus, on a

$$\Lambda_{\omega,b} = \left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\left(I + 2b\left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\right)(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}),$$

donc

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda_{\omega,b}} &= \left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})} + 2b\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} \\
&= \left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\left(I + 2b\left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}\right)\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})} \\
&= \left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\Pi_{\omega,b}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})},
\end{aligned}$$

où

$$\Pi_{\omega,b} = I + 2b\left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}$$

Donc sous les hypothèses $(A3)$ et $(A4)$, il vient que $0 \in \rho(\overline{\Lambda_{\omega,b}})$ avec

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1} = (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1},$$

Par conséquent, on a

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1} = (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left(I + T_{\omega,b}\right)^{-1}\left(I + S_{\omega,b}\right)^{-1},$$

tels que

$$\begin{aligned}
T_{\omega,b} &= 2b\left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}, \\
S_{\omega,b} &= -be^{2\delta\mathcal{B}_\omega},
\end{aligned}$$

sont des opérateurs linéaires bornés sur E, et grâce aux propriétés des semi-groupe on a

$$T_{\omega,b}(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{B}_\omega^k), \quad S_{\omega,b}(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{B}_\omega^k),$$

pour $b \neq 0$. On définit maintenant les deux opérateurs bornés suivants

$$\begin{aligned}
U_{\omega,b} &= -T_{\omega,b}(I + T_{\omega,b})^{-1} \in \mathcal{L}(E), \\
V_{\omega,b} &= -S_{\omega,b}(I + S_{\omega,b})^{-1} \in \mathcal{L}(E),
\end{aligned}$$

ces deux opérateurs satisfont les identités suivantes

$$(I + T_{\omega,b})^{-1} = I + U_{\omega,b} \text{ et } \; V_{\omega,b} + I = (I + S_{\omega,b})^{-1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1} &= (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1} \left(I + U_{\omega,b}\right) \left(I + V_{\omega,b}\right) \\
&= (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1} \left(I + U_{\omega,b} + V_{\omega,b} + U_{\omega,b} V_{\omega,b}\right) \\
&:= (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1} \left(I + W_{\omega,b}\right)
\end{aligned}$$

En vertu du lemme précédent, on en déduit que

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1} U_{\omega,b} &= U_{\omega,b} (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}, \\
(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1} V_{\omega,b} &= V_{\omega,b} (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1},
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1} W_{\omega,b} = W_{\omega,b} (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}$$

et comme

$$U_{\omega,b}(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{B}_\omega^k), \text{ et } V_{\omega,b}(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{B}_\omega^k),$$

alors $W_{\omega,b}(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{B}_\omega^k)$.

Remarque 5.4.1 *Ce lemme garantit l'inversibilité de la fermeture des opérateurs suivants*

$$\Lambda_{\omega,1} = (\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + (\mathcal{B}_\omega + \mathcal{H}) e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}$$

et

$$\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}} = (\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + \frac{1-\mu}{1+\mu} (\mathcal{B}_\omega + \mathcal{H}) e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}.$$

Cette inversibilité permet alors de justifier la représentation explicite de la solution.

Lemme 5.4.4 *Sous l'hypothèse $(A2)$, on a*

$$(\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1} \left((D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}\right) \subset D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H}).$$

et l'image de $(D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}$ (resp. de $D(\mathcal{B}_\omega)$) sous $\Lambda_{\omega,b'} (\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1}$ reste dans le même espace, c'est-à-dire

$$\Lambda_{\omega,b'} (\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1} \in \mathcal{L}\left((D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}\right) \; \textit{et } \Lambda_{\omega,b'} (\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1} \in \mathcal{L}\left(D(\mathcal{B}_\omega)\right).$$

Preuve. *Soit* $u \in (D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}$. *On a*

$$(\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1}u = (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}u$$

puisque les opérateurs $\Pi_{\omega,b}^{-1}$ *et* $(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}$ *sont bornés sur l'espace d'interpolation* $(D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}$ alors

$$\Pi_{\omega,b}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}u \in (D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}$$

et ainsi

$$(\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1}u \in D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H}).$$

On définit maintenant

$$v := (\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1}u = (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}u \in D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H}).$$

D'autre part, on a

$$\Lambda_{\omega,b'} = \left(I - b'e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + 2b'e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega$$

donc

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\omega,b'}v &= \left(I - b'e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}u \\
&\quad + 2b'e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}u \\
&= \left(I - b'e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\Pi_{\omega,b}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}u \\
&\quad + 2b'e^{2\delta B_\omega}\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}u
\end{aligned}$$

Pour la première partie, on utilise le fait que les opérateurs $e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}$, $\left(I - b'e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)$, $\Pi_{\omega,b}^{-1}$, et $(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}$ sont bornés sur $D(\mathcal{B}_\omega)$ *et sur l'espace d'interpolation* $(D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}$.
Pour la seconde partie, on s'appuie sur la stabilité de l'espace $(D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}$ sous l'action de $\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}$, comme supposé

$$\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left((D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}\right) \subset (D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}$$

Par conséquent, l'expression complète appartient à l'espace d'interpolation $(D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}$, ce qui démontre la stabilité de $(D(\mathcal{B}_\omega), E)_{1-\theta,\infty}$ par la composition $\Lambda_{\omega,b}(\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1}$.

Remarque 5.4.2 *En conséquence de cette propriété, et du fait que*

$$\overline{\Delta_{\omega,\mu}}^{-1} = \frac{1}{1+\mu}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} \ \ et \ \nabla_{\omega,\mu}^{-1} = \frac{1}{1+\mu}\Lambda_{\omega,-1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1},$$

Il en résulte les inclusions suivantes

$i)$ $\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1}((D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}) \subset D(\mathcal{B}_\omega)\cap D(\mathcal{H})$

$ii)$ $\mathcal{B}_\omega\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1}((D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}) \subset (D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}$

$iii)$ $\Lambda_{\omega,b'}\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1}(D(\mathcal{B}_\omega)) \subset D(\mathcal{B}_\omega)$

$iv)$ $\overline{\Delta_{\omega,\mu}}^{-1}((D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}) \subset (D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}$,

$v)$ $\nabla_{\omega,\mu}^{-1}((D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}) \subset (D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}$,

Proposition 5.4.1 *Sous les hypothèses (A1), (A2) et (A3), on a*

i) l'opérateur $(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}$ commute avec $\Lambda_{\omega,b}$ sur $D(\mathcal{B}_\omega)\cap D(\mathcal{H})$, et avec $\overline{\Lambda}_{\omega,b}^{-1}$.

ii) Les opérateurs $(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})$ et $\overline{\Lambda_{\omega,b}}^{-1}$ commutent sur $D(\mathcal{B}_\omega)\cap D(\mathcal{H})$.

iii) Les opérateurs $\mathcal{B}_\omega$ and $\overline{\Lambda_{\omega,b}}^{-1}$ commutent sur $D(\mathcal{B}_\omega)$.

Preuve .i) Puisque $(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}$ commute avec $W_{\omega,b}$, alors

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda}_{\omega,b}^{-1}(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1} &= (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}(I+W_{\omega,b})(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1} \\
&= (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}(I+W_{\omega,b}) \\
&= (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\overline{\Lambda}_{\omega,b}^{-1}
\end{aligned}$$

Il est clair que, pour $\phi\in D(\mathcal{B}_\omega)\cap D(\mathcal{H})$, on a $\overline{\Lambda_{\omega,b}} = \overline{\Lambda_{\omega,b}}$ et donc

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\omega,b}(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\phi &= \overline{\Lambda_{\omega,b}}(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\overline{\Lambda}_{\omega,b}^{-1}\overline{\Lambda}_{\omega,b}\phi \\
&= \overline{\Lambda_{\omega,b}}\overline{\Lambda}_{\omega,b}^{-1}(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\overline{\Lambda}_{\omega,b}\phi \\
&= (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\overline{\Lambda}_{\omega,b}\phi.
\end{aligned}$$

ii) Soit $\varphi\in D(\mathcal{B}_\omega)\cap D(\mathcal{H})$, donc

$$(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\left(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}}\right)^{-1}\varphi = \left(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}}\right)^{-1}(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\varphi = \varphi$$

et

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\overline{\Lambda_{\omega,b}}^{-1}\varphi &= (\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\overline{\Lambda_{\omega,b}}^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}}\right)^{-1}(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\varphi \\
&= (\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\left(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}}\right)^{-1}\overline{\Lambda_{\omega,b}}^{-1}(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\varphi \\
&= \overline{\Lambda_{\omega,b}}^{-1}(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\varphi,
\end{aligned}$$

iii) Puisque $\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}=(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega$ sur $D(\mathcal{B}_\omega)$, alors, pour $\varphi\in D(\mathcal{B}_\omega)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\omega\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1}\varphi &= \mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I-be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\varphi\\ &= (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega\Pi_{\omega,b}^{-1}(I-be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\varphi\\ &= (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega\Pi_{\omega,b}^{-1}(I-be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\varphi,\end{aligned}$$

d'autre part, on sait que l'opérateur $\mathcal{B}_\omega^{-1}$commute avec $\Pi_{\omega,b}{}^{-1}$ et $(I-be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}$ (voir Kato [20], p. 171, Problème 5.37), donc

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\omega\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1}\varphi &= (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega\Pi_{\omega,b}^{-1}(I-be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\mathcal{B}_\omega\varphi\\ &= (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega\mathcal{B}_\omega^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I-be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\mathcal{B}_\omega\varphi\\ &= (\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,b}^{-1}(I-be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\mathcal{B}_\omega\varphi\\ &= \left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega\varphi,\end{aligned}$$

Considérons maintenant l'opérateur linéaire $\mathcal{K}_b$ défini dans l'espace E par

$$\left\{\begin{array}{l} D(\mathcal{K}_b)=\left\{\xi\in E:(\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1}\xi\in D(\mathcal{B}_\omega)\cap D(\mathcal{H})\right\}\\ \mathcal{K}_b\xi=(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})(\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1}\xi.\end{array}\right.$$

Remarque 5.4.3 *i) Pour $\xi\in D(\mathcal{B}_\omega)\cap D(\mathcal{H})$, on a*

$$\mathcal{K}_b\xi=(\overline{\Lambda_{\omega,b}})^{-1}(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})\xi$$

en plus cet opérateur commute avec $(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}$.
ii) Grâce à l'hypothese (A2) on a cette inclusion

$$(D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}\subset D(\mathcal{K}_b).$$

iii) Dans cette étude, on a supposé que $D(\mathcal{B}_\omega)\subset D(\mathcal{H})$. En se basant sur la représentation de la solution exprimée en $\mathcal{K}_1:=\mathcal{K}$, correspondant au cas $b=1$, on s'intéresse alors à l'opérateur suivant

$$\left\{\begin{array}{l} D(\mathcal{K})=\left\{\xi\in E:(\overline{\Lambda_{\omega,1}})^{-1}\xi\in D(\mathcal{B}_\omega)\right\}\\ \mathcal{K}\xi=(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})(\overline{\Lambda_{\omega,1}})^{-1}\xi.\end{array}\right.$$

En conséquence de l'hypothèse $(\mathcal{A}2)$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} i)\ \mathcal{K}\left(D(\mathcal{B}_\omega)\right)\subset(D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}\\ ii)\ \mathcal{K}\left((D(\mathcal{B}_\omega),X)_{1-\theta,\infty}\right)\subset(D(\mathcal{B}_\omega),E)_{1-\theta,\infty}.\end{array}\right.$$

Lemme 5.4.5 *Supposons (A1)–(A5), les opérateurs suivants* $\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}$, $\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}$,

$$\left(I - \mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1},\ \left(I + \mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega} - \mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1},\ \left((1+\mu)\,I - 2\mu\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}$$

sont bornés, et sur le domaine $D(\mathcal{B}_\omega)$, *on a*

$$I + \mu\left(I - 2\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) = (1+\mu)\,\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1} := \Delta_{\omega,\mu}$$

Preuve. *Pour la première composition* $\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega{}^{-1}$, *il s'agit d'un résultat établi dans [5] Lemme 2.2 page 1457. On reprend ici la démonstration pour plus de clarté. L'*opérateur $\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega{}^{-1}$ est bien défini sur E en plas

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1} &= (\mathcal{B}_\omega + \mathcal{H})(\overline{\Lambda_{\omega,1}})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1} \\
&= (\mathcal{B}_\omega + \mathcal{H})(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1} \\
&= (-\mathcal{B}_\omega + \mathcal{H} + 2\mathcal{B}_\omega)(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1} \\
&= -(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1} \\
&\quad + 2\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}.
\end{aligned}$$

or, on a

$$\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\mathcal{B}_\omega})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1} = \left[I + 2(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(\overline{\mathcal{B} - \mathcal{H}})\right]^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1},$$

Puisque l'opérateur $\mathcal{B}_\omega^{-1}$ commute avec

$$\Pi_{\omega,1} = I + 2\left(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1\mathcal{B}_\omega^{-1} &= -(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1} \\
&\quad + 2\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}.
\end{aligned}$$

Il est maintenant clair que les opérateurs

$$(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1},$$

sont bien définis et bornés sur E d'après l'hypothèse $(A2)$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left[I+\mu\left(I-2\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\right]\mathcal{B}_\omega^{-1} &= (1+\mu)\,\mathcal{B}_\omega^{-1}-2\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\\ &= (1+\mu)\,\mathcal{B}_\omega^{-1}-2e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\end{aligned}$$

appartient à $\mathcal{L}(E)$. On en déduit aussi que les autres opérateurs sont également bornés. On simplifie maintenant

$$\begin{aligned}&I+\mu\left(I-2\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\\ &=(1+\mu)\,I-2\mu\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &=(1+\mu)\,I-2\mu\,(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &=(1+\mu)\,I+2\mu\,(-\mathcal{H}-\mathcal{B}_\omega)\,(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &=(1+\mu)\,I+2\mu\,(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}-2\mathcal{B}_\omega)\,(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &=(1+\mu)\,I+2\mu\,(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\,(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &-4\mu\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega},\end{aligned}$$

sur $D(\mathcal{B}_\omega)$, on a $(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\,(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}=I$, ainsi sur $D(\mathcal{B}_\omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}&I+\mu\left(I-2\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\\ &=(1+\mu)\,I+2\mu\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &-4\mu\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &=\left[(1+\mu)\,(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})\Pi_{\omega,1}+2\mu e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}-4\mu\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right]\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(1+\mu)\,(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})\Pi_{\omega,1}+2\mu e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}-4\mu\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &=(1+\mu)\,(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})\left[I+2\left(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}}\right)^{-1}\right]\\ &+2\mu e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}-4\mu\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &=(1+\mu)\,(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})+2\,(1+\mu)\,\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}}\right)^{-1}\\ &+2\mu e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}-4\mu\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &=(1+\mu)\,I-(1+\mu)\,e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}+2\mu e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}+2\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}}\right)^{-1}\\ &+2\mu\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}}\right)^{-1}-4\mu\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\ &=(1+\mu)\,I-(1-\mu)\,e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}+2\,(1-\mu)\,\mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$
\begin{aligned}
& I+\mu\left(I-2\mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) \\
& =\left[(1+\mu)\, I-(1-\mu)\, e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}+2\,(1-\mu)\, \mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right] \Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1} \\
& =(1+\mu)\left[I-\frac{1-\mu}{1+\mu} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}+2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right] \Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1} \\
& =(1+\mu)\left[\left(I-\frac{1-\mu}{1+\mu} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\right. \\
& \left.+2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right](\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1} \Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1},
\end{aligned}
$$

D'autre part, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
& \left(I-\frac{1-\mu}{1+\mu} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} \\
& =(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})-\frac{1-\mu}{1+\mu} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} \\
& =(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+\frac{1-\mu}{1+\mu} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(-\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})+2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} \\
& =(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+\frac{1-\mu}{1+\mu} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})=\Lambda_{\omega, \frac{1-\mu}{1+\mu}}
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
I+\mu\left(I-2\mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)=(1+\mu)\, \Lambda_{\omega, \frac{1-\mu}{1+\mu}}(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1} \Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}:=\Delta_{\omega,\mu}
$$

Remarque 5.4.4 *Sous hypothèse $(A1)\sim(A4)$, pour tous $\omega\geq 0$ et $\mu>0$, l'opérateur*

$$
\Delta_{\omega,\mu}=(1+\mu)\, \Lambda_{\omega, \frac{1-\mu}{1+\mu}}(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1} \Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}=(1+\mu)\, \Lambda_{\omega, \frac{1-\mu}{1+\mu}} \overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1}
$$

est fermé et inversible avec inverse

$$
\Delta_{\omega,\mu}^{-1}=\frac{1}{1+\mu} \overline{\Lambda_{\omega,1} \Lambda_{\omega, \frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}.
$$

Comme $\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\chi\in D(\mathcal{B}_\omega)$ alors

$$
(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1} \Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}=\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}
$$

et par conséquent

$$
\Delta_{\omega,\mu}=(1+\mu)\left(I-\frac{1-\mu}{1+\mu} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) \Pi_{\omega, \frac{1-\mu}{1+\mu}} \Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}
$$

Il s'ensuit que, $\Delta_{\omega,\mu}$ est borné, et $\overline{\Delta_{\omega,\mu}} = \Delta_{\omega,\mu}$ inversible avec inverse

$$\Delta_{\omega,\mu}^{-1} = \frac{1}{1+\mu}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})\Pi_{\omega,1}\Pi_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}^{-1}\left(I - \frac{1-\mu}{1+\mu}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}.$$

La commutativité précédemment établie entre $(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}$ et l'opérateur $\Lambda_{\omega,b}$ permet de démontrer le lemme suivant.

Lemme 5.4.6 *Sous les hypothèses $(A1) \sim (A4)$. Les opérateurs $\overline{\Lambda_{\omega,b}}^{-1}$ et $\overline{\Lambda_{\omega,b'}}^{-1}$ commutent, et de plus $\overline{\Lambda_{\omega,b}}^{-1}$ commute avec $\Lambda_{\omega,b'}$ sur $D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H})$.*

Remarque 5.4.5 *Sur $D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H})$, on a*

$$\begin{aligned}\Lambda_{\omega,b}\overline{\Lambda_{\omega,b'}}^{-1} &= \left(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\left(I + 2b'\left(I - b'e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}\right)\\ &\quad \left(I + 2b'\left(I - b'e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}}\right)^{-1}\right)^{-1}\left(I - b'e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right),\end{aligned}$$

est borné

5.5 Représentation explicite de la solution

5.5.1 Résolution du problème auxiliaire (P_ω^+)

En utilisant la méthode de réduction de Krein [21], on obtient, pour $x \in [0,\delta]$, l'expression suivante

$$u_\delta^+(x) = e^{x\mathcal{B}_\omega}\xi_0 + e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\xi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_x^\delta e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds$$

en plus

$$\begin{aligned}\left(u_\delta^+\right)'(x) &= \mathcal{B}_\omega e^{x\mathcal{B}_\omega}\xi_0 - \mathcal{B}_\omega e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\xi_1\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds - \frac{1}{2}\int_x^\delta e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds\end{aligned}$$

si la solution u_δ^+ est stricte, alors $u_\delta^+(\delta) \in D(\mathcal{A})$, donc $u_\delta^+(\delta) \in D(\mathcal{B}_\omega)$.

En utilisant la condition aux limite $\left(u_\delta^+\right)'(\delta) + \mathcal{H}u_\delta^+(\delta) = f_\delta^+$, et le fait que

$$e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_0, \int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds \in D(\mathcal{B}_\omega),$$

alors $\xi_0 \in D(\mathcal{B}_\omega)$ comme

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1}\left((D(\mathcal{B}_\omega), X)_{1-\theta,\infty}\right) \subset D(\mathcal{B}_\omega) \cap D(\mathcal{H}),$$

alors

$$\mathcal{H}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} u_\delta^+(\delta) = \mathcal{H}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_0 + \mathcal{H}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\xi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{H}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

on utilise l'hypothèse $(A2)$, et le Lemme 5.4.3, on trouve

$$u_\delta^+(\delta) = e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_0 + \xi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

et

$$\left(u_\delta^+\right)'(\delta) = \mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_0 - \mathcal{B}_\omega\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

donc

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\left(u_\delta^+\right)'(\delta) = \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_0 - \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega\xi_1 + \frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} u_\delta^+(\delta) + \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\left(u_\delta^+\right)'(\delta) \\
&= \mathcal{H}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_0 + \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_0 + \mathcal{H}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\xi_1 - \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega\xi_1 \\
&+ \frac{1}{2}\mathcal{H}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds + \frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds
\end{aligned}$$

de plus, sur $D(\mathcal{H}) \cap D(\mathcal{B}_\omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} &= \mathcal{H}(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - be^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1} \\
&= (\mathcal{H} - \mathcal{B}_\omega + \mathcal{B}_\omega)\,(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1} \\
&= (\mathcal{H} - \mathcal{B}_\omega)\,(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1} \\
&+ \mathcal{B}_\omega(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1} \\
&= \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\mathcal{H}
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\mathcal{B}_\omega \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} = \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} \mathcal{B}_\omega$$

Puisque la somme $e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_0+\xi_1+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds$ appartient à $D(\mathcal{H})$, et le dernier terme $\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds \in D(\mathcal{B}_\omega)$. et comme $D(\mathcal{B}_\omega) \subseteq D(\mathcal{H})$, alors

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ &= \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} (\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\, e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_0 + \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} (\mathcal{H}-\mathcal{B}_\omega)\,\xi_1 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} (\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds\end{aligned}$$

De la deuxième condition aux limites, $u_\delta^+(0_+)=\psi$, il vient que

$$\psi = \xi_0 + e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds,$$

donc

$$\xi_0 = \psi - e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_1 - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds.$$

Cela conduit à la relation suivante

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ &= \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} (\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\, e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left[\psi - e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_1 - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds.\right] \\ &+ \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} (\mathcal{H}-\mathcal{B}_\omega)\,\xi_1 + \frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} (\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ &= \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} (\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\, e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\psi - \frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} (\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\, e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds. \\ &+ \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\left((\mathcal{H}-\mathcal{B}_\omega) - (\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\, e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\xi_1 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} (\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds,\end{aligned}$$

Or, on a $\Lambda_{\omega,1} = (\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega + \mathcal{H})$, et donc sur $D(\mathcal{B}_\omega)$, il vient que

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\left((\mathcal{H} - \mathcal{B}_\omega) - (\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\, e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) = -I$$

ainsi

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ = \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}(\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\, e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\psi - \frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}(\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\, e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds.$$

$$-\xi_1 + \frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}(\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\,\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds,$$

alors

$$\xi_1 = -\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ + \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}(\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\, e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\psi - \frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}(\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\, e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}(\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\,\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds, ok$$

Comme $D(\mathcal{B}_\omega) \subset D(\mathcal{H})$, alors

$$\xi_1 = -\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ + (\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\psi - \frac{1}{2}(\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds.$$

$$+\frac{1}{2}(\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds,$$

On utilise maintenant l'opérateur $\mathcal{K}_1 = (\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega)\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}$ pour obtenir

$$\xi_1 = -\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ + \mathcal{K}_1 e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\psi - \frac{1}{2}\mathcal{K}_1 e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds \tag{5.5.1}$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{K}_1\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds,$$

D'autre part, on sait que $\xi_0 = \psi - e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_1 - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$, et donc,

$$\xi_0 = e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ + \left(I - \mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\psi - \frac{1}{2}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}_1\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds \tag{5.5.2}$$

$$- \frac{1}{2}\left(I - \mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds,$$

5.5.2 Résolution du problème auxiliaire (P_ω^-)

L'équation dans (P_ω^-) est posée sur un intervalle non borné, ce qui affecte de manière significative le comportement asymptotique de la solution. Selon [26], [22], dans les espaces L^p, l'équation admet une solution donnée par cette représentation explicite :

$$u^-(x) = e^{-x\mathcal{B}_\omega}\xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds \tag{5.5.3}$$

Cette solution vérifie la condition $u^-(-\infty) = 0$. Par contre, dans les espaces de Hölder, lorsque $g^- \in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty, 0]; E\right)$, cette solution u^- ne s'annule pas nécessairement à l'infini, lorsque $g^-(-\infty) = \chi \neq 0$; en revanche, il coïncide avec $-\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi$. En effet, les termes intégrals s'écrivent comme suit

$$\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds = \mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s) - \chi\right)ds + \mathcal{B}_\omega\int\limits_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi ds,$$

et

$$\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds = \mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s) - \chi\right)ds + \mathcal{B}_\omega\int\limits_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi ds.$$

D'autre part, on sait que si $\eta \in \overline{D(\mathcal{B}_\omega)} = \overline{D(\mathcal{A}_\omega)}$, alors

$$\mathcal{B}_\omega\int\limits_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\eta ds = e^{-x\mathcal{B}_\omega}\eta - \eta \text{ et } \mathcal{B}_\omega\int\limits_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}\eta ds = -\eta\ .$$

De plus, il est clair que $\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi \in D(\mathcal{B}_\omega^2) \subset \overline{D(\mathcal{B}_\omega)}$, alors

$$u^-(x) = e^{-x\mathcal{B}_\omega}\xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-\chi\right)ds + \frac{1}{2}e^{-x\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi$$
$$+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-\chi\right)ds - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi,$$

donc

$$u^-(x) + \mathcal{B}_\omega^{-2}\chi = e^{-x\mathcal{B}_\omega}\left(\xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi\right) + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-\chi\right)ds$$
$$+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-\chi\right)ds$$

et

$$\left\|\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-\chi\right)ds\right\| \leq C_0\left\|\mathcal{B}_\omega^{-1}\right\|\left(\int\limits_{-\infty}^x e^{-a(x-s)}ds\right)\sup_{s\leq x}\left\|\left(g^-(s)-\chi\right)\right\|$$
$$\leq \frac{C_0}{a}\left\|\mathcal{B}_\omega^{-1}\right\|\sup_{s\leq x}\left\|\left(g^-(s)-\chi\right)\right\|,$$

par conséquent, lorsque x tend vers $-\infty$, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to-\infty}\sup_{s\leq x}\left\|g^-(s)-\chi\right\| = 0$$

(Puisque la fonction g^- est uniformément continue de Hölder et bornée sur $]-\infty,0]$, et sa limite tend vers χ lorsque x tend à $-\infty$) par conséquent

$$\lim_{x\to-\infty}\left\|\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-\chi\right)ds\right\| = 0.$$

Cependant, il existe $a>0$ et $C_0>0$ tels que

$$\left\|e^{-x\mathcal{B}_\omega}\left(\xi_2+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi\right)\right\| \leq C_0e^{ax}\left\|e^{-x\mathcal{B}_\omega}\left(\xi_2+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}\chi\right)\right\|,$$

Pour le troisième terme, il est décomposé comme suit

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-\chi\right)ds\\
&=\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_x^{\frac{x}{2}} e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-\chi\right)ds+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{\frac{x}{2}}^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-\chi\right)ds\\
&:=I_1(x)+I_2(x)
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\|I_1(x)\| &\leq \frac{C_0}{2}\left\|\mathcal{B}_\omega^{-1}\right\|\left(\int_x^{\frac{x}{2}} e^{-a(s-x)}ds\right)\sup_{s\in\left[x,\frac{x}{2}\right]}\left\|g^-(s)-\chi\right\|\\
&\leq \frac{C_0}{2a}\left\|\mathcal{B}_\omega^{-1}\right\|\left(e^{a\frac{x}{2}}-1\right)\sup_{s\in\left[x,\frac{x}{2}\right]}\left\|g^-(s)-\chi\right\|,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\|I_2(x)\| &\leq \frac{C_0}{2}\left\|\mathcal{B}_\omega^{-1}\right\|\left(\sup_{s\leq 0}\left\|g^-(s)-\chi\right\|\right)\int_{\frac{x}{2}}^0 e^{-a(s-x)}ds\\
&\leq C\left[e^{ax}-e^{a\frac{x}{2}}\right].
\end{aligned}
$$

depuis $g^-(-\infty)=\chi$, alors la limite de $\sup_{s\in\left[x,\frac{x}{2}\right]}\|g^-(s)-\chi\|$ tend vers zéro lorsque $x\to-\infty$. Cela implique que $\lim_{x\to-\infty}\|I_1(x)\|=0$, et le terme $\left(e^{ax}-e^{a\frac{x}{2}}\right)$ tend vers 0 lorsque $x\to-\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty}\|I_2(x)\|=0$. Par conséquent

$$\lim_{x\to-\infty}\left\|u^-(x)+\mathcal{B}_\omega^{-1}\chi\right\|=0.$$

En utilisant maintenant la condition aux limites $(u^-)'(0)=\varphi$, et le fait que

$$\left(u^-\right)'(x)=-\mathcal{B}_\omega e^{-x\mathcal{B}_\omega}\xi_2-\frac{1}{2}\int_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds$$

il vient

$$\varphi=-\mathcal{B}_\omega\xi_2+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds$$

par conséquent

$$\xi_2=-\mathcal{B}_\omega^{-1}\varphi+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds.$$

5.5.3 Représentation explicite de la solution

Afin d'obtenir la représentation complète de la solution, on utilise les conditions de transmission $\psi = u^-(0)$, et $\varphi = \mu \left(u_\delta^+\right)'(0)$. La première condition donne

$$\begin{aligned}
\psi = u^-(0) &= \xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds \\
&= -\mathcal{B}_\omega^{-1}\varphi + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds,
\end{aligned}$$

donc

$$\psi + \mathcal{B}_\omega^{-1}\varphi = \mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds$$

Et pour la seconde, on obtient

$$\varphi = \mu\mathcal{B}_\omega\xi_0 - \mu\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_1 - \frac{\mu}{2}\int_0^{\delta} e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

où

$$\begin{aligned}
\mu\mathcal{B}_\omega\xi_0 = \mu\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ + \mu\mathcal{B}_\omega\left(I - \mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\psi - \frac{\mu}{2}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}_1\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^{\delta} e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds \\
- \frac{\mu}{2}\mathcal{B}_\omega\left(I - \mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^{\delta} e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\mu\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\xi_1 = \mu\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}&\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ - \mu\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}_1 e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\psi \\
&+ \frac{\mu}{2}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}_1 e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^{\delta} e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds \\
&- \frac{\mu}{2}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}_1\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^{\delta} e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds,
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\mu\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ + \mu\mathcal{B}_\omega\left(I - 2\mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\psi \\ &- \mu\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}_1\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds \\ &- \mu\mathcal{B}_\omega\left(I - \mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds, ok\end{aligned}$$

Comme $\psi = -\mathcal{B}_\omega^{-1}\varphi + \mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds$, il en résulte que

$$\begin{aligned}\psi = &-2\mu e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ - \mu\left(I - 2\mathcal{K}_1 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\psi + \mu e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}_1\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds \\ &+ \mu\left(I - \mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds + \mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\left[I + \mu\left(I - 2\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\right]\psi = &-2\mu e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ + \mu e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds \\ &+ \mu\left(I - \mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds + \mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds\end{aligned}$$

D'après le Lemme 5.4.5, on a

$$I + \mu\left(I - 2\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) = (1+\mu)\,\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\overline{\Lambda}_{\omega,1}^{-1} = \Delta_{\omega,\mu}.$$

On en déduit également que cet opérateur est inversible avec

$$\Delta_{\omega,\mu}^{-1} = \frac{1}{1+\mu}\overline{\Lambda}_{\omega,1}\overline{\Lambda}_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}^{-1} = \frac{1}{1+\mu}(I - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})\Pi_{\omega,1}\Pi_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}^{-1}\left(I - \frac{1-\mu}{1+\mu}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)^{-1}$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&(1+\mu)\,\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}\psi\\
&=-2\mu e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}f_\delta^+ +\mu e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds\\
&+\mu\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds+\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds
\end{aligned}
$$

De façon analogue, et comme

$$
\begin{aligned}
&I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\
&=I-(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\\
&=\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})-(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)(\overline{\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}})^{-1}\Pi_{\omega,1}^{-1}(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega})^{-1},
\end{aligned}
$$

il vient que

$$
\begin{aligned}
\psi&=-2\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}f_\delta^+ +\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds\\
&+\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds+\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds
\end{aligned}
$$

En injectant cette expression dans la formule suivante

$$
\mathcal{B}_\omega\psi+\varphi=\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds,
$$

il en résulte que

$$
\begin{aligned}
\varphi&=-\mathcal{B}_\omega\psi+\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds\\
&=2\mu\mathcal{B}_\omega\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}f_\delta^+ -\mu\mathcal{B}_\omega\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds\\
&-\mu\mathcal{B}_\omega\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(s)ds\\
&-\mathcal{B}_\omega\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds+\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds
\end{aligned}
$$

$$\varphi = 2\mu\mathcal{B}_\omega \Delta_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ - \mu\mathcal{B}_\omega \Delta_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$- \mu\mathcal{B}_\omega \Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$- \mathcal{B}_\omega \Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I-\Delta_{\omega,\mu}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds$$

En remplaçant les expressions de ψ et φ dans les formules correspondantes de ξ_i (pour $i=0,1,2$) puis en réalisant les simplifications adéquates, on obtient

$$\xi_1 = \mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\psi - \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ - \frac{1}{2}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$= -2\mu\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ - \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+$$

$$+ \mu\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds + \frac{1}{2}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+ \mu\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds - \frac{1}{2}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+ \mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds$$

À cette étape, on utilise cette commutativité $\Delta_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega} = e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}$, on constate que

$$\xi_0 = -\left[2\mu\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) - \Delta_{\omega,\mu}\right]\Delta_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+$$

$$+ \frac{1}{2}\left[2\mu\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) - \Delta_{\omega,\mu}\right]\Delta_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+ \frac{1}{2}\left[2\mu\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) - \Delta_{\omega,\mu}\right]\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+ \left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds$$

et

$$\xi_2 = -\mathcal{B}_\omega^{-1}\varphi + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds$$

$$= -2\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ + \mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+ \mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I - \mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+ \Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds$$

où

$$\begin{aligned}
&2\mu\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} + \Delta_{\omega,\mu} \\
&= 2\mu\left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} + (1+\mu)\,\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1} \\
&= \left[2\mu\left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} + (1+\mu)\,\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\right]\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1} \\
&= \left[2\mu\left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} + (1+\mu)\left(\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right) + \frac{1-\mu}{1+\mu}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right)\right]\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1} \\
&= \left[2\mu\left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} + (1+\mu)\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right) + (1-\mu)\,e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right]\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1} \\
&= (1+\mu)\left[\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right) + e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right]\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&2\mu\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) - \Delta_{\omega,\mu} \\
&= 2\mu\left(I - \left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) - (1+\mu)\,\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1} \\
&= \left[2\mu\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}} - \left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) - (1+\mu)\,\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\right]\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1} \\
&= \left[2\mu\overline{\Lambda_{\omega,1}} - 2\mu\left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} - (1+\mu)\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right) + (1-\mu)\,e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right]\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1}
\end{aligned}$$

Comme $\overline{\Lambda_{\omega,1}} = \Lambda_{\omega,1} = \left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right) + e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)$ sur $D\left(\mathcal{B}_\omega\right)$, alors

$$\begin{aligned}
&2\mu\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right) - \Delta_{\omega,\mu} \\
&= \left[2\mu\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right) + 2\mu e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right) - 2\mu\left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right. \\
&\left. - (1+\mu)\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right) + (1-\mu)\,e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right]\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1} \\
&= (\mu-1)\left(\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right) - e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right)\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1}
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\xi_0 = \frac{1-\mu}{1+\mu}\Lambda_{\omega,-1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\mu-1}{1+\mu}\Lambda_{\omega,-1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\mu-1}{1+\mu}\Lambda_{\omega,-1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+\frac{1}{1+\mu}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds,$$

$$\xi_1 = -\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} f_\delta^+ + \frac{1}{2}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds \tag{5.5.4}$$

$$+\frac{\mu-1}{2(1+\mu)}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Lambda_{\omega,-1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+\frac{1}{1+\mu}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds$$

$$\xi_2 = -\frac{2\mu}{1+\mu}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega} f_\delta^+ + \frac{\mu}{1+\mu}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(s)ds \tag{5.5.5}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right)+e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right]\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(s)ds$$

5.6 Principaux résultats obtenus

Afin d'examiner la regularité maximale à l'aide des lemmes techniques, on exprime la solution sous la forme suivante

$$\begin{aligned}u^-(x) &= e^{-x\mathcal{B}_\omega}\xi_2^* + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}e^{-x\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(x)-g^-(0)\right) - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}g^-(x)\\ &\quad+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(x)\right)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}g^-(s)ds\end{aligned}$$

pour $x \in \left]-\infty, 0\right]$ et

$$\begin{aligned}u_\delta^+(x) &= e^{x\mathcal{B}_\omega}\xi_0^* + e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\xi_1^* + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(x)-g_\delta^+(\delta)\right) - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0) - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(x)\\ &\quad+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_x^\delta e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(x)\right)ds,\end{aligned}$$

pour $x \in [0, \delta]$, où

$$\begin{aligned}\xi_0^* &= \xi_0 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0),\\ \xi_1^* &= \xi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(\delta),\end{aligned}$$

et

$$\xi_2^* = \xi_2 + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}g^-(0).$$

Grâce aux calculs suivants

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\omega\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(\delta)ds &= \left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)g_\delta^+(\delta)\\ \mathcal{B}_\omega\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(0)ds &= \left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)g_\delta^+(0)\\ \mathcal{B}_\omega\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(0)ds &= -g^-(0)\end{aligned}$$

et après quelques simplifications, on trouve

$$\begin{aligned}
\xi_0^* &= (1-\mu) \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta \mathcal{B}_\omega} \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ + \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \Delta_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{B}_\omega^{-2} \left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \\
&+ \frac{1}{2} (\mu - 1) \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta \mathcal{B}_\omega} \mathcal{K} \mathcal{B}_\omega^{-2} \left(e^{\delta \mathcal{B}_\omega} - I\right) \left(g_\delta^+(\delta) - g_\delta^+(0)\right) \\
&+ \frac{1}{2} (\mu - 1) \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} e^{\delta \mathcal{B}_\omega} \mathcal{K} \mathcal{B}_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{(\delta - s)\mathcal{B}_\omega} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right) ds \\
&+ \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \Delta_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{B}_\omega^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} \left(g^-(s) - g^-(0)\right) ds \\
&+ \frac{1}{2} (\mu - 1) \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \mathcal{B}_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right) ds \\
&+ \frac{1}{2} (\mu - 1) \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega} + \mathcal{K} e^{\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \mathcal{B}_\omega^{-2} \left(e^{\delta \mathcal{B}_\omega} - I\right) g_\delta^+(0) \\
&+ \frac{1}{2} \mathcal{B}_\omega^{-2} g_\delta^+(0) - \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \Delta_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{B}_\omega^{-2} g_\delta^+(0),
\end{aligned}$$

On simplifier maintenant l'expression

$$\begin{aligned}
T_0(x) &:= \frac{1}{2} (\mu - 1) \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega} + \mathcal{K} e^{\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \mathcal{B}_\omega^{-2} \left(e^{\delta \mathcal{B}_\omega} - I\right) g_\delta^+(0) \\
&+ \frac{1}{2} \mathcal{B}_\omega^{-2} g_\delta^+(0) - \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \Delta_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{B}_\omega^{-2} g_\delta^+(0) \\
&= \frac{1}{2} \left[(\mu - 1) \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega} + \mathcal{K} e^{\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \left(e^{\delta \mathcal{B}_\omega} - I\right) + I - 2\left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \Delta_{\omega,\mu}^{-1}\right] \mathcal{B}_\omega^{-2} g_\delta^+(0) \\
&= \frac{1}{2} \left[(\mu - 1) \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega} + \mathcal{K} e^{\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \left(e^{\delta \mathcal{B}_\omega} - I\right) \Delta_{\omega,\mu} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \Delta_{\omega,\mu} - 2\left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}\right)\right] \Delta_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{B}_\omega^{-2} g_\delta^+(0),
\end{aligned}$$

On pose $T_0(x) = a \mathcal{B}_\omega^{-2} g_\delta^+(0)$, où

$$a = \frac{1}{2} \left[(\mu - 1) \left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega} + \mathcal{K} e^{\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \left(e^{\delta \mathcal{B}_\omega} - I\right) \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \Delta_{\omega,\mu} + \Delta_{\omega,\mu} - 2\left(I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}\right)\right] \Delta_{\omega,\mu}^{-1}.$$

et on utilise le fait que

$$\begin{aligned}
I - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega} &= I - (\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega) e^{2\delta \mathcal{B}_\omega} \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} \\
&= \left(\Lambda_{\omega,1} - (\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega) e^{2\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} \\
&= (\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

$$I + \mathcal{K} e^{\delta \mathcal{B}_\omega} - \mathcal{K} e^{2\delta \mathcal{B}_\omega} = \left((\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + (\mathcal{H} + \mathcal{B}_\omega) e^{\delta \mathcal{B}_\omega}\right) \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1},$$

et

$$\begin{aligned}(1+\mu)\,\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}-2\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right)&=(\mu-1)\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right)+(1-\mu)\,e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})\\&=(\mu-1)\,\Lambda_{\omega,-1}\end{aligned}$$

on trouve que

$$\begin{aligned}a=&\,\frac{1}{2}\Big[(\mu-1)\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\Lambda_{\omega,-1}\\&+(1+\mu)\,\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}-2\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right)\Big]\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\\=&\,\frac{1}{2}\left[(\mu-1)\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right)e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-(\mu-1)\left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right.\\&\left.-(\mu-1)\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\right)+(\mu-1)\,\Lambda_{\omega,1}\right]\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\overline{\Lambda_{\omega,-1}}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\\=&\,\frac{\mu-1}{2}\left[(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})\right]e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\overline{\Lambda_{\omega,-1}}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\end{aligned}$$

donc le terme en $g_\delta^+(0)$ est donné par

$$\begin{aligned}T_0\left(x,g_\delta^+(0)\right)&=\frac{\mu-1}{2}\left[(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})\right]e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\Lambda_{\omega,-1}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)\\&=\frac{\mu-1}{2}\left[(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})\right]e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0),\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\xi_0^*=&\,(1-\mu)\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}f_\delta^++\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right)\\&+\frac{1}{2}(\mu-1)\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)\left(g_\delta^+(\delta)-g_\delta^+(0)\right)\\&+\frac{1}{2}(\mu-1)\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(\delta)\right)ds\\&+\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds\\&+\frac{1}{2}(\mu-1)\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds\\&+\frac{\mu-1}{2}\left[(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})\right]e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)\end{aligned}$$

De façon analogue, on obtient

$$\xi_1^* = -\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} f_\delta^+ + \frac{1}{2}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(\delta)\right)ds$$

$$+\frac{1}{2}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(\delta)ds+\frac{1}{2}\mathcal{B}^{-2}g_\delta^+(\delta)$$

$$+\frac{\mu-1}{2(1+\mu)}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Lambda_{\omega,-1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds$$

$$+\frac{\mu-1}{2(1+\mu)}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Lambda_{\omega,-1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} g_\delta^+(0)ds$$

$$+\frac{1}{1+\mu}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds$$

$$+\frac{1}{1+\mu}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} g^-(0)ds$$

et après des simplification, on obtient

$$\xi_1^* = -\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} f_\delta^+ + \mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right)$$

$$+\frac{1+\mu}{2}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(\delta)\right)ds$$

$$+\frac{\mu-1}{2}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\,\nabla_{\omega,\mu}^{-1}\,\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds$$

$$+\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int\limits_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds$$

$$+\frac{1}{2}(1+\mu)\,\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}^{-2}g_\delta^+(\delta)$$

$$+\frac{1}{2}\left(I-(1+\mu)\,\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\right)\mathcal{B}^{-2}g_\delta^+(\delta)$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{K}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left[(\mu-1)\,\nabla_{\omega,\mu}^{-1}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)-\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\right]\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)$$

Pour ξ_2^*, on a

$$\xi_2^* = \frac{-2\mu}{1+\mu}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega} f_\delta^+ + \frac{\mu}{1+\mu}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(\delta)\right)ds$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right)+e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right]\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(0)ds$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}\Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}g_\delta^+(\delta)ds$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right)+e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right]\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}g^-(0)ds+\frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega^{-2}g^-(0)$$

comme

$$\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}-\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H}\right)+e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H}\right)\right]=\frac{2\mu}{1+\mu}\Lambda_{\omega,-1}$$

alors

$$\xi_2^* = -\frac{2\mu}{1+\mu}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}f_\delta^+ - \mu\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right)$$

$$+\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(\delta)\right)ds$$

$$+\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds$$

$$+\mu\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds$$

$$+\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)\left(g_\delta^+(\delta)-g_\delta^+(0)\right)$$

$$+\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)g_\delta^+(0)+\mu\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)$$

On simplifie maintenant

$$
\begin{aligned}
&\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)g_\delta^+(0)+\mu\,\triangledown_{\omega,\mu}^{-1}\,\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)\\
&=\mu\left[\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)+\mu\triangledown_{\omega,\mu}^{-1}\right]\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)\\
&=\frac{\mu}{1+\mu}\left[\Lambda_{\omega,1}\left(I+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)+\Lambda_{\omega,-1}\right]\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)\\
&=\frac{\mu}{1+\mu}\left[\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)+(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega\right)\right]\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)\\
&=-\frac{2\mu}{1+\mu}\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\,e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que

$$
\begin{aligned}
&\left[\Lambda_{\omega,1}\left(I+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)+\Lambda_{\omega,-1}\right]\\
&=\left[\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)+\Lambda_{\omega,-1}\right]\\
&=(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})\,e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-(\mathcal{H}+\mathcal{B}_\omega)\,e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\\
&=\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})-\mathcal{K}\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1}\right)e^{\delta\mathcal{B}_\omega}
\end{aligned}
$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
\xi_2^*={}&-\frac{2\mu}{1+\mu}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}f_\delta^+-\mu\,\triangledown_{\omega,\mu}^{-1}\,\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right)\\
&+\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(\delta)\right)ds\\
&+\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(I-\mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds\\
&+\mu\,\triangledown_{\omega,\mu}^{-1}\,\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds\\
&+\mu\Delta_{\omega,\mu}^{-1}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)\left(g_\delta^+(\delta)-g_\delta^+(0)\right)\\
&-\frac{2\mu}{1+\mu}\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})-\mathcal{K}\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1}\right)e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}g_\delta^+(0)
\end{aligned}
$$

On sait que $\mathcal{B}_\omega^2=-\mathcal{A}_\omega$, donc pour tout $x\in\left]-\infty,0\right]$, on a $u^-(x)\in D\left(\mathcal{B}_\omega^2\right)=D(\mathcal{A}_\omega)$ et pour

$x \in [0,\delta]$, $u_\delta^+(x) \in D(\mathcal{B}_\omega^2)$, alors

$$\mathcal{A}_\omega u^-(x) = -\mathcal{B}_\omega^2 e^{-x\mathcal{B}_\omega}\xi_2^* - \frac{1}{2}e^{-x\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(x) - g^-(0)\right) + \frac{1}{2}g^-(x)$$
$$- \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega \int_x^0 e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s) - g^-(x)\right) ds - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega \int_{-\infty}^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega} g^-(s) ds$$

et

$$\mathcal{A}_\omega u_\delta^+(x) = -\mathcal{B}_\omega^2 e^{x\mathcal{B}_\omega}\xi_0^* - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega \int_0^x e^{(x-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right) ds$$
$$- \mathcal{B}_\omega^2 e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\xi_1^* - \frac{1}{2}e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(x) - g_\delta^+(\delta)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(g_\delta^+(0) + g_\delta^+(x)\right) - \frac{1}{2}\mathcal{B}_\omega \int_x^\delta e^{(s-x)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(x)\right) ds,$$

En appliquant les Lemmes 2.0.4, 2.0.5, 2.0.6 et 2.0.2, on déduit que

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\omega u^-(x) + \mathcal{B}_\omega^2 e^{-x\mathcal{B}_\omega}\xi_2^* \in \mathcal{B}UC^{2\alpha}(]-\infty,0];E) \\ \mathcal{A}_\omega u_\delta^+(x) + \mathcal{B}_\omega^2 e^{x\mathcal{B}_\omega}\xi_0^* + \mathcal{B}_\omega^2 e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\xi_1^* \in C^{2\alpha}([0,\delta];E), \end{cases}$$

On se concentre maintenant à l'étude des termes $\mathcal{B}_\omega^2 e^{-x\mathcal{B}_\omega}\xi_2^*$, $\mathcal{B}_\omega^2 e^{x\mathcal{B}_\omega}\xi_0^*$ et $\mathcal{B}_\omega^2 e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\xi_1^*$. On utilise le fait que tous les opérateurs intervenant dans ξ_i^*commute avec l'opérateur $\mathcal{B}_\omega$, en prenant toutefois soin de préciser que certaines de ces relations de commutation ne sont valides que sur les domaines appropriés.

► L'étude du terme ξ_0^* : On écrit

$$\mathcal{B}_\omega^2 e^{x\mathcal{B}_\omega}\xi_0^* = S_0(x) + \sum_{j=1}^{10} R_{0,j}(x),$$

où

$$R_{0,1}(x) = (1-\mu)\, e^{x\mathcal{B}_\omega} \left(\mathcal{B}_\omega^2 e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right) \nabla_{\omega,\mu}^{-1} \left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+$$
$$R_{0,2}(x) = \frac{1}{2}(\mu-1)\, e^{x\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}e^{\delta\mathcal{B}_\omega} \nabla_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{K}\mathcal{B}^{-1}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)\left(g_\delta^+(\delta)-g_\delta^+(0)\right)$$
$$R_{0,3}(x) = \frac{1}{2}(\mu-1)\, e^{x\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega} \nabla_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\left(\mathcal{B}_\omega\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(\delta)\right)ds\right)$$
$$R_{0,4}(x) = -e^{x\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\overline{\Delta_{\omega,\mu}}^{-1}\left(\mathcal{B}_\omega\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds\right)$$
$$R_{0,5}(x) = -e^{x\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\overline{\Delta_{\omega,\mu}}^{-1}\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right)$$
$$R_{0,6}(x) = -\frac{1}{2}(\mu-1)\,\mathcal{B}_\omega^2 e^{x\mathcal{B}_\omega} \nabla_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{K}e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds$$

$$R_{0,7}(x) = \frac{1}{2}(\mu-1)\,\mathcal{B}_\omega^2 e^{x\mathcal{B}_\omega} \nabla_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds$$
$$R_{0,8}(x) = \mathcal{B}_\omega^2 e^{x\mathcal{B}_\omega}\overline{\Delta_{\omega,\mu}}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds$$
$$R_{0,9}(x) = \frac{\mu-1}{2}\mathcal{B}_\omega^2 e^{x\mathcal{B}_\omega} \nabla_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{B}_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds$$
$$R_{0,10}(x) = \frac{\mu-1}{2}e^{x\mathcal{B}_\omega}\left[(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})+e^{\delta\mathcal{B}_\omega}(\mathcal{B}_\omega+\mathcal{H})\right]e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}\nabla_{\omega,\mu}^{-1} g_\delta^+(0)$$

et

$$S_0(x) = \mathcal{B}_\omega^2 e^{x\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right)$$

Les fonctions R_i (pour $i=1,...,6$ et $i=10$) sont $2\alpha-$Höldérienne sur $[0,\delta]$, car les opérateurs $\nabla_{\omega,\mu}^{-1}$, $\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1}$, $\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-2}$, $e^{\delta\mathcal{B}_\omega}$, $\Delta_{\omega,\mu}^{-1}$ sont bornées sur E, et en plus on a

- $\mathcal{B}_\omega\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(\delta)\right)ds$, $\mathcal{B}_\omega\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds \in D_{\mathcal{B}_\omega}(2\alpha,\infty)$,
- $\left(\mathcal{B}_\omega^2 e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\nabla_{\omega,\mu}^{-1}\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} f_\delta^+ \in D(\mathcal{B}_\omega)$,
- $\mathcal{B}_\omega^2 e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\nabla_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)\left(g_\delta^+(\delta)-g_\delta^+(0)\right) \in D(\mathcal{B}_\omega)$,

– $\mathcal{B}_\omega^2 e^{\delta\mathcal{B}_\omega} \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1} \int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right) ds \in D(\mathcal{B}_\omega)$ car

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_\omega^2 e^{\delta\mathcal{B}_\omega} \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1} \int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right) \\
&= \mathcal{B}_\omega^2 e^{\delta\mathcal{B}_\omega} \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-2} \left(\mathcal{B}_\omega \int\limits_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right) ds\right)
\end{aligned}$$

– $\mathcal{B}_\omega^2 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} \mathcal{K}\overline{\Delta_{\omega,\mu}}^{-1} \mathcal{B}_\omega^{-1} \int\limits_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega} \left(g^-(s) - g^-(0)\right) ds \in D(\mathcal{B}_\omega)$,

– $\mathcal{B}_\omega^2 e^{2\delta\mathcal{B}_\omega} \mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-2} \overline{\Lambda_{\omega,1}\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} \left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \in D(\mathcal{B}_\omega)$.

Examinons maintenant les termes $R_{0,k}$ pour $k \in \{7, 8, 9\}$. On utilise ici la commutativité entre, $\mathcal{B}_\omega^2$ et $e^{x\mathcal{B}_\omega}$ et $\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}$ sur $D(\mathcal{B}_\omega)$, et la stabilité des espaces d'interpolation par rapport à l'opérateur $\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1}$, c'est à dire on a $\bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \left(\mathcal{B}_\omega \int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right) ds\right) \in D_{\mathcal{A}}(\alpha, \infty) \subset \overline{D(\mathcal{B})}$ et comme

$$R_{0,7}(x) = \frac{1}{2}(\mu - 1)\, e^{x\mathcal{B}_\omega} \bigtriangledown_{\omega,\mu}^{-1} \underbrace{\left(\mathcal{B}_\omega \int\limits_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega} \left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right) ds\right)}_{\in D_{\mathcal{B}_\omega}(2\alpha,\infty)}$$

alors $R_{0,7} \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$. De la même manière, on montre que $R_{0,8}$, $R_{0,9} \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$.

Pour le terme singulier S_0, on a

$$\begin{aligned}
S_0(x) &= e^{x\mathcal{B}_\omega} \mathcal{B}_\omega^2 \overline{\Delta_{\omega,\mu}}^{-1} \mathcal{B}_\omega^{-2} \left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \\
&= e^{x\mathcal{B}_\omega} \overline{\Delta_{\omega,\mu}}^{-1} \left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right)
\end{aligned}$$

Si $\Delta_{\omega,\mu}^{-1} \left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \in \overline{D(\mathcal{B}_\omega)}$ alors $S_0 \in C([0, \delta]; E)$ et si $\Delta_{\omega,\mu}^{-1} \left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \in D_{\mathcal{B}_\omega}(2\alpha, \infty)$ alors

$$S_0 \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$$

D'autre part, on sait que

$$\Lambda_{\omega,b'} \left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1} (D(\mathcal{B}_\omega)) \subset D(\mathcal{B}_\omega) \text{ et } \Lambda_{\omega,b'} \left(\overline{\Lambda_{\omega,b}}\right)^{-1} \left(\overline{D(\mathcal{B}_\omega)}\right) \subset \overline{D(\mathcal{B}_\omega)}$$

par conséquent,

$$\Delta_{\omega,\mu}^{-1} (D(\mathcal{B}_\omega)) \subset D(\mathcal{B}_\omega) \text{ et } \Delta_{\omega,\mu}^{-1} \left(\overline{D(\mathcal{B}_\omega)}\right) \subset \overline{D(\mathcal{B}_\omega)}$$

donc

- Si $\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \in \overline{D(\mathcal{B}_\omega)}$ alors $\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \in \overline{D(\mathcal{B}_\omega)}$.
- Si $\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \in D_{\mathcal{B}_\omega}(2\alpha,\infty)$ alors $\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \in D_{\mathcal{B}_\omega}(2\alpha,\infty)$.

▶ L'étude du terme ξ_1^* : on écrit

$$-\mathcal{B}_\omega^2 e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\xi_1^* = S_{1,0}(x, f_\delta^+) + S_{1,1}(x, g_\delta^+(\delta)) + \sum_{i=1}^{5} R_{1,i}(x)$$

où

$$\begin{aligned} S_{1,0}(x, f_\delta^+) &= \mathcal{B}_\omega^2 e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} f_\delta^+ \\ S_{1,1}(x, g_\delta^+(\delta)) &= -\frac{1}{2}e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega^2\left(I - (1+\mu)\,\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\right)\mathcal{B}^{-2}g_\delta^+(\delta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{1,0}(x) &= -e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(g_\delta^+(0) - g^-(0)\right) \\ R_{1,1}(x) &= -\frac{1+\mu}{2}e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\left(\mathcal{B}_\omega\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(\delta)\right)ds\right) \\ R_{1,2}(x) &= -\frac{\mu-1}{2}e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\,\triangledown_{\omega,\mu}^{-1}\left(\mathcal{B}_\omega\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s) - g_\delta^+(0)\right)ds\right) \\ R_{1,3}(x) &= -e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(\mathcal{B}_\omega\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s) - g^-(0)\right)ds\right) \\ R_{1,4}(x) &= -\frac{1+\mu}{2}e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}g_\delta^+(\delta) \\ R_{1,5}(x) &= -\frac{1}{2}e^{(\delta-x)\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\left[(\mu-1)\,\triangledown_{\omega,\mu}^{-1}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega} - I\right) - \Delta_{\omega,\mu}^{-1}\right]g_\delta^+(0) \end{aligned}$$

– Pour le terme $S_{1,0}(., f_\delta^+)$, en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} f_\delta^+ &= (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left(I + W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\right)f_\delta^+ \\ &= (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}f_\delta^+ + (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}f_\delta^+ \end{aligned}$$

et grâce au Lemme 5.4.3, il vient que

$$(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}(E) \subset \cap D(\mathcal{B}_\omega^k)$$

donc

$$\mathcal{B}_\omega^2(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}f_\delta^+ \in D(\mathcal{B}_\omega) \subset D_{\mathcal{B}_\omega}(2\alpha,\infty) \subset \overline{D(\mathcal{B}_\omega)}$$

donc pour que

$$S_{1,0}(.,f_\delta^+) \in C\left([0,\delta],E\right)$$

il suffit de supposer que $(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}f_\delta^+ \in D(\mathcal{B}_\omega^2)$ et que $\mathcal{B}_\omega^2(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}f_\delta^+ \in \overline{D\left(\mathcal{B}_\omega\right)}$. En plus, le terme $S_{1,0}(.,f_\delta^+) \in C^{2\alpha}\left([0,\delta],E\right)$, si $\mathcal{B}_\omega^2(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}f_\delta^+ \in D_{\mathcal{B}_\omega}\left(2\alpha,\infty\right)$.

- Pour le terme $S_{1,1}(.,g_\delta^+(\delta))$, on écrit $I-(1+\mu)\,\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}$, à l'aide des relations suivantes

$$(1+\mu)\,\Delta_{\omega,\mu}^{-1} = \Lambda_{\omega,1}\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1} = \Lambda_{\omega,1}(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left(I+W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\right)$$

$$\Lambda_{\omega,1} = \left(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}) + 2\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}$$

$$\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} = (\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left(I+W_{\omega,1}\right),$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}+\mathcal{H})\left(\overline{\Lambda_{\omega,1}}\right)^{-1} &= -(\mathcal{B}-2\mathcal{B}-\mathcal{H})(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left(I+W_{\omega,1}\right)\\ &= 2\mathcal{B}(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left(I+W_{\omega,1}\right) - \left(I+W_{\omega,1}\right),\end{aligned}$$

sous la forme

$$\begin{aligned}& I-(1+\mu)\,\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\\ &= 2I - 2\mathcal{B}_\omega\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} - 2e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\\ &- 2\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\mathcal{B}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\\ &- 2\left(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\mathcal{B}(\overline{\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H}})^{-1}\left(I+W_{\omega,1}\right)\\ &+ \left(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\left(I+W_{\omega,1}\right) - 2\left(I-e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\mathcal{B}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\\ &- 2\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}(\mathcal{B}+\mathcal{H})\overline{\Lambda}_{\omega,1}^{-1}\\ &- 4\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}\mathcal{B}\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}W_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}\\ &= 2I - 2\mathcal{B}_\omega\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1} + T\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $W_{\omega,b}(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{B}_\omega^k)$ et $e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}(E) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{B}_\omega^k)$, on déduit que

$$\mathcal{B}_\omega^2 T\mathcal{B}_\omega^{-2}\left(E\right) \subset D(\mathcal{B}_\omega),$$

Donc pour que $S_{1,1}(.,g_\delta^+(\delta))$ soit continue, il suffit de prendre

$$\overline{(\mathcal{B}_\omega - \mathcal{H})}^{-1}g_\delta^+(\delta) \in D(\mathcal{B}_\omega)$$

et

$$\mathcal{B}_\omega^2\left(I-\mathcal{B}_\omega\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}\right)\mathcal{B}^{-2}g_\delta^+(\delta)=-\mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}g_\delta^+(\delta)\in\overline{D(\mathcal{B}_\omega)}$$

et lorsque

$$\mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}g_\delta^+(\delta)\in D_{\mathcal{B}_\omega}(2\alpha,\infty),$$

il vient que $S_{1,1}(.,g_\delta^+(\delta))\in C^{2\alpha}([0,\delta],E)$.

- Les termes $R_{1,i}(x)$ pour $i=\overline{0,5}$, sont Höldériennes sur $[0,\delta]$, grâce aux Lemmes 2.0.4, 2.0.8, 2.0.1, 2.0.2 et le fait que les opérateurs $\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}$, $\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}$, $\Delta_{\omega,\mu}^{-1}$, $\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}$, sont bornés en plus $\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\chi\in D\left(\mathcal{B}_\omega^k\right)\subseteq D\left(\mathcal{B}_\omega\right)$.

▶ L'étude du terme ξ_2^* : on écrit

$$\mathcal{B}_\omega^2e^{-x\mathcal{B}_\omega}\xi_2^*=S_2(x,g_\delta^+(0)-g^-(0))\sum_{i=0}^{6}R_{2,i}(x)$$

où

$$S_2(x,g_\delta^+(0)-g^-(0))=-\mu e^{-x\mathcal{B}_\omega}\,\triangledown_{\omega,\mu}^{-1}\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right),$$

$$R_{2,0}(x)=-\frac{2\mu}{1+\mu}e^{-x\mathcal{B}_\omega}\left(\mathcal{B}_\omega^2e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\right)\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}f_\delta^+,$$

$$R_{2,1}(x)=\mu e^{-x\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\left(\mathcal{B}_\omega\int_0^\delta e^{(\delta-s)\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(\delta)\right)ds\right),$$

$$R_{2,2}(x)=-\mu e^{-x\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{2\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\left(\mathcal{B}_\omega\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds\right),$$

$$R_{2,3}(x)=\mu e^{-x\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\left(\mathcal{B}_\omega\int_0^\delta e^{s\mathcal{B}_\omega}\left(g_\delta^+(s)-g_\delta^+(0)\right)ds\right),$$

$$R_{2,4}(x)=\mu e^{-x\mathcal{B}_\omega}\,\triangledown_{\omega,\mu}^{-1}\left(\mathcal{B}_\omega\int_{-\infty}^0 e^{-s\mathcal{B}_\omega}\left(g^-(s)-g^-(0)\right)ds\right),$$

$$R_{2,5}(x)=\mu e^{-x\mathcal{B}_\omega}\mathcal{B}_\omega e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\Delta_{\omega,\mu}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{B}_\omega^{-1}\left(e^{\delta\mathcal{B}_\omega}-I\right)\left(g_\delta^+(\delta)-g_\delta^+(0)\right)$$

$$R_{2,6}(x)=-\frac{2\mu}{1+\mu}e^{-x\mathcal{B}_\omega}e^{\delta\mathcal{B}_\omega}\left((\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})-\mathcal{K}\overline{\Lambda_{\omega,1}}^{-1}\right)\overline{\Lambda_{\omega,\frac{1-\mu}{1+\mu}}}^{-1}g_\delta^+(0)$$

il est clair que $R_{2,i}\in\mathcal{B}UC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)$. Mais pour le terme $S_2(.,g_\delta^+(0)-g^-(0))$ on doit supposer que

$$\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right)\in\overline{D\left(\mathcal{B}_\omega\right)}$$

et comme $\overline{D(\mathcal{B})}$ est stable par $\nabla_{\omega,\mu}^{-1}$ c'est à dire $\nabla_{\omega,\mu}^{-1}\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right)\in\overline{D\left(\mathcal{B}_\omega\right)}$ donc $S_2(.,g_\delta^+(0)-g^-(0))\in\mathcal{B}UC\left(]-\infty,0];E\right)$, et lorsque

$$\left(g_\delta^+(0)-g^-(0)\right)\in D_{\mathcal{B}_\omega}\left(2\alpha,\infty\right)$$

il vient que $S_2(.,g_\delta^+(0)-g^-(0))\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)$.

Théorème 5.6.1 *Soit*

$$g^-\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right),\quad g_\delta^+\in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right),$$

avec $0<2\theta<1$. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{A}1)\,\tilde{}\,(\mathcal{A}5)$, *le problèm* (P_ω) *admet une unique solution stricte si*

$$\begin{cases} i)\ g_\delta^+(0)-g^-(0)\in\overline{D(\mathcal{B}_\omega)} \\ ii)\ \overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}f_\delta^+\in D\left(\mathcal{B}_\omega^2\right)\ \ et\ \mathcal{B}_\omega^2\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}f_\delta^+\in\overline{D\left(\mathcal{B}_\omega\right)} \\ iii)\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}g_\delta^+(\delta)\in D(\mathcal{B}_\omega)\ \ et\ \mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}g_\delta^+(\delta)\in\overline{D(\mathcal{B}_\omega)}. \end{cases}$$

Théorème 5.6.2 *Soit* $g^-\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right)$ *et* $g_\delta^+\in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right)$ *où* $0<2\alpha<1$. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{A}1)\,\tilde{}\,(\mathcal{A}5)$, *la solution stricte du problème* (P_ω) *satisfait la propriété de régularité maximale suivante*

$$\begin{cases} \left(u_\delta^+\right)'',\ \mathcal{A}_\omega u_\delta^+\in C^{2\alpha}\left([0,\delta];E\right), \\ \left(u^-\right)'',\ \mathcal{A}_\omega u^-\in BUC^{2\alpha}\left(]-\infty,0];E\right) \end{cases}$$

si

$$\begin{cases} i)\ g_\delta^+(0)-g^-(0)\in D_{\mathcal{B}_\omega}\left(2\alpha,+\infty\right) \\ ii)\ \overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}f_+\in D\left(\mathcal{B}_\omega^2\right)\ \ et\ \mathcal{B}_\omega^2\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}f_\delta^+\in D_{\mathcal{B}_\omega}\left(2\alpha,+\infty\right) \\ iii)\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}g_\delta^+(\delta)\in D(\mathcal{B}_\omega)\ \ et\ \mathcal{H}\overline{(\mathcal{B}_\omega-\mathcal{H})}^{-1}g_\delta^+(\delta)\in D_{\mathcal{B}_\omega}\left(2\alpha,+\infty\right). \end{cases}$$

Bibliographie

[1] A.V. Balakrishnan. : Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. Pacific. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.

[2] O. Belhamiti, R. Labbas, K. Lemrabet & A. Medeghri. : Study of boundary value and transmission problems in the Hölder spaces. Appl. Math. Comput 202 (2008), pp. 608-617.

[3] S. F. Boukhari, M. Andasmas, H. Bouzit & K. Limam. : Lp regularity for elliptic transmission problems with two spectral parameters. Applicable Analysis, (2024), pp. 1-27. https ://doi.org/10.1080/00036811.2024.2358135.

[4] F. Bouziani, A. Favini, R. Labbas & A. Medeghri. : Study of boundary value and transmission problems governed by a class of variable operators verifying the Labbas-Terreni non commutativity assumption. Rev. Mat. Complut. 24 (2011), pp. 131-168.

[5] M. Cheggaga, A. Favinib, R. Labbasc, S. Maingotc & A. Medeghri :Abstract differential equations of elliptic type with general Robin boundary conditions in Holder spaces, Applicable Analysis, Vol. 91, No. 8, August 2012, 1453–1475.

[6] G. Da Prato, & P. Grisvard, Sommes d'opérateurs linéaire et équation différentielles opérationnelles, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 54 (1975), 305–387.

[7] G. Da Prato & E. Sinestrari. : Differential operators with non dense domain, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze Vol. 14 (2), (1987) pp. 285-344.

[8] R. Dautray & J-L. Lions, Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Volume 2, Functional and Variational Methods, Springer, 2000

[9] N. Dib-Baghdadli, R. Labbas, T. Mahdjoub, & A. Medeghri, (2021). On some reaction-diffusion equations generated by non-domiciliated triatominae, vectors of Chagas disease. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 26(12), 6091–6115. https ://doi.org/10.3934/dcdsb.2021004

[10] G. Dore, A. Favini, R. Labbas & K. Lemrabet. : An abstract transmission problem in a thin layer, I : Sharp estimates, J. Funct. Anal. 261 (2011), pp. 1865-1922.

[11] Z. Douara , K. Limam, M. Andasmas, Maximal Hölder Regularity of Elliptic Transmission Problems in Unbounded Domains, Asia Pac. J. Math., 12 (2025), 64. https ://doi.org/10.28924/APJM/12-64,Published : July 21, 2025

[12] G. Dore and S. Yakubov : Semigroup estimates and non coercive boundary value problems. Semigroup Forum, 60 (2000), pp. 93-121

[13] A. Eltaïef. : Etude d'équations différentielles abstraites du second et quatrième ordre sur la demi-droite, et applications. Thèse de doctorat, université du Havre (2010).

[14] K. -J. Engel & R. Nagel, One -parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer, 2000.

[15] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot & M. Meisner. : Study of complete abstract elliptic differential equations in non-commutative cases, Applicable Analysis Vol. 91, No. 8, August 2012, pp. 1495-1510. DOI :10.1080/00036811.2011.635652.

[16] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot & M. Meisner. : Boundary Value Problem for Elliptic Differential Equations in Noncommutative Cases. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol 33 (11&12) (2013), pp. 4967-4990.

[17] R. Fiorenza. : Hölder and locally Hölder Continuous Functions, and Open Sets of Class C^k, $C^{k,\lambda}$. Birkhäuser. 6330 Cham, Switzerland (2016). DOI 10.1007/978-3-319-47940-8.

[18] P. Grisvard, "Spazi di tracce e application ", Rejndiconti di Matematica, (4) Vol.5, Serie VI, pp. 657-729, 1972.

[19] M. Haase, The Functional Calculus for Sectorial Operators, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 169, 2006.

[20] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer, 1980.

[21] S. G. Krein. : Linear differential equations in Banach spaces. Moscou, (1967).

[22] R. Labbas, K. Lemrabet, K. Limam, A. Medeghri & M. Meisner. : On some transmission problems set in a biological cell, analysis and resolution, J. Differential Equations Vol 259 (2015), pp. 2695-2731.

[23] R. Labbas, A. Medeghri, & A.Menad, (2018). Solvability of elliptic differential equations, set in three habitats with skewness boundary conditions at the interfaces. Mediterranean Journal of Mathematics, 15, Article 177. https ://doi.org/10.1007/s00009-018-1177-x

[24] R.Labbas, A.Medeghri, & A.Menad. (2021). Study of an elliptic differential equation : Set in three habitats with skewness boundary conditions at the interfaces in Lq cases. Mediterranean Journal of Mathematics, 18, Article 840. https ://doi.org/10.1007/s00009-021-01840-3

[25] K. Lemrabet. Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 300(15) :531–534, 1985.

[26] K. Limam. : Resolution, in L^p-spaces, of transmission problems set in an unbounded domains. Appl. Math. Comput. Vol. 218(9) (2012), pp 5605-5619.Differential Equations, 259(6), 2695–2731. http ://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2015.04.002.

[27] J.-L. Lions & J. Peetre, "Sur une classe d'espaces d'interpolation", Publications mathématiques de l'I.H.é.S., tome 19, pp.5-68, 1964.

[28] A. Lunardi. : Interpolation Theory, Scuola Normale Superiore, Vol. 3 (2018).

[29] A. Lunardi. : Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, Springer Basel 1995, ISBN 978-3-0348-0556-8.

[30] C. Martinez and M. Sanz. : The Theory of Fractional Powers of Operators, North Holland, Mathematics studies 187, 2001.

[31] M. Moussaoui. : Étude, dans les espaces de Hölder, de problèmes elliptiques dans un secteur plan et, dans les espaces de Sobolev d'un problème à dérivée oblique dans un polygone plan. Thèse de doctorat Mathématiques, Nice (1977) 1977NICE4020.

[32] M. Najmi. : Régularité-Singularité dans les espaces de Hölder pour un Problème Elliptique et l'Equation de la Chaleur dans des Domaines non Réguliers, Thèse d'état, Université de Nice, 1992.

[33] A. Pazy : Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, 1st edition, Springer-Verlag, New York, Vol. 44, (1983) DOI : 978-1-4612-5561-1.

[34] E. Sinestrari. : On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 107, (1985), pp. 16-66.

[35] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differntial Operators, North-Holland Math. Library, vol. 18, 1978.

[36] C. Zuili, & H Queffélec, Eléments d'Analyse pour l'Agrégation, Masson, Paris, 1995.