

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM



Faculté des Sciences Exactes, et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques

Mémoire
Présenté par
FETTOUCH Houari
Pour obtenir
Le diplôme de Magister
Spécialité : Mathématique

Option : analyse fonctionnelle

Intitulé

**La Relation Entre les Solutions de
Certaines Classes d'Equations
Différentielles et les Fonctions de Petite
Croissance**

Composition du jury de soutenance

M. BENDOUKHA Berrabah	Professeur	Président	U.A.B.M
M. HAMOUDA Saada	Maître de Conférences A	Examineur	U.A.B.M
Mme. HAMANI Karima	Maître de Conférences A	Examineur	U.A.B.M
M. BELAÏDI Benharrat	Professeur	Encadreur	U.A.B.M

Année Universitaire : 2011/2012

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du département de Mathématiques à L'université de Mostaganem Sous la direction de monsieur BELAÏDI Benharrat Professeur à L'université de Mostaganem, Je tiens à lui exprimer mes plus vifs remerciements pour son aide continue et ses conseils avisés.

Je voudrais aussi mes plus vifs remerciements à monsieur le président du jury, Mr BENDOUKHA Berrabah professeur à L'université de Mostaganem et à Mr HAMOUDA Saada maître de conférences à L'université de Mostaganem, à Mme HAMANI Karima maître de conférences à L'université de Mostaganem, pour leur aide inestimable tout au long de ma formation.

Je dédie ce mémoire à mes chers parents, mes frères, mes soeurs, et toute ma famille en général ainsi qu'à mon proche entourage et à toute personne qui ma soutenu, aidée ou contribué de près ou de loin à ce travail.

Enfin, je voudrais remercier le personnel des départements de Mathématiques.

Table des Matières

1	Rappels et définitions	5
1.1	Fonction caractéristique de Rolf Nevanlinna	5
1.2	Premier Théorème fondamental de Rolf Nevanlinna	8
1.3	L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction entière	12
1.4	La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité supérieure	14
1.5	Théorème de Phragmén-Lindelöf.	15
2	La relation entre les solutions de certaines classes d'équations différen-	
	tielles et les fonctions de petite croissance	17
2.1	Introduction et résultats principaux:	17
2.1.1	Lemmes préliminaires.	19
2.1.2	Preuve du Théorème 2.1.4:	28
3	L'ordre, l'ordre inférieur et l'hyper-ordre des solutions d'une classe	
	d'équations différentielles linéaires avec des coefficients fonctions en-	
	tières	33
3.1	Introduction et principaux résultats	33
3.2	Quelques lemmes	37
3.2.1	Preuve du Théorème 3.1.2:	40
3.2.2	Preuve du Théorème 3.1.3	51
3.2.3	Preuve du Théorème 3.1.4	53

3.2.4	Preuve des Corollaires 3.1.5, 3.1.6 , 3.1.7 ,3.1.8 :	55
-------	--	----

4	Croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes	56
4.1	Introduction et principaux résultats	56
4.2	Quelques lemmes	59
4.2.1	Preuve du Théorème 4.1.4	61
4.2.2	Preuve du Théorème 4.1.5	71
4.2.3	Preuve du Théorème 4.1.6	75

Introduction

Pendant plusieurs années, la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolf Nevanlinna est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, en particulier la croissance et l'oscillation des solutions.

L'équation différentielle suivante

$$f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0 \quad (0.0.1)$$

a été étudié par plusieurs auteurs: B. Belaïdi[2], Frei[3], Ozawa[26], Gundersen [14], Langley[21].

En 1986, G.Gundersen a démontré le résultat suivant

Théorème: Si $Q(z)$ est une fonction entière transcendante telle que $\sigma(Q) \neq 1$, alors toutes les solutions $f(z) \neq 0$ de l'équation 0.0.1 sont d'ordre infini.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de quatre chapitres.

Le premier chapitre contient des rappels et définitions sur la théorie de R. Nevanlinna et quelques préliminaires de la théorie de Wiman-Valiron, dont on aura besoin par la suite.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la relation entre les solutions de certaine classe d'équations différentielles et les fonctions de petite croissance.

I.Laine et B.Bank parmi les premiers mathématiciens qui se sont intéressés aux solutions des équations différentielles du second ordre à coefficients fonctions entières.

En 2004, Z. X. Chen et K.H. Shon (voir [8]) ont étudié l'équation différentielle linéaire

$$f'' + B_1(z)e^{az}f' + B_0(z)e^{bz}f = 0$$

où B_1, B_0 sont des fonctions entières telles que $\sigma(B_j) < 1$ ($j = 0, 1$). Il ont cherché les conditions suffisantes sur les coefficients de telle façon que toute solution soit d'ordre infini et dans certains cas, ils ont donné des estimations précises sur l'exposant de convergence des zéros distincts

Le but de ce chapitre est d'améliorer les résultats de Chen et Shon pour l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0; \quad k \geq 2$$

où $A_j(z) = B_j(z) e^{p_j(z)}$ ($j = 0, \dots, k-1$), $p_j(z)$ sont des polynômes non constants tels que $\deg p_j(z) = n$ ($j = 0, \dots, k-1$) et $B_j(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières telles que $\sigma(B_j) < n$.

Dans le troisième chapitre, nous améliorons les résultats de C-H.Li, X-J.Huang.

Dans le quatrième chapitre on va étudier l'ordre de croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires non-homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières suivantes:

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = F$$

où $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ sont fonctions entières avec $F(z) \not\equiv 0$. On cherche des conditions suffisantes sur la croissance des coefficients pour que chaque solution non nulle soit d'ordre infini ou fini. Ensuite on estime les bornes inférieures de l'hyper-ordre et dans certains cas, on trouve des estimations précises sur l'hyper-ordre.

Chapitre 1

Rappels et définitions

On commence par citer quelques notations et résultats de la théorie de Nevanlinna dont on aura besoin par la suite. pour plus de détails (voir [16]).

1.1 Fonction caractéristique de Rolf Nevanlinna

Définition 1.1.1 *Pour tout nombre réel $x > 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(0, \ln x).$$

Lemme 1.1.1 *On a les résultats suivants:*

(1) $\ln x \leq \ln^+ x$

(2) $\ln^+ x \leq \ln^+ y$ pour tout $(0 < x \leq y)$

(3) $\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$

(4) $|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$

(5) $\ln^+ \left(\prod_{j=1}^m x_j \right) \leq \sum_{j=1}^m \ln^+ x_j$

(6) $\ln^+ \left(\sum_{j=1}^m x_j \right) \leq \ln m + \sum_{j=1}^m \ln^+ x_j$

Preuve. Montrons (5).

Si $\prod_{j=1}^m x_j \leq 1$, alors l'inégalité est triviale. Si $\prod_{j=1}^m x_j > 1$, alors

$$\ln^+ \left(\prod_{j=1}^m x_j \right) = \ln \left(\prod_{j=1}^m x_j \right) = \sum_{j=1}^m \ln x_j \leq \sum_{j=1}^m \ln^+ x_j.$$

Définition 1.1.2 Soit f une fonction méromorphe, n'étant pas identiquement égale à $a \in \mathbb{C}$. Soit $i(z, a, f)$ désignant la multiplicité de a -point de f à z . Ainsi, on définit

$$n(r, a, f) = n \left(r, \frac{1}{f - a} \right)$$

c'est à-dire, $n(r, a, f)$ est le nombre de racines de $f(z) = a$ dans $|z| \leq r$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. Pour les pôles de f , nous définissons pareillement

$$n(r, \infty, f) = n(r, f).$$

Définition 1.1.3 (fonction a -points). Pour la fonction méromorphe f , on définit

$$N(r, a, f) = N \left(r, \frac{1}{f - a} \right) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r$$

pour $a \neq \infty$ et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r$$

$N(r, a, f)$ est appelée fonction a -points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Proposition 1.1.1 Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent

$$f(z) = \sum_{j=n}^{\infty} c_j z^j, c_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\ln |c_n| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}).$$

Définition 1.1.4 (*fonction de proximité*). Pour la fonction méromorphe f , on définit

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi, \quad a \neq \infty$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

$m(r, a, f)$ est appelée fonction de proximité de la fonction f au point a .

Définition 1.1.5 (*Fonction caractéristique*). La fonction caractéristique de la fonction méromorphe f est définie comme suit

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Exemple 1.1.1: Pour la fonction $f(z) = e^{2z}$, on a

$$m(r, f) = \frac{2r}{\pi}, \quad N(r, f) = 0.$$

D'où

$$T(r, f) = \frac{2r}{\pi}.$$

1.2 Premier Théorème fondamental de Rolf Nevanlinna

Théorème 1.2.1 (voir [16]) (*Premier théorème fondamental*). Soit f une fonction méromorphe, $a \in \mathbb{C}$ et

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

le développement de Laurent de la fonction $f - a$ à l'origine. Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \ln |c_m| + \varphi(r, a)$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \ln 2 + \ln^+ |a|.$$

Preuve. Le 1^{ier} cas:

Si $a = 0$, alors d'après le Lemme 1.1.1 et la Proposition 1.1.1, on a

$$\ln |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f})$$

et

$$\ln |c_m| = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}).$$

Donc

$$m(r, \frac{1}{f}) + N(r, \frac{1}{f}) = m(r, f) + N(r, f) - \ln |c_m|.$$

D'où

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) - \ln |c_m|. \tag{1.2.1}$$

Où

$$\varphi(r, 0) = 0.$$

Le 2^{ème} cas:

Montrons le cas général $a \neq 0$. Posons $g = f - a$. Alors

$$N(r, \frac{1}{g}) = N(r, \frac{1}{f-a}), \quad N(r, g) = N(r, f)$$

et

$$m(r, \frac{1}{g}) = m(r, \frac{1}{f-a}).$$

De plus

$$\ln^+ |g| = \ln^+ |f - a| \leq \ln^+ |f| + \ln^+ |a| + \ln 2$$

et

$$\ln^+ |f| = \ln^+ |f - a + a| = \ln^+ |g + a| \leq \ln^+ |g| + \ln^+ |a|.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$m(r, g) \leq m(r, f) + \ln^+ |a| + \ln 2$$

et

$$m(r, f) \leq m(r, g) + \ln^+ |a| + \ln 2.$$

Posons

$$\varphi(r, a) = m(r, g) - m(r, f).$$

Alors

$$|\varphi(r, a)| \leq \ln^+ |a| + \ln 2.$$

En appliquant (1.2.1) pour la fonction g , on aura

$$\begin{aligned} T(r, \frac{1}{g}) &= m\left(r, \frac{1}{g}\right) + N(r, \frac{1}{g}) = m(r, g) + N(r, g) - \ln |c_m| \\ &= m(r, f) + N(r, f) + \varphi(r, a) - \ln |c_m| = T(r, f) - \ln |c_m| + \varphi(r, a). \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1: Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1)$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Lemme 1.2.1 Soient f_1, \dots, f_n des fonctions méromorphes. Alors

$$m\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) + \ln n \quad (\text{a})$$

$$m\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) \quad (\text{b})$$

$$N\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i) \quad (\text{c})$$

$$N\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i) \quad (\text{d})$$

$$T\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \ln n \quad \text{pour } r \geq 1 \quad (\text{e})$$

$$T\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) \quad \text{pour } r \geq 1 \quad (\text{f})$$

$$T(r, f^n) = nT(r, f) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{g})$$

Preuve.(e) On a

$$\begin{aligned} T\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) &= m\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) + N\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) + \ln p + \sum_{i=1}^n N(r, f_i) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \ln n.$$

(f) On a

$$m\left(r, \prod_{i=1}^n f_j\right) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i)$$

et

$$N\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i)$$

donc

$$T\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) = m\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) + N\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i).$$

(g) Si $|f| \leq 1$, on a $|f^n| = |f|^n \leq 1$, alors

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) = nN(r, f).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) \\ &= nm(r, f) + nN(r, f) = nT(r, f). \end{aligned}$$

Définition 1.2.1 Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par

$$\lambda(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$ et

l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\bar{\lambda}(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et $\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$.

Exemple 1.2.1: L'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = e^z + b$ (où $b \neq 0, \infty$) est égal à 1.

1.3 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction entière

Définition 1.3.1 Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r}$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}$$

On dit que la fonction f est l'ordre infini si

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty$$

Exemple 1.3.1: Soit $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$. On a $n(t, f) = 0$, et donc $N(r, f) = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^r \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \log^+ |a_n| r^n (1 + o(1)) d\theta \\ &= n \log r + O(1), \end{aligned}$$

et comme $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) = n \log r + O(1)$, alors $\sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = 0$

Exemple 1.3.2: Pour la fonction $f(z) = \exp\{\exp z\}$, on a

$$T(r, f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

D'où $\sigma(f) = \infty$ et d'hyper ordre $\sigma_2(f) = 1$.

Lemme 1.3.1 Si f est une fonction méromorphe non constante dans \mathbb{C} , alors

$$\sigma(f^{(k)}) = \sigma(f); \quad (k \in \mathbb{N})$$

Définition 1.3.2 Soit f une fonction entière non constante, l'ordre inférieur de la fonction f est défini par

$$\mu(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

1.4 La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité supérieure

Définition 1.4.1 Supposons que $E \subset [1, +\infty[$, on désigne par $m(E)$ la mesure linéaire de l'ensemble E et par $lm(E)$ la mesure logarithmique de l'ensemble E , avec

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t) dt$$

et

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t) \frac{dt}{t}$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E . La densité supérieure et inférieure de l'ensemble E sont définies par

$$\overline{\text{dens}}E = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{m(E \cap [1, r])}{r},$$

et

$$\underline{\text{dens}}E = \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf \frac{m(E \cap [1, r])}{r}.$$

Exemple 1.4.1: *i)* La mesure linéaire de l'ensemble $E = [e, e^4] \subset [1, +\infty[$ est

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t) dt = \int_e^{e^4} dt = e(e^3 - 1).$$

ii) La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [e, e^4] \subset [1, +\infty[$ est

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t) \frac{dt}{t} = \int_e^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

iii) La densité supérieure de l'ensemble $E = [e, e^4] \subset [1, +\infty[$ est

$$\begin{aligned} \overline{\text{dens}}E &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(E \cap [1, r])}{r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{m([e, e^4] \cap [1, r])}{r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{m([e, e^4])}{r} = 0. \end{aligned}$$

Définition 1.4.2 [19] Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière, $\mu(r)$ le terme maximal, i.e. $\mu(r) = \max \{|a_n| r^n; n = 0, 1, \dots\}$. Alors l'indice central de la fonction f est défini par:

$$v_f(r) = \max \{m; \mu(r) = |a_m| r^m\}.$$

Définition 1.4.3 La fonction $a(z)$ est appelée petite fonction par rapport à f si $a(z)$ est une fonction méromorphe satisfaisante $T(r, a) = S(r, f)$, c'est-à-dire $T(r, a) = o(T(r, f))$ quand $r \rightarrow \infty$ à l'extérieur d'un ensemble de mesure linéaire finie.

Lemme 1.4.1 [16] Soient f une fonction méromorphe transcendante et $k \geq 1$ un entier positif. Alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log(rT(r, f)))$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

1.5 Théorème de Phragmén-Lindelöf.

Soit f une fonction analytique dans le domaine fermé

$$D = \{z : \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2, r_0 \leq |z| \leq +\infty\}$$

et continue dans $\overline{D} = D \cup \partial D$ (∂D est la frontière de D). Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour $|z| \geq r_1(\varepsilon)$, $z \in D$ on a

$$|f(z)| \leq \exp \left\{ \varepsilon |z|^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}} \right\}$$

et pour $z \in \partial D$, on a

$$|f(z)| \leq M \quad (M \text{ est constante}).$$

Alors $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D$.

Chapitre 2

La relation entre les solutions de certaines classes d'équations différentielles et les fonctions de petite croissance

2.1 Introduction et résultats principaux:

Dans ce chapitre, on étudie la relation entre les fonctions d'ordre fini et les solutions de certaines équations différentielles à coefficients fonctions entières.

Dans l'étude de la croissance et les points fixes de l'équation différentielle

$$f'' + B_1(z) e^{az} f' + B_0(z) e^{bz} f = 0, \quad (2.1.1)$$

où B_1, B_0 sont des fonctions entières et a, b deux nombres complexes, Chen Zong-Xuan et Shon Kwang-Ho ont obtenu dans [6] les résultats suivants:

Théorème 2.1.1 [6] *Soient $B_j(z) \not\equiv 0$ ($j = 0, 1$) deux fonctions entières telles que $\sigma(B_j) < 1$ ($j = 0, 1$) et a, b deux nombres complexes constants non nuls tels que: $a \cdot b \neq 0$ et $a \neq b$.*

Alors chaque solution non constante de l'équation (2.1.1) est d'ordre infini .

Exemple 2.1.1: L'équation différentielle suivante

$$f'' + (Z + 1)e^z f' + (z^2 + 3)e^{5z} f = 0$$

vérifie les conditions du théorème 2.1.1. Alors toutes les solutions de cette équation sont d'ordre infini.

Théorème 2.1.2 [6] Soient $B_j(z) \neq 0$ ($j = 0, 1$) deux fonctions entières telles que $\sigma(B_j) < 1$ ($j = 0, 1$); a, b deux nombres complexes constants tels que $a.b \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$). Si $\psi(z) \neq 0$ est une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution $f \neq 0$ de l'équation: (2.1.1) satisfait

$$\overline{\lambda}(f - \psi) = \overline{\lambda}(f' - \psi) = \overline{\lambda}(f'' - \psi) = \infty$$

Théorème 2.1.3 [30] Soient $B_j(z) \neq 0$ ($j = 0, 1$) deux fonctions entières telles que $\sigma(B_j) < 1$ ($j = 0, 1$) , a, b deux nombres complexes constants tels que $a = cb$ ($c > 1$). Si $\psi(z) \neq 0$ est une fonction méromorphe tel que $\sigma(\psi) < 1$, alors toutes les solutions $f \neq 0$ de l'équation (2.1.1) satisfait

$$\overline{\lambda}(f - \psi) = \overline{\lambda}(f' - \psi) = \overline{\lambda}(f'' - \psi) = \infty$$

Théorème 2.1.4 Soient $p_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i$ ($j = 0, \dots, k-1$) des polynômes non constants où $a_{0,j}, a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ ($j = 0, \dots, k-1$) sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} \neq 0$ ($j = 0, \dots, k-1$) et soient $B_j(z) \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions entières telles que $\sigma(B_j) < n$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Supposons que $a_{n,j} - a_{n,i} \neq 0$ ($i \neq j$) . Si $\psi(z) \neq 0$ est une fonction entière d'ordre inférieur à n , alors toute solution $f \neq 0$ de l'équation:

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_1 f' + A_0 f = 0 \quad ; k \geq 2 \quad (2.1.2)$$

où $A_j(z) = B_j(z) e^{p_j(z)}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) satisfait $\bar{\lambda}(f - \psi) = \bar{\lambda}(f' - \psi) = \bar{\lambda}(f'' - \psi) = \infty$.

Exemple 2.1.2: L'équation différentielle suivante

$$f'''(z) + \cos(z) e^{4z^2+1} f''(z) + \sin(z) e^{z^2} f'(z) + e^{5z^2} f(z) = 0.$$

vérifie les conditions du théorème 2.1.4. Alors toute solution $f \neq 0$ de cette équation différentielle satisfait

$$\bar{\lambda}(f - e^z) = \bar{\lambda}(f' - e^z) = \bar{\lambda}(f'' - e^z) = \infty.$$

Corollaire 2.1.5 Soient $B_j(z) \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions entières telles que $\sigma(B_j) < n$ ($j = 0, 1, \dots, n$). Supposons que $a_{n,j} - a_{n,i} \neq 0$ ($i \neq j$). Alors toutes les solutions $f \neq 0$ de l'équation (2.1.2) satisfont:

$$\bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\lambda}(f'' - z) = \infty.$$

2.1.1 Lemmes préliminaires.

Lemme 2.1.1 [13] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante telle que $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Soit $\Gamma = \{(k_1, j_1), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, telle que pour tout z satisfaisant $z \notin E_1 \cup [0, 1]$ et pour tous $(k, j) \in \Gamma$, on a

$$\frac{|f^{(k)}(z)|}{|f^{(j)}(z)|} \leq |z|^{(k-j) \cdot (\sigma-1+\varepsilon)}$$

Lemme 2.1.2 [4, 25] Supposons que $p(z) = (\alpha + i\beta) z^n + \dots$ (α, β sont des nombres réels, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$) est un polynôme telle que $\deg p(z) = n \geq 1$, $A(z) (\neq 0)$ une fonction entière tel que $\sigma(A) < n$. Soit $g(z) = A(z) e^{p(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(p, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus H_1 \cup H_2$ ($H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi); \delta(p, \theta) = 0\}$) il

existe $R > 1$ tel que pour $|z| = r > R$, nous avons

(i) Si $\delta(p, \theta) > 0$, alors

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\} < |g(re^{i\theta})| < \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\};$$

(ii) Si $\delta(p, \theta) < 0$, alors

$$\exp\{(1 + \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\} < |g(re^{i\theta})| < \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\};$$

Nous allons utiliser une version spéciale du Phragmén-lindelöf pour prouver nos résultats.

Nous nous référons à Titchmarsh ([27], p.177).

Lemme 2.1.3 Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le domaine D entre les deux lignes droites formant un angle $\frac{\pi}{\beta - \alpha}$ à l'origine et sur les lignes elles-mêmes. Si pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $R(\varepsilon) > 0$ tel que pour $|z| > R(\varepsilon)$, $z \in D$, nous avons

$$|f(z)| < O\left(e^{\varepsilon r^{\frac{\pi}{\beta - \alpha}}}\right),$$

et pour $z \in \partial D$, nous avons $|f(z)| < M$ ($M > 0$ est une constante), alors

$|f(z)| < M$ est vérifiée pour tout $z \in D$.

Lemme 2.1.4 Soit $n \geq 2$ et $A_j(z) = B_j(z) e^{p_j(z)}$ ($1 \leq j \leq n$) où $B_j(z)$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur à n et $a_{n,j} \in \mathbb{C} - \{0\}$ une constante complexe. Supposons que $a_{n,j} - a_{n,i} \neq 0$ pour $i \neq j$. Alors il existe un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour toute constante $M > 0$ donnée et $z = re^{i\theta}$; $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (H_1 \cup H_2)$, nous avons pour un certain $s = s(\theta) \in \{1, \dots, n\}$ pour $j \neq s$, $\frac{|A_j(re^{i\theta})||z|^M}{|A_s(re^{i\theta})|} \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$ où $H_2 = \{\theta : \delta(a_{j,n}z^n, \theta) = 0 \text{ ou } \delta(a_{i,n}z^n, \theta) = \delta(a_{j,n}z^n, \theta), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ est un ensemble fini.

Preuve. Nous montrons le Lemme 2.1.4 par induction mathématique. Pour $n = 2$, le Lemme 2.1.4 peut être prouvé en appliquant le Lemme 2.1.2 à $\frac{A_1}{A_2}$ ou $\frac{A_2}{A_1}$. Supposons que

le Lemme 2.1.4 est vrai pour $n \leq k - 1$. Pour le cas $n = k$. En prenant $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (H_1 \cup H_2)$, il existe un certain $t = t(\theta) \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ tel que

$$\frac{|A_j(re^{i\theta})| |z|^M}{|A_t(re^{i\theta})|} \longrightarrow 0$$

pour $j \in \{1, \dots, t - 1, t + 1, \dots, k - 1\}$. Maintenant, nous comparons $A_t(re^{i\theta})$ avec $A_k(re^{i\theta})$. Si $\delta(a_{t,n}z^n - a_{k,n}z^n, \theta) < 0$, alors d'après le Lemme 2.1.2, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, nous avons,

$$\left| \frac{A_t(re^{i\theta})}{A_k(re^{i\theta})} \right| \leq e^{(1-\varepsilon)\delta(a_{t,n}z^n - a_{k,n}z^n, \theta)r^n},$$

donc $\left| \frac{A_t(re^{i\theta})}{A_k(re^{i\theta})} \right| |z|^M \longrightarrow 0$ pour $r \longrightarrow \infty$. Par conséquent, pour $j \neq k$

$$\left| \frac{A_j(re^{i\theta})}{A_k(re^{i\theta})} \right| |z|^M = \left| \frac{A_j(re^{i\theta})}{A_t(re^{i\theta})} \right| |z|^M \left| \frac{A_t(re^{i\theta})}{A_k(re^{i\theta})} \right| \longrightarrow 0.$$

Si $\delta(a_{t,n}z^n - a_{k,n}z^n, \theta) > 0$, alors $\delta(a_{k,n}z^n - a_{t,n}z^n, \theta) < 0$, et donc $\left| \frac{A_k(re^{i\theta})}{A_t(re^{i\theta})} \right| |z|^M \longrightarrow 0$ pour $r \longrightarrow \infty$.

Lemme 2.1.5 [24, p 112] *Soit $f(z)$ une fonction entière telle que $\sigma(f) = \sigma$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné et $h > \sigma$, il existe une séquence de disques $\{D_\Gamma\}_{\Gamma=1}^\infty$ centre en z_Γ et de rayon $|z_\Gamma|^h$ (chaque z_Γ est un zéro de $f(z)$ contenus dans un ensemble E de mesure linéaire finie tel que pour r suffisamment grand, nous avons*

$$|f(z)| > e^{-r^{\sigma+\varepsilon}} \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \cup_{\Gamma=1}^\infty D_\Gamma.$$

Lemme 2.1.6 *Supposons que $a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{n,n}$ ($n \geq 1$) sont des constantes complexes satisfaisant $a_{j,n} - a_{i,n} \neq 0$ pour $i \neq j$. Soit*

$$A(z) = \sum_{j=1}^n B_j(z) e^{p_j(z)},$$

où $B_j(z)$ sont des fonctions entières telles que $\sigma(B_j(z)) < n$, Alors on a $\sigma(A) = n$.

Preuve. Il est évident que la conclusion est vraie pour $n = 1$. Maintenant supposons que $n \geq 2$ et que $|a_{1,n}| \geq |a_{j,n}|$; $j = 2, \dots, n$. Soit $\arg a_{j,n} = \theta_j$ et $\sigma(B_j) = \rho_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. D'après le Lemme 2.1.5, pour tout $\varepsilon > 0$ donné et $h > \rho_1$, nous avons pour $r \rightarrow \infty$

$$|B_1(z)| > e^{-r\rho_1 + \varepsilon}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \cup_{\Gamma=1}^{\infty} D_{\Gamma},$$

où D_{Γ} est définie par le Lemme 2.1.5, Prenons θ_0 tel que $\cos(n\theta_0 + \theta_1) = 1$. Donc pour $z = re^{i\theta_0} \in \mathbb{C} \setminus \cup_{\Gamma=1}^{\infty} D_{\Gamma}$, nous avons

$$A(z) = B_1(z) e^{p_1(z)} + B_2(z) e^{p_2(z)} + \dots + B_n(z) e^{p_n(z)}, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} |A(z)| &\geq e^{-r\rho_1 + \varepsilon} e^{|a_{1,n}|r^n} - e^{r\rho_2 + \varepsilon} e^{|a_{2,n}|r^n \cos(n\theta_0 + \theta_2)} - \dots - e^{r\rho_n + \varepsilon} e^{|a_{n,n}|r^n \cos(n\theta_0 + \theta_n)} \\ &\geq e^{|a_{1,n}|r^n - r\rho_1 + \varepsilon} \left(1 - e^{\left(|a_{2,n}| \cos(n\theta_0 + \theta_2) - |a_{1,n}| \right) r^n + r\rho_1 + \varepsilon + r\rho_2 + \varepsilon} - \dots \right. \\ &\quad \left. - e^{\left(|a_{n,n}| \cos(n\theta_0 + \theta_n) - |a_{1,n}| \right) r^n + r\rho_1 + \varepsilon + r\rho_n + \varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

nous pouvons prendre ε suffisamment petit tel que $\rho_j + \varepsilon < n$; $j = 1, 2, \dots, n$. Maintenant, nous devons considérer deux cas :

- 1) Si $|a_{j,n}| < |a_{1,n}|$ ($j \in \{2, \dots, n\}$), alors $|a_{j,n}| \cos(n\theta_0 + \theta_j) - |a_{1,n}| < 0$.
 - 2) Si $|a_{j,n}| = |a_{1,n}|$ ($j \in \{2, \dots, n\}$), puisque $a_{1,n} - a_{j,n} \neq 0$, nous avons $\cos(n\theta_0 + \theta_j) < 1$.
- Donc $|a_{j,n}| \cos(n\theta_0 + \theta_j) - |a_{1,n}| < 0$.

D'où pour r suffisamment grand, par (2.1.3), nous avons

$$|A(z)| \geq e^{|a_{1,n}|r^n - r\rho_1 + \varepsilon} (1 - o(1)) \geq \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}|a_{1,n}|r^n} \quad (2.1.4)$$

De (2.1.4) nous avons $\sigma(A) \geq n$, ce qui conduit à $\sigma(A) = n$.

Lemme 2.1.7 [7] *Supposons que $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F \neq 0$, sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation $f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F$, alors f satisfait $\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \sigma(f) = \infty$. pour la preuve on a besoin également besoin du résultat suivant.*

Lemme 2.1.8 *Soit $A_j(z) = B_j(z) e^{p_j(z)}$ ($j = 0, \dots, k-1$), où $B_j(z)$ sont des fonctions entières telles que $\sigma(B_j) < n$ pour $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $a_{j,n} \neq 0$ sont des constantes complexes telles que $a_{j,n} - a_{i,n} \neq 0$ pour $i \neq j$. Alors toute solution f de l'équation (2.1.2) satisfait $\sigma(f) = \infty$.*

Preuve. Premièrement, nous montrons que f ne peut pas être un polynôme. Sinon, par (2.1.2), nous avons

$$A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = -f^{(k)}$$

En comparant l'ordre des deux côtés, et par le Lemme 2.1.6, on peut obtenir une contradiction.

Maintenant, supposons le contraire, il existe une solution transcendante $f(z)$ tel que $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Par le Lemme 2.1.1, pour tout ε_0 ($0 < \varepsilon_0 < 1$) donné, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors

$$\frac{|f^{(j)}(z)|}{|f^{(i)}(z)|} \leq |z|^{k\sigma}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1; \quad j = i+1, \dots, k \quad (2.1.5)$$

quand $z \rightarrow \infty$ sur le rayon $\arg z = \psi_0$. Notons par $E_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(p_j(z), \theta) = 0, 0 \leq j \leq k\} \cup \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(p_j(z) - p_i(z), \theta) = 0, 0 \leq j \leq k, 0 \leq i \leq k\}$, E_2 est un ensemble fini. Supposons que $H_j \subset [0, 2\pi)$ est l'ensemble exceptionnel appliquant le Lemme 2.1.2 à A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Alors $E_3 = \cup_{j=0}^{k-1} H_j$ est de mesure linéaire nulle. Soient $\arg z = \psi_0 \in [0, 2\pi) - (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ et à écrire $\delta_j = \delta(p_j(z), \psi_0)$. Nous avons deux cas:

(i) tous les $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{k-1}$ sont négatifs. D'après le Lemme 2.1.4, il existe une certaine $t \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ tel que pour $j \neq t$, $M > 0$, on a

$$\frac{A_j (r e^{i\psi_0})}{A_t (r e^{i\psi_0})} |z^M| \longrightarrow 0 \quad (2.1.6)$$

quand $r \longrightarrow \infty$. posons $\delta = \delta(p_t(z), \psi_0)$. Il est évident que $\delta > 0$.

Maintenant nous prouvons que $|f^{(t)}(z)|$ est bornée sur tout le rayon $\arg z = \psi_0$. Supposons que $|f^{(t)}(z)|$ n'est pas bornée sur un rayon $\arg z = \psi_0$. Soit

$$M(r, f^{(t)}, \psi_0) = \max \{ |f^{(t)}(z)| : 0 \leq |z| \leq r, \arg z = \psi_0 \}.$$

Alors il existe une séquence de points $z_n = r_n e^{i\psi_0}$, tel que $r_n \longrightarrow \infty$

$$M(r_n, f^{(t)}, \psi_0) = |f^{(t)}(r_n e^{i\psi_0})|, r_n \longrightarrow \infty.$$

On prend la courbe $\mathbf{C}_n: z = r e^{i\psi_0}$. $0 \leq r \leq |z_n|$. Pour chaque n , nous avons

$$f^{(t-1)}(z_n) = f^{(t-1)}(0) + \int_{c_n} f^{(t)}(u) du$$

et donc

$$|f^{(t-1)}(z_n)| \leq |f^{(t-1)}(0)| + |z_n| \cdot |f^{(t)}(z_n)|$$

ce qui conduit à

$$\frac{|f^{(t-1)}(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} \leq (1 + o(1)) |z_n|, \quad z_n \longrightarrow \infty.$$

En plus,

$$\frac{|f^{(t-j)}(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} \leq (1 + o(1)) |z_n|^j, \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (2.1.7)$$

quand $z_n \rightarrow \infty$. Comme $f^{(t)} \neq 0$, d'après l'équation 2.1.2, on a

$$\begin{aligned} |A_t(z_n)| &\leq \frac{|f^{(k)}(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} + \dots + |A_{t+1}(z_n)| \frac{|f^{(t+1)}(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} \\ &+ |A_{t-1}(z_n)| \frac{|f^{(t-1)}(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} + \dots + |A_0(z_n)| \frac{|f(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

quand $z_n \rightarrow \infty$, d'où on obtient

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1}{|A_t(z_n)|} \left(\frac{|f^{(k)}(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} + \dots + |A_{t+1}(z_n)| \frac{|f^{(t+1)}(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} \right. \\ &\left. + |A_{t-1}(z_n)| \frac{|f^{(t-1)}(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} + \dots + |A_0(z_n)| \frac{|f(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)|} \right). \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

D'après le Lemme 2.1.2, il est facile de déduire que

$$\frac{|f^{(k)}(z_n)|}{|f^{(t)}(z_n)| |A_t(z_n)|} \rightarrow 0.$$

En utilisant (2.1.6) et (2.1.7), on voit que le côté droit de (2.1.9) tend vers 0 lorsque $z_n \rightarrow \infty$, c'est une contradiction. Donc $|f^{(t)}|$ est bornée sur $\arg z = \psi_0 \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup H)$.

Supposons que $|f^{(t)}(re^{i\psi_0})| \leq M_1$ (M_1 est une constante). En choisissant la courbe $c'' = \{z : \arg z = \psi_0, 0 \leq |z| \leq r\}$, on obtient

$$f^{(t-1)}(z) = f^{(t-1)}(0) + \int_0^z f^{(t)}(u) du.$$

Pour $z = re^{i\psi_0}$ assez grand, nous avons $|f^{(t-1)}(z)| \leq M_2 |z|$ (M_2 est une constante). On obtient, par induction

$$|f(z)| \leq M_3 |z|^t \leq M_4 |z|^k. \quad (2.1.10)$$

(ii) Supposons que pour tout $j: 0 \leq j \leq k-1$, $\delta(p_j(z), \psi_0) < 0$. Par le Lemme 2.1.4, il

existe un $s \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, tel que pour $j \neq s$, nous avons

$$\left| \frac{A(r e^{i\psi_0})}{A_s(r e^{i\psi_0})} \right| \longrightarrow 0$$

quand $r \longrightarrow \infty$. Posons $\delta = \delta(p_s(z), \psi_0)$. Alors $\delta < 0$. D'après le Lemme 2.1.2, pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$), on a

$$|A_j(r e^{i\psi_0})| \leq |A_s(r e^{i\psi_0})| \leq \exp((1 - \varepsilon)\delta r). \quad (2.1.11)$$

Supposons que $|f^{(k)}(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \psi_0$. Soit $M(r, f^{(k)}, \psi_0) = \max \left\{ |f^{(k)}(z)| : 0 \leq |z| \leq r, \arg z = \psi_0 \right\}$. Il existe une séquence de points infinie $z_n = r_n e^{i\psi_0}$, $r_n \longrightarrow \infty$ telle que $M(r_n, f^{(k)}, \psi_0) = |f^{(k)}(r_n e^{i\psi_0})|$ quand $r_n \longrightarrow \infty$. En choisissant la courbe $\mathbf{C}_n: z = r e^{i\psi_0}, 0 \leq r \leq |z_n|$, on obtient

$$f^{(k-1)}(z) = f^{(k-1)}(0) + \int_0^z f^{(k)}(u) du,$$

et sur \mathbf{C}_n , $|f^{(k)}(z)| \leq |f^{(k)}(z_n)|$. Donc

$$|f^{(k-1)}(z_n)| \leq |f^{(k-1)}(0)| + |z_n| \cdot |f^{(k)}(z_n)|$$

et

$$\frac{|f^{(k-1)}(z_n)|}{|f^{(k)}(z_n)|} \leq (1 + o(1)) |z_n|.$$

Alors nous avons

$$\frac{|f^{(k-j)}(z_n)|}{|f^{(k)}(z_n)|} \leq (1 + o(1)) |z_n|^j, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.1.12)$$

Comme $f^{(k)} \neq 0$, d'après l'équations (2.1.2) et les relations (2.1.11) et (2.1.12), pour n suffisamment grand, nous avons

$$\begin{aligned}
1 &\leq |A_{k-1}(z_n)| \frac{|f^{(k-1)}(z_n)|}{|f^{(k)}(z_n)|} + \dots \\
&+ |A_0(z_n)| \frac{|f(z_n)|}{|f^{(k)}(z_n)|} \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta|z_n|^v\} \cdot |z_n|^{M_5}
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

où M_5 est une constante positive. Ce qui est impossible puisque $\delta < 0$. Alors $f^{(k)}(z)$ est bornée sur $\arg z = \psi_0$. Supposons que

$$|f^{(k)}(re^{i\psi_0})| \leq M_6 \quad (M_6 > 0).$$

On choisit la courbe $c'' = \{z : \arg z = \psi_0, 0 \leq |z| \leq r\}$. Alors

$$f^{(k-1)}(z) = f^{(k-1)}(0) + \int_0^z f^{(k)}(u) du.$$

Pour $z = re^{i\psi_0}$ suffisamment grand, par induction, nous avons

$$|f(z)| \leq M_7 |z|^k \quad (M_7 > 0). \tag{2.1.14}$$

En combinant le cas (i) et le cas (ii), pour $\arg z = \psi_0 \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ et $|z| = r \geq r_0(\psi_0) > 0$, nous obtenons

$$|f(z)| \leq M(\psi_0) |z|^k, \tag{2.1.15}$$

où $M(\psi_0) > 0$ est une constante ne dépendant que de ψ_0 . D'autre part, on choisit $\theta_j \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ ($j = 1, 2, \dots, n, n+1$) tel que:

$$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi, \quad \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$$

et

$$\max \{ \theta_{j+1} - \theta_j; 1 \leq j \leq n \} < \frac{\pi}{\sigma + 1}.$$

Pour $\epsilon > 0$ donné, nous avons

$$\frac{|f(z)|}{|z^k|} \leq |f(z)| \leq \exp \{ \epsilon r^{\sigma+1} \}$$

pour $r = |z|$ suffisamment grand. De (2.1.15) et le Lemme 2.1.3, on a $\frac{|f(z)|}{|z^k|} \leq M'$ (M' est une constante positive) dans les secteurs $\{z : \theta_j \leq \arg z \leq \theta_{j+1}, |z| \geq r\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) pour r suffisamment grand. Donc $\frac{|f(z)|}{|z^k|} \leq M''$ dans tout le plan, où M'' est une constante positive. Donc $f(z)$ est un polynôme. C'est une contradiction, et donc

$$\sigma(f) = \infty.$$

2.1.2 Preuve du Théorème 2.1.4:

Supposons que $f(z) \neq 0$ est une solution de (2.1.2). Tout d'abord, montrons que $\lambda(f - \psi) = \infty$. Posons $f = g_0 + \psi$. Par le Lemme 2.1.8, on a $\sigma(g_0) = \sigma(f) = \infty$. En remplaçant $f = g_0 + \psi$ dans l'équation (2.1.2), nous obtenons

$$(g_0 + \psi)^{(k)} + B_{k-1} e^{p_{k-1}(z)} (g_0 + \psi)^{(k-1)} + \dots + B_1 e^{p_1(z)} (g_0 + \psi)' + B_0 e^{p_0(z)} (g_0 + \psi) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} & g_0^{(k)} + B_{k-1} e^{p_{k-1}(z)} g_0^{(k-1)} + \dots + B_1 e^{p_1(z)} g_0' + B_0 e^{p_0(z)} g_0 \\ &= - \left(\psi^{(k)} + B_{k-1} e^{p_{k-1}(z)} \psi^{(k-1)} + \dots + B_1 e^{p_1(z)} \psi' + B_0 e^{p_0(z)} \psi \right). \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

On remarque que (2.1.16) peut avoir une solution d'ordre fini, mais nous avons seulement

besoin d'étudier les solutions d'ordre ∞ . Si $\psi^{(k)} + B_{k-1}e^{p_{k-1}(z)}\psi^{(k-1)} + \dots + B_1e^{p_1(z)}\psi' + B_0e^{p_0(z)}\psi = 0$, d'après le Lemme 2.1.8, nous avons $\sigma(\psi) = \infty$. C'est une contradiction.

Par conséquent, nous avons $\psi^{(k)} + B_{k-1}e^{p_{k-1}(z)}\psi^{(k-1)} + \dots + B_1e^{p_1(z)}\psi' + B_0e^{p_0(z)}\psi \neq 0$.

D'après le Lemme 2.1.7 et (2.1.16), on obtient $\bar{\lambda}(g_0) = \lambda(g_0) = \sigma(g_0) = \infty$.

Maintenant, nous montrons que $\bar{\lambda}(f' - \psi) = \infty$.

Soit $g_1 = f' - \psi$. En dérivant les deux côtés de l'équation (2.1.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + B_{k-1}e^{p_{k-1}(z)}f^{(k)} + [(B_{k-1}e^{p_{k-1}(z)}) + B_{k-2}e^{p_{k-2}(z)}] f^{(k-1)} \\ + \dots + [(B_1e^{p_1(z)})' + B_0e^{p_0(z)}] f' + (B_0e^{p_0(z)})' f = 0 \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

De l'équation (2.1.2), on peut écrire

$$f = -\frac{1}{A_0} [f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f'] . \quad (2.1.18)$$

En substituant (2.1.18) en (2.1.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + \left[B_{k-1}e^{p_{k-1}(z)} - \frac{(B_0e^{p_0(z)})'}{B_0e^{p_0(z)}} \right] f^{(k)} + \\ \left[(B_{k-1}e^{p_{k-1}(z)})' + B_{k-2}e^{p_{k-2}(z)} - \frac{(B_0e^{p_0(z)})'}{B_0e^{p_0(z)}} B_{k-1}e^{p_{k-1}(z)} \right] f^{(k-1)} \\ + \dots + \left[(B_1e^{p_1(z)})' + B_0e^{p_0(z)} - \frac{(B_0e^{p_0(z)})'}{B_0e^{p_0(z)}} B_1e^{p_1(z)} \right] f' = 0. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

On note (2.1.19) par la représentation suivante :

$$f^{(k+1)} + C_{k-1}f^{(k)} + C_{k-2}f^{(k-1)} \dots + C_0f' = 0, \quad (2.1.20)$$

où

$$C_{k-1} = B_{k-1}e^{p_{k-1}(z)} - \left(\frac{B'_0}{B_0} + a_{0,n} \right),$$

$$C_j = e^{p_{j+1}(z)} \left(B'_{j+1} + B_{j+1}a_{j+1,n} - B_{j+1} \left(\frac{B'_0}{B_0} + a_{0,n} \right) \right) + B_j e^{p_j(z)}, \quad j = 0, 1, \dots, k-2.$$

En remplaçant $f' = g_1 + \psi, \dots, f^{(k+1)} = g_1^{(k)} + \psi^{(k)}$ dans (2.1.20), on obtient

$$\begin{aligned} & g_1^{(k)} + C_{k-1}g_1^{(k-1)} + C_{k-2}g_1^{(k-2)} + \dots + C_1g_1' + C_0g_1 \\ &= - \left(\psi^{(k)} + C_{k-1}\psi^{(k-1)} + C_{k-2}\psi^{(k-2)} + \dots + C_1\psi' + C_0\psi \right). \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Nous affirmons que $Q_1(z) = \psi^{(k)} + C_{k-1}\psi^{(k-1)} + C_{k-2}\psi^{(k-2)} + \dots + C_1\psi' + C_0\psi \neq 0$.

Supposons que ce n'est pas vrai. Par conséquent $Q_1(z) \equiv 0$. Nous avons deux cas :

(1) Si $\psi(z)$ est une fonction constante, alors

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= C_0\psi = \psi \left[(B_1e^{p_1(z)})' + B_0e^{p_0(z)} - \frac{(B_0e^{p_0(z)})'}{B_0e^{p_0(z)}} B_1e^{p_1(z)} \right] \\ &= \psi \left(B'_1 + a_{1,n}B_1 - a_{0,n}B_1 - \frac{B'_0B_1}{B_0} \right) e^{p_1(z)} + \psi B_0e^{p_0(z)} = 0. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.1.6, il s'agit d'une contradiction.

(2) Si $\psi(z)$ n'est pas une fonction constante, puisque $Q_1(z) \equiv 0$, nous avons

$$\begin{aligned} & \psi^{(k)} - \left(\frac{B'_0}{B_0} + a_{0,n} \right) \psi^{(k-1)} + e^{p_{k-1}(z)} \left[B_{k-1}\psi^{(k-1)} \right. \\ & \left. + \psi^{(k-2)} \left[B'_{k-1} + B_{k-1}a_{k-1,n} - \left(\frac{B'_0}{B_0} + a_{0,n} \right) B_{k-1} \right] \right] + \dots \\ & + e^{p_1(z)} \left[B_1\psi' + \psi \left[B'_1 + B_1a_{1,n} - \left(\frac{B'_0}{B_0} + a_{0,n} \right) B_1 \right] \right] + B_0e^{p_0(z)}\psi = 0. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

De la relation (2.1.22) on peut écrire,

$$\begin{aligned}
& -\psi^{(k)} + \left(\frac{B'_0}{B_0} + a_{0,n} \right) \psi^{(k-1)} = e^{p_{k-1}(z)} \\
& \left[B_{k-1} \psi^{(k-1)} + \psi^{(k-2)} \left[B'_{k-1} + B_{k-1} a_{k-1,n} - \left(\frac{B'_0}{B_0} + a_{0,n} \right) B_{k-1} \right] \right] + \dots \\
& + e^{p_1(z)} \left[B_1 \psi' + \psi \left[B'_1 + B_1 a_{1,n} - \left(\frac{B'_0}{B_0} + a_{0,n} \right) B_1 \right] \right] + B_0 e^{p_0(z)} \psi. \tag{2.1.23}
\end{aligned}$$

En comparant l'ordre des deux côtés de (2.1.23), d'après le Lemme 2.1.6, on obtient une contradiction. Par conséquent, $Q_1(z) \neq 0$. Comme $\sigma(g_1) = \infty$, alors en appliquant le Lemme 2.1.7 à (2.1.21), nous obtenons $\bar{\lambda}(g_1) = \sigma(g_1) = \infty$. Maintenant, nous montrons que $\bar{\lambda}(f'' - \psi) = \infty$. Considerons $g_2 = f'' - \psi$. En dérivant les deux côtés de (2.1.20), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& f^{(k+2)} + C_{k-1} f^{(k+1)} + [(C_{k-1})' + C_{k-2}] f^{(k)} \\
& + \dots + [C'_1 + C_0] f'' + C'_0 f' = 0. \tag{2.1.24}
\end{aligned}$$

En combinant (2.1.19) et (2.1.24), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& f^{(k+2)} + \left[C_{k-1} - \frac{C'_0}{C_0} \right] f^{(k+1)} + \left[(C_{k-1})' + C_{k-2} - \frac{C'_0}{C_0} C_{k-1} \right] f^{(k)} \\
& + \dots + \left[C'_2 + C_1 - \frac{C'_0}{C_0} C_2 \right] f^{(3)} + \left[C'_1 + C_0 - \frac{C'_0}{C_0} C_1 \right] f'' = 0. \tag{2.1.25}
\end{aligned}$$

En remplaçant $f'' = g_2 + \psi, \dots, f^{(k+2)} = g_2^{(k)} + \psi^{(k)}$ dans (2.1.25), on obtient

$$g_2^{(k)} + \left[C_{k-1} - \frac{C'_0}{C_0} \right] g_2^{(k-1)} + \left[(C_{k-1})' + C_{k-2} - \frac{C'_0}{C_0} C_{k-1} \right] g_2^{(k-2)}$$

$$+ \cdots + \left[C_2' + C_1 - \frac{C_0'}{C_0} C_2 \right] g_2' + \left[C_1' + C_0 - \frac{C_0'}{C_0} C_1 \right] g_2 = (-1) Q_2(z) , \quad (2.1.26)$$

où

$$\begin{aligned} Q_2(z) &= \psi^{(k)} + \left[C_{k-1} - \frac{C_0'}{C_0} \right] \psi^{(k-1)} + \left[(C_{k-1})' + C_{k-2} - \frac{C_0'}{C_0} C_{k-1} \right] \psi^{(k-2)} \\ &+ \cdots + \left[C_2' + C_1 - \frac{C_0'}{C_0} C_2 \right] \psi' + \left[C_1' + C_0 - \frac{C_0'}{C_0} C_1 \right] \psi. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Supposons que $Q_2(z) \equiv 0$. En réécrivant (2.1.27), nous avons

$$h_0(z) e^{p_0(z)} + h_1(z) e^{p_1(z)} + \sum_{\gamma \in \Lambda} H_\gamma e^{\gamma(z)} = 0, \quad (2.1.28)$$

où h_0, h_1, H_γ sont des fonctions entières d'ordre inférieur à n . L'indice Λ représente la somme des $a_{i,n}, a_{j,n}$ ($0 \leq i, j \leq k-1$). Soit $\Lambda_1 \subset \Lambda$ l'ensemble des indices où $\gamma = 0$ pour $\gamma \in \Lambda_1$. En réécrivant (2.1.28), nous obtenons

$$h_0(z) e^{p_0(z)} + h_1(z) e^{p_1(z)} + \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Lambda_1} H_\gamma e^{\gamma(z)} = \sum_{\gamma \in \Lambda_1} H_\gamma. \quad (2.1.29)$$

Par le Lemme 1.1.6, le côté gauche de l'égalité de (2.1.29) est d'ordre n . Évidemment, c'est une contradiction.

Chapitre 3

L'ordre, l'ordre inférieur et l'hyper-ordre des solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires avec des coefficients fonctions entières

3.1 Introduction et principaux résultats

Dans ce chapitre étudie les propriétés de croissance des solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières. On obtient des estimations précises sur l'ordre, l'ordre inférieur de croissance et de l'hyper-ordre des solutions des équations différentielles de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) e^{p_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) e^{p_1(z)} f' + A_0(z) e^{p_0(z)} f = 0 \quad (3.1.1)$$

et

$$f^{(k)} + (A_{k-1}(z) e^{p_{k-1}(z)} + D_{k-1}(z)) f^{(k-1)} + \dots$$

$$+ (A_1(z) e^{p_1(z)} + D_1(z)) f' + (A_0(z) e^{p_0(z)} + D_0(z)) f = 0 \quad (3.1.2)$$

où $A_j(z) \neq 0$; $D_j(z) \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des fonctions entières telles que $\sigma(A_j) < n$

En 2003 C-H. Li, X-J. Huang ont obtenu dans [23] les résultats suivants:

Théorème 3.1.1 Soient $A_j(z) \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions entières telles que $\sigma(A_j) < 1$, $a_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et tel que $\arg a_0 \neq \arg a_1$; $a_j = \alpha_j a_1$; $\alpha_j > 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Alors chaque solution transcendante $f(z) \neq 0$ de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) e^{a_{k-1}z} f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) e^{a_1z} f' + A_0(z) e^{a_0z} f = 0$$

est d'ordre infini.

Théorème 3.1.2 Soient $p_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des polynômes non constants, $a_{n,j} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et $A_j(z) \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions entières telles que $\sigma(A_j) < n$, ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ($k \geq 2$). Supposons qu'il existe $s, d \in \{0, 1, \dots, n\}$ tels que $\theta_{n,s} = \arg a_{n,s}$; $\theta_{n,d} = \arg a_{n,d}$, $\theta_{n,s}, \theta_{n,d} \in [0, 2\pi)$; $\theta_{n,s} \neq \theta_{n,d}$ pour $j \neq s, d$; $a_{n,j}$ vérifie $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,s}$ ($0 < \alpha_j < 1$) ou $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,d}$ ($0 < \alpha_j < 1$).

Alors chaque solution transcendante $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.1) satisfait

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty,$$

$$\sigma_2(f) = n.$$

S'il existe α_l ($0 \leq l \leq d-1$), tel que $\max_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} \alpha_j < \alpha_l$, ou $s < d$ ($d > 1$) ou $d \leq 1$. Alors

chaque solution $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.1) satisfait

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \quad \sigma_2(f) = n.$$

Théorème 3.1.3 Soient $k \geq 2$ et $p_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des polynômes non constants, $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), et soient $A_j(z) \neq 0$, $D_j(z) \neq 0$ des fonctions entières telles que $\sigma(A_j) < n$, $\sigma(D_j) < n$. Supposons qu'il existe $a_{n,d}, a_{n,s}$ vérifiant $\arg a_{n,d} \neq \arg a_{n,s}$, $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,s}$, $\alpha_j > 0$ ($j \neq s, d$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Alors chaque solution $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.2) est d'ordre infini. S'il existe α_l ($0 \leq l \leq d-1$), tel que $\max_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} \alpha_j < \alpha_l$, ou $s < d$ et $0 < \alpha_j < 1$ ($d > 1$) ou $d \leq 1$, alors chaque solution $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.2) est d'ordre infini

Théorème 3.1.4 Supposons que $A_j(z) \neq 0$, $a_{n,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) vérifient les conditions du Théorème 3.1.2; $D_j(z) \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des polynôme. Alors toutes les solutions transcendentes f de l'équation (3.1.2) satisfont:

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \quad \sigma_2(f) = n.$$

S'il existe un α_l ($0 \leq l \leq d-1$), tel que $\max_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} \alpha_j < \alpha_l$, ou $s < d$ ($d > 1$) ou $d \leq 1$, alors chaque solution $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.2) satisfait :

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \quad \sigma_2(f) = n.$$

Remarque 3.1.1: Dans le théorème ci-dessus, lorsque $d > 1$ et $s > d$, si nous supposons qu'il n'existe pas

α_l ($0 \leq l \leq d-1$), tel que $\max_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} \alpha_j < \alpha_l$. Alors les équations (3.1.1) et (3.1.2) peuvent avoir des solutions polynômiales. Par exemple, l'équation

$$f^{(4)} + e^{2z+1} f''' + e^{-z+3} f'' + ze^{z-1} f' - e^{z-1} f = 0 \quad (3.1.3)$$

admet la solution $f(z) = z$. L'équation (3.1.3) satisfait les autres hypothèses du Théorème 3.1.3 mais il n'existe pas

de α_l ($0 \leq l \leq d-1$), tel que $\max_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} \alpha_j < \alpha_l$. ($d > 1$)

Corollaire 3.1.5 *Supposons que $A_j(z)$ vérifient les conditions du Théorème 3.1.2. si $s < d$, alors toutes les solutions transcendentes f de l'équation (3.1.1) satisfont*

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \sigma_2(f) = n.$$

Corollaire 3.1.6 *Supposons que $A_j(z)$ vérifient les conditions du Théorème 3.1.2, $a_{n,j} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Supposons qu'il existe $a_{n,d}$, vérifiant $\arg a_{n,d} \neq \arg a_{n,0}$, $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,0}$, $0 < \alpha_j < 1$ ($j \neq 0, d$). Alors chaque solution $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.1) satisfait:*

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \sigma_2(f) = n.$$

Corollaire 3.1.7 *Supposons que $A_j(z)$ vérifient les conditions du Théorème 3.1.2, $a_{n,j} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Supposons qu'il existe $a_{n,d}$, vérifiant $\arg a_{n,d} \neq \arg a_{n,1}$, $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,1}$, $0 < \alpha_j < 1$ ($j \neq 1, d$). Alors chaque solution $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.1) satisfait:*

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \sigma_2(f) = n.$$

Corollaire 3.1.8 *Supposons que $A_j(z)$ vérifient les conditions du Théorème 3.1.2, $a_{n,j} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Supposons qu'il existe $a_{n,d}$, vérifiant $\arg a_{n,d} \neq \arg a_{n,2}$, $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,2}$, $0 < \alpha_j < 1$ ($j \neq 2, d$). Alors chaque solution $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.1) satisfait:*

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \sigma_2(f) = n.$$

3.2 Quelques lemmes

Lemme 3.2.1 [13] *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante, $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de couples d'entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) et soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0(\psi) > 1$, tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| = r > R_0$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a*

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq B \left\{ \frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log^\alpha r) \log T(\alpha r, f) \right\}^{j-i}.$$

Lemme 3.2.2 [8] *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante. Alors il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que, si z satisfait $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ et $|f(z)| = M(r, f)$, alors on a*

$$\left| \frac{f(z)}{f^{(s)}(z)} \right| \leq 2r^s \quad (s \in \mathbb{N}).$$

Lemme 3.2.3 *Supposons que $f(z)$ est une fonction entière. S'il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$, et*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \rho;$$

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \mu,$$

alors

$$\sigma(f) = \rho, \quad \mu(f) = \mu.$$

De plus, si

$$\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_3$$

et

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} = \sigma$$

alors

$$\sigma_2(f) = \sigma.$$

Preuve. On a

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta. \quad (3.2.1)$$

Posons

$$g(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(re^{i\theta}) & , \quad \theta \in [0, 2\pi] \setminus E_3 \\ 0 & , \quad \theta \in E_3 \end{cases}$$

Comme $m_{E_3} = 0$, alors on a

$$\int_{[0, 2\pi]} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_{[0, 2\pi]} \log^+ |g(re^{i\theta})| d\theta. \quad (3.2.2)$$

De (3.2.1) et (3.2.2) nous avons

$$T(r, f) = T(r, g). \quad (3.2.3)$$

On a

$$\begin{aligned} T(r, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\theta})| d\theta. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus E_3} \log^+ |g(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{E_3} \log^+ |g(re^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus E_3} \log^+ |g(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus E_3} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Des relations (3.2.3) et (3.2.4), on obtient

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi) \setminus E_3} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta. \quad (3.2.5)$$

Si $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_3$, on a

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \rho,$$

ce qui donne

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left[\frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi) \setminus E_3} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right]}{\log r} = \rho. \quad (3.2.6)$$

Donc des relations (3.2.5) et (3.2.6), on obtient

$$\sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left[\frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi) \setminus E_3} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right]}{\log r} = \rho.$$

Par le même raisonnement on obtient: $\mu(f) = \mu$, $\sigma_2(f) = \sigma$.

Lemme 3.2.4 [8] *Soit H_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions entières telles que $\sigma(H_j) \leq \sigma < \infty$. Si $f(z)$ est une solution de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + H_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + H_1f' + H_0f = 0,$$

alors $\sigma_2(f) \leq \sigma$

Lemme 3.2.5 [13] *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre fini σ , soit $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, telle que si $\psi \in [0, 2\pi) - E_4$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\psi) > 1$ tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| = r \geq R_0$, et pour tout $(k, j) \in H$, on a*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \quad (3.2.7)$$

Lemme 3.2.6 [31] Soit $w(z)$ une fonction entière d'ordre fini ρ et $v(r)$ son indice central. Alors

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log v(r)}{\log r}$$

3.2.1 Preuve du Théorème 3.1.2:

Supposons que $f(z)$ est une solution entière transcendante de l'équation (3.1.1). Par le Lemme 3.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$, telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_0$, on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq (T(2r, f))^{j+1} \quad (0 \leq i < j \leq k). \quad (3.2.8)$$

Posons $z = re^{i\theta}$, $\delta(p_d, \theta) = |a_{d,n}| \cos(\theta_d + n\theta)$ et

$$\delta(p_j, \theta) = |a_{j,n}| \cos(\theta_j + n\theta) = \alpha_j |a_{s,n}| \cos(\theta_s + n\theta). \quad (3.2.9)$$

Il est facile de voir que $F_1 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(p_d, \theta) = 0\}$,

$$F_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(p_s, \theta) = 0\}, \quad F_3 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(p_d, \theta) = \delta(p_s, \theta)\},$$

$$F_4 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(p_d, \theta) = \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta)\} \text{ sont des ensembles finis (où } \alpha_{j_0} = \min_{j \neq d, s} \alpha_j \text{),}$$

alors $E_0 = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$, E_0 est ensemble fini. .

Supposons que $\arg a_{d,n} \neq \arg a_{s,n}$, $a_{j,n} = \alpha_j a_{s,n}$, $0 < \alpha_j < 1$, ($j \neq d, s$). D'après le Lemme 2.1.2, pour tout ε donné

$$(0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}, \frac{|\delta(p_d, \theta) - \delta(p_s, \theta)|}{2|\delta(p_d, \theta) + \delta(p_s, \theta)|}, \frac{|\delta(p_d, \theta) - \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta)|}{2|\delta(p_d, \theta) + \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta)|}, \frac{\alpha_j - \alpha_{j_0}}{2(\alpha_j + \alpha_{j_0})} \right\},$$

où, $\alpha = \max_{j \neq d, s} \alpha_j$, il existe un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, telle que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus H_1 \cup H_2$ ($H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi); \delta(p, \theta) = 0\}$, est un ensemble fini), et $R_1 > 1$ tel que pour $|z| = r > R_1$, nous avons:

(i) Si $\delta(p_j, \theta) > 0$, alors

$$\exp \{(1 - \varepsilon) \delta(p_j, \theta) r^n\} \leq \left| A_j (r e^{i\theta}) e^{p_j (r e^{i\theta})} \right| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(p_j, \theta) r^n\}; \quad (3.2.10)$$

(ii) Si $\delta(p_j, \theta) < 0$, alors

$$\begin{aligned} \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(p_j, \theta) r^n\} &\leq \left| A_j (r e^{i\theta}) e^{p_j (r e^{i\theta})} \right| \\ &\leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(p_j, \theta) r^n\} < 1. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Par le Lemme 3.2.2 il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire fini et mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ et $|f(z)| = M(r, f)$ nous avons

$$\left| \frac{f(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq r^{k+1} \quad (1 \leq i \leq k). \quad (3.2.12)$$

Soit $R = \max \{R_0, R_1\}$, $E_3 = (1, R] \cup E_2$, E_3 est de mesure logarithmique finie tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_0 \cup E_1 \cup H_1 \cup H_2)$ ($E_0 \cup E_1 \cup H_1 \cup H_2$ mesure linéaire nulle) quand $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, et $|f(z)| = M(r, f)$ nous avons.

Cas 1: $\delta(p_d, \theta) > 0$, $\delta(p_s, \theta) < 0$

De l'équation (3.1.1), on peut écrire

$$\begin{aligned} -A_d(z) e^{p_d(z)} &= \frac{f^{(k)}}{f^{(d)}} + A_{k-1}(z) e^{p_{k-1}(z)} \frac{f^{(k-1)}}{f^{(d)}} + \dots + A_{d+1}(z) e^{p_{d+1}(z)} \frac{f^{(d+1)}}{f^{(d)}} \\ &+ \left[A_{d-1}(z) e^{p_{d-1}(z)} \frac{f^{(d-1)}}{f} + \dots + A_1(z) e^{p_1(z)} \frac{f'}{f} + A_0(z) e^{p_0(z)} \right] \frac{f}{f^{(d)}}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Pour $\delta(p_d, \theta) > 0$ nous avons $|A_d(z) e^{p_d(z)}| \geq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n\}$

et pour $\delta(p_s, \theta) < 0$, ($s = 0, 1, \dots, d-1, d+1, \dots, k-1$) ($s \neq d$) nous avons

$$|A_s(z) e^{P_s(z)}| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n\} < 1 ; (s = 0, 1, \dots, d-1, d+1, \dots, k-1) \quad (s \neq d)$$

En utilisant les relations (3.2.8), (3.2.12) et (3.2.13) des inégalités précédente on obtient

$$\begin{aligned} \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n\} &\leq |A_d(z) e^{P_d(z)}| \\ &\leq \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(d)}(z)} \right| + |A_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)}| \left| \frac{f^{(k-1)}}{f^{(d)}} \right| + \dots \\ &+ |A_{d+1}(z) e^{P_{d+1}(z)}| \left| \frac{f^{(d+1)}}{f^{(d)}} \right| + \left[|A_{d-1}(z) e^{P_{d-1}(z)}| \left| \frac{f^{(d-1)}}{f} \right| + \dots + |A_0(z) e^{P_0(z)}| \right] \left| \frac{f}{f^{(d)}} \right| \\ &\leq (T(2r, f))^{k+1} + (T(2r, f))^{k+1} r^{k+1} + \dots + (T(2r, f))^{k+1} r^{k+1} \\ &\leq (T(2r, f))^{k+1} + (k-1) r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \\ &\leq (r^{k+1} T(2r, f))^{k+1} + (k-1) r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \quad (r > 1) \end{aligned}$$

donc

$$\exp \{(1 - \varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n\} \leq |A_d(z) e^{P_d(z)}| \leq k r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \quad (3.2.14)$$

où k est une constante positive. Ainsi (3.2.14) implique

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq n$$

Par le Lemme 3.2.4 nous avons $\sigma_2(f) = n$.

Cas 2: $\delta(p_d, \theta) < 0$, $\delta(p_s, \theta) > 0$. De (3.2.9) et (3.2.10) nous avons

$$\begin{aligned} \left| A_j(r e^{i\theta}) e^{P_j(r e^{i\theta})} \right| &\leq \exp \{ (1 + \varepsilon) \alpha_j \delta(p_s, \theta) r^n \} \\ &\leq \exp \{ (1 + \varepsilon) \alpha \delta(p_s, \theta) r^n \} \quad (j \neq d, s) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

De l'équation (3.1.1), on peut écrire

$$\begin{aligned} -A_s(z) e^{P_s(z)} &= \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} \frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} + \dots + A_{s+1}(z) e^{P_{s+1}(z)} \frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} \\ &+ \left[A_{s-1}(z) e^{P_{s-1}(z)} \frac{f^{(s-1)}}{f} + \dots + A(z) e^{P_1(z)} \frac{f'}{f} \right. \\ &\quad \left. + A_0(z) e^{P_0(z)} \right] \frac{f}{f^{(s)}} \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Ainsi de (3.2.8), (3.2.11), (3.2.15) et (3.2.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(p_s, \theta) r^n \} &\leq |A_s(z) e^{P_s(z)}| \\ &\leq (T(2r, f))^{k+1} + (k-2) \exp \{ (1 + \varepsilon) \alpha \delta(p_s, \theta) r^n \} r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} + r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \\ &\leq k r^{k+1} \exp \{ (1 + \varepsilon) \alpha \delta(p_s, \theta) r^n \} (T(2r, f))^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Si $0 < \varepsilon < \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}$, alors $1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon) \alpha > 0$. De la relation (3.2.17) nous avons

$$\frac{\exp \{(1 - \varepsilon) \delta (p_s, \theta) r^n\}}{\exp \{(1 + \varepsilon) \alpha \delta (p_s, \theta) r^n\}} \leq kr^{k+1} (T(2r, f))^{k+1}$$

$$\exp \{[(1 - \varepsilon) - (1 + \varepsilon) \alpha] \delta (p_s, \theta) r^n\} \leq kr^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \quad (3.2.18)$$

Cas 3: $\delta (p_d, \theta) > 0, \delta (p_s, \theta) > 0$

(i) Si $\delta (p_d, \theta) > \delta (p_s, \theta)$

alors d'après les relations (3.2.8), (3.2.10), (3.2.12), (3.2.15) et (3.2.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} \exp \{(1 - \varepsilon) \delta (p_d, \theta) r^n\} &\leq |A_d(z) e^{P_d(z)}| \\ &\leq (T(2r, f))^{k+1} + (k - 2) \exp \{(1 + \varepsilon) \alpha \delta (p_s, \theta) r^n\} r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \\ &\quad + \exp \{(1 + \varepsilon) \delta (p_s, \theta) r^n\} r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \\ &\leq kr^{k+1} \exp \{(1 + \varepsilon) \delta (p_s, \theta) r^n\} (T(2r, f))^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

D'après la condition précédente sur ε . Nous avons $(1 - \varepsilon) \delta (p_d, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta (p_s, \theta) > 0$.

D'après (3.2.19) on obtient

$$\exp \{[(1 - \varepsilon) \delta (p_d, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta (p_s, \theta)] r^n\} \leq kr^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \quad (3.2.20)$$

(ii) Si $\delta (p_d, \theta) < \delta (p_s, \theta)$, alors de (3.2.8), (3.2.10), (3.2.12), (3.2.15) et (3.2.16), nous obtenons

$$\exp \{(1 - \varepsilon) \delta (p_s, \theta) r^n\} \leq |A_s(z) e^{P_s(z)}|$$

$$\begin{aligned} &\leq (T(2r, f))^{k+1} + (k-2) \exp\{(1+\varepsilon)\alpha\delta(p_s, \theta)r^n\} r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \\ &\quad + \exp\{(1+\varepsilon)\delta(p_d, \theta)r^n\} r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Posons $R = \max\{\alpha\delta(p_s, \theta), \delta(p_d, \theta)\}$, de la relation (3.2.21) nous avons

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(p_s, \theta)r^n\} \leq kr^{k+1} \exp\{(1+\varepsilon)\beta r^n\} (T(2r, f))^{k+1}. \quad (3.2.22)$$

D'après la condition précédente sur ε , nous avons $(1-\varepsilon)\delta(p_s, \theta) - (1+\varepsilon)\alpha\delta(p_s, \theta) > 0$, et $(1-\varepsilon)\delta(p_s, \theta) - (1+\varepsilon)\alpha\delta(p_d, \theta) > 0$, donc $(1-\varepsilon)\delta(p_s, \theta) - (1+\varepsilon)\beta > 0$. D'après la relation (3.2.22) nous avons

$$\exp\{[(1-\varepsilon)\delta(p_s, \theta) - (1+\varepsilon)\beta]r^n\} \leq kr^{k+1} (T(2r, f))^{k+1}. \quad (3.2.23)$$

Cas 4: $\delta(p_d, \theta) < 0, \delta(p_s, \theta) < 0$

(i) Si $\delta(p_d, \theta) > \alpha_{j_0}\delta(p_s, \theta)$, où $\alpha_{j_0} = \min_{j \neq d, s} \alpha_j$, $\delta(p_{j_0}, \theta) = \alpha_{j_0}\delta(p_s, \theta)$, alors nous avons

$$\delta(p_j, \theta) = \alpha_j\delta(p_s, \theta) \leq \alpha_{j_0}\delta(p_s, \theta), \quad (j \neq d), \quad (3.2.24)$$

où nous notons $B_j = A_j(z) e^{P_j(z)}$. De l'équation (3.1.1) on peut écrire

$$-\frac{1}{B_d} = \left[\frac{B_{k-1}}{B_d} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + \frac{B_1}{B_d} \frac{f'}{f} + \frac{B_0}{B_d} \right] \frac{f}{f^{(k)}},$$

donc

$$\left| \frac{1}{B_d} \right| \leq \left[\left| \frac{B_{k-1}}{B_d} \right| \left| \frac{f^{(k-1)}}{f} \right| + \cdots + \left| \frac{f^{(d)}}{f} \right| + \cdots + \left| \frac{B_1}{B_d} \right| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{B_0}{B_d} \right| \right] \left| \frac{f}{f^{(k)}} \right|. \quad (3.2.25)$$

De la relation (3.2.11) nous avons

$$\exp \{-(1-\varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n\} \leq \left| \frac{1}{B_d} \right| \leq \exp \{-(1+\varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n\}. \quad (3.2.26)$$

De (3.2.11) et (3.2.24) nous avons

$$|B_j| \leq \exp \{(1-\varepsilon) \delta(p_j, \theta) r^n\} \leq \exp \{(1-\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta) r^n\}, \quad (j \neq d). \quad (3.2.27)$$

Ensuite de (3.2.26) et (3.2.27) nous avons

$$\left| \frac{B_j}{B_d} \right| \leq \exp \{[(1-\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta) - (1+\varepsilon) \delta(p_d, \theta)] r^n\} \quad (j \neq d).$$

D'après la condition précédente sur ε , nous avons, $(1-\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta) - (1+\varepsilon) \delta(p_d, \theta) < 0$, nous obtenons alors

$$\left| \frac{B_j}{B_d} \right| \leq 1. \quad (3.2.28)$$

En substituant (3.2.8), (3.2.12), (3.2.26), (3.2.28) dans (3.2.25) nous obtenons

$$\exp \{-(1-\varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n\} \leq k r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1} \quad (3.2.29)$$

où $-(1-\varepsilon) \delta(p_d, \theta) > 0$.

(ii) Si $\delta(p_d, \theta) < \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta)$.

De l'équation (3.1.1) on peut écrire

$$-\frac{1}{B_{j_0}} = \left[\frac{B_{k-1}}{B_{j_0}} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + \frac{B_1}{B_{j_0}} \frac{f'}{f} + \frac{B_0}{B_{j_0}} \right] \frac{f}{f^{(k)}}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{B_{j_0}} \right| &\leq \left[\left| \frac{B_{k-1}}{B_{j_0}} \right| \left| \frac{f^{(k-1)}}{f} \right| + \dots + \left| \frac{B_d}{B_{j_0}} \right| \left| \frac{f^{(d)}}{f} \right| \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left| \frac{B_1}{B_{j_0}} \right| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{B_0}{B_{j_0}} \right| \right] \left| \frac{f}{f^{(k)}} \right|. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

De (3.2.11), on a

$$\exp \{-(1-\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta) r^n\} \leq \left| \frac{1}{B_{j_0}} \right| \leq \exp \{-(1+\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta) r^n\}. \quad (3.2.31)$$

De (3.2.11), (3.2.31) on obtient

$$\left| \frac{B_d}{B_{j_0}} \right| \leq \exp \{[(1-\varepsilon) \delta(p_d, \theta) - (1+\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta)] r^n\}$$

D'après la condition précédente sur ε , nous avons, $(1-\varepsilon) \delta(p_d, \theta) - (1+\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta) < 0$, nous obtenons alors

$$\left| \frac{B_d}{B_{j_0}} \right| \leq 1. \quad (3.2.32)$$

De (3.2.11) nous avons

$$|B_j| \leq \exp \{(1-\varepsilon) \alpha_j \delta(p_s, \theta) r^n\}, \quad (j \neq d, j_0). \quad (3.2.33)$$

Des relations (3.2.31), (3.2.33) nous avons

$$\left| \frac{B_j}{B_{j_0}} \right| \leq \exp \{[(1-\varepsilon) \alpha_j \delta(p_s, \theta) - (1+\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta)] r^n\}, \quad (j \neq d, j_0).$$

D'après la condition précédente sur ε , nous avons, $(1-\varepsilon) \alpha_j \delta(p_s, \theta) - (1+\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta) < 0$, nous obtenons

$$\left| \frac{B_j}{B_{j_0}} \right| \leq 1, \quad (j \neq d). \quad (3.2.34)$$

En remplaçant (3.2.8), (3.2.12), (3.2.31), (3.2.32), (3.2.34) dans (3.2.30) nous obtenons

$$\exp \{-(1-\varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta) r^n\} \leq k r^{k+1} (T(2r, f))^{k+1}, \quad (3.2.35)$$

où $-(1 - \varepsilon) \alpha_{j_0} \delta(p_s, \theta) > 0$.

Donc, pour tout $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_0 \cup E_1 \cup H_1 \cup H_2)$ ($m(E_0 \cup E_1 \cup H_1 \cup H_2) = 0$),
lorsque $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$ ($m_l(E_3) = 0$), $|f(z)| = M(r, f)$ et (3.2.14) ou (3.2.18) ou
(3.2.20) ou (3.2.23) ou (3.2.29) ou (3.2.35), d'après le Lemme 3.2.3, et par les relations
(3.2.14), (3.2.18), (3.2.20), (3.2.23), (3.2.29), (3.2.35) nous avons

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty$$

et

$$\sigma_2(f) \geq n.$$

D'après le Lemme 3.2.4, on a

$$\sigma_2(f) \leq n.$$

donc on obtient

$$\sigma_2(f) = n.$$

Supposons maintenant que $f(z) \neq 0$ est une solution polynômiale de (3.1.1) et $\deg f = m$.

Cas 1: Soit $d > 1$.

(1) Si $m \geq d$, alors on a $\arg a_{n,d} \neq \arg a_{n,s}$, $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,s}$ ($0 < \alpha_j < 1$), ($j \neq d, s$). D'après
le Lemme 2.1.2 et (3.2.9) il est facile de voir pour tout ($0 < \varepsilon < 1$), donné il existe
 $\arg z = \theta$ vérifiant $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (H_1 \cup H_2)$

($H_1 \cup H_2$ est de mesure linéaire nulle), et $\delta(p_d, \theta) > 0$, $\delta(p_s, \theta) < 0$, ($j \neq d$) pour r
suffisamment grand. De (3.2.10) et (3.2.11), on obtient

$$M_1 r^{m-d} \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n \} \leq \left| A_d (r e^{i\theta}) e^{P_d(r e^{i\theta})} f^{(d)} \right|$$

$$\leq |f^{(k)}| + \dots + \left| A_{d+1} (re^{i\theta}) e^{P_{d+1}(re^{i\theta})} f^{(d+1)} \right|$$

$$+ \left| A_{d-1} (re^{i\theta}) e^{P_{d-1}(re^{i\theta})} f^{(d-1)} \right| + \dots + \left| A_0 (re^{i\theta}) e^{P_0(re^{i\theta})} f \right| \leq M_2 r^m,$$

où M_1, M_2 sont des constantes supérieures à zero. Ainsi

$$M_1 \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n \} \leq M_2 r^d$$

donc c'est une contradiction,

(2) Si $m < d$.

(i) Si $s > d$;

Pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \frac{\alpha_l - \alpha_l'}{2(\alpha_l + \alpha_l')}$, où $\alpha_l' = \max \{ \alpha_0, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{d-1} \} < \alpha_l$, $0 \leq l \leq d-1$), $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (H_1 \cup H_2)$ on a $\delta(p_l, \theta) > 0$, et pour tout r suffisamment grand, des relations (3.2.9), (3.2.10) et (3.2.15), nous obtenons

$$M_3 r^m \exp \{ (1 - \varepsilon) \alpha_l \delta(p_s, \theta) r^n \} \leq \left| A_l (re^{i\theta}) e^{P_l(re^{i\theta})} f^{(l)} \right|$$

$$\leq \sum_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} \left| A_j (re^{i\theta}) e^{P_j(re^{i\theta})} f^{(j)} \right|$$

$$\leq M_4 r^m \sum_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} \exp \{ (1 + \varepsilon) \alpha_j \delta(p_s, \theta) r^n \}$$

$$\leq M_4 r^m \sum_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} \exp \{ (1 + \varepsilon) \alpha_l \delta(p_s, \theta) r^n \}$$

$$= M_4 (d-1) r^m \exp \{ (1 + \varepsilon) \alpha_l \delta(p_s, \theta) r^n \},$$

où M_3, M_4 sont des constantes supérieures à zero. Ainsi

$$M_3 \exp \{[(1 - \varepsilon) \alpha_l - (1 + \varepsilon) \alpha'] \delta(p_s, \theta) r^n\} \leq M_4 (d - 1).$$

D'après la condition précédente sur ε , nous avons, $(1 - \varepsilon) \alpha_l - (1 + \varepsilon) \alpha' > 0$, donc c'est une contradiction. Lorsque $\max \{\alpha_0, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{d-1}\} < \alpha_l$, alors chaque solution non nulle de l'équation (3.1.1) est l'ordre infini.

(ii) Si $s < d$; pour tout ε donné $\left(0 < \varepsilon < \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}\right)$, $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (H_1 \cup H_2)$ on a $\delta(p_l, \theta) > 0$, et pour tout r suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} M_5 r^m \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(p_s, \theta) r^n\} &\leq \left| A_s (r e^{i\theta}) e^{P_s(r e^{i\theta})} f^{(s)} \right| \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} A_j (r e^{i\theta}) e^{P_j(r e^{i\theta})} f^{(j)} \\ &\leq M_6 r^m \sum_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ j \neq l}} \exp \{(1 + \varepsilon) \alpha \delta(p_s, \theta) r^n\} \\ &\leq M_6 (d - 1) r^m \exp \{(1 + \varepsilon) \alpha \delta(p_s, \theta) r^n\}, \end{aligned}$$

où M_5, M_6 sont des constantes supérieures à zero. Ainsi

$$M_5 \exp \{[(1 - \varepsilon) - (1 + \varepsilon) \alpha] \delta(p_s, \theta) r^n\} \leq M_6 (d - 1)$$

D'après la condition précédente sur ε , nous avons, $(1 - \varepsilon) - (1 + \varepsilon) \alpha > 0$, donc c'est une contradiction. Donc si $d > 1$ et $s < d$, alors chaque solution non nulle de l'équation (3.1.1) est l'ordre infini.

Cas 2: Soit $d \leq 1$. Alors

d'après le cas 1 on trouve que chaque solution non nulle de l'équation (3.1.1) est d'ordre infini. En résumé, si $s > d$ et $\max \{\alpha_0, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{d-1}\} < \alpha_l$ ou $s < d$ ($d > 1$) ou $d \leq 1$, alors

chaque solution non nulle de l'équation (3.1.1) est d'ordre infini et

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \quad \sigma_2(f) = n.$$

3.2.2 Preuve du Théorème 3.1.3

Supposons que $f(z)$ est une solution entière transcendante de (3.1.2) et $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Par le Lemme 3.2.5 pour tout $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}(1 - \max \sigma(D_j)))$ donné, alors il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$, $|z| = r \geq R_0$, nous avons:

$$\left| \frac{f^{(j)}(re^{i\theta})}{f^{(i)}(re^{i\theta})} \right| \leq r^{(j-i)(\sigma-1+\varepsilon)}, \quad (0 \leq i < j \leq k). \quad (3.2.36)$$

Supposons $\arg a_{n,d} \neq \arg a_{n,s}$, $a_{n,j} = \alpha_j a_{n,s}$ ($\alpha_j > 0$), ($j \neq d, s$). D'après le Lemme 2.1.2 et (3.2.9) il est facile de voir que pour ε ($\varepsilon > 0$) donné, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ vérifiant $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup H_1 \cup H_2)$ (H_1, H_2 sont défini dans le Lemme 2.1.2, $E_1 \cup H_1 \cup H_2$ de mesure et $\delta(p_d, \theta) > 0, \delta(p_j, \theta) < 0, (j \neq d)$. r suffisamment grand. On a pour

$$\left| A_d(re^{i\theta}) e^{P_d(re^{i\theta})} + D_d(re^{i\theta}) \right| \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n \} (1 + o(1)), \quad (3.2.37)$$

$$\begin{aligned} \left| A_j(re^{i\theta}) e^{P_j(re^{i\theta})} + D_j(re^{i\theta}) \right| &\leq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(p_j, \theta) r^n \} + \exp \{ r^{\sigma(D_j)+\varepsilon} \} \\ &\leq 2 \exp \{ r^{\sigma(D_j)+\varepsilon} \}, \quad (j \neq d). \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

D'après le Lemme 3.2.2 il existe un l'ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, quand $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ et $|f(z)| = M(r, f)$, nous avons (3.2.12). De l'équation (3.1.2) on peut écrire

$$\begin{aligned}
- (A_d(z) e^{p_d(z)} + D_d(z)) &= \frac{f^{(k)}}{f^{(d)}} + (A_{k-1}(z) e^{p_{k-1}(z)} + D_{k-1}(z)) \frac{f^{(k-1)}}{f^{(d)}} + \dots \\
&+ (A_{d+1}(z) e^{p_{d+1}(z)} + D_{d+1}(z)) \frac{f^{(d+1)}}{f^{(d)}} \\
&+ \left[(A_{d-1}(z) e^{p_{d-1}(z)} + D_{d-1}(z)) \frac{f^{(d-1)}}{f} + \dots \right. \\
&\left. + (A_1(z) e^{p_1(z)} + D_1(z)) \frac{f'}{f} + (A_0(z) e^{p_0(z)} + D_0(z)) \right] \frac{f}{f^{(d)}} \tag{3.2.39}
\end{aligned}$$

Lorsque $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup H_1 \cup H_2)$, $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ et $|f(z)| = M(r, f)$ en remplaçant (3.2.12), (3.2.36), (3.2.38) dans (3.2.39), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n \} (1 + o(1)) \leq | (A_d(z) e^{p_d(z)} + D_d(z)) | \\
&\leq r^{(k-d)(\sigma-1+\varepsilon)} + 2 \exp \{ r^{\sigma(D_{k-1})+\varepsilon} \} r^{(k-1-d)(\sigma-1+\varepsilon)} + \dots + 2 \exp \{ r^{\sigma(D_{d+1})+\varepsilon} \} r \\
&+ [2 \exp \{ r^{\sigma(D_{d-1})+\varepsilon} \} r^{(d-1)(\sigma-1+\varepsilon)} + \dots + 2 \exp \{ r^{\sigma(D_0)+\varepsilon} \}] r^{k+1} \\
&\leq 2kr^M \exp \left\{ r^{\max_{j \neq d} \sigma(D_j) + \varepsilon} \right\}, \tag{3.2.40}
\end{aligned}$$

où M est une constante supérieure à zéro.

D'autre part, pour tout ε avec, $\max_{j \neq d} \sigma(D_j) + \varepsilon < 1 - \varepsilon < 1$, de la relation (3.2.40), nous avons

$$\exp \left\{ (1 - \varepsilon) \delta(p_d, \theta) r^n - r^{\max_{j \neq d} \sigma(D_j) + \varepsilon} \right\} (1 + o(1)) \leq 2kr^M,$$

c'est une contradiction. Par conséquent, $\sigma(f) = \infty$.

En utilisant le même raisonnement comme dans la preuve du Théorème 3.1.2, nous obtenons que lorsque

$\max \{ \alpha_0, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{d-1} \} < \alpha_l$ ($d > 1$), ou $s < d$ et $0 < \alpha_j < 1$ ($d > 1$), ou $d \leq 1$, alors chaque solution $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.2) est d'ordre infini.

3.2.3 Preuve du Théorème 3.1.4

Par le Lemme 2.1.2 nous savons que pour tout

$$\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{2} (1 - \max_{0 \leq j \leq k-1} \sigma(D_j)), \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}, \frac{|\delta(p_d, \theta) - \delta(p_s, \theta)|}{2|\delta(p_d, \theta) + \delta(p_s, \theta)|} \right\} \right),$$

donné, il existe un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus H_1 \cup H_2$ ($H_2 = \{ \theta \in [0, 2\pi); \delta(p, \theta) = 0 \}$ un ensemble fini), pour r suffisamment grand, on a

(i) Si $\sigma(p_j, \theta) > 0$, alors

$$\begin{aligned} \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(p_j, \theta) r^n \} (1 + o(1)) &\leq \left| \left(A_j (r e^{i\theta}) e^{p_j (r e^{i\theta})} + D_j (r e^{i\theta}) \right) \right| \\ &\leq \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta(p_j, \theta) r^n \} (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

(ii) Si $\sigma(p_j, \theta) < 0$, alors

$$\left| \left(A_j (r e^{i\theta}) e^{p_j (r e^{i\theta})} + D_j (r e^{i\theta}) \right) \right| \leq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(p_j, \theta) r^n \} + r^{M_1} \leq r^{M_2}, \quad (3.2.42)$$

où M_1, M_2 sont des constantes supérieures à zéro. Nous affirmons que le cas $\sigma(p_d, \theta) < 0$

et $\sigma(p_s, \theta) < 0$ ne se produira pas. En fait, par la théorie de Wiman-Valiron on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)) \quad (j = 1, \dots, k) \quad (3.2.43)$$

pour z vérifiant $|f(z)| = M(r, f)$ et $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, où $E_1 \subset (1, +\infty)$ est de mesure logarithmique finie; $v(r)$ est l'indice central de $f(z)$. D'après le Théorème 3.1.3 on a $\sigma(f) = \infty$, et par le Lemme 3.2.6, on obtient

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log v(r)}{\log r} = \infty. \quad (3.2.44)$$

Des relations (3.1.1) et (3.2.43), nous obtenons

$$\begin{aligned} - \left(\frac{v(r)}{z}\right)^k (1 + o(1)) &= (A_{k-1}(z) e^{p_{k-1}(z)} + D_{k-1}(z)) \left(\frac{v(r)}{z}\right)^{k-1} (1 + o(1)) \\ &+ \dots + (A_0(z) e^{p_0(z)} + D_0(z)). \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

De (3.2.42) et (3.2.45) nous aurons, quand $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, $|f(z)| = M(r, f)$, et r suffisamment grand,

$$v(r) |1 + o(1)| \leq kr^M, \quad (3.2.46)$$

où M est une constante supérieure à zéro. De (3.2.45) et (3.2.46) et les conditions $\sigma(p_d, \theta) < 0$ et $\sigma(p_s, \theta) < 0$, nous obtenons une contradiction.

En utilisant (3.2.41), (3.2.42), et un raisonnement similaire à la preuve du Théorème 3.1.2, on obtient que chaque solution transcendente f de l'équation (3.1.2) satisfait :

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \sigma_2(f) = n.$$

Par un raisonnement similaire à la preuve du Théorème 3.1.2, nous savons que lorsque $\max\{\alpha_0, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{d-1}\}$ ou $s < d$ ($d > 1$) ou $d \leq 1$, alors chaque solution $f(z) \neq 0$

de l'équation (3.1.2) vérifie

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty, \sigma_2(f) = n. \quad (3.2.47)$$

3.2.4 Preuve des Corollaires 3.1.5, 3.1.6 , 3.1.7 ,3.1.8 :

Pour la démonstration des Corollaires 3.1.5, 3.1.6 , 3.1.7 ,3.1.8 il suffit de démontrer le Corollaire 3.1.8. Le Corollaire 3.1.8, peut être démontré en utilisant le Corollaire 3.1.5, si $d < 2$, on utilise le Théorème 3.1.2. Ce qui prouve le Corollaire 3.1.8.

Chapitre 4

Croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes

4.1 Introduction et principaux résultats

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières. Dans l'étude de la croissance et les points fixes de l'équation différentielle

$$f'' + h_1(z)e^{az}f' + h_0(z)e^{bz}f = 0, \quad (4.1.1)$$

où h_1, h_0 sont des fonctions entières et a, b deux nombres complexes, Chen Zong-Xuan et Shon Kwang-Ho ont obtenu dans [4] les résultats suivants:

Théorème 4.1.1 [4] *Soient $h_j(z)$ ($j = 0, 1$) des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à 1 et a, b deux nombres complexes constants tels que $ab \neq 0$ et $a = cb$ ($c > 1$). Alors chaque solution non constante f de l'équation (4.1.1) est d'ordre infini.*

Théorème 4.1.2 [4] *Soient $A_j(z) \neq 0, D_j(z)$ ($j = 0, 1$) des fonctions entières telles que*

$\sigma(A_j) < 1$ et $\sigma(D_j) < 1$. Supposons que a, b sont deux nombres complexes constants tels que $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$). Alors chaque solution f non triviale de l'équation différentielle

$$f'' + (A_1(z)e^{az} + D_1(z))f' + (A_0(z)e^{bz} + D_0(z))f = 0$$

est d'ordre infini.

Théorème 4.1.3 [4] Soient $h_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ($k \geq 2$) des fonctions entières telles que $\sigma(h_j) < 1$ et $H_j(z) = h_j(z)e^{a_j z}$, où a_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes. Supposons qu'il existe a_s tel que $h_s \neq 0$ et pour $j \neq s$; si $H_j \neq 0$; $a_j = c_j a_s$ ($0 < c_j < 1$), si $H_j = 0$, on définit $c_j = 0$. Alors chaque solution f transcendante de l'équation

$$f^{(k)} + H_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + H_s f^{(s)} + \dots + H_0 f = 0 \quad (4.1.2)$$

est d'ordre infini. De plus, si $\max\{c_1, \dots, c_{s-1}\} < c_0$, alors chaque solution $f (\neq 0)$ de l'équation (4.1.2) est d'ordre infini.

Théorème 4.1.4 Supposons que $H_j(z) = A_j(z)e^{p_j(z)} + D_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) où $p_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{j,i} z^i$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$ où $a_{j,i} \in \mathbb{C}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$; $i = 0, \dots, n-1$) et $a_{j,n} \in \mathbb{C} - \{0\}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), $A_j(z), D_j(z)$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur à n . Supposons qu'il existe deux coefficients H_l, H_m tels que $a_{ln} = |a_{ln}| e^{i\theta_l}$ et $a_{mn} = |a_{mn}| e^{i\theta_m}$, $0 \leq l < m \leq k-1$, $\theta_l, \theta_m \in [0, 2\pi)$, $\theta_l \neq \theta_m$, et pour tout $j \neq l, m$, a_{jn} vérifie $a_{jn} = c_j a_{ln}$ ($0 < c_j < 1$) ou $a_{jn} = c_j a_{mn}$ ($0 < c_j < 1$). Si F est une fonction entière d'ordre fini, alors les solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + (A_{k-1}(z)e^{p_{k-1}(z)} + D_{k-1}(z)) f^{(k-1)} + \dots + (A_0(z)e^{p_0(z)} + D_0(z)) f = F \quad (4.1.3)$$

vérifient les propriétés suivantes:

(i) Si $F \equiv 0$, alors toute solution transcendante f de l'équation (4.1.3) satisfait $\sigma(f) = \infty$. De plus, si $f(z)$ est une solution polynôme de l'équation (4.1.3), et $\deg f \leq l - 1$ ou $\deg f \leq m - 1$; si $l = 1$ ou $m = 1$, alors toutes les solutions f non-constantes de (4.1.3) satisfont $\sigma(f) = \infty$,

(ii) Si $F \not\equiv 0$, et $m = 1$ ou $l = 1$, sauf pour au plus une solution exceptionnelle possible $f_0(z)$, toutes les autres solutions de l'équation (4.1.3) satisfont:

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty.$$

Si une solution d'ordre fini $f_0(z)$ existe, alors $\sigma(f_0) \leq \max \left\{ n, \bar{\lambda}(f_0), \sigma(F) \right\}$, et quand $\bar{\lambda}(f_0) < \sigma(f_0)$ et $\sigma(F) \neq n$, nous avons $\sigma(f_0) = \max \{n, \sigma(F)\}$.

Théorème 4.1.5 Soient $A_j(z) \not\equiv 0$ ($j = 0, 1, \dots, k - 1$) des fonctions entières telles que $\sigma(A_j) < n$, et soient

$$p_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{j,i} z^i$$

($j = 0, 1, \dots, k - 1$) des polynômes de degré $n \geq 1$. Si a_{jn} ($j = 0, 1, \dots, k - 1$) sont des nombres complexes distincts et $A_0(z) \not\equiv 0$, et si $F \not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre fini, alors toute solution f de l'équation suivante

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{p_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + \dots + A_0(z)e^{p_0(z)} f = F \quad (4.1.4)$$

satisfait les propriétés suivantes:

(i) Sauf pour au plus une solution exceptionnelle possible $f_0(z)$, toutes les autres solutions de (4.1.4) satisfont:

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty.$$

(ii) Si une solution d'ordre fini $f_0(z)$ existe, alors $\sigma(f_0) \leq \max \left\{ n, \bar{\lambda}(f_0), \sigma(F) \right\}$ et quand $\bar{\lambda}(f_0) < \sigma(f_0)$ et $\sigma(F) \neq n$, nous avons $\sigma(f_0) = \max \{n, \sigma(F)\}$.

Exemple 4.1.1: On considère l'équation différentielle suivante:

$$f'''(z) + e^{2z^3} f''(z) + e^{z^3+z} f'(z) + e^{4z^3} f(z) = 1.$$

On a $a_{23} = 2$, $a_{13} = 1$, $a_{03} = 4$ (sont distincts) et $n = 3$, $\sigma(F) = 0 < 3$.

Alors d'après le Théorème 4.1.5, toute solution f de cette équation différentielle vérifie

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty.$$

Remarque 4.1.1: L'hypothèse que a_{jn} ($j = 0, \dots, k-1$) sont des nombres complexes distincts est nécessaire. Par exemple, l'équation

$$f'''(z) + 5e^{4z} f''(z) + ze^{3z} f'(z) - e^{3z} f(z) = 1$$

admet une solution polynomiale $f(z) = z$, où $a_{11} = a_{01} = 3$.

Théorème 4.1.6 Soient $A_j(z)$, $p_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), $F(z)$ des fonctions entières vérifiant les conditions du Théorème 4.1.5 Supposons qu'il existe a_{ln} tel que $a_{jn} = d_j a_{ln}$, ($0 < d_j < 1$), $0 \leq j \neq l \leq k-1$.

(i) Alors toutes les solutions f transcendentes de l'équation différentielle (4.1.4) satisfont $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$ et $\sigma_2(f) = n$.

(ii) Si une solution $f_0(z)$ est d'ordre fini, alors $\sigma(f_0) \leq \max \left\{ n, \bar{\lambda}(f_0), \sigma(F) \right\}$ et quand $\bar{\lambda}(f_0) < \sigma(f_0)$ et $\sigma(F) \neq n$, on a $\sigma(f_0) = \max \{n, \sigma(F)\}$.

4.2 Quelques lemmes

Lemme 4.2.1 [13] Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre fini σ , soit $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi) - E_4$, alors il existe une constante

$R_0 = R_0(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| = r \geq R_0$, et pour tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}.$$

Lemme 4.2.2 [10] Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(f) = \alpha < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E \subset [1, \infty)$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, on a

$$\exp\{-r^{\alpha+\varepsilon}\} \leq |f(z)| \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}.$$

Lemme 4.2.3 [6] Soit $f(z)$ une fonction entière. Supposons que $|f^{(k)}(z)|$ est non bornée sur un rayon $\arg z = \theta$. Alors, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$), où $r_m \rightarrow \infty$, telle que $f^{(k)}(z_m) \rightarrow \infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \leq |z_m|^{k-j} (1 + o(1)) \quad (j = 0, 1, \dots, k-1)$$

Lemme 4.2.4 [22] Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini. Notons

$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, alors pour tout nombre $\lambda > 0$ suffisamment grand, et tout $r \in E \subset (1, \infty)$, on a

$$M(r, f) > c_1 \exp\{c_2 r^\lambda\},$$

où $m_l E = \infty$ et c_1, c_2 sont des constantes positives.

Lemme 4.2.5 [22] Supposons $g(z)$ est une fonction entière d'ordre infini, et d'hyper ordre $\sigma_2(g) < \sigma < \infty$. Alors il existe un ensemble $H_3 \subset (1, \infty)$ tel que $m_l H_3 = \infty$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty, r \in H_3} \frac{\log v(r)}{\log r} = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty, r \in H_3} \frac{\log \log v(r)}{\log r} = \sigma,$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $r \in H_3$, on a

$$\exp\{r^{\alpha-\varepsilon}\} \leq v(r) \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\},$$

où $v(r)$ est l'indice central de $g(z)$.

Lemme 4.2.6 [15, 17, 19] Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante , $v(r)$ l'indice central de $f(z)$ et δ et une constante satisfaisant $0 < \delta < \frac{1}{8}$. Supposons que pour z sur le cercle $|z| = r$ on ait $|f(z)| > M(r, f) v(r)^{-\frac{1}{8} + \delta}$. Alors

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left\{ \frac{v(r)}{z} \right\}^j (1 + \eta_j(z)) \quad ,$$

où $\eta_j(z) = O\left(v(r)^{-\frac{1}{8} + \delta}\right)$, $j \in \mathbb{N}$, pour tout $|z| = r$ à l'extérieur d'un ensemble E de mesure logarithmique finie.

Lemme 4.2.7 Supposons que B_0, B_1, \dots, B_{k-1} et $F (\neq 0)$ sont des fonctions entières d'ordre fini et soit $\sigma = \max \{\sigma(B_j), \sigma(F), j = 0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$. Alors toute solution f d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + B_0f = F$$

satisfait $\sigma_2(f) \leq \sigma$.

Lemme 4.2.8 Soient $k \geq 1$, P_1, P_2, \dots, P_k des polynômes non constants de degré d_1, d_2, \dots, d_k , respectivement, tels que $\deg(P_i - P_j) = \max\{d_i, d_j\}$ pour $i \neq j$. Posons $A(z) = \sum_{j=1}^k B_j(z) e^{P_j(z)}$, où $B_j(z) \neq 0$ sont des fonctions entières telles que $\sigma(B_j) < d_j$. Alors $\sigma(A) = \max_{1 \leq j \leq k} \{d_j\}$.

4.2.1 Preuve du Théorème 4.1.4

(i) $F \equiv 0$. Supposons que $f(z)$ est une solution transcendante de (4.1.3), nous prouvons d'abord que $\sigma(f) = \infty$. Supposons au contraire que $\sigma(f) = \sigma < \infty$.

Posons $d = \max \{\sigma(D_j) : 0 \leq j \leq k-1\}$, $h = \max \{c_j : 0 \leq j \neq l, m \leq k-1\}$. Par le Lemme 4.2.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle,

tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$, tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_0$, on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq |z|^{(j-i)(\sigma-1+\varepsilon)}, \quad (0 \leq i < j \leq k). \quad (4.2.1)$$

Posons $z = re^{i\theta}$, $\delta(P_l, \theta) = |a_{ln}| \cos(\theta_l + n\theta)$ et $\delta(P_m, \theta) = |a_{mn}| \cos(\theta_m + n\theta)$. Soit $E_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_l, \theta) = \delta(P_m, \theta)\}$, comme $\theta_m \neq \theta_l$, alors $m_{E_2} = 0$. Par le Lemme 2.1.2, il est facile de voir que pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ satisfaisante $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup H_1 \cup H_2)$ (H_1, H_2 sont définis dans le Lemme 2.1.2 et $m(E_1 \cup E_2 \cup H_1 \cup H_2) = 0$), telle que $\delta(P_l, \theta) > 0$, $\delta(P_m, \theta) < 0$ ou $\delta(P_l, \theta) < 0$, $\delta(P_m, \theta) > 0$.

Nous divisons la preuve en deux cas,

$$(a) \delta(P_l, \theta) > 0, \delta(P_m, \theta) < 0 \text{ et } (b) \delta(P_l, \theta) < 0, \delta(P_m, \theta) > 0.$$

(a) : $\delta(P_l, \theta) \succ 0, \delta(P_m, \theta) \prec 0$. Here we divide (a) into two subcases : (a₁) $a_{jn} = c_j a_{mn}$, $j \neq l, m$; (a₂) $a_{jn} = c_j a_{ln}$, $j \neq l, m$. (a) : $\delta(P_l, \theta) > 0, \delta(P_m, \theta) < 0$. On divise en deux sous-cas

$$(a_1) a_{jn} = c_j a_{mn}, j \neq l, m; (a_2) a_{jn} = c_j a_{ln}, j \neq l, m$$

Sous-cas (a₁) $a_{jn} = c_j a_{mn}$, $j \neq l, m \leq k - 1$. Daprs les conditions du Théorème 4.1.1, nous obtenons $\delta(P_l, \theta) > 0$, $\delta(P_j, \theta) < 0$ ($j \neq l$). Par le Lemme 2.1.2 et 4.2.2, pour tout ε_1 ($0 < \varepsilon_1 < 1$) donné et r suffisamment grand, nous avons

$$\left| A_l(re^{i\theta}) e^{P_l(re^{i\theta})} + D_l(re^{i\theta}) \right| \geq \exp\{(1 - \varepsilon_1) \delta(p_l, \theta) r^n\} (1 + o(1)) \quad (4.2.2)$$

et

$$\left| A_j(re^{i\theta}) e^{P_j(re^{i\theta})} + D_j(re^{i\theta}) \right| \leq \exp\{(1 - \varepsilon_1) \delta(p_l, \theta) r^n\} + \exp\left\{r^{\sigma(D_j) + \frac{1}{2}\varepsilon_1}\right\}$$

$$\leq \exp \{ r^{\sigma(D_j)+\varepsilon_1} \} . \quad (j \neq l) \quad (4.2.3)$$

Maintenant nous prouvons que $|f^{(l)}(re^{i\theta})|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Si $|f^{(l)}(re^{i\theta})|$ est non bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors par le Lemme 4.2.3, il existe une suite infinie de points $z_q = r_q e^{i\theta}$ ($q = 1, 2, \dots$) telles que $r_q \rightarrow \infty$, $f^{(l)}(z_q) \rightarrow \infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| \leq |z_q|^{l-j} (1 + o(1)) \quad (j = 0, 1, \dots, l-1) \quad (4.2.4)$$

En Substituant (4.2.1) et (4.2.4) en (4.1.3), on obtient

$$\begin{aligned} & \exp \{ (1 - \varepsilon_1) \delta(p_l, \theta) r_q^n \} (1 + o(1)) \leq |A_l(z_q) e^{P_l(z_q)} + D_l(z_q)| \\ & \leq \left| \frac{f^{(k)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| + \dots + |A_{l+1}(z_q) e^{P_{l+1}(z_q)} + D_{l+1}(z_q)| \left| \frac{f^{(l+1)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| \\ & \quad + |A_{l-1}(z_q) e^{P_{l-1}(z_q)} + D_{l-1}(z_q)| \left| \frac{f^{(l-1)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| \\ & \quad + \dots + |A_0(z_q) e^{P_0(z_q)} + D_0(z_q)| \left| \frac{f(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| \\ & \leq K_1 |z_q|^{M_1} \exp \{ r_q^{d+\varepsilon_1} \}, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

où K_1, M_1 sont des constantes positives.

Puisque $\sigma(D_j) < 1$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), c'est à dire, $d < 1$, nous obtenons une contradiction. Ainsi $|f^{(l)}(re^{i\theta})| \leq K_3$ (K_3 est une constante) sur $\arg z = \theta$. On obtient facilement

$$|f(re^{i\theta})| \leq K_4 r^k \quad (4.2.6)$$

sur $\arg z = \theta$, où K_4 est un constante positive.

Sous-cas (a_2) : $a_{jn} = c_j a_{ln}$, $j \neq l$, $m \leq k - 1$. Par les Lemmes 3.2.2 et 3.2.3 pour tout ε_2 $\left(0 < \varepsilon_2 < \min \left\{ \frac{1}{2} (1 - d), \frac{1-h}{2(1+h)} \right\}\right)$ donné et r suffisamment grand, nous avons

$$\begin{aligned} \left| A_m (r e^{i\theta}) e^{P_m(r e^{i\theta})} + D_m (r e^{i\theta}) \right| &\leq \exp \{ (1 - \varepsilon_2) \delta (p_m, \theta) r^n \} + \exp \{ r^{\sigma(D_m) + \varepsilon_2} \} \\ &\leq 2 \exp \{ r^{\sigma(D_m) + \varepsilon_2} \}, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

$$\exp \{ (1 - \varepsilon_2) \delta (p_l, \theta) r^n \} (1 + o(1)) \leq \left| A_l (r e^{i\theta}) e^{P_l(r e^{i\theta})} + D_l (r e^{i\theta}) \right| \quad (4.2.8)$$

$$\leq \exp \{ (1 + \varepsilon_2) \delta (p_l, \theta) r^n \} (1 + o(1))$$

et

$$\begin{aligned} \exp \{ (1 - \varepsilon_2) c_j \delta (p_l, \theta) r^n \} (1 + o(1)) &\leq \left| A_j (r e^{i\theta}) e^{P_j(r e^{i\theta})} + D_j (r e^{i\theta}) \right| \\ &\leq \exp \{ (1 + \varepsilon_2) c_j \delta (p_l, \theta) r^n \} (1 + o(1)), \quad (j \neq l, m). \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Comme

$$\frac{\exp \{ (1 + \varepsilon_2) c_j \delta (p_l, \theta) r^n \}}{\exp \{ (1 - \varepsilon_2) \delta (p_l, \theta) r^n \}} = \exp \{ [(1 + \varepsilon_2) c_j - (1 - \varepsilon_2)] \delta (p_l, \theta) r^n \},$$

et $0 < \varepsilon_2 < \frac{1-h}{2(1+h)}$, alors pour r suffisamment grand, nous avons $(1 + \varepsilon_2) c_j - (1 - \varepsilon_2) < 0$ ($c_j = h$) et

$$\exp \{ (1 + \varepsilon_2) c_j \delta (p_l, \theta) r^n \} = o(\exp \{ (1 - \varepsilon_2) \delta (p_l, \theta) r^n \}). \quad (4.2.10)$$

De (4.2.9) et (4.2.10), pour r suffisamment grand, nous avons

$$\left| A_j (r e^{i\theta}) e^{P_j(r e^{i\theta})} + D_j (r e^{i\theta}) \right| \leq o(\exp \{(1 - \varepsilon_2) \delta(p_l, \theta) r^n\}). \quad (4.2.11)$$

Maintenant nous prouvons que $|f^{(l)}(r e^{i\theta})|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Si $|f^{(l)}(r e^{i\theta})|$ est non bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors d'après le Lemme 4.2.3, il existe une suite infinie de points $z_q = r_q e^{i\theta}$ ($q = 1, 2, \dots$) telle que $r_q \rightarrow \infty, f^{(l)}(z_q) \rightarrow \infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| \leq |z_q|^{l-j} (1 + o(1)) \quad (j = 0, 1, \dots, l-1). \quad (4.2.12)$$

De (4.2.1) et (4.2.4), pour r_q suffisamment grand, il existe une constante M_2 satisfaisante

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| \leq |z_q|^{M_2}, \quad j \neq l. \quad (4.2.13)$$

De (4.2.5), (4.2.7), (4.2.8), (4.2.10) et (4.2.13), nous avons

$$\begin{aligned} & \exp \{(1 - \varepsilon_2) \delta(p_l, \theta) r_q^n\} (1 + o(1)) \leq |A_l(z_q) e^{P_l(z_q)} + D_l(z_q)| \\ & \leq \left| \frac{f^{(k)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| + \dots + |A_m(z_q) e^{P_m(z_q)} + D_m(z_q)| \left| \frac{f^{(m)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| \\ & \quad + |A_{l+1}(z_q) e^{P_{l+1}(z_q)} + D_{l+1}(z_q)| \left| \frac{f^{(l+1)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| + \dots \\ & \quad + |A_{l-1}(z_q) e^{P_{l-1}(z_q)} + D_{l-1}(z_q)| \left| \frac{f^{(l-1)}(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| \\ & \quad + \dots + |A_0(z_q) e^{P_0(z_q)} + D_0(z_q)| \left| \frac{f(z_q)}{f^{(l)}(z_q)} \right| \\ & \leq r_q^{M_2} + (k-2) o(\exp \{(1 - \varepsilon_2) \delta(p_l, \theta) r^n\}) r_q^{M_2} + 2 \exp \{r^{\sigma(D_m) + \varepsilon_2}\} r_q^{M_2} \end{aligned}$$

i.e ,

$$\exp \left\{ (1 - \varepsilon_2) \delta (p_l, \theta) r_q^n \right\} (1 + o(1)) \leq r_q^{M_2} + 2 \exp \left\{ r^{\sigma(D_m) + \varepsilon_2} \right\} r_q^{M_2}. \quad (4.2.14)$$

Puisque $0 < \varepsilon_2 < \min \left\{ \frac{1}{2} (1 - d), \frac{1-h}{2(1+h)} \right\}$, de la relation (4.2.14), nous pouvons obtenir une contradiction. Ainsi $|f^{(l)}(re^{i\theta})| \leq K_5$ sur le $\arg z = \theta$. On obtient facilement

$$|f(re^{i\theta})| \leq K_6 r^k$$

sur $\arg z = \theta$, où K_5, K_6 sont des constantes positives. Ainsi, nous obtenons

$$|f(re^{i\theta})| \leq K r^k \quad (4.2.15)$$

sur $\arg z = \theta$.

(b) : $\delta(P_l, \theta) < 0, \delta(P_m, \theta) > 0$. En utilisant le même raisonnement comme dans le cas (a), nous pouvons aussi obtenir

$$|f(re^{i\theta})| \leq K r^k \quad (4.2.16)$$

sur $\arg z = \theta$. De(4.2.15) et (4.2.16) et le fait que $E_1 \cup E_2 \cup H_1 \cup H_2$ a une mesure linéaire nulle, par le principe de Phragmè-Lindelöf, on obtient que $f(z)$ est un polynôme, ce qui contredit notre hypothèse. Donc $\sigma(f) = \infty$. Dans la suite, nous montrons que si $f(z)$ est une solution polynomiale de (4.1.3), alors $\deg f = s \leq m - 1$ ou $\deg f = s \leq l - 1$. Nous divisons la preuve en deux cas : $a_{jn} = c_j a_{ln}, j \neq l, m; a_{jn} = c_j a_{mn}, j \neq l, m$. Supposons $a_{jn} = c_j a_{ln}, j \neq l, m$. Si $f(z)$ est un polynôme et $\deg f = s \geq m$. De (4.1.3), nous avons

$$\sum_{0 \leq j \leq s} (A_j(z) e^{P(z)} + D_j(z)) f^{(j)} = 0. \quad (4.2.17)$$

Puisque $\theta_l \neq \theta_m$ et $a_{jn} = c_j a_{ln}, (j \neq l, m, 0 < c_j < 1)$, d'après le Lemme 2.1.2, il est facile

de voir que pour tout ε_3 ($0 < \varepsilon_3 < \frac{1}{2}(1-d)$) donné, il existe une demi-droite $\arg z = \theta$ satisfaisante $\theta \in [0, 2\pi] \setminus (E_1 \cup E_2 \cup H_1 \cup H_2)$ H_1, H_2 sont définis dans le Lemme 2.1.2 et $m((E_1 \cup E_2 \cup H_1 \cup H_2) = 0)$ telle que $\delta(P_j, \theta) < 0$ ($j \neq m$), $\delta(P_m, \theta) > 0$. De (4.2.2), (4.2.3) et (4.2.17), pour r_q suffisamment grand, nous avons

$$\begin{aligned} K_7 r^{s-m} \exp \{ (1 - \varepsilon_3) \delta(p_m, \theta) r^n \} (1 + o(1)) &\leq \left| \left(A_m(r e^{i\theta}) e^{P_m(r e^{i\theta})} + D_m(r e^{i\theta}) \right) f^{(m)} \right| \\ &\leq \left| \sum_{0 \leq j \leq s, j \neq m} (A_j(z) e^{P_j(z)} + D_j(z)) f^{(j)} \right| \\ &\leq K_8 r^s \exp \{ r^{d+\varepsilon_3} \} \end{aligned}$$

où $K_7, K_8 (> 1)$ sont deux constantes. Ainsi, nous avons

$$K_7 \exp \{ (1 - \varepsilon_3) \delta(p_m, \theta) r^n \} (1 + o(1)) \leq K_8 r^m \exp \{ r^{d+\varepsilon_3} \}. \quad (4.2.18)$$

comme $0 < \varepsilon_3 < \frac{1}{2}(1-d)$ et $0 < d < 1$, nous obtenons une contradiction. Par conséquent, nous obtenons $\deg f \leq m - 1$. Supposons $a_{jn} = c_j a_{mn}$, $j \neq l, m$. En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, nous pouvons obtenir $\deg f \leq l - 1$. Ainsi, la preuve du Théorème 4.1.4 (i) est achevée.

(ii) $F \not\equiv 0$, tout d'abord nous montrons qu'il existe au plus une solution $f_0(z)$ de (4.1.3) d'ordre fini. Supposons f_0 est une solution de (4.1.3) d'ordre fini, si f_1 est une autre solution d'ordre fini, alors $f_0 - f_1 \not\equiv 0$ est une solution de l'équation suivante

$$f^{(k)} + (A_{k-1}(z) e^{p_{k-1}(z)} + D_{k-1}(z)) f^{(k-1)} + \dots + (A_0(z) e^{p_0(z)} + D_0(z)) f = 0.$$

D'après le Théorème 4.1.4 (i), nous avons $\sigma(f_0 - f_1) = \infty$. Puisque f_0, f_1 sont deux fonctions d'ordre fini, donc c'est une contradiction.

Maintenant, nous supposons que f est une solution d'ordre infini de (4.1.3). Nous allons

prouver $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$. De (4.1.3) nous avons

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left(\frac{f^{(k)}}{f} + H_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + H_0(z) \right). \quad (4.2.19)$$

On note $H_j(z) = A_j(z)e^{p_j(z)} + D_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). De (4.2.19), si f a un zéro de multiplicité $p (> k)$ en z_0 , alors F a un zéro de multiplicité $p - k$ en z_0 . Donc

$$n \left(r, \frac{1}{f} \right) \leq k\bar{n} \left(r, \frac{1}{f} \right) + n \left(r, \frac{1}{F} \right),$$

et

$$N \left(r, \frac{1}{f} \right) \leq k\bar{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + N \left(r, \frac{1}{F} \right). \quad (4.2.20)$$

En appliquant le lemme de la dérivée logarithmique, nous avons

$$m \left(r, \frac{f^{(j)}}{f} \right) = O \{ \log T(r, f) + \log r \} \quad (j = 1, \dots, k)$$

pour tout r à l'extérieur d'un ensemble E_3 de mesure lineaire finie. De la relation (4.2.19), nous obtenons

$$m \left(r, \frac{1}{f} \right) \leq m \left(r, \frac{1}{F} \right) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, H_j) + O(\log(rT(r, f))), \quad r \notin E_3. \quad (4.2.21)$$

De (4.2.20) et (4.2.21) on a

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T \left(r, \frac{1}{f} \right) + O(1) \\ &\leq k\bar{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + T(r, F) + \sum_{j=0}^{k-1} T(r, H_j) + O(\log(rT(r, f))), \quad r \notin E_3. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Comme $\sigma(f) = \infty$, il existe une suite $\{r'_q\}$ ($r'_q \rightarrow \infty$, quand $q \rightarrow \infty$), telle que

$$\lim_{r'_q \rightarrow \infty} \frac{T(r'_q, f)}{\log r'_q} = \infty.$$

Posons $mE_3 = \eta < \infty$, alors il existe $r_q \in [r'_q, r'_q + \eta + 1] - E_3$ tel que

$$\frac{\log T(r_q, f)}{\log r_q} \geq \frac{\log T(r'_q, f)}{\log(r'_q + \eta + 1)} = \frac{\log T(r'_q, f)}{\log r'_q + \log\left(1 + \frac{\eta+1}{r'_q}\right)},$$

d'où

$$\lim_{r_q \rightarrow \infty} \frac{\log T(r_q, f)}{\log r_q} \geq \lim_{r'_q \rightarrow \infty} \frac{\log T(r'_q, f)}{\log r'_q + \log\left(1 + \frac{\eta+1}{r'_q}\right)} = \infty.$$

Pour β ($\beta > \sigma(H_0) + \sigma(F)$) et r_q suffisamment grand, nous avons

$$\log T(r_q, f) \geq (r_q)^\beta.$$

Comme $\sigma(A_j) < n$, $\deg P_j(z) = n$, $\sigma(D_j) < n$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et $\sigma(F) = \varrho < \infty$, alors pour tout ε_4 ($0 < \varepsilon_4 < \beta - n - \varrho$) donné, nous avons

$$T(r_q, F) < r_q^{\varrho + \varepsilon_4}, \quad T(r_q, H_j) < r_q^{n + \varepsilon_4}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

pour r_q suffisamment grand. Ainsi pour $r_q \rightarrow \infty$

$$\frac{T(r_q, F)}{T(r_q, f)} < r_q^{\varrho + \varepsilon_4 - \beta} \rightarrow 0, \quad \frac{T(r_q, H_j)}{T(r_q, f)} < r_q^{n + \varepsilon_4 - \beta} \rightarrow 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

donc

$$T(r_q, F) \leq \frac{1}{k+3} T(r_q, f), \quad T(r_q, H_j) \leq \frac{1}{k+3} T(r_q, f), \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \quad (4.2.23)$$

pour r_q suffisamment grand. On a aussi

$$O\{\log r_q T(r_q, f)\} = o\{T(r_q, f)\}$$

ce qui donne

$$O\{\log r_q T(r_q, f)\} \leq \frac{1}{k+3} T(r_q, f). \quad (4.2.24)$$

De (4.2.22)-(4.2.24), on obtient

$$T(r_q, f) \leq k\bar{N}\left(r_q, \frac{1}{f}\right) + \frac{k+2}{k+3} T(r_q, f),$$

donc

$$T(r_q, f) \leq k(k+3)\bar{N}\left(r_q, \frac{1}{f}\right).$$

Par conséquent

$$\lambda(f) \geq \bar{\lambda}(f) \geq \lim_{r_q \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{N}\left(r_q, \frac{1}{f}\right)}{\log r_q} \geq \lim_{r_q \rightarrow \infty} \frac{\log \left[\frac{1}{k^2+3k} T(r_q, f)\right]}{\log r_q} = \infty.$$

Comme $\lambda(f) \leq \sigma(f)$, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty.$$

Supposons que f_0 est une solution de (4.1.3) d'ordre fini. Nous allons prouver, $\sigma(f_0) \leq \max\left\{n, \bar{\lambda}(f_0), \sigma(F)\right\}$ dans la suite. Comme $\sigma(f_0) < \infty$, nous avons $m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O(\log r)$ ($j = 1, \dots, k-1$). De (4.2.22), nous avons

$$T(r, f_0) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f_0}\right) + T(r, F) + \sum_{j=0}^{k-1} T(r, H_j) + O(\log r). \quad (4.2.25)$$

Comme $\sigma(A_j) < n$, $\deg P_j(z) = n$, $\sigma(D) < n$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), nous avons $\sigma(H_j) =$

$n, (j = 0, 1, \dots, k - 1)$. Posons $\varsigma = \max \{n, \sigma(F)\}$, pour r suffisamment grand et tout nombre positif ε_5 , nous avons

$$T(r, F) < r^{\varsigma + \varepsilon_5}, \quad T(r, H_j) < r^{n + \varepsilon_5} \leq r^{\varsigma + \varepsilon_5}, \quad j = 0, 1, \dots, k - 1. \quad (4.2.26)$$

De (4.2.25) et (4.2.26) on a

$$T(r, f_0) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f_0}\right) + (k + 1)r^{\varsigma + \varepsilon_5} + O(\log r).$$

Ainsi, nous pouvons obtenir

$$\sigma(f_0) \leq \max \left\{ \bar{\lambda}(f_0), \varsigma \right\} = \max \left\{ n, \bar{\lambda}(f_0), \sigma(F) \right\}.$$

Lorsque $\bar{\lambda}(f_0) < \sigma(f_0)$, si $\sigma(F) = n$, alors $\sigma(f_0) \leq n$; si $\sigma(F) \neq n$, alors

$$\sigma(f_0) \leq \max \{n, \sigma(F)\}.$$

De l'équation (4.1.3), nous avons $\sigma(f_0) \geq \max \{n, \sigma(F)\}$ quand $\sigma(F) \neq n$. Par conséquent, nous avons $\sigma(f_0) = \max \{n, \sigma(F)\}$.

4.2.2 Preuve du Théorème 4.1.5

Nous avons deux cas à prouver dans le Theorem 4.1.5

cas 1: Nous commençons à montrer que toute solution de l'équation homogène correspondante

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{p_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + \dots + A_0(z)e^{p_0(z)}f = 0 \quad (4.2.27)$$

est d'ordre infini. Supposons que $f(z)$ est une solution transcendante de (4.2.27). Nous montrons que $\sigma(f) = \infty$. Supposons au contraire que $\sigma(f) = \sigma < \infty$.

D'après le Lemme 4.2.1, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_3$, il existe une constante $R_1 = R_1(\theta) > 1$, telle que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_1$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq |z|^{k\sigma}. \quad (4.2.28)$$

Posons $a_{jn} = |a_{jn}| e^{i\varphi_j}$, et $E_4 = \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j, \theta) = |a_{jn}| \cos(\varphi_j + n\theta) = 0, \\ j = 0, 1, \dots, k-1 \end{array} \right\}$
 $\cup \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j - P_i, \theta) = 0, 0 \leq i < j \leq k-1\}$, alors $mE_4 = 0$.

Posons $A_j(z) = h_j(z) e^{P_j(z)}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), par le Lemme 2.1.2, il existe un ensemble $H_j \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi) \setminus H_j$, pour r suffisamment grand, on a

$$1) \text{ Si } \delta(P_j, \theta) > 0, |A_j(re^{i\theta})| \geq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(p_j, \theta)r^n\}$$

$$2) \text{ Si } \delta(P_j, \theta) < 0, |A_j(re^{i\theta})| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(p_j, \theta)r^n\}.$$

Posons $E_5 = \bigcup_{j=0}^{k-1} H_j$, alors E_5 est aussi un ensemble de mesure linéaire nulle. Pour $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_3 \cup E_4 \cup E_5)$, nous avons

$$\delta(P_j, \theta) \neq 0, \quad \delta(P_i, \theta) \neq \delta(P_j, \theta) \quad (0 \leq i < j \leq k-1).$$

Comme a_{jn} sont des nombres complexes distincts, il existe un seul $s \in \{0, \dots, k-1\}$ tel que $\delta(P_s, \theta) = \max\{\delta(P_j, \theta) : j = 0, \dots, k-1\}$ pour $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_3 \cup E_4 \cup E_5)$. Posons $\delta = \delta(P_s, \theta)$, $\delta_1 = \max\{\delta(P_j, \theta) : j \neq s\}$, alors $\delta_1 < \delta$.

Nous divisons la preuve en deux cas:

$$(i) \delta > 0,$$

$$(ii) \delta < 0.$$

cas (i). $\delta > 0$. Par le Lemme 2.1.2, pour tout $\varepsilon_1 \left(0 < 3\varepsilon_1 < \frac{\delta - \delta_1}{\delta_1}\right)$ donné, pour r suffisamment grand, on obtient

$$|A_s(re^{i\theta})| \geq \exp\{(1 - \varepsilon_1)\delta r^n\}, \quad (4.2.29)$$

$$|A_j (re^{i\theta})| \leq \exp \{ (1 + \varepsilon_1) \delta_1 r^n \} \quad (j \neq s). \quad (4.2.30)$$

Maintenant nous prouvons que $|f^{(s)} (re^{i\theta})|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Si $|f^{(s)} (re^{i\theta})|$ est non bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors d'après le Lemme 4.2.3, il existe une suite infinie de points $z_q = r_q e^{i\theta}$ ($q = 1, 2, \dots$), telle que $r_q \rightarrow \infty$, $f^{(s)} (z_q) \rightarrow \infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)} (z_q)}{f^{(s)} (z_q)} \right| \leq |z_q|^{s-j} (1 + o(1)) \quad (j = 0, 1, \dots, s-1). \quad (4.2.31)$$

En substituant (4.2.28) et (4.2.31) en (4.2.27), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \exp \{ (1 - \varepsilon_1) \delta r_q^n \} \leq |A_s (z_q)| \\ & \leq \left| \frac{f^{(k)} (z_q)}{f^{(s)} (z_q)} \right| + \dots + |A_{s+1} (z_q)| \left| \frac{f^{(s+1)} (z_q)}{f^{(s)} (z_q)} \right| + |A_{s-1} (z_q)| \left| \frac{f^{(s-1)} (z_q)}{f^{(s)} (z_q)} \right| + \dots \\ & \quad + \dots + |A_0 (z_q)| \left| \frac{f (z_q)}{f^{(s)} (z_q)} \right| \\ & \leq k \exp \{ (1 + \varepsilon_1) \delta_1 r_q^n \} \cdot |z_q|^M, \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

où $M > 0$. De (4.2.32), nous obtenons

$$\exp \left\{ \frac{1}{3} (\delta - \delta_1) r_q^n \right\} \leq r_q^M. \quad (4.2.33)$$

C'est une contradiction. Ainsi $|f^{(s)} (re^{i\theta})| \leq M$ sur $\arg z = \theta$. On en déduit

$$|f (re^{i\theta})| \leq M r^k \quad (4.2.34)$$

sur $\arg z = \theta$

cas(ii). $\delta < 0$. De l'équation (4.2.27), on peut écrire

$$-1 = A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} + \dots + A_j(z) \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(k)}(z)} + \dots + A_0(z) \frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}. \quad (4.2.35)$$

Maintenant nous montrons que $|f^{(k)}(re^{i\theta})|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Si $|f^{(k)}(re^{i\theta})|$ est non bornée sur un rayon $\arg z = \theta$, d'après le Lemme 4.2.3, il existe une suite infinie de points $z_q = r_q e^{i\theta}$ ($q = 1, 2, \dots$), telle que $r_q \rightarrow \infty$, $f^{(k)}(z_q) \rightarrow \infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(k)}(z_q)} \right| \leq |z_q|^{k-j} (1 + o(1)) \quad (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (4.2.36)$$

Par le Lemme 2.1.2, pour toute constante donnée ε_2 ($0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$), nous avons

$$|A_j(z_q)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon_2) \delta r_q^n\} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (4.2.37)$$

De (4.2.36) et (4.2.37), nous avons, pour r_q suffisamment grand

$$\left| A_j(z_q) \frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(k)}(z_q)} \right| \leq \exp\{(1 - \varepsilon_2) \delta r_q^n\} \cdot r_q^{k-j} (1 + o(1)) \rightarrow 0 \quad (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (4.2.38)$$

En substituant (4.2.38) en (4.2.35), nous obtenons

$$1 \leq 0. \quad (4.2.39)$$

C'est une contradiction. Ainsi $|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leq M$ sur $\arg z = \theta$. Donc

$$|f(re^{i\theta})| \leq Mr^k \quad (4.2.40)$$

sur $\arg z = \theta$. En combinant (4.2.34), (4.2.40) et le fait que $E_3 \cup E_4 \cup E_5$ est de mesure linéaire nulle, par principe de Phragmén-Lindelof, on obtient que $f(z)$ est un polynôme, ce qui contredit notre hypothèse. Donc $\sigma(f) = \infty$. Dans la suite, nous montrons que

tout polynôme non constant ne peut pas être une solution de (4.1.4). Si $f(z)$ est un polynôme, alors d'après le Lemme 4.2.8, nous avons

$\sigma(f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f) = n$, c'est contradiction. Si $f(z)$ est une solution constante de (4.1.4), alors $f(z) \equiv 0$. Ainsi, chaque solution $f \neq 0$ de (4.1.4) satisfait $\sigma(f) = \infty$.

cas (2) Pour l'équation non homogène (4.1.4), on utilise la même méthode du Théorème 4.1.4

4.2.3 Preuve du Théorème 4.1.6

Supposons que $f(z)$ est une solution transcendante de (4.1.4), à partir des conclusions du Théorème 4.1.5, nous montrons seulement que chaque solution f transcendante de (4.1.4) satisfait $\sigma_2(f) = n$. Par le Lemme 4.2.7, nous avons $\sigma_2(f) \leq n$. Supposons $\sigma_2(f) \leq k < n$, alors par le Lemme 4.2.6, nous avons

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left\{ \frac{v(r)}{z} \right\}^j (1 + o(1)), \quad (j = 1, \dots, k), \quad (4.2.41)$$

où z vérifie $|f(z)| = M(r, f)$ et $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5$, ($m_l E_5 < \infty$) et $v(r)$ l'indice central de $f(z)$. Par le Lemme 4.2.5, nous pouvons choisir une suite de points $\{z_q = r_q e^{i\theta_q}\}$ telle que $|f(z_q)| = M(r_q, f)$, $\theta_q \in [0, 2\pi)$ et $\lim_{q \rightarrow \infty} \theta_q = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $r_q \in E_6 \setminus ([0, 1] \cup E_5)$, $r_1 \rightarrow \infty$, où E_6 vérifie $E_6 \subset (1, \infty)$ et $m_l E_6 = \infty$. Pour tout $\varepsilon_6 (> 0)$ donné et r_q suffisamment grand nous avons

$$\lim_{r_q \rightarrow \infty} \frac{\log v(r_q)}{\log r_q} = \infty \quad (4.2.42)$$

et

$$\exp\{r_q^{k-\varepsilon_6}\} \leq v(r_q) \leq \exp\{r_q^{k+\varepsilon_6}\}. \quad (4.2.43)$$

Pour θ_0 , nous pouvons mettre $a_{ln} = |a_{ln}| e^{i\varphi}$ et soit $\varphi + n\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$, alors $\delta(P_l, \theta_0) = \cos(\varphi + n\theta_0) \neq 0$. On divise la démonstration en deux cas:

$$(3a) \delta(P_l, \theta_0) > 0, \quad (3b) \delta(P_l, \theta_0) < 0.$$

cas (3a) $\delta(P_l, \theta_0) > 0$:

Nous avons $\delta(P_j, \theta_0) = d_j \delta(P_l, \theta_0) > 0$, $\delta(P_j - P_l, \theta_0) = (d_j - 1) \delta(P_l, \theta_0) < 0$, ($0 \leq j \neq l \leq k-1$)
et $\delta(-P_l, \theta_0) < 0$. Posons $\gamma = \max\{d_j : 0 \leq j \neq l \leq k-1\}$, alors $0 < \gamma < 1$. De

$\lim_{q \rightarrow \infty} \theta_q = \theta_0$, pour q suffisamment grand, nous avons

$$\delta(P_l, \theta_q) > 0, \quad \delta(P_j, \theta_q) = d_j \delta(P_l, \theta_q) > 0, \quad (0 \leq j \neq l \leq k-1) \quad (4.2.44)$$

et

$$\delta(-P_l, \theta_q) < 0, \quad \delta(P_j - P_l, \theta_q) = (d_j - 1) \delta(P_l, \theta_q) < 0, \quad (0 \leq j \neq l \leq k-1). \quad (4.2.45)$$

On écrit l'équation (4.1.4) sous la forme

$$-A_l(z) \frac{f^{(l)}}{f} = e^{-P_l} \frac{f^{(k)}}{f} + \sum_{j=1, j \neq l}^{k-1} A_j(z) e^{P_j - P_l} \frac{f^{(j)}}{f} + A_0(z) e^{P_0 - P_l} - e^{-P_l} \frac{F}{f}. \quad (4.2.46)$$

En substituant (4.2.41), (4.2.43) en (4.2.46), par (4.2.44), (4.2.45), et les lemmes 4.2.2, 4.2.3, 4.2.5 et 4.2.6, pour tout $\varepsilon_6 (> 0)$, nous avons

$$\exp\{r^{\sigma(A_l) - \varepsilon_6}\} \left(\frac{v(r_q)}{r_q}\right)^l (1 + o(1)) \leq \exp\{(1 - \varepsilon_6) \delta(-P_l, \theta_q) r_q^n\} \left(\frac{v(r_q)}{r_q}\right)^k (1 + o(1))$$

$$+ \sum_{j=l+1}^{k-1} \exp\{r^{\sigma(A_j + \varepsilon_6)}\} \exp\{(1 - \varepsilon_6) (d_j - 1) \delta(P_l, \theta_q) r_q^n\} \left(\frac{v(r_q)}{r_q}\right)^j (1 + o(1))$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{l-1} \exp \{r^{\sigma(A_j+\varepsilon_6)}\} \exp \{(1-\varepsilon_6)(d_j-1)\delta(P_l, \theta_q) r_q^n\} \left(\frac{v(r_q)}{r_q}\right)^j (1+o(1)) \\
& \quad + \exp \{r^{\sigma(A_0+\varepsilon_6)}\} \exp \{(1-\varepsilon_6)(d_0-1)\delta(P_l, \theta_q) r_q^n\} \\
& \quad + \frac{1}{c_1} \exp \{(1-\varepsilon_6)\delta(-P_l, \theta_q) r_q^n\} \exp \{r_q^{1+\sigma(F)+\varepsilon_6} - c_2 r_q^\lambda\}. \tag{4.2.47}
\end{aligned}$$

Posons $\mu = \max \{|\sigma(A_i) - \sigma(A_j)| : 0 \leq i \neq j \leq k-1\}$, puisque $0 \leq \sigma(A_j) < n$, ($0 \leq j \leq k-1$), alors $\mu < n$. De (4.2.47), pour tout ε_6 , $0 < \varepsilon_6 < \frac{1}{2} \min \{1, n - \mu, n - k\}$ et q suffisamment grand et λ est si grande que $\lambda > \max \{2 + \sigma(F), n\}$, de (4.2.44) et (4.2.45), nous avons

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{v(r_q)}{r_q}\right)^l (1+o(1)) \\
& \leq \exp \{(1-\varepsilon_6)\delta(-P_l, \theta_q) r_q^n\} \left(\frac{v(r_q)}{r_q}\right)^k (1+o(1)) \exp \{r^{-\sigma(A_j+\varepsilon_6)}\} \\
& + (k-2) \exp \{(1-\varepsilon_6)(\gamma-1)\delta(P_l, \theta_q) r_q^n + (k-2)r_q^{k+\varepsilon_6} + r_q^{\mu+\varepsilon_6}\} r_q^{2-k} (1+o(1)) \\
& \quad + \exp \{r_q^{\mu+\varepsilon_6}\} \exp \{(1-\varepsilon_6)(\gamma-1)\delta(P_l, \theta_q) r_q^n\} \\
& + \frac{1}{c_1} \exp \{(1-\varepsilon_6)\delta(-P_l, \theta_m) r_q^n\} \exp \{r_q^{1+\sigma(F)+\varepsilon_6} - c_2 r_q^\lambda\} \exp \{r^{-\sigma(A_l)+\varepsilon_6}\} \\
& \leq \exp \{(1-\varepsilon_6) - \delta(P_l, \theta_q) r_q^n (1+o(1))\} \\
& + (k-1) \exp \{(1-\varepsilon_6)(\gamma-1)\delta(P_l, \theta_q) r_q^n (1+o(1))\} + \frac{1}{c_1} \exp \{-c_2 r_q^\lambda (1+o(1))\}.
\end{aligned}$$

Puisque $\delta(P_l, \theta_q) > 0$, de l'inégalité ci-dessus, nous pouvons obtenir $v(r_q) \rightarrow 0$, quand $r_q \rightarrow \infty$. Ainsi, nous obtenons une contradiction.

cas (3b) $\delta(P_l, \theta_0) < 0$.

Nous avons $\delta(P_j, \theta_0) = d_j \delta(P_l, \theta_0) < 0$, $0 \leq j \neq l \leq k-1$. De $\lim_{q \rightarrow \infty} \theta_q = \theta_0$, pour q suffisamment grand, nous avons $\delta(P_j, \theta_q) = d_j \delta(P_l, \theta_q) < 0$, ($0 \leq j \neq l \leq k-1$). On

écrit l'équation (4.1.4) sous la forme

$$-\frac{f^{(k)}}{f} = -\frac{F}{f} + A_0(z) e^{P_0(z)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j(z) e^{P_j(z)} \frac{f^{(j)}}{f}. \quad (4.2.48)$$

Puisque $\sigma(A_j) < n$, ($j = 0, 1, \dots, k$), alors pour q suffisamment grand et tout ε_7 ($0 < \varepsilon_6 < 1$) donné, par le Lemme 2.1.2, nous pouvons obtenir

$$|A_l(z) e^{P_l(z)}| \leq \exp \{(1 - \varepsilon_7) \delta(P_l, \theta_q) r_q^n\} \leq 1. \quad (4.2.49)$$

et

$$|A_j(z) e^{P_j(z)}| \leq \exp \{(1 - \varepsilon_7) \delta(P_j, \theta_q) r_q^n\} \leq 1. \quad (0 \leq j \neq l \leq k-1). \quad (4.2.50)$$

En substituant (4.2.41) en (4.2.48), de (4.2.49), (4.2.50) et les Lemmes 2.1.2, 4.2.2, 4.2.4, nous avons

$$\begin{aligned} \left(\frac{v(r_q)}{r_q}\right)^k (1 + o(1)) &\leq \frac{1}{c_1} \exp \{r_q^{1+\sigma(F)+\varepsilon_7} - c_2 r_q^\lambda\} + \exp \{(1 - \varepsilon_7) \delta(P_0, \theta_q) r_q^n\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} \exp \{(1 - \varepsilon_7) \delta(P_j, \theta_q) r_q^n\} \left(\frac{v(r_q)}{r_q}\right)^j (1 + o(1)) \\ &\leq \frac{1}{c_1} \exp \{-c_2 r_q^\lambda (1 + o(1))\} + 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{v(r_q)}{r_q}\right)^j (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (4.2.51)$$

où $\lambda > \max \{2 + \sigma(F), n\}$. Alors pour q suffisamment grand, de (4.2.51) nous pouvons obtenir

$$v(r_q) \leq K_9 r_q^{M_3} (1 + o(1)),$$

où K_9, M_3 sont deux constantes. Ainsi, nous obtenons une contradiction
Du **cas (3a)** et **cas (3b)**, nous trouvons que $\sigma_2(f) = n$

Bibliographie:

- [1] I. Amemiya, M. Ozawa, *Non existence of finite order solutions of $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$* , Hokkaido Math J, 10(1981), 1-17
- [2] B. Belaïdi, *Some precise estimates of the hyper order of solutions of some complex linear differential equations*, J. Inequal. Pure and Appl. Math., 8(4)(2007), 1-14.
- [3] M, Frei, *Über die subnormalen losungen der differential gleichung $w'' + e^{-z}w' + (Konst)w = 0$* . Comment Math Helv, 1962,36:1-8
- [4]Z. X.Chen , *The growth of solutions of the differential equation $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$* . (in Chinese), Science in China, Series A, 45 (3), 290–300 (2002).
- [5]Z. X.Chen and C.C.Yang, *Some oscillation theorems for linear differential equations with meromorphic coefficients*, southeast Asian Bull. Math,23(1999), 409-417.
- [6] Z Chen ,Kwangho Shon, *The relation between solutions of a class of second order differential equations with functions of small growth*,Chinese Annals of Mathematics, (4)27(2006),431-432. (in chinese) English transl.in Chinese journal of Contemporary Mathematics,(3)27(2006).
- [7] Z.X. Chen, *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Analysis,14(1994),425-438.
- [8] Z.X. Chen , Shon Kwangho. *On the growth of solutions of a class of higher order differential equations*. Acta Mathematica Scientia, 2004, 24B(1): 52–60
- [9] Z.X. Chen. *On the hyper order of solutions of higher order differential equations*. Chin Ann Math, 2003, 24B(4): 501-508
- [10] Z.X. Chen, *On the hyper order of solutions of some second order linear differential equations*,Acta Math.Sinia B 18(1)(2002):79-88.
- [11] Z. X.Chen *sur les équations différentielles $f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0$, la croissance de la science chinoise (Série A)*,2001, 31(9): 775-784
- [12] G Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 305 (1988), 415-429.
- [13] G Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function*,

- plus similar estimates.* J. London Math. Soc., 37(2), 88–104 (1988).
- [14] G.G.Gundersen , *On the question of whether $f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0$ can admit a solution $f \neq 0$ of finite order*, Proc R.S.E.102A (1986): 9-17.
- [15] S-A.Gao,Z-X.Chen, T-W.Chen, *oscillation Theory on linear Differential Equations.* Wuhan:Press in Central China Institute of Technology,1997.
- [16] W.Hayman , *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [17] Y-Z.He,X-Z. Xiao, *Algebroid Functions and ordinary Differential Equations*, Beijing: Science Press, 1988.
- [18] E.Hille, *Ordinary Differentila Equations in the Complex Domain.* New York: Wiley, 1976.
- [19] G.Jank, L. Volkmann, *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.
- [20] I. Laine Nevanlinna, *Theory and Complex Differential Equations*, de Gruyter, Berlin, 1993.
- [21] J. K Langley ., *On complex oscillation and a problem of Ozawa.* Kodai Math. J., 9, 430–439.
- [22] C-H.Li, Y-X. gu *on the oscillation of differential equation $f'' + e^{az}f' + Q(z)f = F$* , Acta Math.Sci.25A(2)(2005): 192-200
- [23] C-H.Li,X-J.Huang, *The growth of solutions of a certain higher order differential equation*, Acta Math. Sci.. 23A(5)(2003): 613-618.
- [24] R F LI, C J Dai, *Theory of Complex Functions*, Higher Education Press, Beijing,1988.
- [25] A. Markushevich., *Theory of solutions of a complex variable.* Englewood Cliffs, N. J.Prentice-Hall, 1965.
- [26] M Ozawa . *On a solution of $w'' + e^{-z}w' +(az+b)w = 0$.* Kodai Math J,3 (1980),295-309
- [27] E.C. Tichmarsh, *The theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford, 1986.
- [28] J.Tu,C.F.Yi,*on the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J.Math.Anal.Appl. 340 (1) (2008):

487-497.

[29] H.-X.Yi, C.C.Yang, *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Science Press/
Kluwer Academic Publishers,Beijing/New York, (1995/2003)

[30] R.R.Zhang, Z.Chen, *The relation between solutions of a class of differential equations
and functions of small growth*, Acta Math Scientica, (4)29(2009),918-928(in chinese).

[31] Chane Ho Yu, Xiao Shuji *fonctions algébroides et les équations différentielles ordi-
naires Pékin. Science Press, 1998*