Remerciements

Je tiens en premier lieu, à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon Professeur et Directeur de ce mémoire Monsieur Belaïdi Benharrat, Professeur à l'Université de Mostaganem, pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses conseils et ses encouragements durant ces années m'ont beaucoup aidé à progresser.

Je tiens également à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur le Président du Jury, Monsieur Bendoukha Berrabah, Professeur à l'Université de Mostaganem, ainsi mes profonds remerciements à Monsieur Bekkar Mohammed, Professeur à l'Université Es-Senia Oran et à Monsieur Medeghri Ahmed, Maître de conférence à l'Université de Mostaganem, pour leur aide inestimable tout au long de ma formation.

Je voudrais également remercier Monsieur Benchohra Mouffak, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbès et Monsieur Belkhelfa Mohamed, Maître de Conférence A, au Centre Universitaire de Mascara, qui m'ont fait l'honneur d'être les examinateurs de ce Mémoire.

J'ai trouvé des conditions de travail très agréables au Département de Mathématiques à l'Université de Mostaganem, notamment une équipe pédagogique qui m'a donné de nombreux conseils au cours de mon initiation à l'enseignement, mes remerciements à tous, pour leur soutien pendant toutes ces années.

Table des matières :

Introduction

Les équations différentielles linéaires dans le domaine complexe sont un secteur des Mathématiques admettant plusieurs approches. Parmi ces approches, la théorie locale est peut-être la plus étudiée. Ses résultats de base : Le Théorème d'existence et d'unicité, la structure linéaire de base des solutions, la singularité, etc. qui nous sont familiers avec et qui nous aident à mieux comprendre notre approche.

La nôtre est différente. Elle se trouve dans la direction de la théorie des fonctions. C'est l'application de la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes qui nous donne un aperçu sur les propriétés des solutions des équations différentielles. Cette direction, fondées par le célèbre mathématicien Rolph Nevanlinna, est apparue à partir de 1929 (Voir [15]). Le premier qui a effectué des études systématiques sur les applications de la théorie de Nevanlinna sur les équations complexes, est H. Wittich dès 1942 (Voir [15]). Actuellement, la théorie globale des équations différentielles complexes en liaison avec la théorie de Nevanlinna est devenue beaucoup plus utilisée. Pendant les trois dernières décennies, plusieurs groupes actifs de mathématiciens dans des pays différents ont joué un rôle remarquable dans ce domaine. Des résultats importants ont été établis. Cette théorie est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes. Notre travail de recherche portera sur l'ordre de croissance, l'hyper ordre, l'éxposant de convergence des zéros et les points fixes des solutions.

D'abord un bref historique. Pour l'équation différentielle de deuxième ordre

$$f'' + e^{-z} f' + A(z) f = 0 \ , \tag{1.1}$$

où $A(z)\ (\not\equiv 0)$ est une fonction entière d'ordre fini. Toute solution de l'équation (1.1) est une fonction entière. De plus, si $f_1;\ f_2$ sont deux solutions méromorphes linéairement indépendantes de (1.1), il y a au moins une des solutions $f_1\ ;\ f_2$ qui doit être d'ordre infini(Voir [8]). De là, la plupart des solutions de (1.1) auront l'ordre infini. Nous posons la question: Quelle condition sur $A(z)$ garantira que chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (1.1) est d'ordre infini ? Plusieurs auteurs tels que : B. Belaidi([3]), M. Frei ([22]), M. Ozawa ([23]), G. Gundersen ([10]), J. K. Langley ([17]), I. Amemiya et M. Ozawa ([13]) ont étudié ce problème pour le cas où $A(z)$ est une fonction entière transcendante ou un polynôme non constant. Ils ont prouvé qu'avec l'ordre $\sigma(A(z)) \neq 1$, chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (1.1) est d'ordre infini.

Gundersen a montré dans [8, $p.419$] que si $degP(z) \neq degQ(z)$ pour l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z)e^{P(z)}f' + A_0(z)e^{Q(z)}f = 0 \ , \tag{1.2}$$

où $P(z),\ Q(z)$ sont des polynômes non constants et $A_1(z),\ A_0(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières telles que $\sigma(A_1) < \deg P(z),\ \sigma(A_0) < \deg Q(z)$; alors chaque solution non constante de (1.2) est d'ordre infini.

Si $\sigma(A(z)) = 1$ dans l'équation (1.1) ou $degP(z) = degQ(z)$ dans (1.2), on peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini. Par exemple
$f(z) = e^z + 2$ satisfait l'équation

$$f'' + \frac{1}{2}e^z f' - \frac{1}{2}e^z f = 0 \ .$$

Naturellement, la question qui se pose: Avec quelle condition sur $A(z)$ quand $\sigma(A(z)) = 1$ (quand $degP(z) = degQ(z)$) garantira que chaque solution de (1.1) (de (1.2)) est d'ordre infini?

Dans [20] K. H. Kwon, a examiné le cas $degP(z) = degQ(z)$ pour l'équation (1.2). Il a démontré que si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$,
$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$ sont deux polynômes non constants, tels que $a_n\ b_n \neq 0$ et $\arg(a_n) \neq \arg(b_n)$ ou $a_n = cb_n$ $(0 < c < 1)$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (1.2) est d'ordre infini.

Z. X. chen [31, Théorème 3] a étudié ce problème sur l'équation différentielle linéaire de deuxième ordre

$$f'' + e^{az}f' + Q(z)f = 0 \ , \tag{1.3}$$

où $Q(z)$ est un polynôme non constant ou $Q(z) = A_0(z)e^{bz}$avec $a \neq b$ et $A_0(z)(\not\equiv 0)$ est un polynôme. Il a trouvé que chaque solution $(f \not\equiv 0)$ de (1.3) est d'ordre infini.

Dans [28] Z. X. Chen et K. H. Shon investiguent le problème pour l'équation

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = 0 \ , \tag{1.4}$$

où $A_1(z),\ A_0(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphes telles que $\sigma(A_i) < 1$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$). Ils ont montré que toute solution ($\not\equiv 0$) de (1.4) est d'ordre infini.

En 2006, M. S. Liu et C. L. Yuan [24] ont examiné et généralisé le résultat dans [31], pour une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

Ils ont obtenu le résultat suivant: Toute solution méromorphe transcendante $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$f^{(k)} + h_{k-1}f^{(k-1)} + ... + e^{az}f^{(s)} + ... + h_1 f' + h_0 e^{bz} f = 0 \ ,$$

est d'ordre infini, où h_j $(j = 0, 1, ..., k-1)(h_0 \not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles, $\sigma = max\{\sigma(hj) : j = 0, 1, ..., k-1\} < 1$ et $arga \neq argb$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires, dans le but d'améliorer les résultats de M. S. Liu et C. L. Yuan [24] pour l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)}+h_{k-1}f^{(k-1)}+...+(h_s e^{P(z)}+d_1)f^{(s)}+h_{s+1}f^{(s+1)}+...+h_1 f^{'}+(h_0 e^{Q(z)}+d_0)f = 0 \ ,$$

où $h_j(j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i(i = 0, 1)$ avec $h_0 \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini, $P(z), Q(z)$ deux polynômes tels que $\deg P(z) = \deg Q(z) = n$ $(n \geq 1,\ n \in N)$ et $\sigma = \max\{\sigma(h_j)\ ,\ \sigma(d_i) : j = 0, 1, ..., k-1\ ,\ \ i = 0, 1\ \} < n$.

On démontre que toute solution transcendante ($\not\equiv 0$) est d'ordre infini et nous donnons une estimation précise sur l'hyper ordre.

Il y a peu de recherches sur les points fixes des solutions des équations différentielles générales. Pour la première fois en 2000, Z. X. Chen [30] a étudié le problème sur les points fixes des solutions des équations différentielles linéaires du deuxième ordre avec des coefficients fonctions entières. Après cette étude, Wang et Yi [18,19], Laine et J. Reippo [14], Chen et Shon [28] ont étudié le problème des points fixes des solutions et leurs dérivées sur les équations différentielles linéaires de deuxième ordre avec des coefficients fonctions méromorphes. Dans [16], J. F. Xu et H. X. Yi ont géneralisé quelques résultats dans [28], appliqués aux équations différentielles linéaires d'ordre supérieur avec des coefficients fonctions méromorphes d'ordre de croissance $\sigma = 1$. Nous terminons le premier chapitre avec un Théorème qui améliore et généralise le résultat de J. F. Xu et H. X. Yi [16] sur les points fixes des solutions et leurs dérivées.

Dans le deuxième chapitre, nous travaillons aussi sur la croissance des solutions mais avec un autre point de vue. Z. X. Chen et K. H. Shon [29] ont généralisé le résultat trouvé par Z. X. Chen [31] sur l'équation (1.4). Après ce travail, en 2008 L. P. Xiao et Z. X. Chen dans [21] ont amélioré le résultat dans [29] sur les équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}\ e^{a_{k-1}z} f^{(k-1)} + ... + A_0\ e^{a_0 z} f = 0 \ ,$$

où A_j sont des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$
et $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}\} \subset \{a_0, a_1, ..., a_{k-1}\}$ tels que les $\arg(a_{i_j})$ sont différents l'un de l'autre et $a_l = c_l^{(i_j)} a_{i_j}$, où $0 < c_l^{(i_j)} < 1$ pour tout

$$a_l \, (a_l \neq 0) \in \{a_0, a_1, ..., a_{k-1}\} - \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}\} .$$

Ils ont démontré que toute solution $f \not\equiv 0$ est d'ordre infini.

Notre but principal dans ce chapitre est d'améliorer et de généraliser le résultat de L. P. Xiao et Z. X. Chen [21] pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + A_s e^{P_s(z)} f^{(s)} + ... + A_1 e^{P_1(z)} f' + A_0 e^{P_0(z)} f = 0,$$

où A_j sont des fonctions méromorphes d'ordre fini et de nombre fini de pôles telles que $\sigma = \max\{\sigma(A_j) \,, \quad j = 0, 1, ..., k-1\} < n$
et $P_i(z) = a_{n,i} z^n + a_{n-1,i} z^{n-1} + ... + a_{1,i} z + a_{0,i}$ des polynômes, tels qu'il existe $\{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\} \subset \{a_{n,0}, a_{n,1}, ..., a_{n,k-1}\}$, où les $\arg(a_{n,i_j})$ sont différents l'un de l'autre, et $a_{n,l} = c_{n,l}^{(i_j)} a_{n,i_j}$ avec $0 < c_{n,l}^{(i_j)} < 1$ pour tout $a_{n,l} \, (a_{n,l} \neq 0) \in \{a_{n,0}, a_{n,1}, ..., a_{n,k-1}\} - \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\}$. Nous prouvons que chaque solution transcendante ($\not\equiv 0$) est d'ordre infini. Puis nous utilisant ce résultat pour donner une estimation sur l'hyper ordre et sur l'exposant de convergence des zéros de la solution.

Chapitre 1

Sur l'Ordre de Croissance
et
les Points Fixes des Solutions Méromorphes des Equations Différentielles Linéaires d'Ordre Supérieur

1.1 Introduction et résultats :

Notre objectif dans ce chapitre est d'examiner la croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients méromorphes. Sous certaines conditions, nous prouvons que toutes les solutions($\not\equiv 0$) sont d'ordre infini et nous donnons une estimation précise sur l'hyper ordre. Ce résultat nous aide à améliorer et à généraliser le résultat de J. F. Xu et H. X. Yi [16] sur les points fixes des solutions et leurs dérivées. Tout d'abord, nous allons citer quelques définitions nécessaires à notre travail sur la théorie de R. Nevanlinna. Pour plus de détails, voir ([27], [15], [20], [25], [16]).

<u>Eléments de la théorie de R. Nevanlinna</u>

<u>Définition 1.1.1 :</u> Fonction caractéristique de R. Nevanlinna.
Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a = \infty$. Alors, on définit $m(r, a, f)$ la fonction de proximité de la fonction f au point a par

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad \text{si} \quad a \neq \infty$$

$$m(r, \infty\ , f) = m(r,\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \quad \text{si} \quad a = \infty$$

où $\log^+ x = \max(0,\ \log x)$ pour $x > 0$;

et on définit $N(r,a,f)$ la fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$ par

$$N(r,a,f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\ln r \text{ si } a \neq \infty$$

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\ln r \text{ si } a = \infty$$

et

$$\overline{N}(r,a,f) = \overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t,a,f) - \overline{n}(0,a,f)}{t} dt + \overline{n}(0,a,f)\ln r \text{ si } a \neq \infty$$

$$\overline{N}(r,\infty,f) = \overline{N}(r,f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t,\infty,f) - \overline{n}(0,\infty,f)}{t} dt + \overline{n}(0,\infty,f)\ln r \text{ si } a = \infty,$$

où

$n(t,a,f)$ désigne le nombre des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité;

$n(t,\infty,f)$ désigne le nombre des pôles de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité;

$\overline{n}(t,a,f)$ désigne le nombre des zéros distincts de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$

et

$\overline{n}(t,\infty,f)$ désigne le nombre des pôles distincts de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z| \leq t$.

On pose $N(r,\infty,f) = N(r,f)$ et $m(r,\infty,f) = m(r,f)$.

On définit $T(r,f)$ La fonction caractéristique de R.Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Théorème 1.1.1 : Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna. Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout nombre complexe a, on a

$$m(r,a,f) + N(r,a,f) = T(r,f) + \varepsilon(r,a),$$

où $\varepsilon(r,a) = O(1) \quad (r \to \infty)$.

<u>Définition 1.1.2 :</u> L'ordre et l'hyper ordre.
Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre $\sigma(f)$ de la fonction f par

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

et on définit l'hyper ordre $\sigma_2(f)$ de la fonction f par

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

<u>Exemple 1.1.1 :</u> (Voir [27, $p.$ 07, $p.$ 20])
i) Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t,f) = 0$ car f n'admet pas de zéros, par conséquent

$$N(r,f) = 0.$$

De plus

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|e^{r\cos\theta}\right| d\theta$$

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)\, d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} (r\cos\theta)\, d\theta\right) = \frac{r}{2\pi}(1+1) = \frac{r}{\pi} .$$

Donc

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi} .$$

D'où

$$\sigma(e^z) = \limsup \frac{\ln T(r,f)}{\ln r} = 1.$$

ii) Soient $P(z) = az^p + ...$ est un polynôme de degré $p > 0$ et $f(z) = e^{P(z)}$, alors

$$T(r,f) \sim \frac{|a|}{\pi} r^p \quad (r\to\infty) \ ;$$

D'où

$$\sigma\left(e^{P(z)}\right)=p$$

et

$$\sigma\left(e^{z^2}\right)=2\ ,\quad \sigma\left(e^{z^3+2z^2-1}\right)=3\quad .$$

iii) Soit $f(z)=\exp(e^z)$, alors (Voir [27, p. 84, Lemma 4.3])

$$T(r,f)\sim\frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{3}}}\quad (\text{quand } r\to\infty)\ .$$

D'où $\sigma\left(e^{e^z}\right)=\infty$.

Exemple 1.1.2 :

$$\sigma_2(e^z)=0\ ,\quad \sigma_2(\exp(e^z))=1\ ,\quad \sigma_2\left(\exp\left(e^{z^2}\right)\right)=2.$$

Définition 1.1.3 : L'exposant de convergence des zéros.
Soit f une fonction méromorphe. Alors, l'exposant de convergence des zéros de la fonction f est définit par

$$\lambda(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

et on définit l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.1.3 :

(i) Comme la fonction $f(z)=e^z$ n'a pas de zéros. Alors

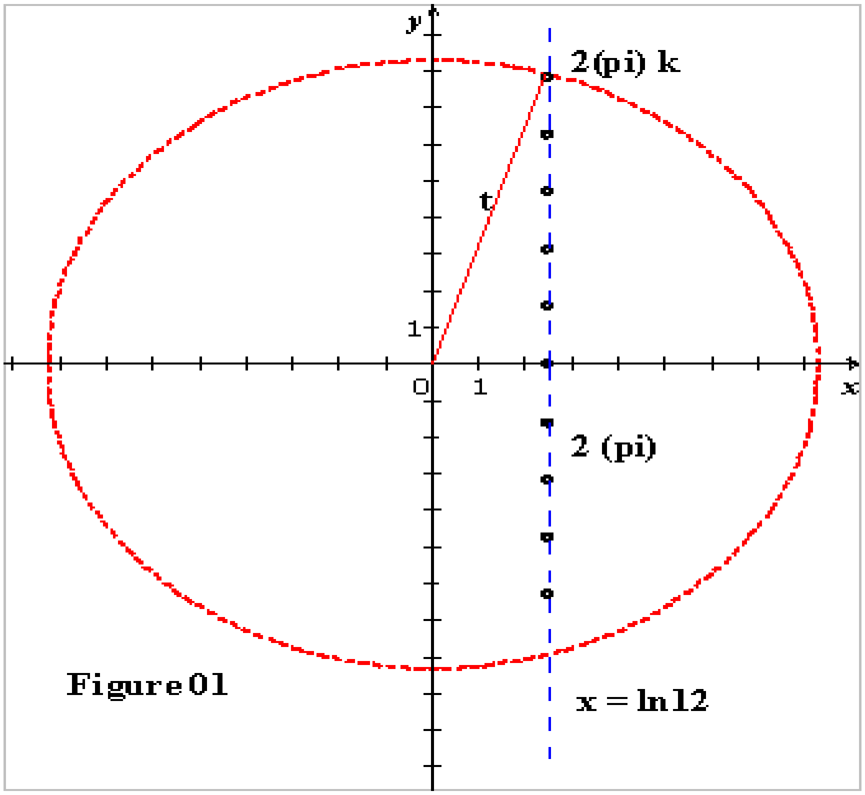
$$\lambda(e^z)=0=\overline{\lambda}(e^z).$$

(ii) Comme la fonction $f(z)=\exp(e^z)$ n'a pas de zéros. Alors

$$\lambda(\exp(e^z))=0=\overline{\lambda}(\exp(e^z)).$$

(iii) Pour la fonction $f(z)=e^z-12$. Ses zéros sont

$$z_k=\ln 12+2k\pi i \text{ (avec } k \text{ un nombre entier).}$$



Pour $t > 0$, on a $2k+1$ zéros de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$ (Voir la Figure 01) :

$$t^2 = (2\pi k)^2 + \ln^2 12 \quad \text{d'où} \quad k^2 = \frac{t^2 - \ln^2 12}{4\pi^2} \ .$$

Donc pour t suffisamment grand on a

$$n(t, \frac{1}{f}) = 2k + 1 \sim 2\sqrt{\frac{t^2 - \ln^2 12}{4\pi^2}} + 1 \sim \frac{t}{\pi} \ .$$

D'où

$$N(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \ln r = \int_0^r \frac{1}{\pi}\ dt = \frac{1}{\pi} r \ .$$

Par conséquent $\lambda(f) = 1 = \overline{\lambda}\,(f)$.

Définition 1.1.4 : L'exposant de convergence des points fixes distincts. Soient $z_1,\ z_2,\ ...\ (0 \leq |z_j| \leq |z_{j+1}|,\ j \in \mathbb{N}\ )$ une séquence des points fixes distincts de la fonction méromorphe transcendante f. Alors $\overline{\tau}(f)$, l'exposant de convergence des points fixes distincts de f est défini par

$$\overline{\tau}(f) = \inf\left\{\tau > 0\ ,\ \sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^{-\tau} < \infty\right\}.$$

On a

$$\overline{\tau}(f) = \overline{\lambda}\,(f - z) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.1.4 : Pour la fonction $f(z) = ze^z - 11z$, les points fixes de la fonction f sont les zéros de la fonction

$$f(z) - z = ze^z - 12z = z(e^z - 12).$$

D'où $\overline{\tau}(f) = \overline{\lambda}\,(f - z) = \overline{\lambda}\,(z(e^z - 12)) = 1$

Définition 1.1.5 : La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité logarithmique supérieure. Supposons que $E \subset [1, +\infty)$, on désigne par $m(E)$ la mesure linéaire de l'ensemble E et par $lm(E)$ la mesure logarithmique de l'ensemble E, avec

$$m\,(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E\,(t)\,dt\ ,$$

et

$$lm\,(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E\,(t)}{t}dt\ ,$$

où $\chi_E\,(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

La densité logarithmique supérieure de l'ensemble E est définie par

$$\overline{dens}E = \overline{lim}_{r\ \to+\infty} \frac{lm(E \cup [1, r])}{\log r}\ .$$

Exemple 1.1.5 :

(i) La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, e] \subset [1, \infty)$ est

$$m(E) = \int_1^\infty \chi_E(t)\, dt = \int_1^e dt = e - 1.$$

(ii) La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [1, e^3] \subset [1, \infty)$ est

$$lm(E) = \int_1^\infty \chi_E(t) \frac{dt}{t} = \int_1^{e^3} \frac{dt}{t} = 3.$$

(iii) La mesure linéaire d'un ensemble fini E est nulle

$$m(E) = 0.$$

En 2006, M. S. Liu et C. L. Yuan [24] ont étudié la croissance des solutions pour une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur et ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 1.1.2 : (Voir [24,Theorem 1]). *Supposons que a, b sont des nombres complexes non nuls, h_j $(j = 0, 1, ..., k-1)(h_0 \not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphes qui ont un nombre fini de pôles et*

$$\sigma = max\{\sigma(hj) : j = 0, 1, ..., k-1\} < 1.$$

Si $arga \neq argb$ ou $a = cb(0 < c < 1)$, alors toute solution méromorphe transcendante f de l'équation

$$f^{(k)} + h_{k-1} f^{(k-1)} + ... + e^{az} f^{(s)} + ... + h_1 f' + h_0 e^{bz} f = 0.$$

est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.

Nous continuons la recherche dans ce type de problèmes, nous obtenons les Théorèmes suivants qui améliorent et généralisent les résultats de M. S. Liu et C. L. Yuan [24].

Théorème 1.1.3 : *Soient $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$ deux polynômes non constants, où a_j, b_j ($j = 0, 1, 2, ..., n$) $(n \geq 1, n \in N)$ sont des nombres complexes tels que a_n $b_n \neq 0$ et soient $h_j (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i(i = 0, 1)$ avec $h_0 \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que*

$$\sigma = \max\{\sigma(h_j),\ \sigma(d_i) : j = 0, 1, ..., k-1,\ i = 0, 1\} < n.$$

Si $\arg(a_n) \neq \arg(b_n)$ *ou* $a_n = cb_n$ $(0 < c < 1)$, *alors toute solution méromorphe transcendante* f *de l'équation :*

$$f^{(k)}+h_{k-1}f^{(k-1)}+...+h_{s+1}f^{(s+1)}+(h_se^{P(z)}+d_1)f^{(s)}+h_{s-1}f^{(s-1)}+...+h_1f'+(h_0e^{Q(z)}+d_0)f=0$$

où $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$ *et* $k \geq 2$, (1.1.1)
est d'ordre infini.

En plus, si les fonctions $h_j (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i (i = 0, 1)$ *ont un nombre fini de pôles, alors l'hyper ordre* $\sigma_2(f)$ *satisfait* $\sigma_2(f) = n$ *.*

Théorème 1.1.4 : *Soient* $P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0$ *,* $Q(z) = b_nz^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1z + b_0$ *deux polynômes non constants, où* a_j, b_j ($j = 0, 1, 2, ..., n$) $(n \geq 1, n \in N)$ *sont des nombres complexes tels que* $a_n\ b_n \neq 0$ *,* $a_n = cb_n$ $(c\geq 1)$ *et que* $\deg(Q(z) - \frac{1}{c}P(z))=m$ *(*m *est un nombre entier positif non nul et* $m<n$*) et soient* h_j $(j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i(i = 0, 1)$ *avec* $h_0 \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que*

$$\sigma = \max\{\sigma(h_j)\ ,\ \sigma(d_i) : j = 0, 1, ..., k-1,\ i = 0, 1\} < m.$$

Alors, toute solution méromorphe transcendante f *de l'équation (1.1.1) est d'ordre infini.*

En plus, si les fonctions $h_j (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i (i = 0, 1)$ *ont un nombre fini de pôles, alors l'hyper ordre* $\sigma_2(f)$ *satisfait* $m \leq \sigma_2(f) \leq n$ *.*

Exemple 1.1.6 : Pour l'équation

$$f^{(3)} - \left[e^{-z} + 3\right] f'' + 3f' - \left[e^{3z} - 1\right] = 0, \tag{1.1.2}$$

on a $\arg(+3) \neq \arg(-1)$(d'où $\arg a_n \neq \arg b_n$). D'après le Théorème 1.1.3, toute solution transcendante f de cette équation satisfait

$$\sigma(f) = \infty \quad , \quad \sigma_2(f) = 1.$$

On voit que $f(z) = \exp(e^z)$ est une solution de l'équation (1.1.2) et que

$$\sigma(\exp(e^z)) = \infty \quad , \quad \sigma_2(\exp(e^z)) = 1.$$

Exemple 1.1.7 : Pour l'équation

$$f'' - \left[\left(1 - \frac{1}{z}\right) e^z + 1\right] f' - \frac{1}{z}e^{2z}f = 0, \tag{1.1.3}$$

on a $1 = \left(\frac{1}{2}\right) 2$ (d'où $a_n = \frac{1}{2}b_n$). D'après le Théorème 1.1.3, toute solution transcendante f de cette équation satisfait

$$\sigma(f) = \infty \quad , \quad \sigma_2(f) = 1.$$

On voit que $f(z) = \exp(e^z)$ pour tout $z \neq 0$ est une solution pour l'équation (1.1.3) et que

$$\sigma(\exp(e^z)) = \infty \quad , \quad \sigma_2(\exp(e^z)) = 1.$$

Exemple 1.1.8 : Pour l'équation

$$f'' - i\left[\left(1 + \frac{1}{z}\right)e^{i\ z} + 1\right]f' - \frac{1}{z}e^{2iz}f = 0, \tag{1.1.4}$$

on a $i = \left(\frac{1}{2}\right)2i$ (d'où $a_n = \frac{1}{2}b_n$). D'après le Théorème 1.1.3, toute solution transcendante f de cette équation satisfait

$$\sigma(f) = \infty \quad , \quad \sigma_2(f) = 1.$$

On voit que $f(z) = \exp(e^{i\ z})$ pour tout $z \neq 0$ est une solution de l'équation (1.1.4) et que

$$\sigma(\exp(e^{i\ z})) = \infty \quad , \quad \sigma_2(\exp(e^{i\ z})) = 1.$$

Exemple 1.1.9 : Pour l'équation

$$f'' + \left[ze^{2z} - \left(1 - \frac{2}{z}\right)\right]f' - \left(ze^{3z} + \frac{1}{z}\right)f = 0, \tag{1.1.5}$$

on a $2 = \left(\frac{2}{3}\right)3$ (d'où $a_n = \frac{2}{3}b_n$). D'après le Théorème 1.1.3, toute solution transcendante f de cette équation satisfait

$$\sigma(f) = \infty \quad , \quad \sigma_2(f) = 1.$$

On voit que $f(z) = \frac{\exp(e^z)}{z}$ pour tout $z \neq 0$ est une solution de l'équation (1.1.5) et que

$$\sigma(\frac{\exp(e^z)}{z}) = \infty \quad , \quad \sigma_2(\frac{\exp(e^z)}{z}) = 1.$$

Exemple 1.1.10 : Pour l'équation

$$f'' + \left[4z^3e^{2z^2} - 2z + \frac{1}{z}\right]f' - \left(8z^4e^{3z^2} + 2 + \frac{1}{z^2}\right)f = 0, \tag{1.1.6}$$

on a $2 = \left(\frac{2}{3}\right)3$ (d'où $a_n = \frac{2}{3}b_n$). D'après le Théorème 1.1.3, toute solution transcendante f de cette équation satisfait

$$\sigma(f) = \infty \quad , \quad \sigma_2(f) = 2.$$

On voit que pour tout $z \neq 0$, la fonction $f(z) = \exp(\frac{e^{z^2}}{z})$ est une solutions de l'équation (1.1.6) et que

$$\sigma(\exp(\frac{e^{z^2}}{z})) = \infty \quad , \quad \sigma_2(\exp(\frac{e^{z^2}}{z})) = 2.$$

Dans le cas où $\deg(Q(z) - \frac{1}{c}P(z))$=0 ($m = 0$) nous avons ce contre exemple;

Exemple 1.1.11 : Nous avons pour toute fonctions arbitraire $h(z)$, la fonction $f(z) = e^z$ est une solution de l'équation

$$f'' + \left[(1 - h(z))\, e^{-z}\right] f' + \Big((h(z) - 1)e^{-z} - 1\Big) f = 0.$$

On voit que

$$\sigma(e^z) = 1 \quad , \quad \sigma_2(e^z) = 0.$$

Où la solution $f(z) = e^z$ est d'ordre fini.

Dans ce cas, pour que la solution soit d'ordre infini, nous avons ce Théorème;

Théorème 1.1.5 : *Soient* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$ *deux polynômes non constants, où* a_j, b_j ($j = 0, 1, 2, ..., n$) ($n \geq 1, n \in N$) *sont des nombres complexes tels que* $a_n\ b_n \neq 0$ *et soient* h_j ($j = 0, 1, 2, ..., k-1$), $d_i (i = 0, 1)$ *avec* $h_0 \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que*

$$\sigma_1 = \max \{\sigma(h_j)\ , \sigma(d_i) : j = 0, 1, ..., k-1\ ,\ \ i = 0, 1\ \} < \sigma(h_0).$$

Supposons que $a_n = c b_n$ ($c \geq 1$), $\deg(Q(z) - \frac{1}{c}P(z)) = 0$ *et que* $\lambda(\frac{1}{h_0}) < \mu(h_0) \leq \sigma(h_0) < \frac{1}{2}$.

Alors, toute solution méromorphe transcendante f *de l'équation (1.1.1) est d'ordre infini.*

En plus, si les fonctions $h_j (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i (i = 0, 1)$ *ont un nombre fini de pôles, alors l'hyper ordre* $\sigma_2(f)$ *satisfait* $\sigma(h_0) \leq \sigma_2(f) \leq n$.

Dans [16] J. F. Xu et H. X. Yi ont généralisé quelques résultats de [28] sur les points fixes des solutions, au cas des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur avec des coefficients fonctions méromorphes d'ordre de croissance $\sigma = 1$ et ils ont démontré le Théorème suivant.

Théorème 1.1.6 : *Supposons que* A_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *sont des fonctions méromorphes avec* $\sigma(A_j) < 1$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$. *Soient* $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ *des nombres complexes constants non nuls tels que*

(i) $\arg a_j \neq \arg a_0 \quad (j = 0, 1, ..., k-1)$

ou

(ii) $\arg a_j = \arg a_0$ *et* $a_j = c_j\ a_0$ $(0 < c_j < 1)$, $(j = 0, 1, ..., k-1)$.

Alors, pour $k \geq 2$, *chaque solution méromorphe transcendante* f *de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)} + ... + A_1e^{a_1z}f' + A_0e^{a_0z}f = 0$$

est d'ordre infini et f , f' , f'' *toutes ont un nombre infini des points fixes et satisfont*

$$\overline{\tau}(f) = \overline{\tau}(f') = \overline{\tau}(f'') = \infty\ .$$

Le deuxième but de ce chapitre est d'étendre l'étude réalisé dans [16], pour donner le Théorème (1.1.7) sur les points fixes des solutions et leurs dérivées, pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, avec des coefficients fonctions méromophes d'ordre de croissance $\sigma = n$.

Théorème 1.1.7 : *Soient* $P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0$, $Q(z) = b_nz^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1z + b_0$ *deux polynômes non constants, où* a_j, b_j ($j = 0, 1, 2, ..., n$) $(n \geq 1, n \in N)$ *sont des nombres complexes tels que* $a_n\ b_n \neq 0$ *et soient* $h_j(j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i(i = 0, 1)$ *avec* $h_0 \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si une des conditions suivantes est réalisée*

(i) $\arg(a_n) \neq \arg(b_n)$ *et*
$\sigma = \max\{\sigma(h_j), \sigma(d_i) : j = 0, 1, ..., k-1\ , i = 0, 1\} < n.$

(ii) $a_n = cb_n(\ c \in]\ 0\ ; 1[- \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right\}\ )$ *et*
$\sigma = \max\{\sigma(h_j),\ \sigma(d_i) : j = 0, 1, ..., k-1,\ i = 0, 1\} < n.$

(iii) $a_n = cb_n(c \in [\ 1\ ;\ +\infty[\cup \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right\}\ )$ *et* $\deg(P(z) - c\ Q(z)) = m$
(m *est un nombre entier positif non nul et* $m < n$ *) et*
$\sigma = \max\{\sigma(h_j), \sigma(d_i) : j = 0, 1, ..., k-1, i = 0, 1\} < m\ .$

Alors, pour toute solution méromorphe transcendante f *de l'équation (1.1.1),* f , f' , f'' *ont un nombre infini des points fixes et satisfont*

$$\overline{\tau}(f) = \overline{\tau}(f') = \overline{\tau}(f'') = \infty\ .$$

Nous avons besoin des lemmes suivants pour les preuves de nos Théorèmes.

1.2 Lemmes pour les preuves des Théorèmes

<u>Lemme 1.2.1 :</u> (Voir [20]) *Soit* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, *avec* n *un entier positif,* $a_n = \alpha_n e^{i\theta_n}$, $\alpha_n > 0$; *et* $\theta_n \in [0; 2\pi)$. *Pour tout* ε $(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4n})$, *nous présentons* $2n$ *angles fermés*

$$S_j : -\frac{\theta_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n} + \varepsilon \leq \theta \leq -\frac{\theta_n}{n} + (2j+1)\frac{\pi}{2n} - \varepsilon,\ j = 0, 1, ..., 2n-1.$$

Alors, il existe $R_0 = R_0(\varepsilon) > 0$ *tel que pour* $|z| = r > R_0$

$$\operatorname{Re} P(z) > \alpha_n r^n (1-\varepsilon) sin(n\varepsilon)$$

pour certains j, *si* $z = re^{i\theta} \in S_j$; *tandis que pour les autres* j, *si* $z = re^{i\theta} \in S_j$

$$\operatorname{Re} P(z) < -\alpha_n r^n (1-\varepsilon) sin(n\varepsilon)\ .$$

<u>Lemme 1.2.2 :</u> (Voir [34]) *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre* $\sigma(f) = \sigma < +\infty$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $E_0 \subset (1, +\infty)$ *de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que quand* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_0, r \longrightarrow +\infty$, *on a*

$$|f(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}.$$

<u>Lemme 1.2.3 :</u> (Voir [9]) *Supposons que* f *est une fonction méromorphe transcendante. Soient* $\alpha > 1$ *une constante,* k *et* j *deux entiers satisfaisant* $k > j \geq 0$. *Alors, il existe une constante* $B > 0$ *et un ensemble* $E_1 \subset (1, \infty)$ *de mesure logarithmique finie, tels que pour tout* z *satisfaisant* $|z| = r \notin E_1 \cup [0, 1]$, *on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq B\left[\frac{T(\alpha r, f)}{r}(logr)^\alpha logT(\alpha r, f)\right]^{k-j}.$$

<u>Lemme 1.2.4 :</u> (Voir [33]) *Supposons que* $h(z)$ *est une fonction méromorphe avec*

$$\lambda(\frac{1}{h}) < \mu(h) \leq \sigma(h) = \sigma < \frac{1}{2}.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $E_3 \subset (1, +\infty)$ *de densité logarithmique supérieure positive, tel que pour tout* z *satisfaisant* $|z|{=}r{\in}E_3$, *on a*

$$|h(z)| \geq \exp\left[(1 + o(1))r^{\sigma-\varepsilon}\right].$$

Lemme 1.2.5 : (Voir [24]) *Supposons que* $k \geq 2$ *et* $A_0, A_1, A_2, ..., A_{k-1}$ *sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles.*
Soit $\sigma = \max\{\sigma(A_j),\ j = 0, 1, 2, ..., k-1\}$ *et soit* $f(z)$ *une solution méromorphe transcendante de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}\, f^{(k-1)} + ... + A_0\, f = 0\ .$$

Alors, $\sigma_2(f) \leq \sigma$.

Lemme 1.2.6 : (Voir [7, 12]) *Supposons que* $f_1(z), f_2(z), f_3(z), ..., f_n(z)$ $(n \geq 2)$ *sont des fonctions méromorphes et* $g_1(z), g_2(z), g_3(z), ..., g_n(z)$ *sont des fonctions entières satisfaisant les conditions suivantes :*

i) $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(z) e^{g_j(z)} = 0$,

ii) $g_j - g_k$ *ne sont pas constantes pour* $1 \leq j < k \leq n$,

iii) $T(r, f_j) = o(T(r, e^{g_h - g_k}))(r \longrightarrow \infty, r \notin E)$ *Pour* $1 \leq j \leq n$, $1 \leq h < k \leq n$, .

Alors, $f_j = 0$ $(j = 0, 1, ..., n)$.

Lemme 1.2.7 : (Voir [34]) *Soient* A_j, F $(F \not\equiv 0)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* $f(z)$ *est une solution d'ordre infini de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_1 f' + A_0 f = F\ ,$$

alors f *satisfait*

$$\lambda(f) = \overline{\lambda}(f) = \sigma(f) = \infty\ .$$

1.3 Preuve du Théorème 1.1.3

Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (1.1.1)

Le 1^{ier} **Cas :** $\arg(a_n) \neq \arg(b_n)$. De l'équation (1.1.1), nous avons

$$\left|e^{Q(z)}\right| \leq \left|\frac{1}{h_0(z)}\right| \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{h_{k-1}(z)}{h_0(z)}\right| \left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + ... + \left(\left|\frac{h_s(z)}{h_0(z)}\right| \left|e^{P(z)}\right| + \left|\frac{d_1(z)}{h_0(z)}\right|\right) \left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{h_{s-1}(z)}{h_0(z)}\right| \left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f(z)}\right| + ... + \left|\frac{h_1(z)}{h_0(z)}\right| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{d_0(z)}{h_0(z)}\right|. \tag{1.3.1}$$

Par le Lemme 1.2.1, il existe des constantes $R_0 > 0$, $L > 0$ et $\theta_1 < \theta_2$, telles que pour tout $z = re^{i\theta}$, $|z| = r > R_0$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ nous avons

$$\mathrm{Re}(P(z)) < 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(Q(z)) > Lr^n \ . \tag{1.3.2}$$

Par l'observation que $\sigma = \max\{\sigma(h_j), \sigma(d_i) : j = 0, 1, ..., k-1, \, i = 0, 1\} < n$, et le Lemme 1.2.2, il existe un ensemble $E_0 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire et logarithmique finies, tel que quand $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_0$, $r \longrightarrow +\infty$, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{1}{h_0(z)}\right| \leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \ , \quad \left|\frac{d_i(z)}{h_0(z)}\right| \leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}}, \ i = 0, 1$$

$$\text{et} \qquad \left|\frac{h_j(z)}{h_0(z)}\right| \leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \ , \ j = 1, 2, ..., k-1 \ . \tag{1.3.3}$$

Par le Lemme 1.2.3 il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tels que pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1, r \longrightarrow +\infty$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\,[T(2r, f)]^{2k} \qquad , \quad j = 1, 2, ..., k. \tag{1.3.4}$$

En vertu de (1.3.2), (1.3.3) et (1.3.4), pour $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, et $r \notin [0, 1] \cup E_0 \cup E_1$, $r \longrightarrow +\infty$ l'inégalité (1.3.1) donne

$$e^{Lr^n} \leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \left(B(k+1)\,[T(2r, f)]^{2k} + 1\right).$$

Alors

$$e^{Lr^n} e^{-r^{\sigma+\varepsilon}} - 1 \leq B(k+1)\,[T(2r, f)]^{2k}.$$

Puisque $\sigma < n$ (nous pouvons prendre $\varepsilon = \frac{n-\sigma}{2}$ donc $\sigma + \varepsilon < n$), on obtient

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r \longrightarrow +\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r \longrightarrow +\infty}} \frac{\log\log T(r, f)}{\log r} \geq n \ .$$

De plus, si les fonctions $h_j (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i (i = 0, 1)$ ont un nombre fini de pôles, alors par le Lemme 1.2.5 et l'équation (1.1.1), on aura $\sigma_2(f) \leq n$, donc $\sigma_2(f) = n$.

Le $2^{i\grave{e}me}$Cas : $a_n = cb_n$ $(0 < c < 1)$: Posons $\deg(P(z) - cQ(z)) = m$ (m est un entier positif non nul et $m < n$). Par le Lemme 1.2.1, il existe des constantes $R_1 > 0$, $L_1 > 0$, $\lambda > 0$ et $\theta_1 < \theta_2$, telles que pour tout $z = re^{i\theta}$, $|z| = r > R_1$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ on a

$$\operatorname{Re}(P(z) - c\, Q(z)) < \lambda \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(Q(z)) > L_1\, r^n \ . \tag{1.3.5}$$

De l'équation (1.1.1) on obtient

$$\begin{aligned}\left|e^{(1-c)\ Q(z)}\right| \leq \left|\frac{1}{h_0(z)}\right| \left|e^{-c\ Q(z)}\right| \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{h_{k-1}(z)}{h_0(z)}\right| \left|e^{-c\ Q(z)}\right| \left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| \\ +... + \left(\left|\frac{h_s(z)}{h_0(z)}\right| \left|e^{P(z)-c\ Q(z)}\right| + \left|\frac{d_1(z)}{h_0(z)}\right| \left|e^{-c\ Q(z)}\right|\right) \left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right| + \\ \left|\frac{h_{s-1}(z)}{h_0(z)}\right| \left|e^{-c\ Q(z)}\right| \left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f(z)}\right| + ...+ \\ \left|\frac{h_1(z)}{h_0(z)}\right| \left|e^{-c\ Q(z)}\right| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{d_0(z)}{h_0(z)}\right| \left|e^{-c\ Q(z)}\right|.\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

En vertu de (1.3.3) , (1.3.4) et (1.3.5), pour $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $r \notin [0, 1] \cup E_0 \cup E_1$, $r \longrightarrow +\infty$, l'inégalité (1.3.6) donne :

$$e^{(1-c)L\ r^n} \leq e^{\lambda} e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \left(B(k+1)\,[T(2r, f)]^{2k} + 1\right)$$

$$e^{(1-c)L\ r^n} e^{-r^{\sigma+\varepsilon}} e^{-\lambda} - 1 \leq B(k+1)\,[T(2r, f)]^{2k} . \tag{1.3.7}$$

Puisque $\sigma < n$ et $1 - c > 0$ (nous pouvons prendre $\varepsilon = \frac{n-\sigma}{2}$ donc $\sigma + \varepsilon < n$), on obtient

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r \longrightarrow +\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r \longrightarrow +\infty}} \frac{\log\log T(r, f)}{\log r} \geq n \ .$$

De plus, si les fonctions $h_j (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i (i = 0, 1)$ ont un nombre fini de pôles, alors par le Lemme 1.2.5 et l'équation (1.1.1), nous avons $\sigma_2(f) \leq n$, donc $\sigma_2(f) = n$.

Dans le cas $P(z) - c\, Q(z) = A$ (où A est une constante), on prend $\lambda > 0$ tel que $e^{\lambda} > e^{\operatorname{Re} A}$, alors l'inégalité (1.3.7) est satisfaite et on obtient les mêmes résultats.

1.4 Preuve du Théorème 1.1.4

Supposons que $a_n = cb_n$ $(c \geq 1)$ et $\deg(Q(z) - \frac{1}{c}P(z)) = m$ (m est un entier tel que $1 \leq m < n$). Alors, selon le Lemme 1.2.1, il existe une constante $L_2 > 0$ et une courbe continue Γ qui tend vers l'infini, telle que pour tout $z = re^{i\theta},\ z \in \Gamma$ avec $|z| = r$, on a (Voir [20, p. 385])

$$\operatorname{Re}(Q(z) - \frac{1}{c}P(z)) \geq L_2 r^m \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(P(z)) = 0\ . \tag{1.4.1}$$

Soit β un nombre réel tel que $\sigma < \beta < m$. Alors, selon le Lemme 1.2.2, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire et logarithmique finies tel que quand $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$, $r \longrightarrow +\infty$, on a

$$\left|\frac{1}{h_0(z)}\right| \leq e^{r^\beta} \quad , \quad \left|\frac{d_i(z)}{h_0(z)}\right| \leq e^{r^\beta} \quad (\ i = 0, 1)$$

$$\text{et} \qquad \left|\frac{h_j(z)}{h_0(z)}\right| \leq e^{r^{\ \beta}}\ ,\ \ j = 1, 2, ..., k-1\ . \tag{1.4.2}$$

De l'équation (1.1.1), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left|e^{Q(z)-\frac{1}{c}P(z)}\right| \leq{}& \left|\frac{1}{h_0(z)}\right|\left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{h_{k-1}(z)}{h_0(z)}\right|\left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| \\ &+ ... + \left(\left|\frac{h_s(z)}{h_0(z)}\right|\left|e^{(1-\frac{1}{c})P(z)}\right| + \left|\frac{d_1(z)}{h_0(z)}\right|\left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right|\right)\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right| + \\ &\left|\frac{h_{s-1}(z)}{h_0(z)}\right|\left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right|\left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f(z)}\right| + ... + \\ &\left|\frac{h_1(z)}{h_0(z)}\right|\left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{d_0(z)}{h_0(z)}\right|\left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right|.\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

En vertu de (1.3.4), (1.4.1) et (1.4.2), pour tout $z = re^{i\theta}$ avec $z \in \Gamma$, et $r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2$, $r \longrightarrow +\infty$, l'inégalité (1.4.3) donne

$$e^{L_2 r^m} \leq e^{r^\beta}\left(B(k+1)\left[T(2r,f)\right]^{2k} + 1\right)$$

d'où

$$e^{L_2 r^m} e^{-r^\beta} - 1 \leq B(k+1)\left[T(2r,f)\right]^{2k}. \tag{1.4.4}$$

Puisque $\beta < m$, on obtient

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\longrightarrow+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\longrightarrow+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} \geq m.$$

De plus, si les fonctions $h_j(j = 0, 1, 2, ..., k-1)$, $d_i(i = 0, 1)$ ont un nombre fini de pôles, alors par le Lemme 1.2.5 et l'équation (1.1.1), nous avons $\sigma_2(f) \leq n$. Donc $m \leq \sigma_2(f) \leq n$.

1.5 Preuve du Théorème 1.1.5

Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (1.1.1). Supposons que $Q(z) - \frac{1}{c}P(z) = A$ (A constante).

Puisque $\sigma_1 = \max\{\sigma(h_j), \sigma(d_i) : j = 0, 1, ..., k-1 , \ i = 0, 1 \} < \sigma(h_0)$,on prend α, β deux nombres réels tels que $\sigma_1 < \beta < \alpha < \sigma(h_0)$.

D'aprés le Lemme 1.2.2, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire et logarithmique finies, tel que quand $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, $r \longrightarrow +\infty$, on a

$$|h_j(z)| \leq e^{r^{\beta}}, \quad j = 1, 2, ..., k-1 \quad \text{et} \quad |d_i(z)| \leq e^{r^{\beta}} \quad , \ i = 0, 1 \quad . \tag{1.5.1}$$

Puisque h_0 est une fonction méromorphe et $\lambda(\frac{1}{h_0}) < \mu(h_0) \leq \sigma(h_0) < \frac{1}{2}$, alors d'aprés le Lemme 1.2.4, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de densité logarithmique supérieure positive tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_3$, on a

$$|h_0(z)| \geq e^{r^{\alpha}}. \tag{1.5.2}$$

D'aprés le Lemme 1.2.1, il existe une courbe continue C qui tend vers l'infini, telle que pour tout $z = re^{i\theta}$ avec $z \in C$ et $\mid z \mid = r > R_4$, on a

$$\mathrm{Re}(P(z)) = 0 \ . \tag{1.5.3}$$

De l'équation (1.1.1), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left|h_0(z)e^{Q(z)-\frac{1}{c}P(z)}\right| \leq \left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right| \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + |h_{k-1}(z)| \left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right| \left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| \\ +... + \left(|h_s(z)| \left|e^{(1-\frac{1}{c})P(z)}\right| + |d_1(z)| \left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right|\right) \left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right| + \\ |h_{s-1}(z)| \left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right| \left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f(z)}\right| + ...+ \\ |h_1(z)| \left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |d_0(z)| \left|e^{-\frac{1}{c}P(z)}\right|. \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

En vertu de (1.3.4), (1.5.1), (1.5.2) et (1.5.3), pour tout $z = re^{i\theta}$ avec $z \in C$ et $r \in E_3 - [0, 1] \cup E_1 \cup E_2$, $r \longrightarrow +\infty$, l'inégalité (1.5.4) donne

$$e^{r^{\alpha}}e^{\mathrm{Re}(A)} \leq e^{r^{\beta}}\left(B(k+1)\left[T(2r,f)\right]^{2k}+1\right)$$

d'où

$$e^{r^{\alpha}}e^{\mathrm{Re}(A)}e^{-r^{\beta}}-1 \leq B(k+1)\left[T(2r,f)\right]^{2k} \ . \tag{1.5.5}$$

Puisque $\beta < \alpha$, on a

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\longrightarrow+\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\longrightarrow+\infty}}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r} \geq \alpha \ .$$

Comme α est arbitraire dans l'intervalle $]\beta, \sigma(h_0)[$, on en déduit que

$$\sigma_2(f) \geq \sigma(h_0).$$

De plus, si les fonctions $h_j(j=0,1,2,...,k-1)$, $d_i(i=0,1)$ ont un nombre fini de pôles, alors par le Lemme 1.2.5 et l'équation (1.1.1), on obtient $\sigma_2(f) \leq n$. Donc $\sigma(h_0) \leq \sigma_2(f) \leq n$.

Pour $A = 0$ (où $P(z) = c\ Q(z)$), on obtient les mêmes résultats.

1.6 Preuve du Théorème 1.1.7

Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (1.1.1), satisfaisant une des conditions (i), (ii), (iii) du Théorème 1.1.7. Alors avec l'application des Théorèmes 1.1.3 / 1.1.4 nous avons $\sigma(f) = \infty$.

On commence par les points fixes de $f(z)$. Posons $g_0(z) = f(z) - z$, alors z est un point fixe de $f(z)$ si et seulement si $g_0(z) = 0$. Nous avons $g_0(z)$ est une fonction méromorphe et $\sigma(g_0(z))=\sigma(f(z)) = \infty$.

En substituant $f(z)=g_0(z)+z$ dans l'équation (1.1.1), on aura

$$\begin{aligned} g_0^{(k)} + h_{k-1}g_0^{(k-1)} + ... + (h_s e^{P(z)} + d_1)g_0^{(s)} + h_{s-1}g_0^{(s-1)} + ...+ \\ h_1 g_0' + (h_0 e^{Q(z)} + d_0)g_0 = -h_1 - z\ (h_0 e^{Q(z)} + d_0). \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Ecrivons (1.6.1) sous la forme

$$g_0^{(k)} + A_{0,k-1} g_0^{(k-1)} + ... + A_{0,s} g_0^{(s)} + A_{0,s-1} g_0^{(s-1)} + ...+$$
$$A_{0,1} g_0^{'} + A_{0,0} g_0 = -A_{0,1} - z\ A_{0,0} = A_0. \tag{1.6.2}$$

Pour l'équation (1.6.2), nous considérons uniquement les solutions méromorphes d'ordre fini satisfaisant $g_0(z) = f(z) - z$.

Comme le coefficient $A_{0,s} = (h_s e^{P(z)} + d_1)$ est arbitraire dans l'ordre des coefficients ($1 \leq s \leq k-1$) dans l'équation (1.1.1), Nous distinguons deux cas pour A_0.

1^{ier}**cas :**

$$A_0 = -A_{0,1} - zA_{0,0} = -h_1 - z(h_0 e^{Q(z)} + d_0) = (-h_1 - zd_0) - zh_0 e^{Q(z)}\ .$$

Nous avons $A_0 \not\equiv 0$ (car $A_0 \equiv 0$ impliquera que $h_0 \equiv 0$, une contradiction avec la supposition du Théorème 1.1.7) (Voir le Lemme 1.2.6).

2^{ième}**cas :**

$$\begin{aligned} A_0 = -A_{0,1} - zA_{0,0} &= -(h_1 e^{P(z)} + d_1) - z(h_0 e^{Q(z)} + d_0) \\ &= (-d_1 - zd_0) - zh_0 e^{Q(z)} - h_1 e^{P(z)}. \\ &= B_0 e^{Q(z)} + B_1 e^{P(z)} + B_2. \end{aligned}$$

Nous avons $\deg(Q(z) - P(z)) = n$ et $\sigma = \max\{\sigma(B_0),\ \sigma(B_1),\ \sigma(B_2)\} < n$ (ou $\sigma < m$ quand $\deg(Q(z) - P(z)) = m$ pour la condition (iii) dans le Théorème 1.1.7). Par conséquent, $T(r, B_j) = o(T(r, e^{P(z)-Q(z)}))$ $(r \longrightarrow \infty,\ r \notin E)$. Alors, si $A_0 \equiv 0$, selon le Lemme 1.2.6 $B_0 \equiv 0 \equiv h_0$, une contradiction avec l'hypothèse $h_0 \not\equiv 0$ du Théorème 1.1.7, donc $A_0 \not\equiv 0$.

Par conséquent dans les deux cas $A_0 \not\equiv 0$. En utilisant le Lemme 1.2.7 pour l'équation (1.6.2) ci-dessus, on obtient

$$\overline{\lambda}\,(g_0(z)) = \overline{\tau}(f) = \sigma(g_0(z)) = \infty\ .$$

Maintenant, considérons les points fixes de $f'(z)$.
Soit $g_1(z) = f'(z) - z$. Alors, z est un point fixe de $f'(z)$ si et seulement si $g_1(z) = 0$. Nous avons $g_1(z)$ est une fonction méromorphe avec

$$\sigma(g_1(z)) = \sigma(f'(z)) = \sigma(f(z)) = \infty.$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (1.1.1), on obtient

$$f^{(k+1)} + h_{k-1}f^{(k)} + \left[h'_{k-1} + h_{k-2}\right] f^{(k-1)} + ... + \left[h'_{s+2} + h_{s+1}\right] f^{(s+2)} +$$

$$\left[h'_{s+1} + (h_s e^{P(z)} + d_1)\right] f^{(s+1)} + \left[(h_s e^{P(z)} + d_1)' + h_{s-1}\right] f^{(s)} + ... +$$

$$[h'_2 + h_1]\, f^{''} + \left[h'_1 + (h_0 e^{Q(z)} + d_0)\right] f' + (h_0 e^{Q(z)} + d_0)' f = 0 \qquad (1.6.3)$$

De l'équation (1.1.1) nous avons

$$f = -\frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} \left[f^{(k)} + h_{k-1}f^{(k-1)} + ... + h_{s+1}f^{(s+1)} + \right.$$
$$\left. (h_s e^{P(z)} + d_1) f^{(s)} + h_{s-1}f^{(s-1)} + ... + h_1 f^{'}\right]. \qquad (1.6.4)$$

En substituant (1.6.4) dans (1.6.3), on aura

$$f^{(k+1)} + \left[h_{k-1} - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)}\right] f^{(k)} + \left[h'_{k-1} + h_{k-2} - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_{k-1}\right] f^{(k-1)} + ... +$$

$$\left[h'_{s+2} + h_{s+1} - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_{s+2}\right] f^{(s+2)} + \left[h'_{s+1} + (h_s e^{P(z)} + d_1) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_{s+1}\right] f^{(s+1)}$$

$$+ \left[(h_s e^{P(z)} + d_1)' + h_{s-1} - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} (h_s e^{P(z)} + d_1)\right] f^{(s)} + ... + \left[h'_2 + h_1 - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_2\right] f^{''}$$

$$+ \left[h'_1 + (h_0 e^{Q(z)} + d_0) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_1\right] f' = 0. \qquad (1.6.5)$$

Nous pouvons écrire l'équation (1.6.5) sous la forme suivante

$$f^{(k+1)} + A_{1,k-1}f^{(k)} + A_{1,k-2}f^{(k-1)} + ... + A_{1,s+1}f^{(s+2)}$$

$$+ A_{1,s}f^{(s+1)} + A_{1,s-1}f^{(s)} + ... + A_{1,1}f^{''} + A_{1,0}f' = 0 \;, \qquad (1.6.6)$$

où $A_{1,j}$ $(j = 0, 1, 2, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (1.6.5).

En substituant $f'(z) = g_1(z) + z$, $f''(z) = g'_1(z) + 1$, $f^{(j+1)} = g_1^{(j)} (j = 2, 3, ..., k-1)$ dans l'équation (1.6.6), nous obtenons

$$g_1^{(k)} + A_{1,k-1}g_1^{(k-1)} + A_{1,k-2}g_1^{(k-2)} + ... + A_{1,s+1}g_1^{(s+1)} + A_{1,s}g_1^{(s)} +$$

$$A_{1,s-1}g_1^{(s-1)} + ... + A_{1,1}g'_1 + A_{1,0}g_1 = -A_{1,1} - zA_{1,0} = A_1. \qquad (1.6.7)$$

Comme le coefficient $(h_s e^{P(z)} + d_1)$ est arbitraire dans l'ordre des coefficients $(1 \leq s \leq k-1)$ dans l'équation (1.1.1), nous distinguons trois cas pour A_1.

1^{ier}cas ($s > 2$)

$$A_1 = -A_{1,1} - zA_{1,0}.$$

D'où

$$A_1 = -\left[h_2' + h_1 - \frac{(h_0e^{Q(z)}+d_0)'}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}h_2\right] - z\left[h_1' + (h_0e^{Q(z)}+d_0) - \frac{(h_0e^{Q(z)}+d_0)'}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}h_1\right].$$

Par conséquent

$$A_1 = -\frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}\left(zh_0^2e^{2Q(z)} + B_1e^{Q(z)} + B_2\right)$$

$$A_1 = -\frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}\left[\sum_{j=0}^{j=\ 2} B_je^{G_j}\right] \ ,$$

où $G_0 = 2Q(z)$, $G_1 = Q(z)$ et $G_2 = 0$ des polynômes; $B_0 = zh_0^2$, B_1 et B_2 sont des fonctions méromorphes, écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z, h_k, h_m', Q', d_0, d_0'.

Nous avons $A_1 \not\equiv 0$, car $\deg(G_i - G_j) = n$ pour tout $0 \leq i < j \leq 2$, et

$$\sigma = \max\{\sigma(B_j) : j = 0,1,2\ \} < n\ .$$

Alors

$$T(r, B_j) = o(T(r, e^{G_h - G_k}))(r \longrightarrow \infty,\ r \notin E\ ),$$

et $h_0 \not\equiv 0$, d'aprés le Lemme 1.2.6, nous avons donc, $A_1 \not\equiv 0$

2^{ième}cas ($s = 2$)

$$A_1 = -A_{1,1} - z\,A_{1,0} = -\left[(h_2e^{P(z)}+d_1)' + h_1 - \frac{(h_0e^{Q(z)}+d_0)'}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}(h_2e^{P(z)}+d_1)\right] -$$

$$z\ \left[h_1' + (h_0e^{Q(z)}+d_0) - \frac{(h_0e^{Q(z)}+d_0)'}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}h_1\right]$$

$$A_1 = -\frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}\left[\left(zh_0^2\right)e^{2\ Q} + B_1e^Q + B_2e^P + B_3e^{P+Q} + B_4\right]$$

$$A_1 = -\frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}\left[\sum_{j=0}^{j=4} B_je^{G_j}\right]\ ,$$

où G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus et $B_0 = zh_0^2$, B_j sont des fonctions méromorphes, écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z, h_k, h_m', Q', P', d_0, d_0', d_1, d_1'.

D'aprés le Lemme1.2.6, on a $A_1 \not\equiv 0$, car $\deg(G_i - G_j) = n$ (donc $\sigma(e^{G_i - G_j}) = n$) pour tout $0 \leq i < j \leq 4$ et $\sigma = \max\{\sigma(B_j\ ) : 0 \leq j \leq 4\} < n$ (ou $\sigma < m$ alors $\deg(G_i - G_j) = m$ (donc $\sigma(e^{G_i - G_j}) = m$) pour la condition (iii) dans le Théorème1.1.7). Par conséquent, $T(r, B_j) = o(T(r, e^{G_h - G_k}))$ $(r \longrightarrow \infty,\ r \notin E\ )$.

D'où $h_0 \not\equiv 0$. Donc $A_1 \not\equiv 0$.

3^{ième}**cas** ($s = 1$)

$$A_1 = -A_{1,1} - z\ A_{1,0} = -\left[h_2' + (h_1 e^{P(z)} + d_1) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_2\right] -$$

$$z\left[(h_1 e^{P(z)} + d_1)' + (h_0 e^{Q(z)} + d_0) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)}(h_1 e^{P(z)} + d_1)\right]$$

$$A_1 = -\frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)}\left[\left(zh_0^2\right) e^{2Q} + B_1 e^{Q} + B_2 e^{P} + B_3 e^{P+Q} + B_4\right]$$

$$A_1 = -\frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)}\left[\sum_{j=0}^{j=4} B_j e^{G_j}\right] ,$$

où G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus et $B_0 = zh_0^2$, B_j sont des fonctions méromorphes, écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z, h_k, h_m', Q', P', d_0, d_0', d_1, d_1'.

En utilisant le même raisonnement comme dans le $2^{ième}$ cas ($s = 2$), nous trouvons que $A_1 \not\equiv 0$.

Dans les trois cas précédents, nous avons trouvé que $A_1 \not\equiv 0$. En utilisant le Lemme 1.2.7 pour l'équation (1.6.7) ci-dessus, on obtient

$$\overline{\lambda}(g_1) = \overline{\lambda}(f' - z) = \overline{\tau}(f') = \sigma(g_1) = \sigma(f) = \infty .$$

Finalement, nous prouvons que $\overline{\tau}(f'') = \overline{\lambda}(f'' - z) = \infty$.
Soit $g_2(z) = f''(z) - z$. Alors, z est un point fixe de $f''(z)$ si et seulement si $g_2(z) = 0$. Nous avons $g_2(z)$ est une fonction méromorphe et

$$\sigma(g_2(z)) = \sigma(f''(z)) = \sigma(f(z)) = \infty.$$

Montrons que $\overline{\lambda}(g_2) = \infty$.

En dérivant les deux côtés de l'équation (1.6.6), on obtient

$$f^{(k+2)} + A_{1,k-1} f^{(k+1)} + \left(A_{1,k-1}' + A_{1,k-2}\right) f^{(k)} + ... + \left(A_{1,s}' + A_{1,s-1}\right) f^{(s+1)}$$

$$+ \left(A_{1,s-1}' + A_{1,s-2}\right) f^{(s)} + ... + \left(A_{1,1}' + A_{1,0}\right) f'' + A_{1,0}' f' = 0. \quad (1.6.8)$$

De l'équation (1.6.6) on a

$$f' = -\frac{1}{A_{1,0}}\left[f^{(k+1)} + A_{1,k-1} f^{(k)} + A_{1,k-2} f^{(k-1)} + ... +\right.$$

$$\left. A_{1,s+1} f^{(s+2)} + A_{1,s} f^{(s+1)} + A_{1,s-1} f^{(s)} + ... + A_{1,1} f''\right]. \quad (1.6.9)$$

Notons que $A_{1,0} \not\equiv 0$ car on a

$$A_{1,0} = h_1' + (h_0 e^{Q(z)} + d_0) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_1$$

ou

$$A_{1,0} = (h_1 e^{P(z)} + d_1)' + (h_0 e^{Q(z)} + d_0) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} (h_1 e^{P(z)} + d_1).$$

D'où

$$A_{1,0} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} \left(h_0^2 e^{2Q(z)} + B_1 e^{Q(z)} + B_2 \right)$$

ou

$$A_{1,0} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} \left(h_0^2 e^{2Q(z)} + B_1 e^{Q(z)} + B_2 + B_3 e^{P(z)+Q(z)} + B_4 e^{P(z)} \right).$$

En appliquant le Lemme 1.2.6, on trouve que $A_{1,0} \not\equiv 0$.

En substituant (1.6.9) dans (1.6.8), on aura

$$f^{(k+2)} + \left[A_{1,k-1} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} \right] f^{(k+1)} + \left[A_{1,k-1}' + A_{1,k-2} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,k-1} \right] f^{(k)}$$

$$+ ... + \left[A_{1,s-1}' + A_{1,s-2} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,s-1} \right] f^{(s)} + ... +$$

$$\left[A_{1,2}' + A_{1,1} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,2} \right] f^{(3)} + \left[A_{1,1}' + A_{1,0} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] f'' = 0, \quad (1.6.10)$$

on peut écrire l'équation (1.6.10) sous la forme suivante

$$f^{(k+2)} + A_{2,k-1} f^{(k+1)} + A_{2,k-2} f^{(k)} + ... + A_{2,s} f^{(s+2)} +$$

$$A_{2,s-2} f^{(s)} + ... + A_{2,1} f^{(3)} + A_{2,0} f'' = 0, \qquad (1.6.11)$$

où $A_{2,\,j} (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes définies par les équations ci-dessus.

Nous avons

$$A_{2,0} = A_{1,1}' + A_{1,0} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,1}$$

et

$$A_{2,1} = A_{1,2}' + A_{1,1} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,2}.$$

En substituant $f''(z) = g_2(z) + z,\ f^{(3)}(z) = g_2'(z) + 1,\ f^{(j+2)} = g_1^{(j)}$ pour $j = 2, 3, ..., k$ dans l'équation (1.6.11), on obtient

$$g_2^{(k)} + A_{2,k-1} g_2^{(k-1)} + A_{2,k-2} g_2^{(k-2)} + ... + A_{2,s} g_2^{(s)} + ... + A_{2,1} g_2' + A_{2,0} g_2 = A_2 \quad (1.6.12)$$

Comme le coefficient $(h_s e^{p(z)} + d_1)$ étant arbitraire dans l'ordre des coefficients $(1 \leq s \leq k-1)$ dans l'équation (1.1.1), nous distinguons quatre cas pour A_2.

1^{ier}cas ($s > 3$)

$$A_{1,0} = h_1' + (h_0 e^{Q(z)} + d_0) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_1,$$

$$A_{1,1} = h_2' + h_1 - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_2$$

et

$$A_{1,2} = h_3' + h_2 - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_3.$$

Par conséquent

$$A_2 = -A_{2,1} - z\ A_{2,0}$$

$$A_2 = -\left[A_{1,2}' + A_{1,1} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,2}\right] - z\left[A_{1,1}' + A_{1,0} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,1}\right].$$

D'où

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}}\left[A_{1,2}' A_{1,0} + A_{1,1} A_{1,0} - A_{1,0}' A_{1,2} + z\ A_{1,1}' A_{1,0} + z\ A_{1,0}^2 - z\ A_{1,0}' A_{1,1}\right].$$

On obtient

$$A_{1,0} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)}\left(h_0^2 e^{2Q} + \alpha_{1,0,1} e^Q + \alpha_{1,0,0}\right),$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)}\left(\alpha_{1,1,1} e^Q + \alpha_{1,1,0}\right),$$

$$A_{1,2} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)}\left(\alpha_{1,2,1} e^Q + \alpha_{1,2,0}\right)$$

et

$$A_{1,0}' = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)^2}\left(\beta_{1,0,3} e^{3Q} + \beta_{1,0,2} e^{2Q} + \beta_{1,0,1} e^Q + \beta_{1,0,0}\right),$$

$$A_{1,1}' = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)^2}\left(\beta_{1,1,2} e^{2Q} + \beta_{1,1,1} e^Q + \beta_{1,1,0}\right),$$

$$A'_{1,2} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)^2} \left(\beta_{1,2,2} e^{2Q} + \beta_{1,2,1} e^{Q} + \beta_{1,2,0} \right).$$

Où $\alpha_{i,j,l}$, $\beta_{i,j,l}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre de croissance strictement inférieur à n, écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z, h_k, h'_m, Q', d_0, d'_0.

Nous avons

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}(h_0 e^{Q(z)} + d_0)^3} \left[B_0 + B_1 e^{Q} + B_2 e^{2Q} + B_3 e^{3Q} + B_4 e^{4Q} + (z h_0^5) e^{5Q} \right],$$

où B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 et $B_5 = z h_0^5$ sont des fonctions méromorphes d'ordre de croissance strictement inférieur à n.

Montrons que $A_2 \not\equiv 0$. Nous avons $\deg(iQ - jQ) = n$ (donc $\sigma(e^{i\ Q\ -\ j\ Q}) = n$) pour tout $0 \leq i < j \leq 5$ et

$$\sigma = \max \{ \sigma(B_j) : j = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \} < n \ .$$

Alors

$$T(r, B_j) = o(T(r, e^{iQ - jQ})) \ (r \longrightarrow \infty, \ r \notin E \ ) \ .$$

Par le Lemme 1.2.6, si $A_2 \equiv 0$, alors $h_0 \equiv 0$, une contradiction avec l'hypothèse $h_0 \not\equiv 0$ du Théorème 1.1.7, par conséquent $A_2 \not\equiv 0$.

2^{ième}cas ($s = 1$) :

$$A_{1,0} = (h_1 e^{P(z)} + d_1)' + (h_0 e^{Q(z)} + d_0) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} (h_1 e^{P(z)} + d_1),$$

$$A_{1,1} = h'_2 + h_1 e^{P(z)} + d_1 - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_2$$

et

$$A_{1,2} = h'_3 + h_2 - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_3.$$

D'où

$$A_{1,0} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} \left(h_0^2 \ e^{2Q} + \alpha_{1,0,1,0} e^{Q} + \alpha_{1,0,0,0} + \alpha_{1,0,1,1} e^{P+Q} + \alpha_{1,0,0,1} e^{P} \right),$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} \left(\alpha_{1,1,1,0} e^{Q} + \alpha_{1,1,0,1} e^{P} + \alpha_{1,1,1,1} e^{Q+P} + \alpha_{1,1,0,0} \right),$$

$$A_{1,2} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} \left(\alpha_{1,2,1,0} e^{Q} + \alpha_{1,2,0,0} \right)$$

et

$$A'_{1,0}=\frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)^2}\left(\beta_{1,0,3,0}e^{3Q}+\beta_{1,0,2,0}e^{2Q}+\beta_{1,0,1,0}e^{Q}+\beta_{1,0,1,1}e^{P+Q}\right.$$

$$\left.+\beta_{1,0,2,1}e^{P+2Q}+\beta_{1,0,0,1}e^{P}+\beta_{1,0,0,0}\right),$$

$$A'_{1,1}=\frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)^2}\left(\beta_{1,1,2,0}e^{2Q}+\beta_{1,1,1,0}e^{Q}+\right.$$

$$\left.\beta_{1,1,1,1}e^{P+Q}+\beta_{1,1,2,1}e^{P+2Q}+\beta_{1,1,0,1}e^{P}+\beta_{1,1,0,0}\right),$$

$$A'_{1,2}=\frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)^2}\left(\beta_{1,2,2,0}e^{2Q}+\beta_{1,2,1,0}e^{Q}+\beta_{1,2,0,0}\right).$$

Par conséquent

$$A_2=-A_{2,1}-z\ A_{2,0}\ ,$$

$$A_2=-\left[A'_{1,2}+A_{1,1}-\frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}}A_{1,2}\right]-z\ \left[A'_{1,1}+A_{1,0}-\frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}}A_{1,1}\right].$$

D'où

$$A_2=-\frac{1}{A_{1,0}}\left[A'_{1,2}A_{1,0}+A_{1,1}A_{1,0}-A'_{1,0}A_{1,2}+z\ A'_{1,1}A_{1,0}+z\ A^2_{1,0}-z\ A'_{1,0}A_{1,1}\right]$$

$$=-\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)}+d_0)^3}\left[zh_0^5\ e^{5Q}+B_{4,0}e^{4Q}+B_{3,0}e^{3Q}+B_{2,0}e^{2Q}+B_{1,0}e^{Q}+\right.$$

$$B_{0,1}e^{P}+B_{0,2}e^{2P}+B_{1,1}e^{P+Q}+B_{2,1}e^{P+2Q}+B_{3,1}e^{P+3Q}+B_{4,1}e^{P+4Q}+$$

$$\left.B_{1,2}e^{2P+Q}+B_{2,2}e^{2P+2Q}+B_{3,2}e^{2P+3Q}\right]$$

$$=-\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)}+d_0)^3}\left[\sum_{j=0}^{j=13}C_je^{G_j}\right]\ ,$$

où G_j Sont des polynômes définis comme ci-dessus et $C_0=zh_0^5$, $C_j=B_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre de croissance strictement inférieur à n (ou inférieur à m pour la condition (iii) dans le Théorème 1.1.7), écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z, h_k, h'_m, Q', d_0, d'_0, P', d_1, d'_1 .

Nous avons $\deg(G_i-G_j)=n$ (donc $\sigma(e^{G_i-G_j})=n$) pour tout $0\leq i<j\leq 13$ (ou $\deg(G_i-G_j)=m$ (donc $\sigma(e^{G_i-G_j})=m$) pour la condition (iii) dans le Théorème 1.1.7) et

$$\sigma=\max\{\sigma(C_j):j=0,1,...,13\}<n$$

(ou $\sigma<m$ quand $\deg(G_i-G_j)=m$ pour la condition (iii) dans le Théorème 1.1.7).

Alors

$$T(r, C_j) = o(T(r, e^{G_h - G_k}))\ (r \longrightarrow \infty,\ r \notin E\ )\ .$$

En utilisant le Lemme 1.2.6, on obtient que $A_2 \not\equiv 0$.

3^{ième}**cas** ($s = 2$) :

$$A_{1,0} = h_1' + (h_0 e^{Q(z)} + d_0) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_1,$$

$$A_{1,1} = (h_2 e^{P(z)} + d_1)' + h_1 - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} (h_2 e^{P(z)} + d_1),$$

et

$$A_{1,2} = h_3' + (h_2 e^{P(z)} + d_1) - \frac{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} h_3.$$

D'où

$$A_{1,0} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} \left(h_0^2 e^{2Q} + \alpha_{1,0,1,0} e^Q + \alpha_{1,0,0,0} \right),$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} \left(\alpha_{1,1,1,0} e^Q + \alpha_{1,1,0,1} e^P + \alpha_{1,1,1,1} e^{Q+P} + \alpha_{1,1,0,0} \right),$$

$$A_{1,2} = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)} \left(\alpha_{1,2,1,0} e^Q + \alpha_{1,2,0,0} + \alpha_{1,2,1,1} e^{P+Q} + \alpha_{1,2,0,1} e^P \right)$$

et

$$A_{1,0}' = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)^2} \left(\beta_{1,0,3,0} e^{3Q} + \beta_{1,0,2,0} e^{2Q} + \beta_{1,0,1,0} e^Q + \beta_{1,0,0,0} \right),$$

$$A_{1,1}' = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)^2} \Big(\beta_{1,1,2,0} e^{2Q} + \beta_{1,1,1,0} e^Q + \beta_{1,1,1,1} e^{P+Q} + \beta_{1,1,2,1} e^{P+2Q} + \beta_{1,1,0,1} e^P + \beta_{1,1,0,0} \Big),$$

$$A_{1,2}' = \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)} + d_0)^2} \Big(\beta_{1,2,2,0} e^{2Q} + \beta_{1,2,1,0} e^Q + \beta_{1,2,1,1} e^{P+Q} + \beta_{1,2,2,1} e^{P+2Q} + \beta_{1,2,0,1} e^P + \beta_{1,2,0,0} \Big).$$

Par conséquent

$$A_2 = -A_{2,1} - z\ A_{2,0}\ ,$$

$$A_2 = -\left[A_{1,2}' + A_{1,1} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,2} \right] - z \left[A_{1,1}' + A_{1,0} - \frac{A_{1,0}'}{A_{1,0}} A_{1,1} \right].$$

D'où

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}} \left[A_{1,2}' A_{1,0} + A_{1,1} A_{1,0} - A_{1,0}' A_{1,2} + z\ A_{1,1}' A_{1,0} + z\ A_{1,0}^2 - z\ A_{1,0}' A_{1,1} \right]$$

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)}+d_0)^3}\Big[zh_0^5\ e^{5Q} + B_{4,0}e^{4Q} + B_{3,0}e^{3Q} + B_{2,0}e^{2Q} + B_{1,0}e^{Q} +$$

$$B_{0,1}e^{P} + B_{1,1}e^{P+Q} + B_{2,1}e^{P+2Q} + B_{3,1}e^{P+3Q} + B_{4,1}e^{P+4Q}\Big]$$

$$= -\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)}+d_0)^3}\left[\sum_{j=0}^{j=\ 9} C_j\ e^{G_j}\right]\ ,$$

où G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus et $C_0 = zh_0^5$, $C_j = B_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre de croissance strictement inférieur à n (ou à m).

En utilisant le même raisonnement comme dans le $2^{ième}$ cas, on obtient que $A_2 \not\equiv 0$.

$4^{ième}$cas ($s = 3$) :

$$A_{1,0} = h_1' + (h_0e^{Q(z)}+d_0) - \frac{(h_0e^{Q(z)}+d_0)'}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}h_1,$$

$$A_{1,1} = h_2' + h_1 - \frac{(h_0e^{Q(z)}+d_0)'}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}h_2\ ,$$

et

$$A_{1,2} = (h_3e^{P(z)}+d_1)' + h_2 - \frac{(h_0e^{Q(z)}+d_0)'}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}(h_3e^{P(z)}+d_1).$$

D'où

$$A_{1,0} = \frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}\left(h_0^2\ e^{2Q} + \alpha_{1,0,1,0}e^{Q} + \alpha_{1,0,0,0}\right),$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}\left(\alpha_{1,1,1,0}e^{Q} + \alpha_{1,1,0,0}\right),$$

$$A_{1,2} = \frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)}\left(\alpha_{1,2,1,0}e^{Q} + \alpha_{1,2,0,1}e^{P} + \alpha_{1,2,1,1}e^{P+Q} + \alpha_{1,2,0,0}\right)$$

et

$$A_{1,0}' = \frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)^2}\left(\beta_{1,0,3,0}e^{3Q} + \beta_{1,0,2,0}e^{2Q} + \beta_{1,0,1,0}e^{Q} + \beta_{1,0,0,0}\right),$$

$$A_{1,1}' = \frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)^2}\left(\beta_{1,1,2,0}e^{2Q} + \beta_{1,1,1,0}e^{Q} + \beta_{1,1,0,0}\right),$$

$$A_{1,2}' = \frac{1}{(h_0e^{Q(z)}+d_0)^2}\Big(\beta_{1,2,2,0}e^{2Q} + \beta_{1,2,1,0}e^{Q} + \beta_{1,2,1,1}e^{P+Q} +$$

$$\beta_{1,2,2,1}e^{P+2Q} + \beta_{1,2,0,1}e^{P} + \beta_{1,2,0,0}\Big).$$

Par conséquent

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}}\left[A'_{1,2}A_{1,0} + A_{1,1}A_{1,0} - A'_{1,0}A_{1,2} + z\ A'_{1,1}A_{1,0} + z\ A^2_{1,0} - z\ A'_{1,0}A_{1,1}\right].$$

D'où

$$\begin{aligned} A_2 = -&\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)} + d_0)^3}\left[zh_0^5\ e^{5Q} + B_{4,0}e^{4Q} + B_{3,0}e^{3Q} + B_{2,0}e^{2Q} + B_{1,0}e^{Q} + \right. \\ &\left. B_{0,1}e^{P} + B_{1,1}e^{P+Q} + B_{2,1}e^{P+2Q} + B_{3,1}e^{P+3Q} + B_{4,1}e^{P+4Q}\right] \\ = -&\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)} + d_0)^3}\left[\sum_{j=0}^{j=\ 9} C_je^{G_j}\right]\ , \end{aligned}$$

où G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus et $C_0 = zh_0^5$,
$C_j = B_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre de croissance strictementin inférieur à $n($ ou à m).

En utilisant le même raisonnement comme dans le $2^{ième}$ cas, on aura $A_2 \not\equiv 0$.

Dans tous les cas, nous avons $A_2 \not\equiv 0$. En appliquant le Lemme 1.2.7 à l'équation (1.6.12) ci-dessus, on obtient

$$\overline{\lambda}\,(g_2) = \overline{\lambda}\,(f'' - z) = \overline{\tau}(f'') = \sigma(g_2) = \sigma(f) = \infty\ .$$

Le Théorème est prouvé.

Chapitre 2

L'Ordre, l'Hyper Ordre et l'Exposant de Convergence des Zéros des Solutions Méromorphes des Equations Différentielles Linéaires d'Ordre Supérieur

2.1 Introduction et résultats :

Dans ce chapitre, on étudie l'ordre et l'hyper ordre des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre supérieur

$$f^{(k)}+A_{k-1}e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)}+...+A_s e^{P_s(z\ )}f^{(s)}+...+A_1e^{P_1(z)}f'+A_0e^{P_0(z)}f=0.$$

Sous certaines conditions, nous prouvons que toute solution $f \not\equiv 0$ est d'ordre infini, puis nous donnons une estimation précise de l'exposant de convergence des zéros de la fonction $f-\tau$ où τ est une fonction transcendante d'ordre fini quelconque.

Dans [21] L. P. Xiao et Z. X. Chen ont obtenu le Théorème suivant.

Théorème 2.1.1 : *Soient A_j des fonctions entières avec $\sigma(A_j)<1$ $(j=0,1,2,...,k-1)$, a_j $(j=0,1,2,...,k-1)$ des nombres complexes (Si $A_i\equiv 0$ nous définissons $a_i=0$, autrement $a_i\neq 0$). Supposons qu'il existe $\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_m}\}\subset\{a_0,a_1,...,a_{k-1}\}$ tels que les $\arg(a_{i_j})$ $(j=1,\ 2,\ ...,\ m)$ sont différents l'un de l'autre. De plus, en suppose que pour tout $a_l\,(a_l\neq 0)\in\{a_0,a_1,...,a_{k-1}\}-\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_m}\}$, Il existe certains $a_{i_j}\in\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_m}\}$ tels que $a_l=c_l^{(\ i_j\ )}a_{i_j}$, où $0<c_l^{(\ i_j\ )}<1$: $l\in\{0,1,...,k-1\}$; $j=1,2,...,m$.*

Alors toute solution transcendante de l'équation

$$f^{(k)}+A_{k-1}e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)}+...+A_0e^{a_0z}f=0 \tag{2.1.1}$$

est d'ordre infini.

En outre, si $a_{i_{j_0}} = a_0$ *ou* $a_0 = c_0^{(\ i_{j_0}\ )} a_{i_{j_0}}$ *et* $0 < c_0^{(\ i_{j_0}\ )} \neq c_s^{(\ i_{j_0}\ )} < 1$*,* $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$*, où* $a_{i_{j_0}} \in \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}\}$ *, alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (2.1.1) est d'ordre infini.*

Le but principal de ce chapitre est d'améliorer et de généraliser le résultat du Théorème 2.1.1 pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur avec des coefficients méromorphes d'ordre n. On obtient les résultats suivants.

Théorème 2.1.2 : *Soient* $A_j (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini et de nombre fini de pôles, telles que*

$$\sigma = \max\{\sigma(A_j),\ j = 0, 1, ..., k-1\} < n.$$

Soient $P_i(z) = a_{n,i}z^n + a_{n-1,i}z^{n-1} + ... + a_{1,i}z + a_{0,i}$ *des polynômes, tels que* $a_{n,i}$ $(i = 0, 1, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes (si* $A_i \equiv 0$ *nous définissons* $P_i \equiv 0$ *, autrement* $a_{n,i} \neq 0$*).*

Supposons qu'il existe $\{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\} \subset \{a_{n,0}, a_{n,1}, ..., a_{n,k-1}\}$ *tels que les* $\arg(a_{n,i_j})$ $(j = 1,\ 2,\ ...,\ m)$ *sont différents l'un de l'autre.*

Supposons en plus, que pour tout

$$a_{n,l}\,(a_{n,l} \neq 0) \in \{a_{n,0}, a_{n,1}, ..., a_{n,k-1}\} - \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\},$$

il existe $a_{n,i_j} \in \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\}$ *, tels que* $a_{n,l} = c_{n,l}^{(\ i_j\ )} a_{n,i_j}$ *avec* $0 < c_{n,l}^{(\ i_j\ )} < 1,\ l \in \{0, 1, ..., k-1\},\ j = 1, 2, ..., m$ *.*

Alors toute solution méromorphe transcendante de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + ... + A_s e^{P_s(z)} f^{(s)} + ... + A_1 e^{P_1(z)} f' + A_0 e^{P_0(z)} f = 0 \quad \text{où } k \geq 2 \tag{2.1.2}$$

est d'ordre infini.

En plus, si $a_{n,i_{j_0}} = a_{n,0}$ *ou* $a_{n,0} = c_{n,0}^{(\ i_{j_0}\ )} a_{n,i_{j_0}}$ *et* $0 < c_{n,0}^{(\ i_{j_0}\ )} \neq c_{n,s}^{(\ i_{j_0}\ )} < 1$*,* $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$ *où* $a_{n,i_{j_0}} \in \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\}$*, alors chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (2.1.2) est d'ordre infini.*

Exemple 2.1.1 : Pour l'équation

$$f^{(5)} + e^{4z}f^{(4)} + z^2e^zf^{(3)} - z^2e^{2z}f'' - 2e^zf' + 6e^{2z}f = 0. \tag{2.1.3}$$

On prend $a_4 = 4 = a_{i_j}$. Puisque $a_0 = \frac{1}{2}a_4$, $a_1 = \frac{1}{4}a_4$, $a_2 = \frac{1}{2}a_4$, $a_3 = \frac{1}{4}a_4$, donc toute solution transcendante est d'ordre infini.

On a $f(z) = z^3$ est une solution (non transcendante) de l'équation (2.1.3). On voit que $\sigma(z^3) = 0$.

Théorème 2.1.3 : *Sous les mêmes suppositions que dans le Théorème 2.1.2, nous affirmons les résultats suivants :*

(i) Chaque solution transcendante f de l'équation (2.1.2) satisfait

$$\lambda(f) \geq n \quad ou \quad \sigma_2(f) = n\ .$$

(ii) En outre, si $a_{n,i_{j_0}} = a_{n,0}$ ou $a_{n,0} = c_{n,0}^{(\ i_{j_0}\ )} a_{n,i_{j_0}}$ et $0 < c_{n,0}^{(\ i_{j_0}\ )} \neq c_{n,s}^{(\ i_{j_0}\ )} < 1$, $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$, où $a_{n,i_{j_0}} \in \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\}$, alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.2) satisfait

$$\lambda(f) \geq n \quad ou \quad \sigma_2(f) = n\ .$$

Exemple 2.1.2 : Pour l'équation

$$f^{(3)} - 3e^{z} f'' + 2e^{2\ z} f' - e^{z} f = 0. \tag{2.1.4}$$

On prend $a_1 = 2 = a_{i_j}$.Puisque $a_i = \frac{1}{2} a_1$ $(i = 0, 2)$, donc toute solution transcendante f est d'ordre infini (voir le Théorème 2.1.2).

En utilisant le Théorème 2.1.3, Toute solution transcendante f de l'équation (2.1.4) satisfait

$$\sigma_2(f(z)) = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda(f(z)) \geq 1\ .$$

On voit que $f(z) = \exp(e^{z})$ est une solution de l'équation (2.1.4) et que

$$\sigma(\exp(e^{z})) = \infty \quad , \quad \sigma_2(\exp(e^{z})) = 1 \quad , \quad \lambda(\exp(e^{z})) = 0\ .$$

Exemple 2.1.3 : Pour l'équation

$$f^{(5)} + \frac{2}{z-1} e^{4z^2} f^{(4)} + \frac{z^2}{z^2-1} e^{z^2} f^{(3)} - \frac{1}{z} e^{2z^2} f'' - 2e^{iz^2+1} f' + 6e^{2iz^2-i} f = 0. \tag{2.1.5}$$

On prend $a_{n,i_j} \in \{2i, 4\}$. Puisque $a_{n,i_{j_0}} = a_{n,0} = 2i$, donc toute solution $(f \not\equiv 0)$ est d'ordre infini (Voir le Théorème 2.1.2).

En utilisant le Théorème 2.1.3, Toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.5) satisfait

$$\sigma_2(f(z)) = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda(f(z)) \geq 2\ .$$

Théorème 2.1.4 : *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.1.2. De plus, on suppose que* $\tau(z)$ $(\tau \not\equiv 0)$ *est une fonction méromorphe qui à un nombre fini de pôles et que* $\sigma(\tau) < \infty$.

Alors, on a :

(i) Si $\tau(z)$ *est transcendante, alors toute solution transcendante* f *de l'équation (2.1.2) satisfait* $\lambda(f - \tau) = \infty$.

(ii) En outre, si $a_{n,i_{j_0}} = a_{n,0}$ *ou* $a_{n,0} = c_{n,0}^{(\ i_{j_0}\ )} a_{n,i_{j_0}}$ *et* $0 < c_{n,0}^{(\ i_{j_0}\ )} \neq c_{n,s}^{(\ i_{j_0}\ )} < 1$, $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$, *où* $a_{n,i_{j_0}} \in \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\}$, *alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (2.1.2) satisfait* $\lambda(f - \tau) = \infty$.

2.2 Lemmes pour les preuves des Théorèmes

Avant de commencer les lemmes, nous introduisons la notation $\delta(P, \theta)$. Soit $P(z)$ un polynôme de degré n $(n \geq 1)$ tel que
$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ avec a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_0
des nombres complexes et $a_n = |a_n| e^{i\ \varphi_n}$ $(\varphi_n \in [0\ ;\ 2\pi))$ un nombre complexe non nul. Pour tout $z = re^{i\theta}$, on définit $\delta(P, \theta)$ par

$$\delta(P, \theta) = |a_n| \cos \varphi_n \cos \theta - |a_n| \sin \varphi_n \sin \theta.$$

Donc

$$\delta(P, \theta) = |a_n| \cos(\varphi_n + \theta\ )\ , \qquad \theta \in [0\ ;\ 2\pi)\,.$$

Lemme 2.2.1 :(Voir [2]) *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles tous sont situés dans* $\{z : |z| < r_0\}$, *et supposons que* $\left|f^{(k)}(z)\right|$ *est non borné sur un rayon* $\arg(z) = \theta$, *alors il existe une séquence* $z_n = r_n e^{i\theta}$ *qui tend vers l'infini telle que* $f^{(k)}(z_n) \longrightarrow \infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leq \frac{1}{(k-j)!} |z_n|^{k-j} (1 + o(1)) \qquad j = 0, 1, ..., k-1.$$

Lemme 2.2.2 :(Voir [9]) *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe transcendante avec* $\sigma(f) = \sigma < \infty$, $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ... , (k_q, j_q)\}$ *un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant* $k_i > j_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., q)$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $E \subset [0; 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle tel que si* $\varphi \in [0; 2\pi) \diagdown E$, *il existe une constante* $R_0 = R_0(\varphi) > 1$ *tel que pour tout* z *satisfaisant* $\arg(z) = \varphi$ *et* $|z| \geq R_0$ *et* *pour tout* $(k,j) \in H$, *on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-\ j)(\sigma-1+\varepsilon)}.$$

Lemme 2.2.3 : *Considérons* $g(z) = A(z)e^{P(z)}$, *où* $A(z)$ ($\not\equiv 0$) *est une fonction méromorphe avec* $\sigma(A) = \alpha < n$, $P(z)$ *est un polynôme non constant de degré* n $(n \geq 1)$, $a = |a|\, e^{i\ \varphi}$ $(\varphi \in [0; 2\pi))$. *Soit*

$$E_0 = \{\theta \in [0; 2\pi) : \cos(\varphi + \theta) = 0\}.$$

Alors E_0 *est un ensemble fini, et pour tout* ε *donné* $(\varepsilon > 0)$, *il y'a un ensemble* $E_1 \subset [0; 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que si* $z = re^{i\ \theta}$, $\theta \in [0; 2\pi) \diagdown E_0 \cup E_1$, *alors quand* z *est suffisamment grand on a*

(i) Si $\delta(P,\theta) > 0 : e^{(1-\varepsilon)r^n\ \delta(P,\theta)} \leq |g(z)| \leq e^{(1+\varepsilon)r^n\ \delta(P,\theta)}$.

(ii) Si $\delta(P,\theta) < 0 : e^{(1+\varepsilon)r^n\ \delta(P,\theta)} \leq |g(z)| \leq e^{(1-\varepsilon)r^n\ \delta(P,\theta)}$.

Preuve du Lemme 2.2.3 : Soit $g(z) = h(z)e^{a_n\ z^n}$ tel que $h(z) = A(z)e^{P(z)-a_n\ z^n}$, alors $h(z)$ est une fonction méromorphe avec $\sigma(h) = \sigma < n$. D'aprés le Lemme 2.2.2 nous avons pour tout $\varepsilon > 0$ (prenons $0 < \varepsilon < n - \sigma$), il existe un ensemble $E_1 \subset [0; 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\theta \in [0; 2\pi) \diagdown E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \theta$ et $|z| = r \geq R_0$, on a

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \leq r^{(\sigma-1+\varepsilon/2)}. \tag{2.2.1}$$

En Prenant l'intégrale sur la courbe $C = \{z : \arg(z) = \theta,\ R_0 \leq |z| \leq r\}$, on aura

$$\log h(re^{i\theta}) = \int_{R_0}^{r} \frac{h'(te^{i\theta})}{h(te^{i\theta})} e^{i\theta} dt + \log h(R_0 e^{i\theta}). \tag{2.2.2}$$

De (2.2.1) et (2.2.2), on obtient

$$\left|\log h(re^{i\theta})\right| \leq r^{\sigma+\varepsilon/2} + M \leq r^{\sigma+\varepsilon},$$

où $M > 0$ est une constante,

$$\left|\log\left|h(re^{i\theta})\right|\right| < \left|\log h(re^{i\theta})\right| \leq r^{\sigma+\varepsilon}.$$

Donc

$$e^{-r^{\sigma+\varepsilon}} < \left|h(re^{i\theta})\right| < e^{r^{\sigma+\varepsilon}}. \tag{2.2.3}$$

En vertu de

$$\left|e^{a_n z^n}\right| = e^{|a_n| r^n \cos(\varphi_n+\theta)} = e^{r^n \delta(P,\theta)},$$

et de (2.2.3), on a

$$e^{r^n \delta(P,\theta) - r^{\sigma+\varepsilon}} \leq \left|h(z) e^{a_n\ z^n}\right| \leq e^{r^n \delta(P,\theta) + r^{\sigma+\varepsilon}}. \tag{2.2.4}$$

On note

$$E_0 = \{\theta \in [0; 2\pi) : \cos(\varphi_n + \theta) = 0\}.$$

Soit $\theta \in [0; 2\pi) \diagdown E_1 \cup E_0$, on voit que pour $0 < \varepsilon = (n - \sigma)/2$ et pour tout $\varepsilon' > 0$ avec r suffisamment grand, que

$$r^{\sigma+\varepsilon-n} \left|\frac{1}{\delta(P,\theta)}\right| < \varepsilon'.$$

Donc

(i) Si $\delta(P,\theta) > 0 : e^{(1-\varepsilon') r^n \delta(P,\theta)} \leq |g(z)| \leq e^{(1+\varepsilon') r^n \delta(P,\theta)}$.

(ii) Si $\delta(P,\theta) < 0 : e^{(1+\varepsilon') r^n \delta(P,\theta)} \leq |g(z)| \leq e^{(1-\varepsilon') r^n \delta(P,\theta)}$.

Lemme 2.2.4 : (Voir [29]) *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma(f) < \infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $E \subset [0; 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour tout rayon $\arg(z) = \theta_0 \in [0; 2\pi) \diagdown E$, $\left|f(re^{i\theta_0})\right| \leq M\ r^k$ avec $M = M(\theta_0) > 0$ est une constante et $k > 0$ est une constante indépendante de θ_0. Alors, $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg(f) \leq k$.*

Lemme 2.2.5 :(Voir [26, p. 30]) *Soient $P_1,\ P_2,\ ...\ ,\ P_n$ ($n \geq 1$) des polynômes non constants de degrés $d_1,\ d_2,\ ...\ ,\ d_n$. Supposons que si $i \neq j$, $\deg(P_i - P_j) = \max\{d_i, d_j\}$. Soit $A(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} B_j(z) e^{P_j(z)}$, avec $B_j(z) \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes satisfaisant $\sigma(B_j(z)) < d_j$.*

Alors $\sigma(A) = \max\limits_{1 \leq\ j \leq\ n} \{d_j\}$.

Lemme 2.2.6 : (Voir [34]) *Soient $A_j,\ F\ (F \not\equiv 0)\ (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si $f(z)$ est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_1 f' + A_0 f = F\ .$$

Alors f satisfait

$$\lambda(f) = \overline{\lambda}(f) = \sigma(f) = \infty\ .$$

Lemme 2.2.7 : (Voir [24, 29]) *Supposons que $k \geq 2$ et A_0, A_1, A_2, ... , A_{k-1} sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles. Soit*

$$\sigma = \max\{\sigma(A_j),\ j = 0, 1, 2, ..., k-1\},$$

et soit $f(z)$ une solution transcendante de l'équation :

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0 .$$

Alors $\sigma_2(f) \leq \sigma$.

Lemme 2.2.8 : (Voir [11, Theorem 12.4]) *Soit f une fonction entière avec $\sigma(f) = \infty$. Alors f peut être représenté sous la forme $f(z) = g(z)e^{h(z)}$, où $g(z)$ et $h(z)$ sont deux fonctions entières telles que*

$$\sigma_2(f) = \max\left\{\sigma_2(g), \sigma_2(e^h)\right\};$$

$$\sigma_2(g) = \limsup_{r\longrightarrow\infty} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{g}\right)}{\log r} = \limsup_{r\longrightarrow\infty} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

2.3 Preuve du Théorème 2.1.2

Montrons que toute solution transcendante de l'équation (2.1.2) doit avoir l'ordre infini.

Supposons que f est une solution transcendante de l'équation (2.1.2) satisfaisant $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Par le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset [0; 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0; 2\pi)\diagdown E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \theta$ et $|z| \geq R_0$, on a pour tout $k \geq j > i \geq 0$

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq |z|^{k\ \sigma} . \tag{2.3.1}$$

Ecrivons

$$E_2 = \{\theta \in [0; 2\pi) : \delta(P_j; \theta) = 0,\ j = 0,\ 1, ...,\ k-1\}$$
$$\cup \left\{\theta \in [0; 2\pi) : \delta(P_{i_j}; \theta) = \delta(P_{i_d}; \theta),\ 1 \leq d < j \leq m\right\}.$$

Alors, E_2 est un ensemble fini, en vertu du Lemme 2.2.3, il existe des ensembles $H_j \subset [0; 2\pi)$ $(j = 0,\ 1,\ ...,\ k-1)$, chacun d'eux a une mesure linéaire nulle, tels que pour tout $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi)\diagdown E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ($E_3 = \bigcup_{j=0}^{k-1} H_j$ est de mesure linéaire nulle) $\delta(P_j; \theta) \neq 0$, $j = 0,\ 1, ...,\ k-1$ et $\delta(P_{i_j}; \theta) \neq \delta(P_{i_d}; \theta)$, $1 \leq d < j \leq m$.

Soit $\delta_t = \delta(P_{i_t};\theta) = \max\left\{\delta(P_{i_j};\theta),\ j\ =\ 1\ ,\ 2\ ,\ ...\ ,\ m\ \right\}.$

Alors, $\delta_t > 0$ ou $\delta_t < 0$ car $\delta_t \neq 0.$

1^{ier} cas: $\delta_t > 0.$
Par le Lemme 2.2.3, pour tout $\varepsilon_1(0<\varepsilon_1)$, on a pour $r \longrightarrow \infty$

$$e^{(1-\varepsilon_1)r^n\delta_t} \leq \left|A_{i_t}(z)e^{P_{i_t}(z)}\right|. \tag{2.3.2}$$

Pour $A_l e^{P_l(z)}(l \neq i_t)$ posons

$$\delta = \max\left\{0\ ,\ \delta(P_{i_j};\theta):\ j \in \{\ 1,\ 2,\ ...,\ m\ \} - \{t\}\ \right\};$$

Alors, $0 \leq \delta < \delta_t$.

Par conséquent il existe une constante c' telle que

$$0 < c' < 1 \ \text{ et } \ \delta = c'\delta_t\ .$$

Nous avons pour tout $l \neq i_t$, les cas suivants de $a_{n,l}$

$$a_{n,l} = c_{n,l}^{(i_t)} a_{i_t}\ (0 < c_{n,l}^{(i_t)} < 1)$$

ou

$$a_{n,l} = a_{n,i_j}(j \neq t)$$

ou

$$a_{n,l} = c_{n,l}^{(i_j)} a_{i_j}(j \neq t)(0 < c_l^{(i_j)} < 1).$$

D'où

$$\delta(P_l;\theta) = c_{n,l}^{(i_t)}\delta(P_{i_t};\theta) = c_{n,l}^{(i_t)}\delta_t$$

ou

$$\delta(P_l;\theta) = \delta(P_{i_j};\theta) \leq \delta$$

ou

$$\delta(P_l;\theta) = c_{n,l}^{(i_j)}\delta(P_{i_j};\theta) \leq c_{n,l}^{(i_j)}\delta.$$

Soit $c = \max\left\{c_{n,l}^{(i_t)},\ c',\ c_{n,l}^{(i_j)}c'\ \right\}$ nous avons $0 < c < 1.$

Par le Lemme 2.2.3, nous avons pour $r \longrightarrow \infty$

$$\left|A_l e^{P_l(z)}\right| \leq e^{(1+\varepsilon_1)r^n c_{n,l}^{(i_t)}\delta_t} \text{ ou } \left|A_l e^{P_l(z)}\right| \leq e^{(1+\varepsilon_1)r^n\delta} \text{ ou } \left|A_l e^{P_l(z)}\right| \leq e^{(1+\varepsilon_1)r^n c_{n,l}^{(i_j)}\delta}.$$

Donc

$$\left|A_l e^{P_l(z)}\right| \leq e^{(1+\varepsilon_1)r^n \ c \ \delta_t} \quad , \quad l \in \{0,1,...,k-1\} - \{t\}. \tag{2.3.3}$$

Maintenant, nous affirmons que $\left|f^{(i_t)}(z)\right|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Si $\left|f^{(i_t)}(z)\right|$ est non bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, alors par le Lemme 2.2.1, il existe une séquence $z_x = r_x e^{i\theta}$ qui tend vers l'infini (pour $x \longrightarrow \infty$) telle que $f^{(i_t)}(z_x) \longrightarrow \infty$ et pour tout j tel que $0 \leq j < i_t$ nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)}\right| \leq \frac{1}{(i_t - j)!} \left|z_x\right|^{i_t - j} (1 + o(1)) \qquad j = 0,1,...,i_t \ ; \tag{2.3.4}$$

Puisque $f^{(i_t)}(z) \not\equiv 0$, alors des relations (2.1.2), (2.3.1), (2.3.3) et (2.3.4) nous avons pour $z_x \longrightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\left|A_{i_t}(z_x)e^{P_{i_t}(z_x)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)}\right| + \left|A_{k-1}(z_x)e^{P_{k-1}(z_x)}\right| \left|\frac{f^{(k-1)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)}\right| + ...+ \\ \left|A_{i_t+1}(z_x)e^{P_{i_t+1}(z_x)}\right| \left|\frac{f^{(i_t+1)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)}\right| + \left|A_{i_t-1}(z_x)e^{P_{i_t-1}(z_x)}\right| \left|\frac{f^{(i_t-1)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)}\right| \\ +...+\left|A_1(z_x)e^{P_1(z_x)}\right| \left|\frac{f'(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)}\right| + \left|A_0(z_x)e^{P_0(z_x)}\right| \left|\frac{f(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)}\right|.\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Donc

$$\left|A_{i_t}(z_x)e^{P_{i_t}(z_x)}\right| \leq k e^{(1+\varepsilon_1)r_x^n \ c \ \delta_t} r_x^{k \ (2+\sigma)} \ . \tag{2.3.6}$$

En vertu de (2.3.2) et (2.3.6), on trouve

$$e^{(1-\varepsilon_1)r_x^n \delta_t} \leq k e^{(1+\varepsilon_1)r_x^n \ c \ \delta_t} r_x^{k \ (2+\sigma)} \qquad \text{et} \qquad 0 < c < 1.$$

D'où

$$e^{[(1- \ c)-(1+ \ c) \ \varepsilon_1]r_x^n \delta_t} \leq k r_x^{k \ (2+\sigma)} \qquad \text{et} \qquad 0 < c < 1,$$

d'où une contradiction pour $0 < \varepsilon_1 < \frac{1- \ c}{1+ \ c}$. Par conséquent $\left|f^{(i_t)}(z)\right|$ est borné sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Donc $\left|f^{(i_t)}(z)\right| < M_1$ (M_1 une constante positive). D'où

$$|f(z)| < M_1 r^k. \tag{2.3.7}$$

$\mathbf{2}^{i\grave{e}me}$ **cas** : $\delta_t < 0$.

Soit $\quad \delta = \max\left\{\delta(P_{i_j};\theta) : j \in \{1,2,...,m\} - \{t\}\right\}.$

Alors, $\quad \delta < \delta_t < 0.$

Par conséquent, il existe une constante c' telle que

$$1 < c' \quad \text{et} \quad \delta = c'\delta_t \ .$$

Nous avons pour tout $l \neq i_t$, les cas suivants de $\delta(P_l;\theta)$

$$\delta(P_l;\theta) = c_{n,l}^{(i_t)}\delta(P_{i_t};\theta) = c_{n,l}^{(i_t)}\delta_t$$

ou

$$\delta(P_l;\theta) = \delta(P_{i_j};\theta) \leq \delta \quad (l \neq i_t)$$

ou

$$\delta(P_l;\theta) = c_{n,l}^{(i_j)}\delta(P_{i_j};\theta) \leq c_{n,l}^{(i_j)}\delta.$$

Soit $C_1 = \min\left\{c_{n,l}^{(i_t)},\ c',\ c_{n,l}^{(i_j)}c',\ 1\right\}$. Alors $c_1 > 0$.

Par le Lemme 2.2.3, pour tout ε_2 ($0 < \varepsilon_2 < 1$), nous avons quand $r \longrightarrow \infty$, pour $l = i_t$

$$\left|A_{i_t}e^{P_{i_t}(z)}\right| \leq e^{(1-\varepsilon_2)r^n\delta_t},$$

et pour $l \neq i_t$

$$\left|A_l e^{P_l(z)}\right| \leq e^{(1-\varepsilon_2)r^n c_{n,l}^{(i_t)}\delta_t} \text{ ou } \left|A_l e^{P_l(z)}\right| \leq e^{(1-\varepsilon_2)r^n\delta} \text{ ou } \left|A_l e^{P_l(z)}\right| \leq e^{(1+\varepsilon_2)r^n c_{n,l}^{(i_j)}\delta}.$$

Donc pour tout $j = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ k-1$

$$\left|A_j(z)e^{P_j(z)}\right| \leq e^{(1-\varepsilon_2)r^n\ c_1\ \delta_t} \tag{2.3.8}$$

Si $\left|f^{(k)}(z)\right|$ est non bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, alors par le Lemme 2.2.1, il existe une séquence $z'_x = r'_x e^{i\theta}$ qui tend vers l'infini telle que $f^{(k)}(z'_x) \longrightarrow \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)}\right| \leq \frac{1}{(k-j)!}\left|z'_x\right|^{k-\ j}(1+o(1)) \qquad j = 0, 1, ..., k-1 \tag{2.3.9}$$

Puisque $f^{(k)} \not\equiv 0$, de (2.1.2), (2.3.8) et (2.3.9), nous avons pour $r'_x \longrightarrow \infty$

$$1 \leq \left|A_{k-1}(z'_x)e^{P_{k-1}(z'_x)}\right|\left|\frac{f^{(k-1)}(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)}\right| + \left|A_{k-1}(z'_x)e^{P_{k-1}(z'_x)}\right|\left|\frac{f^{(k-1)}(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)}\right| + ...$$

$$+\left|A_1(z'_x)e^{P_1(z'_x)}\right|\left|\frac{f'(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)}\right| + \left|A_0(z'_x)e^{P_0(z'_x)}\right|\left|\frac{f(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)}\right|.$$

D'où

$$1 \leq ke^{(1-\varepsilon_2)(r'_x)^n\ c_1\ \delta_t}(r'_x)^{2k}. \tag{2.3.10}$$

On a $ke^{(1-\varepsilon_2)(r'_x)^n \ c_1 \ \delta_t}(r'_x)^{2k} \longrightarrow 0$, donc c'est une contradiction avec le terme gauche de l'inégalité (2.3.10). Par conséquent, $\left|f^{(k)}(z)\right|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Donc $\left|f^{(k)}(z)\right| < M_2$ (M_2 une constante positive).

D'où

$$|f(z)| < M_2 r^k \ . \tag{2.3.11}$$

Dans les deux cas, nous avons

$$|f(z)| < Mr^k. \tag{2.3.12}$$

Comme $f(z)$ à un nombre fini de pôles, alors $f(z)$ s'écrit sous la forme

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

où $h(z)$ est un polynôme et $g(z)$ est une fonction entière. Nous savons que pour tout $z = re^{i\theta}$ et $r \geq r_0$, il existe un nombre naturel s ($s \geq \deg(h(z))$) tel que

$$|h(z)| \leq r^s. \tag{2.3.13}$$

De (2.3.12) et (2.3.13), nous avons $|g(z)| < M \ r^\beta$ ($\beta \geq s+k$) pour tout rayon $z = r \ e^{i \ \theta}$ et $\theta \in [0; 2\pi) \diagdown E_1 \cup E_2 \cup E_3$. En appliquant le Lemme 2.2.4, nous trouvons que $g(z)$ est un polynôme de degré $\deg(g) \leq \beta$. Alors $f(z)$ est une fonction rationnelle ce qui contredit que $f(z)$ est une fonction transcendante. Donc $\sigma(f(z)) = \infty$.

En plus, si $a_{n,i_{j_0}} = a_{n,0}$ avec $a_{n,i_{j_0}} \in \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\}$, alors nous assumons que la solution $f(z)$ de l'équation (2.1.2) est une fonctions rationnelle. Ainsi nous avons $(A_0 f)e^{P_0} \not\equiv 0$ et $\sigma\left((A_0 f)e^{P_0}\right) = n$.

En écrivant

$$(A_s(z)e^{P_s(z)-a_{n,s}z^n} f^{(s)}(z) + A_t(z)e^{P_t(z)-a_{n,t}z^n} f^{(t)}(z))e^{a_s \ z^n}$$

au lieu de $A_s f^{(s)} e^{P_s} + A_t f^{(t)} e^{P_t}$ quand $a_{n,s} = a_{n,t}$ ($a_{n,s}, \ a_{n,t} \in \{a_{n,1}, a_{n,2}, ..., a_{n,k-1}\}$).

Par conséquent l'équation (2.1.2) s'écrit sous la forme

$$(A_0(z)f(z))e^{P_0(z)} + \sum_{j \neq 0} B_j(z)e^{a_j z^n} = 0 \tag{2.3.14}$$

où $B_j(z)$ sont des fonction méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles et $\sigma(B_j(z)) < n$.

Nous avons $\arg(a_{n,j}) \neq \arg(a_{n,0})$ ou $\arg(a_{n,j}) = \arg(a_{n,0})$ mais $|a_{n,j}| < |a_{n,0}|$ et que $a_j - a_i \neq 0$ quand $i \neq j$ ($j \neq 0$). Par le Lemme 2.2.5, on trouve que l'ordre du coté gauche de l'équation (2.3.14) est n, cela contredit l'ordre nul du coté droit de l'équation (2.3.14).

Supposons que $a_{n,0} = c_{n,0}^{(i_{j_0})} a_{n,i_{j_0}}$ et $0 < c_{n,0}^{(i_{j_0})} \neq c_{n,s}^{(i_{j_0})} < 1$, $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$ et $a_{n,i_{j_0}} \in \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\}$, nous assumons que la solution $f(z)$ de l'équation (2.1.2) est une fonctions rationnelle. Ainsi nous avons $(A_0 f) e^{P_0} \not\equiv 0$ et l'équation (2.3.14) se réalise aussi.

Etant donné que : $\arg(a_{n,j}) \neq \arg(a_{n,0})$ ou $\arg(a_{n,j}) = \arg(a_{n,0})$
mais $0 < c_0^{(i_{j_0})} \neq c_s^{(i_{j_0})}$, $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$ qui donne $|a_j| \neq |a_0|$ et du Lemme 2.2.5 l'ordre du coté gauche de l'équation (2.3.14) est n, cela contredit l'ordre nul du coté droit de l'équation (2.3.14).

Par conséquent, quand $a_{n,i_{j_0}} = a_{n,0}$ ou $a_{n,0} = c_{n,0}^{(i_{j_0})} a_{n,i_{j_0}}$
et $0 < c_{n,0}^{(i_{j_0})} \neq c_{n,s}^{(i_{j_0})} < 1$, $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$ avec $a_{n,i_{j_0}} \in \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\}$, toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.2) est d'ordre infini.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.3

(i) Soient $H_j(z) = A_j(z) e^{P_j(z)}$ ($j = 0, 1, ..., k-1$). Supposons que f est une solution transcendante de l'équation (2.1.2) satisfaisant $\lambda(f) < n$.

Soit π le produit canonique correspondant à l'ensemble des zéros de la fonction f.

Alors nous pouvons écrire f sous la forme $f = \frac{\pi}{Q} e^h$ où π est une fonction entière avec $\lambda(f) = \lambda(\pi) < n$ (Voir [15, $p.7$]), h est une fonction entière transcendante et Q est un polynôme (les zéros de Q sont les pôles de f).

On pose $g = \frac{f'}{f}$, alors (Voir [15, lemma 2.3.7])

$$\frac{f^{(j)}}{f} = g^j + \frac{1}{2} j(j-1) g^{j-2} g' + G_{\,j-2}(g) \qquad (j = 2,\ 3,\ ...,\ k\ ),\ (2.4.1)$$

où $G_{\,j-2}(g)$ est un polynôme différentiel de la fonction méromorphe g avec des coefficients constants et de degré inférieur à $j-2$.

La substitution de (2.4.1) dans (2.1.2) donne

$$g^k = T_{k-1}(g), \qquad (2.4.2)$$

où $T_{k-1}(g)$ est un polynôme différentiel de la fonction méromorphe g avec les coefficients H_0, H_1, ... , H_{k-1} et de degré pas plus que $k-1$.

L'application du Lemme de Clunie (Voir [15, p. 39]) sur (2.4.2) donne :

$$m(r,g) \leq O\left(\sum_{j=0}^{k-1} m(r,H_j)\right) + S(r,g).$$

Comme

$$N(r,g) = N(r,\frac{f'}{f}) = \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f}).$$

D'où

$$T(r,g) \leq O\left(\sum_{j=0}^{k-1} m(r,H_j)\right) + \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + S(r,g). \qquad (2.4.3)$$

En vertu de (2.4.3), $\lambda(f) < n$, $\sigma(H_j) = n$ $(j = 0,\ 1,\ ...,\ k-1)$
et $\overline{N}(r,f) = O(\log r)$, on obtient

$$\sigma(g) \leq n.$$

Nous affirmons que $\sigma(g) = n$. Si $\sigma(g) < n$, alors de (2.4.1) nous avons

$$\sigma(\frac{f^{(j)}}{f}) < n \qquad (j = 1,\ 2,\ ...,\ k).$$

Puisque on a $A_{i_j}(z)\frac{f^{(\ i_j)}}{f} \not\equiv 0$, écrivons

$$(A_s(z)e^{P_s(z)-a_{n,s}z^n} f^{\ (s)}(z) + A_t(z)e^{P_t(z)-a_{n,t}z^n} f^{\ (t)}(z))e^{a_s\ z^n}$$

au lieu de

$$A_s f^{\ (s)} e^{P_s} + A_t f^{\ (t)} e^{P_t}$$

quand $a_{n,s} = a_{n,t}(a_{n,s}, a_{n,t} \in \{a_{n,1}, a_{n,2}, ..., a_{n,k-1}\} - \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\})$.
Par conséquent nous pouvons écrire l'équation (2.1.2) sous la forme

$$\sum_{j=0}^{m} A_{i_j}(z)\frac{f^{(i_j)}}{f} e^{P_{i_j}(z)} + \sum_j B_j(z)e^{a_j z^n} = 0, \qquad (2.4.4)$$

où $B_j(z)$ sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles et d'ordre fini $\sigma(B_j(z)) < n$. Nous avons $\arg(a_{n,i_j})$ sont différents l'un de l'autre dans $\{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, ..., a_{n,i_m}\}$ et si $\arg(a_{n,j}) = \arg(a_{n,i_j})$, alors $|a_{n,j}| < \left|a_{n,i_j}\right|$. Par le Lemme 2.2.5, nous constatons que l'ordre de croissance du côté gauche de l'équation (2.4.4) est n, cela contredit l'ordre zéro du côté droit de l'équation (2.4.4).

Donc

$$\sigma(g) = n.$$

Puisque $\sigma_2(f) = \sigma_2(\pi\ e^h)$, en appliquant le Lemme 2.2.7, nous trouvons

$$\sigma_2(\pi e^h) \leq \max\{\sigma(H_j(z)),\quad j = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ k-1\} = n\ ;$$

Par conséquent du Lemme 2.2.8, on a

$$\sigma(h) \leq n.$$

Supposons que $\sigma(h) < n$. Alors de $\frac{f'}{f} = \frac{\pi'}{\pi} + \frac{Q'}{Q} + h'$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} T(r, \frac{f'}{f}) &= O\left\{T(r, \frac{\pi'}{\pi}) + T(r, \frac{Q'}{Q}) + T(r, h')\right\} \\ &= O\left\{m(r, \frac{\pi'}{\pi}) + \overline{N}(r, \frac{1}{\pi}) + \log r + T(r, h')\right\} \\ &= O\left\{\log r + \overline{N}(r, \frac{1}{\pi}) + \log r + T(r, h')\right\} \\ &= O\left\{\log r + \overline{N}(r, \frac{1}{\pi}) + T(r, h')\right\}. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

De (2.4.5) et $\lambda(\pi) < n$, on a $\sigma(\frac{f'}{f}) = \sigma(g) < n$, une contradiction avec $\sigma(g) = n$, donc $\sigma(h) = n$, alors $\sigma_2(f) = n$

(ii) Nous avons chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.2) est transcendante, en utilisant le même raisonnement comme dans (i), nous obtenons

$$\lambda(f) \geq n \quad ou \quad \sigma_2(f) = n\ .$$

2.5 Preuve du Théorème 2.1.4

(i) Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (2.1.2). Supposons que $\tau(z) \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe transcendante qui a un nombre fini de pôles et $\sigma(\tau) < \infty$. Par le Théorème 2.1.2, nous avons $\sigma(f) = \infty$.

Soit $g = f - \tau$, alors $\sigma(g) = \infty$, en substituant $f = g + \tau$ dans l'équation (2.1.2), on trouve

$$\begin{aligned} & g^{(k)} + H_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + H_s g^{(s)} + \dots + H_1 g' + H_0 g = \\ & \quad -\left(\tau^{(k)} + H_{k-1}\tau^{(k-1)} + \dots + H_s\tau^{(s)} + \dots + H_1\tau' + H_0\tau\right). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Nous affirmons que

$$\tau^{(k)} + H_{k-1}\tau^{(k-1)} + ... + H_s\tau^{(s)} + ... + H_1\tau' + H_0\tau \not\equiv 0 \ ,$$

car si

$$\tau^{(k)} + H_{k-1}\tau^{(k-1)} + ... + H_s\tau^{(s)} + ... + H_1\tau' + H_0\tau = 0 \ ,$$

alors τ est une solution transcendante de l'équation (2.1.2), le Théorème 2.1.2 donne $\sigma(\tau) = \infty$. Cela contredit l'effet que $\sigma(\tau) < \infty$.

Donc

$$-\left(\tau^{(k)} + H_{k-1}\tau^{(k-1)} + ... + H_s\tau^{(s)} + ... + H_1\tau' + H_0\tau\right) \not\equiv 0 \ . \qquad (2.5.2)$$

En vertu de (2.5.1), (2.5.2) et du Lemme 2.2.6, nous obtenons

$$\lambda(g) = \overline{\lambda}(g) = \sigma(g) = \infty.$$

Par conséquent $\lambda(f - \tau) = \infty$.

(ii) Nous avons du Théorème 2.1.2, chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.2) est transcendante, en utilisant le même raisonnement comme dans (i), nous obtenons $\lambda(f - \tau) = \infty$.

References

[1] A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable* (translated by R. A. Silverman), Vol. II, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[2] B. Belaïdi and A. El Farissi, *Growth and oscillation of solution of some higher order linear differential equations with transcendental meromorphic coefficients*, soumis.

[3] B. Belaidi, K. Hamani, *The rate of growth of solutions of linear differential equations with meromorphic coefficients*, Southeast Asian Bull. Math. 30 (3) (2006) 405-414.

[4] B. Belaidi, *On the iterated order and the fixed points of entire solutions of some complex linear differential equations*, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 9. (2006), 1–11.

[5] B. Belaidi, *On the meromorphic solutions of linear differential equations*, Jrl Syst Sci & Complexity (2007) 20: 41-46.

[6] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1976.

[7] F. Gross, *On the distribution of values of meromorphic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), 199-214.

[8] G. G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 305 (1988), 415-429.

[9] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2)37 (1988), no. 1, 88-104.

[10] G. G. Gundersen, *On the question of whether* $f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0$ *can admit a solution* $f \not\equiv 0$ *of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 102 (1986), no. 1-2, 9–17.

[11] G. Jank, L. Volkmann, *Meromorphe Funktionen und Differentialgleichungen*, Birkhauser, 1985.

[12] H. X. Yi and C. C. Yang, *The Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Science Press/Kluwer Academic Publishers, Beijing/New york, 2003.

[13] I. Amemiya, M. Ozawa, *Non-existence of finite order solutions of* $w' + e^{-\ z}w + Q(z) = 0$, Hokkaido Math. J. 10 (1981) 1-17.

[14] I. Laine and J. Rieppo, *Differential polynomials generated by linear differential equations*, Complex Var. Theory Appl. 49 (2004), no. 12, 897-911.

[15] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter \& Co., Berlin, 1993.

[16] J. F. Xu and H. X. Yi, *Growth and fixed points of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations,* J. Korean Math. Soc. 46 (2009), No. 4, pp. 747-758.

[17] J. K. Langley, *On complex oscillation and a problem of Ozawa*, Kodai Math. J. 9 (1986) 430-439.

[18] J. Wang and H. X. Yi, *Fixed points and hyper order of differential polynomials generated by solutions of differential equation*, Complex Var. Theory Appl. 48 (2003), no. 1, 83-94.

[19] J. Wang, *Oscillation results for solutions of differential equations and their application*, Doctoral Thesis, Shandong University, 2003.

[20] K. H. Kwon, *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations*, Kodai Math. J. 19(1996), 378-387.

[21] L. P. Xiao and Z. X. Chen, *On the Growth of Solutions of a Class of Higher Order Linear Differential Equations*, Southeast Asian Bull. Math. (2009) 33: 789-798

[22] M. Frei, *Uber die subnormalen losungen der differentialgleichung* $w^{"} + e^{-\ z} w' +$ $(\ konst.) w = 0$, Comment Math. Helv. 36 (1962) 1-8.

[23] M. Ozawa, *On a solution of* $w^{"} + e^{-\ z} w' + (\ a\ z + b\ ) w = 0$; Kodai Math. J. 3 (1980) 295-309.

[24] M. S. Liu and C. L. Yuan, *The growth of meromorphic solutions for a class of higher-order linear differential equations*, Applicable Analysis, 85(2006), 1189-1199.

[25] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Zweite Auflage, Reprint, (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 46), Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[26] S. A. Gao , Z. X. Chen, T. W. Chen, *Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, Huazhong University of Science and Technology Press, Wuhan, 1988.

[27] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[28] Z. X. Chen and K. H. Shon, *On the growth and fixed points of solutions of second order differential equations with meromorphic coefficients*, Acta Mathematica Sinica Engl. Ser.21 (2005), no 4, 753-764.

[29] Z. X. Chen, K. H. Shon, *On the growth of solutions of a class of higher order differential equations*, Acta Mathematic Scientia 24B (1) (2004) 52-60.

[30] Z. X. Chen , *The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations*, Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed. 20 (2000), no. 3, 425-432.

[31] Z. X. Chen, *The growth of solutions of the differential equation* $f'' + e^{-z}\ f\ ' + Q(z) f = 0$, Science in China (Series A). Vol. 45 No. 3 (2002) 290-300.

[32] Z. X. Chen, *On the hyper-order of solutions of some second order linear differential equations*, Acta Mathematica Sinica Engl. Ser. 18(2002), (1), 79-88.

[33] Z. X. Chen, *On the rate of growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*. Acta Mathematica Sinica, 42(1999), (3), 551-558.

[34] Z. X. Chen, The *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Acta Mathematica Scientia, 16(1996), (3), 276-283.