République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté par :
BOKHARI Ahmed

Pour obtenir

Le diplôme de Magister

Spécialité : ***Mathématiques***
Option : ***Analyse Fonctionnelle***

Intitulé

Croissance et Oscillation des Equations Différentielles Linéaires Complexes à Coefficients des Fonctions d'Ordre Itératif Fini

Composition du jury de soutenance

M. MEDEGHRI Ahmed	Professeur	Président	U.A.B.M
M. BENCHOHRA Mouffak	Professeur	Examinateur	U. Sidi Bel Abbès
M. HAMOUDA Saada	Maître de Conférences A	Examinateur	U.A.B.M
M. BELAÏDI Benharrat	Professeur	Encadreur	U.A.B.M

MOSTAGANEM : 2012

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon professeur et directeur de ce mémoire monsieur Belaïdi Benharrat Professeur à l'université de Mostaganem, pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses conseils et ses encouragements durant ces années m'ont beaucoup aidée à progresser.

Je tiens également à exprimer mes plus vifs remerciements à monsieur le président du jury, M. Medeghri Ahmed, Professeur à l'université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, et à M. Benchohra Mouffak, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès et à M. Hamouda Saada, Maître de Conférences A, à l'université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.

Je voudrais aussi exprimer mes plus vifs remerciements à Mr Bendoukha Berrabah professeur à l'université de Mostaganem et à Mr Bekkar Mohammed professeur à l'université Es-Senia et à Mr Cheggag Mustapha maître de conférence à l'Enset d'Oran, pour leur aide inestimable tout au long de ma formation.

Je dédie cet ouvrage à mes chers parents, et toute ma famille en général ainsi qu'a mon proche entourage et à toute personne qui ma soutenue, aidée ou contribuée de prés ou de loin.

Table des Matières

Introduction

Les racines de l'équation

$$f\left(z\right)=a \tag{1}$$

où f est une fonction entière et a un nombre complexe, jouent un rôle important dans la résolution de certains problèmes théoriques ou pratiques. Il est particulièrement important d' enquêter sur le nombre $n(r,a,f)$ des racines de (1) et leurs distribution dans un disque $|z|\leq r$, chaque racine étant compté avec sa multiplicité. Le résultat le plus ancien dans la théorie de la distribution des valeurs est le théorème fondamental de l'algèbre "un polynôme de degré n possède n racines complexes (comptage avec multiplicité)". La fonction entière e^z se comporte de manière totalement différente. Au XIXe siècle, le célèbre mathématicien E. Picard a obtenu l' important résultat: Toute fonction entière transcendante doit prendre toutes les valeurs finies complexes une infinité de fois, avec au plus une exception. Plus tard, E. Borel, a introduit le concept de l'ordre d'une fonction entière:" Une fonction f est d'ordre ρ, si pour tout $\varepsilon>0$, $\log^+ M\left(r,f\right)=O\left(r^{\rho+\varepsilon}\right)$ quand $r\rightarrow\infty$. Par l'introduction de ce concept, il a amélioré le Théorème de Picard et a obtenu une formulation plus précise:"une fonction entière f d'ordre $\rho(0<\rho<\infty)$ satisfait $\lim\limits_{r\rightarrow\infty}\sup\frac{\log n(r,a,f)}{\log r}=\rho$, pour toute valeur complexe finie a, avec au plus une exception. Ce résultat général connu sous le nom Théorème de Picard-Borel. L'objet principal et l'outil de la théorie ont été la classe des fonctions entières et le maximum du module de la fonction sur le disque $|z|\leq r$.

Pour les fonctions méromorphes, le maximum du module ne pouvait pas être l'outil approprié pour étudier leurs croissance, car il peut devenir infini dans $|z|<r$ pour des valeurs finies de r en raison de la présence des pôles. En 1924 Rolf Nevanlinna a donné une interprétation ingénieuse de la célèbre formule de Poisson-Jensen et a fondé la théorie des fonctions méromorphes en introduisant une fonction $T(r,f)$, maintenant connue sous le nom de fonction caractéristique de Nevanlinna. Que peut-on dire de la distribution des valeurs des fonctions entières et méromorphes en général? C'est l'objet de la théorie de la distribution des valeurs qui joue un rôle très important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Pour les équations différentielles complexes, il y a une ligne intéressante d'enquêtes sur la distribution des racines des solutions. Si une fonction $f(z)$ à valeurs complexes a des racines $z_1, z_2, ...$ (disposées dans l'ordre croissant de leurs modules), l'exposant de convergence $\lambda(f)$ est défini par $\inf\left\{\lambda : \sum 1/|z_j|^{\lambda} < \infty\right\}$. La théorie de l'oscillation complexe d'équations différentielles (voir [1] et [23]) étudie les exposants de convergence des solutions, ce qui donne des informations sur les distributions des racines. Après que S. Bank et I. Laine ont fait des travaux originaux dans les années 1980, de nombreux résultats importants ont été obtenus sur la théorie de l'oscillation complexe des solutions des équations différentielles linéaires en $\mathbb{C}$ (voir [1], [3], [4], [5], [10], [13] [30] et [31]). Il est très connu que les solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{2}$$

sont des fonctions entières d'ordre fini si et seulement si touts les coefficients $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ sont des polynômes. Si l'un des coefficients $A_j(z)$ est une fonction transcendante, alors il existe au moins une solution d'ordre infini, une question qui se pose dans ce cas: comment bien estimer le taux de croissance? la réponse est d'introduire le concept de la notion de l'hyper-ordre, aussi si ce dernier n'est pas fini nous avons besoin de définir l'ordre $p-$itératif.

Dans ce mémoire nous voulons étudier la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur où les coefficients $A_j(z)$ sont d'ordre $p-$itératif$(0 < p < \infty)$, en but d'améliorer et prolonger quelques résultats. Il est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Le premier chapitre contient des rappels et définitions de la théorie de R.Nevanlinna, et quelques résultats concernant l'équation (2) et aussi l'équation non homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = F, \tag{3}$$

où les coefficients sont d'ordre fini.

Dans le deuxième chapitre, on étudie la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles (2) et (3) dans le cas où les coefficients sont des fonctions entières d'ordre itératif fini, dans le but d'améliorer les résultats de Jin Tu et Teng Long et est d'etendre les résultats de Cui-Yan Zhang et Jin Tu. Aussi, on démontre les résultats précédents sous autres nouvelles hypothèses.

Dans le troisième chapitre, on étudie les mêmes équations mais avec des coefficients méromorphes, en but de prouver les résultats de J.Tu et Z.X. Chen en utilisant d'autres conditions.

Chapitre 1

Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Introduction et résultats

Notre objectif dans ce chapitre est de donner les définitions de base de la théorie de Nevanlinna des fonctions méromorphes, et de rappeler les résultats de Zong-Xuan Chen et Shi-An Gao, qui ont examiné la croissance des solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, et ils ont donné des estimations plus précises en utilisant la définition de l'ordre et l'hyper-ordre .

1.1.1 La formule de Poisson-Jensen

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le disque $|z| \leq R$ $(0 < R < \infty)$, et soient $a_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ et $b_k\,(k = 1, 2, \ldots, n)$ respectivement, les zéros et les pôles de $f(z)$ dans $|z| < R$, chaque zéro et pôle étant comptés selon leurs multiplicités. Si $z = re^{i\theta}$ est un point dans $|z| < R$ distinct de a_j et b_k, alors

$$\begin{aligned} \log|f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2} d\phi \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} \log\left|\frac{R(z-a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z}\right| - \sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{R(z-b_k)}{R^2 - \overline{b}_k z}\right| \end{aligned}$$

Preuve. On pose

$$F(\zeta) = f(\zeta)\frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{R(z-b_k)}{R^2-\overline{b}_k z}}{\prod_{j=1}^{m}\frac{R(z-a_j)}{R^2-\overline{a}_j z}}. \tag{1.1.1}$$

Alors $F(\zeta)$ n'a pas de zéros et de pôles dans $|z| \leq R$ et donc elle est analytique sur $|z| \leq R$. Choisissons une branche analytique de $\log F(z)$ dans $|\zeta| \leq R$ et en utilisant la formule de Poisson, nous avons

$$\log F(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log F\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi.$$

En prenant les parties réelles et en utilisant $\Re \log F(\zeta) = \log|F(\zeta)|$, nous obtenons

$$\log|F(\zeta)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi. \tag{1.1.2}$$

Par (1.1.1) et (1.1.2), nous avons

$$\begin{aligned} \log|f(\zeta)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F\left(R.e^{i\phi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \log\left|\frac{R(\zeta - a_j)}{R^2 - \overline{a}_j\zeta}\right| - \sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{R(\zeta - b_k)}{R^2 - \overline{b}_k\zeta}\right|. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Aussi, pour $\zeta = R.e^{i\theta}$ et $|a| < R$, nous avons

$$\left|\frac{R(\zeta - a)}{R^2 - \overline{a}\zeta}\right| = 1$$

ce qui implique que

$$\log\left|\frac{R(\zeta - a)}{R^2 - \overline{a}\zeta}\right| = 0$$

pour $|\zeta| = R$ et ainsi de (1.1.1) il s'ensuit que $\log|F(\zeta)| = \log|f(\zeta)|$, et (1.1.3) se réduit à

$$\begin{aligned} \log|f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(R.e^{i\phi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \log\left|\frac{R(z - a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z}\right| - \sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{R(z - b_k)}{R^2 - \overline{b}_k z}\right| \end{aligned}$$

comme désiré. En particulier, le cas spécial $z = 0$, nous donne

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(R.e^{i\phi}\right)\right| d\phi + \sum_{j=1}^{m} \log\left|\frac{a_j}{R}\right| - \sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{b_k}{R}\right| \tag{1.1.4}$$

à condition que $f(0) \neq 0, \infty$. L'équation (1.1.4) est appelée formule de Jensen. Si $f(0) = 0$ ou ∞, alors

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} C_k z^k, \qquad C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

En fait, si $m > 0$ l'origine est un zéro d'ordre m, et si $m < 0$ l'origine est un pôle d'ordre m. Donc $F(0) \neq 0, \infty$, et $F(z)$ et $f(z)$ ont les mêmes zéros et les mêmes pôles. Maintenant en appliquant la formule de Jensen à $F(z)$, nous trouvons

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(R.e^{i\phi}\right) \right| d\phi + \sum_{j=1}^{m} \log \left| \frac{a_j}{R} \right| - \sum_{k=1}^{n} \log \left| \frac{b_k}{R} \right| - m \log R. \tag{1.1.5}$$

1.1.2 Reformulation de la formule de Jensen -La Théorie de Nevanlinna

Définition 1.1.1 *Pour tout nombre réel $x \geq 0$, nous définissons*

$$\log^+ x = \max\{0, \log x\}.$$

Lemme 1.1.1 (1) $\log x \leq \log^+ x$;

(2) $\log^+ x \leq \log^+ y$ *pour* $x \leq y$;

(3) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$;

(4) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$;

(5) $\log^+ \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \log^+ x_k$;

(6) $\log^+ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \log n + \sum_{k=1}^{n} \log^+ x_k$.

Preuve. $(1) - (4)$ sont des conséquences immédiates de la Définition 1.1.1 et la monotonie de la fonction logarithme ordinaire.

(5) Si $\prod_{k=1}^{n} x_k \leq 1$, alors l'affirmation est triviale. D'autre part, si $\prod_{k=1}^{n} x_k > 1$, alors

$$\log^+ \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right) = \log \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \log x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \log^+ x_k.$$

(6) Par (2) et (5) ci-dessus,

$$\log^+ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \leq \log^+ \left(n \max_{1 \leq k \leq n} x_k \right) \leq \log n + \log^+ \left(\max_{1 \leq k \leq n} x_k \right) \leq \log n + \sum_{k=1}^{n} \log^+ x_k.$$

Soit f une fonction méromorphe dans le disque $|z| \leq t$. On désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $| z | \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction $f(z)$ dans le disque $| z | \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité. On désigne par $\overline{n}(t, a, f)$ le nombre de zéros distincts de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $| z | \leq t$, et par $\overline{n}(t, \infty, f)$ le nombre des pôles distincts de la fonction $f(z)$ dans le disque $| z | \leq t$. Alors, on définit $m(r, a, f)$ la fonction de proximité de la fonction f au point a par :

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad \text{si} \quad a \neq \infty,$$

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta \quad \text{si} \quad a = \infty.$$

On définit $N(r, a, f)$ la fonction de comptage a-points de la fonction f par

$$N(r, a, f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r \quad \text{si } a \neq \infty,$$

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r \quad \text{si } a = \infty,$$

et

$$\overline{N}(r, a, f) = \overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, a, f) - \overline{n}(0, a, f)}{t} dt + \overline{n}(0, a, f) \log r \text{ si } a \neq \infty$$

$$\overline{N}(r, \infty, f) = \overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \infty, f) - \overline{n}(0, \infty, f)}{t} dt + \overline{n}(0, \infty, f) \log r \quad \text{si } a = \infty \ ;$$

$m(r, a)$ est défini comme étant la valeur moyenne de $\log^+ \left| \frac{1}{f-a} \right|$ $\left(\text{ou } \log^+ |f| \text{ si } a = \infty\right)$ sur le cercle $|z| = r$. La fonction de comptage a-points $N(r, a)$ indique la densité des racines de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| < r$. Maintenant revenons à $(1.1.4)$. En utilisant la troisième propriété du $\log^+$, nous constatons que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right|d\phi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right|d\phi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right|}d\phi \quad (1.1.6)\\ &= m(r,\ f)-m(r,\frac{1}{f})\end{aligned}$$

Ensuite, soit $|b_k|=r_k$, alors nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{r}{r_k} &= \int_0^r\log\frac{r}{t}d\left[n\left(t,f\right)-n\left(0,f\right)\right]\\ &= \left[n\left(t,f\right)-n\left(0,f\right)\right]\log\frac{r}{t}\mid_0^r+\int_0^r\frac{n\left(t,f\right)-n\left(0,f\right)}{t}dt\\ &= \int_0^r\frac{n\left(t,f\right)-n\left(0,f\right)}{t}dt\end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\sum_{k=1}^{m}\log\frac{r}{|a_k|}=\int_0^r\frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)-n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt$$

Avec ces notations et (1.1.4) , (1.1.5) (avec $m=n\left(0,\frac{1}{f}\right)-n\left(0,f\right)$), nous avons

$$m\left(r,f\right)-m\left(r,\frac{1}{f}\right)-m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(R,f\right)=\log\left|f\left(0\right)\right|, \qquad (1.1.7)$$

et

$$m\left(R,f\right)-m\left(R,\frac{1}{f}\right)-m\left(R,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,f\right)=\log\left|C_m\right|,$$

Définition 1.1.2 *(**Fonction caractéristique de R. Nevanlinna)** Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a=\infty$. On définit $T\left(r,f\right)$ la fonction caractéristique de R.Nevanlinna de la fonction f par:*

$$T\left(r,f\right)=m\left(r,f\right)+N\left(r,f\right).$$

Théorème 1.1.1 [22, 25]*(**Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna**). Soit f une fonction méromorphe non constante et soit*

$$f\left(z\right)-a=\sum_{i=m}^{\infty}C_iz^i \qquad \left(C_m\neq 0\right),$$

la série de Laurent de $f-a$. Alors pour tout nombre complexe a, on a

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T\left(r,f\right)-\log\left|C_m\right|+\varphi\left(r,a\right),$$

où $\varphi\left(r,a\right)\leq\log 2+\log^+ a$.

Preuve. Soit $h\left(z\right)=f\left(z\right)-a$. Alors $N\left(r,h\right)=N\left(r,f\right)$. Comme

$$\log^+\left|h\right|=\log^+\left|f-a\right|\leq\log^+\left|f\right|+\log^+\left|a\right|+\log 2,$$

et

$$\log^+\left|f\right|=\log^+\left|f-a+a\right|\leq\log^+\left|f-a\right|+\log^+\left|a\right|+\log 2,$$

alors l'intégration de ces inégalités donne

$$m\left(r,h\right)\leq m\left(r,f\right)+\log^+\left|a\right|+\log 2,$$

et

$$m\left(r,f\right)\leq m\left(r,h\right)+\log^+\left|a\right|+\log 2.$$

Donc

$$\varphi\left(r,a\right)=m\left(r,h\right)-m\left(r,f\right)$$

vérifie

$$\left|\varphi\left(r,a\right)\right|\leq\log^+\left|a\right|+\log 2.$$

Maintenant en appliquant la formule de Jensen à h nous obtenons

$$\begin{aligned}T\left(r,\frac{1}{h}\right) &= T\left(r,h\right)-\log\left|C_m\right| \\ &= m\left(r,f\right)+N\left(r,f\right)-\log\left|C_m\right|+\varphi\left(r,a\right) \\ &= T\left(r,f\right)-\log\left|C_m\right|+\varphi\left(r,a\right).\end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 Le premier théorème fondamental de R. Nevanlinna peut aussi être formulé sous la forme

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T\left(r,f\right)+O\left(1\right),$$

où $O\left(1\right)$ reste bornée quand $r\rightarrow\infty$.

Proposition 1.1.1 [25]. *Soient $f,f_1,\ldots,f_n$ des fonctions méromorphes et $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$, tels que $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$. Alors*

(*a*) $T\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}T\left(r,f_k\right),\quad n\geq1,$

(*b*) $T\left(r,f^n\right)=nT\left(r,f\right),\ n\in\mathbb{N},$

(*c*) $T\left(r,\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum\limits_{i=1}^{n}T\left(r,f_i\right)+\log n,\quad n\geq1,$

(*d*) $T\left(r,\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}\right)=T\left(r,f\right)+O\left(1\right),$ *en supposant que* $f\not\equiv-\delta/\gamma.$

Preuve. (a) et (c), en utilisant les propriétés (5) et (6) de $\log^{+}$ on peut facilement en déduire que si $f_k\left(k=1,\ldots,n\right)$ sont des fonctions méromorphes, alors

1. $m\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}m\left(r,f_k\right);$
2. $m\left(r,\sum_{k=1}^{n}f_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}m\left(r,f_k\right)+\log n.$

En outre, puisque l'ordre du pôle de $\sum_{k=1}^{n}f_k$ en z_0 ne dépasse pas la somme des ordres des pôles de f_k en z_0, nous avons

$$N\left(r,\sum_{k=1}^{n}f_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}N\left(r,f_k\right).$$

Cette inégalité avec la propriété 2 ci-dessus, donne

$$T\left(r,\sum_{k=1}^{n}f_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}T\left(r,f_k\right)+\log n.$$

De même, nous avons

$$T\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}T\left(r,f_k\right).$$

(b) Il suffit d'observer que $\left|f^n\right|=\left|f\right|^n\leq1$ si et seulement si $\left|f\right|\leq1$.

(d) On pose $f_1=f+d/c,\ f_2=cf_1,\ f_3=1/f_2,\ f_4=\frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)f_3}{\gamma}$, alors $g\left(z\right)=f_4+\alpha/\gamma$.

Maintenant, en utilisant les inégalités (a) et (c) dans la proposition précédente, nous trouvons

$$\begin{aligned} T(r,g) &= T(r,f_4)+O(1) \\ &= T(r,f_3)+O(1) \\ &= T(r,f_2)+O(1) \\ &= T(r,f_1)+O(1) \\ &= T(r,f)+O(1). \end{aligned}$$

La propriété la plus importante de la fonction caractéristique permettant de mesurer la croissance des fonctions méromorphes est: $T(r,f)$ est une fonction croissante de r et convexe de $\log r$.

Pour établir cette propriété nous montrons d'abord une autre représentation de $T(r,f)$. En appliquant la formule de Jensen avec $R=1$ à la fonction $g(z)=a-z$, nous trouvons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|R.e^{i\phi}-a\right|d\phi=\log^+|a|, \quad \forall a\in\mathbb{C}. \tag{1.1.8}$$

Soit $0<r<R$. En appliquant la formule de Jensen à la fonction $f(z)-e^{i\theta}$, nous trouvons

$$\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\phi}\right)-e^{i\theta}\right|d\phi-N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)+N\left(r,f-e^{i\theta}\right).$$

L'intégration par rapport à θ de 0 à 2π donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\phi}\right)-e^{i\theta}\right|d\phi\right]d\theta \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,f-e^{i\theta}\right)d\theta. \end{aligned}$$

En utilisant (1.1.8) avec $a = f\left(re^{i\phi}\right)$ nous constatons que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\phi}\right)\right|d\phi \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta + N(r,f) \\
&= m(r,f)+N(r,f)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta \\
&= T(r,f)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta.
\end{aligned}$$

Par une autre application de (1.1.8), on obtient que

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta + \log^+|f(0)|\,. \tag{1.1.9}$$

L'équation (1.1.9) est appelée identité de Henri Cartan, c'est une autre représentation de $T(r,f)$. Comme $N(r,e^{i\theta})$ est une fonction croissante de r, et par l'identité de Cartan (1.1.9), on obtient que $T(r,f)$ est une fonction croissante de r. Encore de l'identité de Cartan, nous avons

$$\frac{dT(r,f)}{d\log r} = \frac{d}{d\log r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r n\left(t,e^{i\theta}\right)\frac{dt}{t}\right)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n\left(r,e^{i\theta}\right)d\theta.$$

Comme le côté droit est positif et croissante avec r, il s'ensuit que $T(r,f)$ est une fonction convexe de $\log r$. Ainsi $T(r,f)$ est une fonction croissante de r et convexe de $\log r$. La fonction $m(r,a)$ n'est pas croissante, ni décroissante en général. Par exemple

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1}.$$

On a $|f(z)| < 1$ pour $|z| < \frac{1}{2}$ ou $|z| > 2$. Cela implique que $m(r,f) = 0$ pour $|z| \le \frac{1}{2}$ ou $|z| \ge 2$. D'autre part si $r = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(e^{i\phi}\right)\right|d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|1-e^{2i\phi}|}d\phi \to \infty \quad \text{quand } \phi \to 0
\end{aligned}$$

et ainsi $m(r,f) > 0$, en fait il est assez grand.

Corollaire 1.1.2 *Nous avons l'inégalité*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta \leq \log 2.$$

Preuve. D'après le premier théorème fondamental de Nevanlinna, nous avons

$$T(r,f) = m(r,e^{i\theta}) + N(r,e^{i\theta}) + \log^+ \left| f(0) - e^{i\theta} \right| + \varphi\left(r,e^{i\theta}\right)$$

où $|\varphi(r,a)| \leq \log 2$. L'intégration des deux côtés par rapport à θ de 0 à 2π et en utilisant l'identité de Cartan, nous obtenons

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta + T(r,f) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(r,e^{i\theta}\right)d\theta,$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(r,e^{i\theta}\right)d\theta \leq \log 2.$$

Remarque 1.1.2 Le dernier résultat montre que $m(r,a)$ est bornée dans la moyenne sur le cercle $|a| = 1$. Ainsi, si $T(r,f)$est grand, $m(r,a)$ est bornée et $N(r,a)$ est presque égale à $T(r,f)$ pour la plupart des valeurs de a.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, si f est une fonction entière, alors $T(r,f)$ se comporte comme $\log^+ M(r,f)$ et cela est une conséquence de l'inégalité fondamentale suivante:

Théorème 1.1.3 [22]. *Si f est holomorphe dans $|z| \leq R$ et $M(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$, alors*

$$T(r,f) \leq \log^+ M(r,f) \leq \frac{R-r}{R+r}T(R,f) \qquad (0 \leq r < R).$$

Preuve. Comme f est holomorphe dans $|z| \leq R$, pour $0 \leq r < R$, nous avons

$$\begin{aligned} T(r,f) &= m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+ M(r,f)d\theta \\ &= \log^+ M(r,f) \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité de gauche. L'inégalité de droite est triviale si $M(r,f)\leq 1$. Ainsi, nous supposons que $M(r,f)>1$. Soit z_0 un point sur le cercle $|z|=r$ tel que $|f(z_0)|=M(r,f)$. Puisque f n'a pas de pôles dans $|z|<R$ et $\left|\frac{R(z-a_j)}{R^2-\overline{a}_j z}\right|<1$, la formule de Poisson-Jensen donne

$$\begin{aligned} \log^+ M(r,f) &= \log|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(R.e^{i\theta}\right)\right|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi \\ &\leq \frac{R-r}{R+r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(R.e^{i\theta}\right)\right|d\phi = \frac{R-r}{R+r}m(r,f) \\ &= \frac{R-r}{R+r}T(r,f). \end{aligned}$$

Définition 1.1.3 ***(L'ordre et l'hyper-ordre).*** *Soit f une fonction méromorphe, on définit l'ordre $\sigma(f)$ de la fonctions f par:*

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

et on définit l'hyper ordre $\sigma_2(f)$ de la fonction f par :

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.1.1 Soit f une fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}, a_n, b_m \neq 0.$$

distinguons les deux cas suivants :

Premier cas. Si $m\geq n$. Dans ce cas $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)$ est fini , il y a donc un nombre réel positif r_0

tel que $n(r,f) = m \; \forall r \geq r_0$. Donc

$$\begin{aligned} N(r,f) &= \int_0^{r_0} \frac{n(t,\infty) - n(0,\infty)}{t} dt + \int_{r_0}^{r} \frac{m - n(0,\infty)}{t} dt + n(0,\infty)\log r \\ &= (m - n(0,\infty))(\log r - \log r_0) + n(0,\infty)\log r + O(1) \\ &= m\log r - m\log r_0 + n(0,\infty)\log r_0 + O(1) = m\log r + O(1). \end{aligned}$$

Notons que pour un polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$, pour un $\epsilon > 0$ il existe un $r_0 > 0$ tel que $\forall r = |z| > r_0$ nous avons

$$(1-\epsilon)|a_n| r^n \leq |P(z)| \leq (1+\epsilon)|a_n| r^n.$$

Donc $\forall r \geq r_0$ nous pouvons écrire $|P(z)| = |a_n| r^n (1 + o(1))$
et $|Q(z)| = |b_m| r^m (1 + o(1))$ et donc $m(r,f) = O(1)$. Alors dans ce cas

$$T(r,f) = m\log r + O(1) = O(\log r).$$

<u>Deusieme cas</u>. Lorsque $m < n$. Dans ce cas, nous appliquons la formule de Jensen et les arguments utilisés dans le premier cas et nous obtenons

$$T(r,f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) = n\log r + O(1) = O(\log r).$$

Alors pour une fonction rationnelle f nous avons $T(r,f) = O(\log r)$. En outre, l'inverse de cette assertion est vrai. Autrement dit, si f est une fonction méromorphe avec $T(r,f) = O(\log r)$, alors f est une fonction rationnelle.

Exemple 1.1.2 Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t,f) = 0$ car f n'admet pas des pôles, par conséquent $N(r,f)=0$. De plus

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{re^{i\theta}}\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{r\cos\theta}\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)\, d\theta + \int_{\frac{3\ \pi}{2}}^{2\ \pi} (r\cos\theta)\, d\theta\right) = \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

Donc $T(r,f)=\frac{r}{\pi}$. D'où

$$\sigma(e^z) = \lim_{r\to\infty}\sup \frac{\log T(r,f)}{\log r} = 1.$$

Exemple 1.1.3 Soit $f(z)=e^{z^2}$. Nous avons $n(t,f)=0$ car f n'admet pas de pôles, par conséquent $N(r,f)=0$. De plus

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{r^2e^{2i\theta}}\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{r^2\cos 2\theta}\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(r^2\cos 2\theta\right) d\theta + \int_{\frac{3\ \pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(r^2\cos 2\theta\right) d\theta + \int_{\frac{5\ \pi}{4}}^{2\pi} \left(r^2\cos 2\theta\right) d\theta\right) = \frac{r^2}{\pi}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sigma(e^{z^2}) = \lim_{r\to\infty}\sup \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \lim_{r\to\infty}\sup \frac{\log \frac{r^2}{\pi}}{\log r} = 2.$$

Exemple 1.1.4 Soit $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme de degré $n\geq 1$ et soit $f(z)=e^{P(z)}$. Nous calculons $T(r,f)$ lorsque $P(z)=a_n z^n$. Soit $a_n=|a_n|\, e^{i\varphi}$, $z=re^{i\theta}$. Alors

$$|f(z)| = e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)}$$

et nous avons donc

$$\begin{aligned}
m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \log^{+} e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi}^{2n\pi+\varphi} \log^{+} e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau \\
&= \frac{1}{2n\pi}\int\limits_{0}^{2n\pi} \log^{+} e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau \\
&= \frac{|a_n|\, r^n}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{|a_n|\, r^n}{\pi}.
\end{aligned}$$

Comme f est entière, donc, $T(r,f) = m(r,f) = \frac{|a_n| r^n}{\pi}$. Or, puisque

$$T(r,f) = T\left(r, e^{P(z)}\right) = T\left(r, e^{a_n z^n}.e^{a_{n-1} z^{n-1}}...e^{a_0}\right)$$

et

$$T\left(r, e^{a_{n-k} z^{n-k}}\right) = \frac{|a_{n-k}|\, r^{n-k}}{\pi} = o\left(\frac{|a_n|\, r^n}{\pi}\right) = o\left(T\left(r, e^{a_n z^n}\right)\right),$$

il s'ensuit que

$$T(r,f) = T\left(r, e^{P(z)}\right) \sim T\left(r, e^{a_n z^n}\right) = \frac{|a_n|}{\pi} r^n \quad (r \to \infty)\ .$$

D'où $\sigma\left(e^{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}\right) = \lim\limits_{r\to\infty} \sup \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \lim\limits_{r\to\infty} \sup \frac{\log \frac{|a_n|}{\pi} r^n}{\log r} = n$. Alors on a par exemple

$$\sigma\left(e^{z^3}\right) = 3\ ; \quad \sigma\left(e^{z^5+3z^2-2}\right) = 5\ .$$

Si $f(z) = \exp(e^z)$, alors

$$T(r,f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{quand } r \to \infty)\ ;$$

D'où $\sigma\left(e^{e^z}\right) = \infty$.

$$\sigma_2\left(e^z\right) = 0 \;;\quad \sigma_2\left(\exp\left(e^z\right)\right) = 1 \;;\quad \sigma_2\left(\exp\left(e^{z^2}\right)\right) = 2.$$

Définition 1.1.4 ***(L'exposant de convergence des zéros).*** *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des zéros de la fonction f est noté par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

et on note par

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

à l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f .

Exemple 1.1.5 (i) Comme la fonction $f(z) = \exp(e^z)$ n'a pas de zéros, alors $\lambda(\exp(e^z)) = 0$

$= \overline{\lambda}(\exp(e^z))$.

(ii) Pour la fonction $f(z) = e^z - 12$. Nous avons les zéros de f sont $z_k = \ln 12 + 2k\pi i$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Pour $t \geq 0$, nous avons $2k+1$ zéros de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$ (voir la Figure 01) :

$$t^2 = (2\pi k)^2 + \ln^2 12 \quad \text{d'où} \quad k^2 = \frac{t^2 - \ln^2 12}{4\pi^2} \;;$$

Donc pour t suffisamment grand on a :

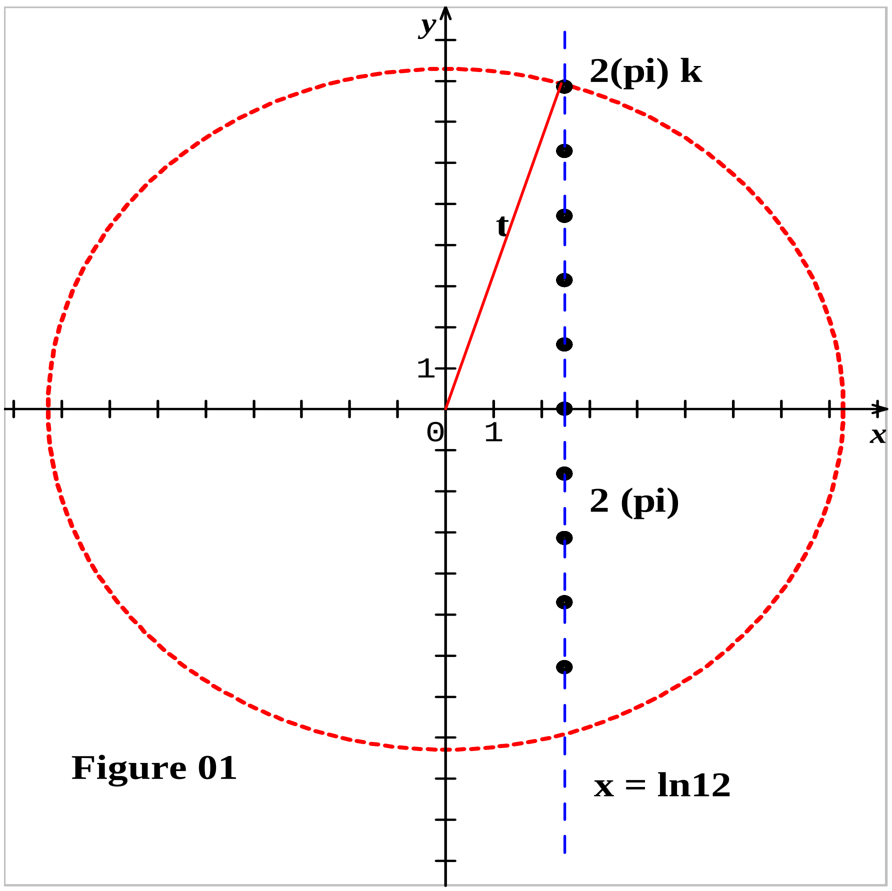
$$n(t, \frac{1}{f}) = 2k + 1 \simeq 2\sqrt{\frac{t^2 - \ln^2 12}{4\pi^2}} + 1 \simeq \frac{t}{\pi} \;;$$

D'où

$$N(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \ln r = \int_0^r \frac{1}{\pi}\, dt = \frac{1}{\pi} r$$

Par conséquent $\lambda(f) = 1 = \overline{\lambda}(f)$.

Définition 1.1.5 ***(La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité logarithmique supérieure)***. *Supposons que $E \subset [1, +\infty)$, on note par $m(E)$ à la mesure linéaire*


y
2(pi) k
t
1
0
1
x
2 (pi)
Figure 01
x = ln12

de l'ensemble E et par $lm(E)$ à la mesure logarithmique de l'ensemble E, avec

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)\, dt \ ,$$

et

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t} dt \ ,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E . La densité logarithmique supérieure de l'ensemble E est définie par :

$$\overline{dens} E = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{lm(E \cup [0, r])}{\log r} \ .$$

Exemple 1.1.6 (i) La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, e] \subset [1, \infty)$ est

$$m(E) = \int_1^{\infty} \chi_{_E}(t)\, dt = \int_1^{e} dt = e - 1.$$

(ii) La mesure logarithmique de l'ensemble $E = \left[1, e^3\right] \subset [1, \infty)$ est

$$lm(E) = \int_1^{\infty} \chi_{_E}(t) \frac{dt}{t} = \int_1^{e^3} \frac{dt}{t} = 3.$$

(iii) La mesure linéaire d'un ensemble fini E est nulle

$$m(E) = 0.$$

Définition 1.1.6 ***(l'indice central).*** *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière, le terme maximum de f est défini par $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n, \ n = 0, 1, 2, ...\}$ et l'indice central de f est défini par $v_f(r) = \max\{m, \mu(r) = |a_m| r^m\}$.*

Exemple 1.1.7 Pour le polynôme $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 z^0$, $a_n \neq 0$, on a $\mu(r) = |a_n| r^n$ et $v_P(r) = n$ pour r assez grand.

1.2 Quelques résultats

En 1993, Zong-Xuan Chen et Shi-An Gao ont étudié la croissance des solutions des équations (2) et (3) et ont obtenu les résultats suivants :

Théorème 1.2.1 [13] . *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, *des fonctions entières satisfaisantes*

1) $\sigma(A_j) < \sigma(A_0) < \infty$, $j = 1, 2, ..., k-1$; *ou*

2) A_0 *est une fonction transcendante avec* $\sigma(A_0) < \infty$, *est* $A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, *sont des polynômes . Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de* (2) *satisfait* $\sigma(f) = \infty$.

Théorème 1.2.2 [13] . *Supposons que* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, *vérifient les hypothèses du Théorème* 1.2.1. *Soit* $F \not\equiv 0$ *une fonction entière avec* $\sigma(F) < \infty$. *Alors toute solution* $f(z)$ *de* (3) *satisfait* $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$ *avec au plus une exception.*

En 2000, Zong-Xuan Chen et Chung-Chen Yang ont donné quelques estimations plus précises en utilisant la définition de l'hyper-ordre et ont obtenu les théorèmes suivants:

Théorème 1.2.3 [14] . *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, *des fonctions entières satisfaisantes* $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0) < \infty$. *Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de* (2) *satisfait* $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Théorème 1.2.4 [14] . *Supposons que* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, *vérifient les hypothèses du Théorème* 1.2.3. *Soit* $F \not\equiv 0$ *une fonction entière avec* $\sigma(F) < \infty$. *Alors toute solution* $f(z)$ *de* (3) *satisfait* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$ *avec au plus une exception.*

Pour autant de solutions d'ordre infini, il est naturel de se demander comment estimer avec précision la croissance de l'ordre des solutions? Récemment, par la définition de l'ordre itératif, la croissance des solutions d'ordre infini des équations différentielles peuvent être plus précisément estimées. C'est ce qui se traite dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Oscillation des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières d'ordre itératif fini

2.1 Introduction et résultats

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières, avec quelques conditions sur les coefficients. Nous rappelons quelques résultats et nous prouvons une généralisation du théorème de Jin Tu et Teng Long pour donner une estimation précise sur l'ordre p-itératif. Tout d'abord, on va citer quelques définitions nécessaires à notre travail sur l'ordre itératif d'une fonction méromorphe. Nous utilisons les mêmes définitions que dans [2]. Pour tout $r \in R$, nous définissons $\exp_1 r := e^r$ et $\exp_{p+1} r := \exp(\exp_p r)$, $p \in \mathbb{N}$. Nous définissons également pour tout r suffisamment grand $\log_1 r = \log r$ et $\log_{p+1} r = \log\left(\log_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$. En outre, nous notons $\exp_0 r = r$,$\log_0 r = r$, $\log_{-1} r = \exp_1 r$ et $\exp_{-1} r = \log_1 r$.

Définition 2.1.1 ***(L'ordre** $p-$**itératif).*** *Soit $f\ (z)$ une fonction méromorphe. Alors, l'ordre $p-$itératif $\sigma_p(f)$ de la fonction f est défini par*

$$\sigma_p(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} \qquad (p \in \mathbb{N}).$$

Définition 2.1.2 ***(L'ordre** $p-$**itératif inférieur).*** *Soit $f\ (z)$ une fonction mèromorphe. Alors, l'ordre p−itératif inférieur $\mu_p(f)$ de la fonction f est défini par*

$$\mu_p(f) = \lim_{r\to+\infty} \inf \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} \qquad (p \in \mathbb{N}).$$

Définition 2.1.3 ***Le degré de finitude*** *de l'ordre d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$i(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } f \text{ rationnelle,} \\ \min\{p \in \mathbb{N} : \sigma_p(f) < \infty\} & \text{pour } f \text{ transcendante telle que} \\ & \ \sigma_p(f) < \infty \text{ existe pour un certain } p \in \mathbb{N}, \\ \infty & \text{pour } f \text{ avec } \sigma_p(f) = \infty. \end{cases}$$

Définition 2.1.4 ***(Type p-itératif)*** *Soit f une fonction mèromorphe. Le type p-iteratif $\tau_p(f)$ d'une fonction f d'ordre p−itératif $\sigma_p(f), (0 < \sigma_p(f) < \infty)$ est défini par*

$$\tau_p(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log_{p-1} T(r,f)}{r^{\sigma_p(f)}}.$$

Remarque 2.1.1 1) Si f est une fonction entière, alors

$$\sigma_p(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r},$$

et

$$\tau_p(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log_{p-1} T(r,f)}{r^{\sigma_p(f)}} = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log_p M(r,f)}{r^{\sigma_p(f)}}.$$

2) Pour $p = 1$, nous notons $\sigma_1(f) = \sigma(f)$ l'ordre défini en Définition 1.1.3, pour $p = 2$, $\sigma_2(f)$ est l'hyper-ordre.

Définition 2.1.5 ***(l'exposant p-itératif).*** *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant p-itératif de convergence de a-points de la fonction f est noté par*

$$\lambda_p(f,a) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p n(r,a)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N(r,a)}{\log r},$$

et on note par

$$\overline{\lambda}_p(f,a) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{n}(r,a)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{N}(r,a)}{\log r}$$

à l'exposant p-itératif de convergence de a-points distincts de la fonction f.

Si $a = 0$, l'exposant p-itératif de convergence des séquences des zéros de la fonction f , est défini par

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p n\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Si $a = \infty$, l'exposant p-itératif de convergence des séquences des pôles de la fonction f , est défini par

$$\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p n(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N(r,f)}{\log r}.$$

En 1998, L. Kinnunen a étudié les propriétés d'oscillation des équations différentielles:

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{2.1.1}$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z) \tag{2.1.2}$$

dans le domaine complexe à coefficients d'ordre itératif fini, et a obtenu les résultats suivants:

Théorème 2.1.1 [24]. *Soient $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles que $i(A_0) = p$ $(0 < p < \infty)$ et $\sigma_p(A_0) = \sigma$. Si $i(A_j) < p$ ou $\sigma_p(A_j) < \sigma_p(A_0) = \sigma$ pour tout $j = 1, \cdots, k-1$, alors pour toute solution non triviale f de $(2.1.1)$, on a $i(f) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.*

Théorème 2.1.2 [24]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières satisfaisantes les hypothèses du Théorème* 2.1.1. *Soit* $F \not\equiv 0$ *une fonction entière avec* $i(F) = q < p+1$. *Alors toute solution de* (2.1.2) *satisfait* $i_{\overline{\lambda}}(f) = i_{\lambda}(f) = i(f) = p+1$ *et* $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$, *avec au plus une exception.*

En 2009, B. Belaïdi a obtenu les mêmes résultats avec des conditions plus faibles que les conditions de L. Kinnunen , il a obtenu les résultats suivants:

Théorème 2.1.3 [5]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières, et soit* $i(A_0) = p\ (0 < p < \infty)$. *Supposons que* $\max\{\sigma_p(A_j) : j = 1, \cdots, k-1\} \leq \sigma_p(A_0) = \sigma\,(0 < \sigma < \infty)$ *et* $\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_0)\} < \tau_p(A_0) = \tau\,(0 < \tau < \infty)$. *Alors pour toute solution non triviale* f *de* (2.1.1), *on a* $i(f) = p+1$ *et* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) = \sigma$.

Théorème 2.1.4 [5]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières, et soit* $i(A_0) = p\ (0 < p < \infty)$. *Supposons que* $\sigma_p(A_j) = \sigma (j = 0, 1, \cdots, k-1), (0 < \sigma < \infty)$ *et max*$\{\tau_p(A_j) : j = 1, \cdots, k-1\} < \tau_p(A_0) = \tau\,(0 < \tau < \infty)$. *Alors pour toute solution non triviale* f *de* (2.1.1), *on a* $i(f) = p+1$ *et* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) = \sigma$.

Dans les Théorèmes 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.4, les auteurs ont étudié la croissance des solutions de (2.1.1) en vertu de la même condition que le coefficient $A_0(z)$ dans (2.1.1) croît plus vite que les autres coefficients $A_j(z)(j = 1, \cdots, k-1)$ et obtenaient la même conclusion $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)\ (p \in N)$. En 2009, Jin Tu et Teng Long ont prouvé la même conclusion avec la condition $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)/m(r, A_0) < 1$ qui est plus faible que les conditions dans les Théorèmes 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.4. Ils ont obtenu les résultats suivants:

Théorème 2.1.5 [31]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisantes* $i(A_0) = p$, $\sigma_p(A_0) = \sigma$, *et* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)/m(r, A_0) < 1$. *Alors pour toute solution non triviale* f *de* (2.1.1), *on a* $i(f) = p+1$ *et* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) = \sigma$.

Corollaire 2.1.6 [31]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisantes* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)/m(r, A_0) < 1$, *et* $A_0(z)$ *transcendante avec* $\sigma(A_0) < \infty$. *Alors toute solution non triviale* $f(z)$ *de l'équation* (2.1.1) *satisfait* $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Théorème 2.1.7 $[31]$. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisantes* $\max\{\sigma_p(A_j), j \neq 0\} \leq \mu_p(A_0) = \sigma_p(A_0)$, *et* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)/m(r, A_0) < 1\,(r \notin E_6)$, *où* E_6 *est un ensemble d'une mesure linéaire finie. Alors toute solution non triviale* $f(z)$ *de l'équation* $(2.1.1)$ *satisfait* $\sigma_{p+1}(f) = \mu_p(A_0) = \sigma_p(A_0)$.

La question qui se pose: Peut-on obtenir les mêmes résultats, si l'un des coefficients $A_s(z)$ dans (2.1.1) croît plus vite que les autres coefficients $A_j(z)(j \neq s)$? Nous donnons dans le Théorème suivant une nouvelle estimation quand $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j\neq s} m(r, A_j)/m(r, A_s) < 1$. On a:

Théorème 2.1.8 *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini. Supposons qu'il existe un* $A_s\,(0 \leq s \leq k-1)$ *avec* $i(A_s) = p, \sigma_p(A_s) = \sigma$ *et* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j\neq s} m(r, A_j)/m(r, A_s) < 1$. *Alors pour toute solution non triviale* f *de* $(2.1.1)$, *on a* $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s) \leq \sigma_p(f)$, *et il existe au moins une solution* f_1 *satisfaisant* $\sigma_{p+1}(f_1) = \sigma_p(A_s)$.

Corollaire 2.1.9 *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières. Supposons qu'il existe un* $A_s\,(0 \leq s \leq k-1)$ *avec* $\sigma(A_s) < \infty$ *et* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j\neq s} m(r, A_j)/m(r, A_s) < 1$. *Alors pour toute solution non triviale* f *de* $(2.1.1)$, *on a* $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_s) \leq \sigma(f)$.

Exemple 2.1.1 Pour l'équation

$$f^{(4)} + e^z f^{(3)} + \exp e^z f'' + e^{z^2} f' + f = 0.$$

on a $m(r, A_0 = 1) = 0$, $m\left(r, A_1 = e^{z^2}\right) = \frac{r^2}{\pi}$, $m(r, A_2 = \exp e^z) = \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}$, $m(r, A_3 = e^z) = \frac{r}{\pi}$, donc $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j\neq 2} m(r, A_j)/m(r, A_2) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\frac{r^2}{\pi} + \frac{r}{\pi}}{\frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}} = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\frac{r^2}{\pi} + \frac{r}{\pi}}{e^r} \left(2\pi^3 r\right)^{\frac{1}{2}} = 0 < 1$. Alors pour toute solution non triviale f , on a $\sigma_3(f) \leq \sigma_2(A_2) = 1 \leq \sigma_2(f)$.

On a aussi les résultats suivants avec d'autres conditions:

Théorème 2.1.10 *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini. Supposons qu'il existe une fonction* $A_s\,(0 \leq s \leq k-1)$ *satisfaisante* $b = \max\{\sigma_p(A_j)(j \neq s)\} < \mu_p(A_s)$ *et* $\tau_p(A_s) > 1$. *Alors toute solution transcendante de l'équation* (2.1.1) *satisfait* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_s)$.

Exemple 2.1.1 Pour l'équation

$$f^{(6)} + 3\exp_5\left(z^2\right) f^{(4)} - \exp_5\left(2z^4\right) f^{(3)} + ze^z f = 0,$$

nous avons $2 = \max\{\sigma_5(A_j)(j = 0, 1, 2, 4, 5)\} < \mu_5(A_3) = 4$ et $\tau_5(A_3) = 2 > 1$. Alors toute solution transcendante de cette équation satisfait $\sigma_6(f) = \sigma_5(A_3) = 4$.

Corollaire 2.1.11 *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini. Supposons que* $b = \max\{\sigma_p(A_j)(j \neq 0)\} < \mu_p(A_0)$ *et* $\tau_p(A_0) > 1$. *Alors toute solution transcendante de l'équation* (2.1.1) *satisfait* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

Corollaire 2.1.12 *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, *des fonctions entières d'ordre fini. Supposons qu'il existe une fonction* $A_s\,(1 \leq s \leq k-1)$ *satisfaisante* $b = \max\{\sigma(A_j)(j \neq s)\} < \mu(A_s)$ *et* $\tau(A_s) > 1$. *Alors toute solution transcendante de l'équation* (2.1.1) *satisfait* $\sigma_2(f) = \sigma(A_s)$.

En 2010, Cui-Yan Zhang et Jin Tu ont donné une estimation de l'hyper ordre en utilisant l'ordre inférieur.

Théorème 2.1.13 [35]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières, telles que* $\max\{\sigma(A_j)(j \neq 0)\} < \mu(A_0) \leq \sigma(A_0) < \infty$. *Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation* (2.1.1) *satifait* $\mu(A_0) = \mu_2(f) \leq \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Corollaire 2.1.14 [35]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières, telles que*

$\max\{\sigma(A_j)(j \neq 0)\} < \mu(A_0) = \sigma(A_0) < \infty$. *Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation* (2.1.1) *satisfait* $\mu_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Nous voulons étendre ces deux résultats de l'ordre à l'ordre p-itératif, nous avons:

Théorème 2.1.15 *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini, telles que* $\max\{\sigma_p(A_j)(j \neq 0)\} < \mu_p(A_0) \leq \sigma_p(A_0) < \infty$. *Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation* (2.1.1) *satisfait* $\mu_p(A_0) = \mu_{p+1}(f) \leq \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

Corollaire 2.1.16 *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini, telles que* $\max\{\sigma_p(A_j)(j \neq 0)\} < \mu_p(A_0) = \sigma_p(A_0) < \infty$. *Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation* (2.1.1) *satisfait* $\mu_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

Nous avons besoin des lemmes suivants pour les preuves de nos Théorèmes.

2.2 Lemmes pour les preuves des théorèmes

Lemme 2.2.1 [30]. *Soit* $f(z)$ *une fonction entière transcendante, et soit* z *un point tel que* $|z| = r$ *et* $|f(z)| = M(r,f)$. *Alors pour tout* $|z|$ *à l'extérieur d'un ensemble* E_1 *de* r *d'une mesure logarithmique finie, nous avons*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^k (1 + o(1)) \qquad (n \in \mathbb{N}, r \notin E_1),$$

où $v_f(r)$ *est l'indice central de* f .

Lemme 2.2.2 [9]. *Soit* $f(z)$ *une fonction entière d'ordre itératif fini satisfaisante* $\sigma_p(f) = \sigma$, $\mu_q(f) = \mu, 0 < q \leq p < \infty$, *et soit* $v_f(r)$ *l'indice central de* f. *Alors nous avons*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p v_f(r)}{\log r} = \sigma,$$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_q v_f(r)}{\log r} = \mu.$$

Lemme 2.2.3 *Soit* s *un nombre entier naturel. Supposons que* $f(z)$ *satisfait les hypothèses du Lemme* 2.2.1. *Alors l'estimation* $\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}$ *est réalisée pour* r *suffisamment grand , et* $|f(z)| = M(r,f)$.

Preuve. Par le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble E_1 de r d'une mesure logarithmique finie tel que pour tout $r \notin E_1$ nous avons

$$\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^s (1 + o(1)).$$

D'autre part, nous avons d'aprés le Lemme 2.2.2, $v_f(r) \geq \exp_{p-1} r^{\sigma - \varepsilon}$. Donc, pour r suffisamment grand $\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| = K \frac{r^s}{|v_f(r)|^s} \leq K \frac{r^s}{\left(\exp_{p-1} r^{\sigma-\varepsilon}\right)^s} \leq r^{2s}$, où K est une constante positive.

Lemme 2.2.4 [24]. *Soit f une fonction méromorphe transcendante et $k \geq 1$ un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log(rT(r, f)))$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E_2 de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

Lemme 2.2.5 [25]. *Soient $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ deux fonctions monotones croissantes telles que*

(i) $g(r) \leq h(r)$ est réalisée en dehors d'un ensemble exceptionnel E_3 de mesure linéaire finie. Alors, pour tout $\alpha > 1$, il existe $r_0 > 0$ tel que $g(r) \leq h(\alpha r)$ pour tout $r > r_0$.

(ii) $g(r) \leq h(r)$ est réalisée en dehors d'un ensemble exceptionnel E_3 de mesure logarithmique finie. Alors, pour tout $\alpha > 1$, il existe $r_0 > 0$ tel que $g(r) \leq h(r^\alpha)$ pour tout $r > r_0$.

Lemme 2.2.6 [31]. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre itératif fini satisfaisante $i(f) = p$. Alors il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie, tel que pour tout z vérifiant $r \in E_4$, nous avons :*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log r} = \sigma_p(f).$$

Lemme 2.2.7 [31]. *Soit $f(z)$ Une fonction méromorphe d'ordre itératif fini satisfaisante $i(f) =$*

p, $p \in \mathbb{N}$. *Alors il existe des fonctions entières* $U(z)$, $V(z)$ *et* $D(z)$ *telles que*

$$f(z) = \frac{U(z)\, e^{D(z)}}{V(z)}$$

et

$$\sigma_p(f) = \max\left\{\sigma_p(U), \sigma_p(V), \sigma_p\left(e^{D(z)}\right)\right\}.$$

En outre, pour tout $\varepsilon > 0$, *nous avons*

$$\exp\left\{-\exp\left\{r^{\sigma_p(f)+\varepsilon}\right\}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp_P\left\{r^{\sigma_p(f)+\varepsilon}\right\} \quad (r \notin E_5),$$

où E_5 *est un ensemble de* r *de mesure linéaire finie.*

Lemme 2.2.8 *Soit* $f(z\ )$ *une fonction entière telle que* $\mu_p(f) < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné il existe un ensemble* $E_6 \subset (1, \infty)$ *d'une mesure logarithmique infinie, tel que pour tout* z *satisfaisant* $|z| = r \in E_6$, *nous avons*

$$M(r, f) < \exp_p\left\{r^{\mu_p(f)+\varepsilon}\right\}.$$

Preuve. Par la définition d'ordre $p - iteratif$ inférieur, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendant vers ∞, satisfaisante $\left(1 + \frac{1}{n}\right) r_n < r_n$ et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log_{p+1} M(r_n, f)}{\log r_n} = \mu_p.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un n_1 tel que pour $n \geq n_1$, nous avons

$$M(r_n, f) < \exp_p\left\{r_n^{\mu_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}.$$

Soit $E_7 = \cup_{n=n_1}^{\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right) r_n, r_n\right]$, alors pour tout $r \in E_7$, nous avons

$$M(r, f) \leq M(r_n, f) \leq \exp_p\left\{r^{n\mu_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \leq \exp_p\left\{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) r\right]^{\mu_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \leq \exp_p\left\{r^{\mu_p(f)+\varepsilon}\right\}$$

et $m_l E_7 = \sum_{n=n_1}^{\infty} \int_{\frac{n}{n+1} r_n}^{r_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \infty$. La preuve est terminée.

Lemme 2.2.9 *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini. Alors toute solution de l'équation* (2.1.1) *satisfait*

$$\mu_{p+1}(f) \leq \max\left\{\mu_p(A_0), \sigma_p(A_j) : j = 1, \ldots, k-1\right\}.$$

Preuve. De l'équation (2.1.1), nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq |A_{k-1}| \left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |A_0|. \tag{2.2.1}$$

Par le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ d'une mesure logarithmique infinie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$ et $|f(z)| = M(r, f)$, nous avons

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_f(r)}{r}\right)^j (1 + o(1)) \qquad (j = 1, \ldots, k-1). \tag{2.2.2}$$

On pose $a = \max\left\{\mu_p(A_0), \sigma_p(A_j) : j = 1, \ldots, k-1\right\}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour r suffisamment grand, nous avons:

$$|A_j(z)| < \exp_p\left\{r^{a+\varepsilon}\right\} \quad (j = 1, \ldots, k-1). \tag{2.2.3}$$

Par le Lemme 2.2.8, pour tout $\varepsilon > 0$ donné il existe un ensemble $E_6 \subset (1, \infty)$ d'une mesure logarithmique infinie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_6$, nous avons:

$$|A_0(z)| < \exp_p\left\{r^{a+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.4}$$

En remplaçant $(2.2.2) - (2.2.4)$ dans $(2.2.1)$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour $r \in E_6 \backslash E_1$ suffisamment grand tel que $|f(z)| = M(r, f)$, nous avons:

$$\left(\frac{v_f(r)}{r}\right)^k |1 + o(1)| \leq k \exp_p\left\{r^{a+\varepsilon}\right\} \left(\frac{v_f(r)}{r}\right)^{k-1} |1 + o(1)|, \tag{2.2.5}$$

donc

$$v_f(r) \leq krM \exp_p \left\{ r^{a+\varepsilon} \right\}, \tag{2.2.6}$$

où M est une constante positive, par le Lemme 2.2.2 nous avons $\mu_{p+1}(f) \leq a$. Donc la preuve est terminée.

Lemme 2.2.10 [16]. *Soit $f_1, \cdots, f_k$ des solutions méromorphes linéairement indépendantes, de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = 0$$

où les coefficients $a_{k-1}, , \cdots, a_0$ sont des fonctions méromorphes. Alors

$$m(r, a_j) = O \left\{ \log \left(\max_{1 \leq n \leq k} T(r, f_n) \right) \right\} (j = 0, \ldots k-1).$$

Lemme 2.2.11 [19]. *Soit $f(z\ )$ une fonction méromorphe transcendante, et soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_8 \subset (1, \infty)$ d'une mesure logarithmique finie, et une constante $B > 0$ ne dépendant que de α et $(m, n)\,(m, n \in \{0, 1, \ldots k-1\})$ avec $m < n$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$, nous avons*

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)} \right| \leq B \left(\frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log^\alpha r) \log T(\alpha r, f) \right)^{n-m}.$$

Lemme 2.2.12 [5]. *Soit $f(z\ )$ une fonction d'ordre $p-$itératif $(0 < \sigma_p(f) < \infty)$ et de type $p-$itératif $(0 < \tau_p(f) < \infty)$. Alors pour tout $\beta < \tau_p(f)$ donné, il existe un ensemble $E_9 \subset [1, \infty)$ d'une mesure logarithmique infinie, tel que pour tout $r \in E_9$, nous avons*

$$\log_p M(r, f) > \beta r^{\sigma_p(f)}.$$

Lemme 2.2.13 [6, 25]. *Supposons que $k \geq 2$ et $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières d'ordre itératif fini. Si $f(z)$ est une solution de l'équation $(2.1.1)$, alors $i(f) \leq p+1$ et $\sigma_{p+1}(f) \leq \max\{\sigma_p(A_j) : j = 0, \cdots, k-1\} = \sigma$.*

2.3 Preuves des Théorèmes

2.3.1 Preuve du Théorème 2.1.3

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.1.1) . De l'équation (2.1.1) , nous pouvons écrire

$$|A_0(z)| \leq \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right|. \tag{2.3.1}$$

Par le Lemme 2.2.11, il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_8 \subset (1, \infty)$ d'une mesure logarithmique finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\left[T(2r, f)\right]^{k+1} \qquad (j = 1, 2, ..., k). \tag{2.3.2}$$

Si $\max\{\sigma_p(A_j) : j = 1, \cdots, k-1\} < \sigma_p(A_0) = \sigma$, alors par le Théorème 2.1.1, nous constatons que $i(f) = p + 1$ et $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) = \sigma$.
Si $\max\{\sigma_p(A_j) : j = 1, \cdots, k-1\} = \sigma_p(A_0) = \sigma\,(0 < \sigma < \infty)$ et $\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_0)\} < \tau_p(A_0) = \tau\,(0 < \tau < \infty)$. Alors, il existe un ensemble $I \subseteq \{1, 2, ..., k\}$ tel que $\sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_0) = \sigma\,(j \in I)$ et $\tau_p(A_j) < \tau_p(A_0)\,(j \in I)$. Donc, nous choisissons α_1, α_2 satisfaisant $\max\{\tau_p(A_j) : (j \in I))\} < \alpha_1 < \alpha_2 < \tau_p(A_0) = \tau$ tel que pour r suffisament grand, nous avons

$$|A_j(z)| \leq \exp_p(\alpha_1 r^\sigma) \quad (j \in I), \tag{2.3.3}$$

$$|A_j(z)| \leq \exp_p(r^{\alpha_0}) \quad (j \in \{1, 2, ..., k\} \setminus I), \tag{2.3.4}$$

où $0 < \alpha_0 < \sigma$. Par le Lemme 2.2.12, il existe un ensemble $E_9 \subset [1, \infty)$ d'une mesure logarithmique infinie, tel que pour tout $r \in E_9$, nous avons

$$M(r, A_0) > \exp_p(\alpha_2 r^\sigma). \tag{2.3.5}$$

Donc par $(2.3.1) - (2.3.5)$, pour tout z satisfaisant $|A_0(z)| = M(r, A_0)$ et pour r suffisament grand tel que $|z| = r \in E_9 \backslash E_8 \cup [0, 1]$, nous avons

$$\exp_p(\alpha_2 r^\sigma) \leq kB \exp_p(\alpha_1 r^\sigma)\left[T(2r, f)\right]^{k+1}. \tag{2.3.6}$$

Comme $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, nous trouvons par (2.3.6) que

$$\exp\left((1-\gamma)\exp_{p-1}(\alpha_2 r^{\sigma})\right) \leq kB\left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{2.3.7}$$

où $\gamma\,(0<\gamma<1)$ est un nombre réel. Par (2.3.7), le Lemme 2.2.5 et la Définition 2.1.1, nous avons $i(f) \geq p+1$ et $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0) = \sigma$. D'autre part par le Lemme 2.2.13, nous avons $i(f) \leq p+1$ et $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_0) = \sigma$, donc $i(f) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) = \sigma$.

2.3.2 Preuve du Théorème 2.1.5

Nous divisons la preuve en deux parties : (i) $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0)$ et (ii) $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_0)$

(i) De l'équation (2.1.1) nous obtenons

$$-A_0 = \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} + \cdots + A_1\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{2.3.8}$$

Par le lemme de la dérivée logarithmique et (2.3.8), nous avons

$$m(r,A_0) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r,A_j) + O(\log(rT(r,f))) \qquad (r \notin E), \tag{2.3.9}$$

où E est un ensemble de r de mesure linéaire finie. Supposons que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r,A_j)/m(r,A_0) = \alpha < \beta_1 < 1,$$

alors pour r suffisamment grand, nous avons

$$\sum_{j=1}^{k-1} m(r,A_j) < \beta_1 m(r,A_0). \tag{2.3.10}$$

De (2.3.9) et (2.3.10), nous avons

$$(1-\beta_1)\, m(r,A_0) \leq O(\log(rT(r,f))) \qquad (r \notin E). \tag{2.3.11}$$

Par $\sigma_p(A_0) = \sigma$ et le Lemme 2.2.6, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ ayant une mesure logarithmique infinie tel que pour tout r satisfaisant $|z| = r \in E_4 \backslash E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$(1-\beta_1)\exp_{p-1} r^{\sigma-\varepsilon} \le (1-\beta_1)\, m(r, A_0) \le O(\log(rT(r,f))). \qquad (2.3.12)$$

Par (2.3.12) ,nous avons

$$\sigma_{p+1}(f) \ge \sigma_p(A_0).$$

(ii) De (2.1.1) , nous obtenons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \le |A_{k-1}| \left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |A_0|. \qquad (2.3.13)$$

Par le Lemme 2.2.1 et (2.3.13) , pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$ et $|f(z)| = M(r,f)$, nous avons

$$\left|\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^k (1+o(1))\right| \le (|A_{k-1}| + \cdots + |A_0|) \left|\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^{k-1} (1+o(1))\right| \quad (r \notin E_1), \quad (2.3.14)$$

où E_1 est un ensemble de r de mesures linéaire et logarithmique finie. De (2.3.10) et $\sigma_p(A_0) = \sigma$, il est facile de voir que $\sigma_p(A_j) \le \sigma\ (j = 1, \ldots, k-1)$. Par le Lemme 2.2.7 et (2.3.14) , il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ ayant une mesure logarithmique finie tel que pour tout r satisfaisant $|z| = r \notin E_1 \cup E_5$, nous avons:

$$\left|\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^k (1+o(1))\right| \le k \exp_p r^{\sigma+\varepsilon} \left|\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^{k-1} (1+o(1))\right|. \qquad (2.3.15)$$

Par les Lemmes 2.2.1, 2.2.2 et (2.3.15) , nous avons $\sigma_{p+1}(f) \le \sigma_p(A_0)$. De (i) et (ii) , on obtient que toute solution non triviale $f(z)$ de (2.1.1) satisfait $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) = \sigma$.

2.3.3 Preuve du Corollaire 2.1.6

Il suffit de prendre $p = 1$ dans le Théorème 2.1.5

2.3.4 Preuve du Théorème 2.1.8

i) De l'équation (2.1.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} -A_s &= \frac{f}{f^{(s)}}\left\{\frac{f^{(k)}}{f}+A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f}+A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f}\cdots\right. \\ &\qquad \left.+A_1\frac{f'}{f}+A_0\right\}. \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Par le lemme de la dérivée logarithmique et (2.3.16) , nous avons

$$m(r,A_s) \le m\left(r,\frac{f}{f^{(s)}}\right)+\sum_{j\neq s} m(r,A_j)+O(\log(rT(r,f))) \qquad (r\notin E), \tag{2.3.17}$$

où E est un ensemble de r d'une mesure linéaire finie. On remarque que

$$\begin{aligned} m\left(r,\frac{f}{f^{(s)}}\right) &\le m(r,f)+m\left(r,\frac{1}{f^{(s)}}\right) \\ &\le T(r,f)+T\left(r,\frac{1}{f^{(s)}}\right) \\ &= T(r,f)+T\left(r,f^{(s)}\right)+O(1) \\ &\le (s+2)T(r,f)+o(T(r,f))+O(1). \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Pour r suffisamment grand, nous avons

$$O(\log r+\log T(r,f)) \le \frac{1}{2}T(r,f). \tag{2.3.19}$$

Donc, par (2.3.17) – (2.3.19), pour r suffisamment grand, nous avons

$$m(r,A_s) \le cT(r,f)+\sum_{j\neq s} m(r,A_j), \tag{2.3.20}$$

où c est une constante. Supposons que $\overline{\lim_{r\to\infty}}\sum_{j\neq s} m(r,A_j)/m(r,A_s) < \alpha < 1$, alors pour r suffisamment grand, nous avons

$$\sum_{j\neq s} m(r,A_j) < \alpha m(r,A_s). \tag{2.3.21}$$

De $(2.3.20)$ et $(2.3.21)$, nous avons

$$(1-\alpha)\, m\,(r, A_s) \leq cT\,(r, f) \quad (r \notin E)\,. \tag{2.3.22}$$

Par $\sigma_p(A_s) = \sigma$ et le Lemme 2.2.6, il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ ayant une mesure logarithmique infinie tel que pour tout r satisfaisant $|z| = r \in E_4 \backslash E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$(1-\alpha) \exp_{p-1} r^{\sigma-\varepsilon} \leq (1-\alpha)\, m\,(r, A_s) \leq cT\,(r, f)\,. \tag{2.3.23}$$

De $(2.3.23)$, on aura

$$\sigma_p(A_s) \leq \sigma_p(f), \tag{2.3.24}$$

ii) Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de $(2.1.1)$. Nous pouvons réécrire $(2.1.1)$ sous la forme

$$\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\,(z)\, \frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_{s+1}\,(z)\, \frac{f^{(s+1)}}{f} + A_s\,(z)\, \frac{f^{(s)}}{f} + A_{s-1}\,(z)\, \frac{f^{(s-1)}}{f} + \cdots$$

$$+A_1 \frac{f'}{f} + A_0\,(z) = 0. \tag{2.3.25}$$

Par le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ d'une mesure logarithmique finie tel que pour tout r satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$ et $|f\,(z)| = M\,(r, f)$, on a

$$\frac{f^{(n)}\,(z)}{f\,(z)} = \left(\frac{v_f\,(r)}{z}\right)^n (1 + o\,(1)) \qquad (n \in N, r \notin E_1)\,. \tag{2.3.26}$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné et pour r suffisamment grand, nous avons

$$|A_j\,(z)| \leq \exp_p \left\{ r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon} \right\} \quad (j = 0, 1, \cdots, k-1)\,. \tag{2.3.27}$$

En substituant $(2.3.26)$ en $(2.3.25)$, nous obtenons en utilisant $(2.3.27)$

$$\left(\frac{v_f\,(r)}{|z|}\right)^k |1 + o\,(1)| \leq k \left(\frac{v_f\,(r)}{|z|}\right)^{k-1} |1 + o\,(1)| \exp_p \left\{ r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon} \right\}, \tag{2.3.28}$$

$(r \notin [0,1] \cup E_1)$. Par le Lemme 2.2.2, le Lemme 2.2.5 et (2.3.28) , nous trouvons que $i(f) \leq p+1$ et

$$\sigma_{p+1}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+1} v_f(r)}{\log r} \leq \sigma_p(A_s) + \varepsilon. \tag{2.3.29}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors

$$\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s). \tag{2.3.30}$$

De (2.3.24) et (2.3.30) nous avons $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_s)$.

Maintenant, supposons que $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est une solution base de (2.1.1) . Alors par le Lemme 2.2.10

$$m(r, A_s) \leq M \log \left(\max_{1\leq n\leq k} T(r, f_n) \right). \tag{2.3.31}$$

Nous affirmons qu'il existe un ensemble $E_9 \subset (0, +\infty)$ d'une mesure logarithmique infinie tel que

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_9}} \frac{\log_p m(r, A_s)}{\log r} = \sigma_p(A_s). \tag{2.3.32}$$

En effet, il existe une séquence $\{r_n\}$ $(r_n \to \infty)$ telle que

$$\lim_{r_n\to\infty} \frac{\log_p m(r_n, A_s)}{\log r_n} = \sigma_p(A_s). \tag{2.3.33}$$

Prenons $E_9 = \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n, 2r_n]$. Alors sur E_9, évidemment (2.3.32) est vérifiée. Notons par $E_n = \{r : r \in E_9 \text{ et } m(r, a_s) \leq M \log T(r, f_n) \quad (n = 1, \ldots, k)\} \leq M \log T(r, f_n) \quad (n = 1, \ldots, k)$, nous avons $\bigcup_{n=1}^{k} E_n = E_9$. Il est facile de voir qu'il existe au moins un E_n, soit E_s qui a une mesure linéaire infini et sur lequel

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E_s}} \frac{\log_p m(r, A_s)}{\log r} = \sigma_p(A_s) \tag{2.3.34}$$

et

$$m(r_n, A_s) \leq M \log T(r, f_1) \quad (r \in E_s). \tag{2.3.35}$$

De (2.3.34) et (2.3.35) nous avons $i\left(f_1\right) \leq p+1$ et $\sigma_{p+1}(f_1) \leq \sigma_p(A_s)$ ce qui donne $i\left(f_1\right) \leq p+1$ et $\sigma_{p+1}(f_1) = \sigma_p(A_s)$. La preuve du Théorème 2.1.8 est complète.

2.3.5 Preuve du Corollaire 2.1.9

Il suffit de prendre $p = 1$ dans le Théorème 2.1.6.

2.3.6 Preuve du Théorème 2.1.10

Supposons que $f\left(z\right)$ est une solution de $\left(2.1.1\right)$. De l'équation (2.1.1) on a

$$A_s = \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} + \cdots + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} + \left[A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f} + \cdots + A_0\right]\frac{f}{f^{(s)}}. \qquad (2.3.36)$$

Par le Lemme 2.2.11, il existe un ensemble $E_8 \subset (1, \infty)$ d'une mesure logarithmique finie, et une constante $B > 0$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}\left(z\right)}{f^{(s)}\left(z\right)}\right| \leq B.r\left[T\left(2r, f\right)\right]^{k+1}, \qquad j = s+1, \ldots, k, \qquad (2.3.37)$$

et

$$\left|\frac{f^{(j)}\left(z\right)}{f\left(z\right)}\right| \leq B.r\left[T\left(2r, f\right)\right]^{k+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s-1. \qquad (2.3.38)$$

Pour r suffisamment grand et pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\left|A_j\left(z\right)\right| \leq \exp_p\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}, \quad (j = 0, \ldots, s-1, s+1, \ldots, k-1) \qquad (2.3.39)$$

Par le Lemme 2.2.12 $\left(1 < \tau_p\left(f\right)\right)$, il existe un ensemble $E_9 \subset [1, \infty)$ d'une mesure logarithmique infinie, tel que pour tout $r \in E_9$, nous avons $\log_p M\left(r, A_s\right) > r^{\sigma_p(f)}$ pour tout z satisfaisant $\left|A_s\left(z\right)\right| = M\left(r, A_s\right)$. Pour $r \in E_9$ suffisamment grand, nous avons

$$\left|A_s\left(z\right)\right| > \exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_s)}\right\}. \qquad (2.3.40)$$

Par le Lemme 2.2.3, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ d'une mesure logarithmique finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$. et $|f(z)| = M(r, f)$, nous avons

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq 2r^s, \quad (s \in \mathbb{N}). \tag{2.3.41}$$

En utilisant $(2.3.36) - (2.3.41)$, nous trouvons que pour z satisfaisant $|z| = r \in E_9 - ([0,1] \cup E_1 \cup E_8)$ et $|f(z)| = M(r, f)$

$$\exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_s)}\right\} \leq 2r^s kBr\,[T(2r, f)]^{k+1} \exp_p\left\{r^{b+\varepsilon}\right\} \tag{2.3.42}$$

Comme $b + \varepsilon < \sigma_p(A_s)$, alors pour r suffisamment grand $\exp_p\left\{r^{b+\varepsilon}\right\} = o\left(\exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_s)}\right\}\right)$, donc

$$\lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log_{p+1} T(r, f)}{\log r} \geq \sigma_p(A_s) \tag{2.3.43}$$

ainsi

$$\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_s). \tag{2.3.44}$$

D'autre part, nous pouvons réécrire (2.1.1) sous la forme

$$\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f} + \ldots + A_{s+1}(z)\frac{f^{(s+1)}}{f} + A_s(z)\frac{f^{(s)}}{f} + A_{s-1}(z)\frac{f^{(s-1)}}{f} + \ldots$$

$$+A_1(z)\frac{f'}{f} + A_0(z) = 0 \tag{2.3.45}$$

Par le Lemme 2.2.1 il existe un ensemble E_1 d'une mesure logarithmique finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$ et $|f(z)| = M(r, f)$, nous avons

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^k (1 + o(1)). \tag{2.3.46}$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné et r suffisamment grand, nous avons

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\right\} \qquad (j = 0, \ldots, k-1). \tag{2.3.47}$$

En substituant (2.3.46) en (2.3.45) , nous obtenons en utilisant (2.3.47)

$$\left(\frac{v_f(r)}{|z|}\right)^k |1+o(1)| \leq k\left(\frac{v_f(r)}{|z|}\right)^k |1+o(1)| \exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\right\}, \tag{2.3.48}$$

pour $r \notin [0,1] \cup E_1$. Par le Lemme 2.2.5, le Lemme 2.2.2 et (2.3.48) nous trouvons que $i(f) \leq p+1$ et

$$\sigma_{p+1}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p v_f(r)}{\log r} \leq \sigma_p(A_s) + \varepsilon. \tag{2.3.49}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors

$$\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s). \tag{2.3.50}$$

Les relations (2.3.44) et (2.3.50) implique que $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_s)$.

2.3.7 Preuve du Corollaire 2.1.11

Il suffit de prendre $s = 0$, dans le Théorème 2.1.10.

2.3.8 Preuve du Corollaire 2.1.12

Il suffit de prendre $p = 1$, dans le Théorème 2.1.10.

2.3.9 Preuve du Théorème 2.1.15

On sait que toute solution non triviale f de l'équation (2.1.1) satisfait $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$. Donc nous avons seulement besoin de prouver que toute solution non triviale f de (2.1.1) satisfait $\mu_{p+1}(f) = \mu_p(A_0)$. De l'équation (2.1.1) nous avons

$$-A_0 = \frac{f^{(k)}}{f} + \cdots + A_1\frac{f'}{f}. \tag{2.3.51}$$

Par cette égalité et le lemme de la dérivée logarithmique, nous avons

$$m(r, A_0) \leq \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \sum_{j=1}^{k} m(r, A_j) + O(1) \leq O\{\log rT(r,f)\} + \sum_{j=1}^{k} m(r, A_j), \tag{2.3.52}$$

où $r \notin E_{10}$, $E_{10} \subset (1, \infty)$ est un ensemble fini d'une mesure linéaire finie. Soit $b = \max\{\sigma_p (A_j)(j \neq 0)\}$, alors pour tout $\varepsilon \left(0 < 2\varepsilon < \mu_p (A_0) - b\right)$ et pour r suffisamment grand, nous avons

$$m (r, A_0) > \exp_p \left\{r^{\mu_p(A_0)-\varepsilon}\right\}, \quad m (r, A_j) < \exp_p \left\{r^{b+\varepsilon}\right\} \quad j \neq 0. \tag{2.3.53}$$

En remplaçant (2.3.53) dans (2.3.52) , nous avons

$$\exp_p \left\{r^{\mu_p(A_0)-\varepsilon}\right\} \leq O \{\log rT (r, f)\} + k \exp_p \left\{r^{b+\varepsilon}\right\} \qquad r \notin E_{10}. \tag{2.3.54}$$

Par (2.3.54) et le Lemme 2.2.5 (ii) , nous avons $\mu_{p+1} (f) \geq \mu_p (A_0)$. D'autre part, par le Lemme 2.2.9, nous avons $\mu_{p+1} (f) \leq \mu_p (A_0)$, donc toute solution non triviale f de (2.1.1) satisfait $\mu_{p+1} (f) = \mu_p (A_0)$. Donc la preuve du Théorème 2.1.15 est terminée.

2.3.10 Preuve du Corollaire 2.1.16

$\mu_p (A_0) = \mu_{p+1} (f) \leq \sigma_{p+1} (f) = \sigma_p (A_0)$ et $\mu_p (A_0) = \sigma_p (A_0)$ implique que $\mu_{p+1} (f) = \sigma_{p+1} (f) = \sigma_p (A_0)$.

Chapitre 3

Oscillation des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes d'ordre itératif fini

3.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre nous allons étudier la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes d'ordre itératif fini, nous voulons prouver les résultats de J.Tu et Z.X. Chen en utilisant d'autres conditions. En 1999, Zong-Xuan Chen a étudié les solutions méromorphes de $(2.1.1)$, il a obtenu le resultat suivant:

Théorème 3.1.1 [11] .*Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions mèromorphes satisfaisant*

$$b = \max\left\{\sigma(A_j)(j = 1, 2, \ldots, k-1), \lambda\left(\frac{1}{A_0}\right)\right\} < \mu(A_0) \leq \sigma(A_0) < \infty.$$

Si l'équation $(2.1.1)$ *a des solutions méromorphes, alors toute solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *du* $(2.1.1)$ *satisfait* $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

En 2007 Tingbin Cao et Hongxun Yi ont amélioré et étendu le Théorème 3.1.1, de l'hyper ordre à l'ordre itératif et les équations homogènes aux équations nonhomogène, et ils ont omis la condition de l'ordre inférieur $\mu(A_0)$ dans le Théorème 3.1.1. Ils ont obtenu les résultats suivants:

Théorème 3.1.2 $[9]$. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions méromorphes telles que*

$$i(A_0) = p\,(0 < p < \infty), \quad \max\{\sigma_p(A_j) : j = 1, 2, \ldots, k-1\} < \sigma_p(A_0) = \sigma$$

et

$$\max\left\{\lambda_1\left(\frac{1}{A_j}\right) : j = 0, 1, 2, \ldots, k-1\right\} < \sigma_1(A_0).$$

Alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ *de* (2.1.1) *satisfait* $i(f) = p+1$ *et* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

Théorème 3.1.3 $[9]$. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, *des fonctions méromorphes telles que*

$$i(A_s) = p\,(0 < p < \infty)\,(s \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}), \quad \max\{\sigma_p(A_j) : j \neq s\} < \sigma_p(A_0) = \sigma,$$

et

$$\max\left\{\lambda_1\left(\frac{1}{A_j}\right) : j = 0, 1, 2, \ldots, k-1\right\} < \sigma_1(A_s).$$

Alors toute solution méromorphe transcendante f *de l'équation* (2.1.1) *satisfait* $p \leq i(f) \leq p+1$ *et* $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s) \leq \sigma_p(f)$. *De plus, si toutes les solutions* $f(z)$ *de* (2.1.1) *sont des fonctions mèromorphes, alors il existe au moins une solution méromorphe* f_1 *satisfaisante* $i(f_1) = p+1$ *et* $\sigma_{p+1}(f_1) = \sigma_p(A_s)$.

Théorème 3.1.4 $[9]$. *Supposons que* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *satisfont les hypothèses du Théorème* 3.1.2. *Soit* $F \not\equiv 0$ *une fonction méromorphe avec* $i(F) = q$, *où* $q \in \mathbb{N}$. *Supposons que toutes les solutions de l'équation* (2.1.2) *sont des fonctions méromorphes. Alors*

1) Si $q > p+1$, *ou* $q = p+1$*et* $\sigma_q(F) > \sigma_p(A_0)$, *alors toute solution* $f(z)$ *de* (2.1.2) *satisfait* $i(f) = i(F) = q$ *et* $\sigma_q(f) = \sigma_q(F)$.

2) Si $i(F) = q < p+1$, *ou* $q = p+1$ *et* $\sigma_q(F) < \sigma_p(A_0)$, *alors toute solution* $f(z)$ *de* (2.1.2) *satisfait* $i(f) = i_\lambda(f) = i_{\overline{\lambda}}(f) = p+1$ *et* $\sigma_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \overline{\lambda}_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

avec au plus une exception.

Théorème 3.1.5 [9]. *Supposons que* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *satisfont les hypothèses du Théorème* 3.1.3. *Soit* $F \not\equiv 0$ *une fonction méromorphe avec* $i(F) = q$, *où* $q \in \mathbb{N}$. *Supposons que toutes les solutions de l'équation* (2.1.2) *sont des fonctions méromorphes. Soit* f_0 *une solution de l'équation* (2.1.2), *et* $g_1, g_2, \cdots, g_k$ *sont des solutions base de l'équation homogène correspondante à l'équation* (2.1.2). *Alors*

1) Si $q > p+1$, *ou* $q = p+1$ *et* $\sigma_q(F) > \sigma_p(A_s)$, *alors toute solution* $f(z)$ *de l'équation* (1.1.2) *satisfait* $i(f) = i(F) = q$ *et* $\sigma_q(f) = \sigma_q(F)$.

2) Si $i(F) = q < p+1$, *ou* $q = p+1$ *et* $\sigma_q(F) < \sigma_p(A_s)$ *alors il existe* $g_i\,(i \in \{1, 2, \cdots, k\})$, *noté* g_1,*tel que la solution dans le sous-espace des solutions* $G = \{f_c = cg_1 + f_0, c \in \mathbb{C}\}$ *satisfait* $i(f_c) = i_\lambda(f_c) = i_{\overline{\lambda}}(f_c) = p+1$ *et* $\sigma_{p+1}(f_c) = \lambda_{p+1}(f_c) = \overline{\lambda}_{p+1}(f_c) = \sigma_p(A_s)$ *avec au plus une exception.*

En 2009 J.Tu et Z.X. Chen ont étudié les équations (2.1.1) et (2.1.2). Ils ont obtenu les resultats suivants

Théorème 3.1.6 [30]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z), A_s(z) \not\equiv 0$ *des fonctions mèromorphes d'ordre itératif fini satisfaisantes*

$$\max\left\{\sigma_p(A_j), \lambda_p\left(\frac{1}{A_s}\right), \quad j \neq s\right\} < \mu_p(A_s) \leq \sigma_p(A_s) = \sigma < \infty \, (0 < p < \infty),$$

ou $i(A_j) < p$ *pour* $j \neq s$. *Si* $f \not\equiv 0$ *est une solution méromorphe de* (2.1.1) *satisfaisante* $\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < M$, *alors* $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s)$.

Théorème 3.1.7 [30]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z), A_0(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisantes*

$$\max\left\{\sigma_p(A_j), \lambda_p\left(\frac{1}{A_0}\right), \quad j \neq 0\right\} < \mu_p(A_0) \leq \sigma_p(A_0) = \sigma_1 < \infty, 0 < p < \infty,$$

ou $i(A_j) < p$ *pour* $j \neq 0$. *Si* $f \not\equiv 0$ *est une solution méromorphe de* (2.1.1) *satisfaisante* $\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < M$, *alors* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) = \sigma_1$.

Théorème 3.1.8 $[30]$. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions mèromorphes satisfaisantes les hypothèses du Théorème* 3.1.5, *et soit* $F \not\equiv 0$ *une fonction méromorphe d'ordre itératif fini avec* $i(F) = q$. *Si toutes les solutions de* (2.1.2) *sont des fonctions méromorphes et satisfaisantes* $\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < M$, *alors les conclusions suivantes sont vérifiées:*

(*i*) *Si* $q < p+1$ *ou* $q = p+1$, $\sigma_{p+1}(F) < \sigma_p(A_0) = \sigma_1$, *alors toute solution* $f(z)$ *de* (2.1.2) *satisfait* $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_1$, *avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *satisfaisante* $i(f_0) < p+1$ *ou* $\sigma_{p+1}(f_0) < \sigma_1$.

(*ii*) *Si* $q > p+1$ *ou* $q = p+1$, $\sigma_p(A_0) \leq \sigma_{p+1}(F) < +\infty$, *alors toute solution* $f(z)$ *de* (2.1.2) *satisfait* $i(f) = q$ *et* $\sigma_q(f) = \sigma_q(F)$.

En 2009 J.Tu et T. Long ont étudié les équations (2.1.1) et (2.1.2). Ils ont obtenu les resultats suivants:

Théorème 3.1.9 $[31]$. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z), F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes. Si* $f(z)$ *est une solution méromorphe de l'équation* (1.1.2) *satisfaisante* $i(f) = p+1$, $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_2$ *et* $\overline{\lim_{r\to\infty}} \left[\sum_{j=0}^{k-1} T(r, A_j) + T(r,F)\right] / T(r,f) < 1$, *alors* $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_2$.

Théorème 3.1.10 $[31]$. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, *des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisantes* $i(A_0) = p$, $\delta(\infty, 0) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{m(r,A_0)}{T(r,A_0)} > 0$ *et* $\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) / m(r, A_0) < 1$. *Alors toute solution non triviale* $f(z)$ *de l'équation* (2.1.1) *satisfait* $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0)$.

Nous voulons prouver les Théorèmes 3.1.6 , 3.1.7, 3.1.8 en utilisant d'autres conditions. On obtient les théorèmes suivants:

Théorème 3.1.11 *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisantes*

$$\max\left\{\lambda_p\left(\frac{1}{A_j}\right), j = 0, 1, \ldots, k-1\right\} < \sigma_p(A_0)$$

et $\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) / m(r, A_0) < 1$, $0 < p < \infty$, *ou* $i(A_j) < p$ *pour* $j \neq 0$. *Si* $f \not\equiv 0$ *est une solution méromorphe de* (2.1.1) *et satisfait* $\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < M$, *alors* $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma(A_0)$.

Théorème 3.1.12 *Soient $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z), A_s \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisantes*

$$\max\left\{\lambda_p\left(\frac{1}{A_j}\right), j = 0, 1, \ldots, k-1\right\} < \mu_p(A_s) \leq \sigma_p(A_s) < \infty$$

et $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j\neq s} m(r, A_j)/m(r, A_s) < 1,\ 0 < p < \infty,$ *ou* $i(A_j) < p$ *pour* $j \neq s$. *Si* $f \not\equiv 0$ *est une solution méromorphe de* (2.1.1) *et satisfait* $\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < M$, *alors* $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s) \leq \sigma_p(f)$.

Corollaire 3.1.13 *Soient $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisantes*

$$\max\left\{\lambda_p\left(\frac{1}{A_j}\right), j = 0, 1, \ldots, k-1\right\} < \mu_p(A_0) \leq \sigma_p(A_0) < \infty$$

et $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \sum\limits_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)/m(r, A_0) < 1,\ 0 < p < \infty,$ *ou* $i(A_j) < p$ *pour* $j \neq 0$. *Si* $f \not\equiv 0$ *est une solution méromorphe de* (2.1.1) *et satisfaite* $\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < M$, *alors* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

Pour le cas non-homogène, nous avons:

Théorème 3.1.14 *Soient $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, des fonctions méromorphes satisfaisantes les hypothèses du Corollaire* 3.1.9, *et soit $F \not\equiv 0$ une fonction méromorphe d'ordre itératif fini avec $i(F) = q$. Si toutes les solutions de* (2.1.2) *sont des fonctions méromorphes satisfaisantes* $\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < M$, *alors les conclusions suivantes sont vérifiées:*

1) Si $q < p+1$ ou $q = p+1$, $\sigma_{p+1}(F) < \sigma_p(A_0) = \sigma$, alors toute solution $f(z)$ de (2.1.2) *satisfait $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma$, avec au plus une exception.*

2) Si $q > p+1$ ou $q = p+1$, $\sigma_p(A_0) \leq \sigma_{p+1}(F) < +\infty$, alors toute solution $f(z)$ de (2.1.2) *satisfait $i(f) = q$ et $\sigma_q(f) = \sigma_q(F)$.*

3.2 Lemmes pour les preuves des théorèmes

Lemme 3.2.1 [29]. *Soit $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où $g(z), d(z)$ sont des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisantes $\mu_p(g) = \mu_p(f) \leq \sigma_p(g) = \sigma_p(f) = \sigma < \infty,\ 0 < p < \infty,\ i(d) < p$ ou*

$\sigma_p(d) < \mu_p(g)$. *Soit* z *un point tel que* $|z| = r$ *pour lequel* $|g(z)| = M(r,g)$, $v_g(r)$ *désigne l'indice central de* g. *Alors l'estimation*

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^k (1 + o(1)) \qquad (k \in \mathbb{N}, r \notin E_{11})$$

est réalisée pour tout $|z| = r$ *en dehors d'un ensemble* E_{11} *de* r *d'une mesure logarithmique finie.*

Lemme 3.2.2 [9]. *Soit* s *un nombre entier naturel. Supposons que* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *satisfait les hypothèses du Lemme* 3.2.1. *Alors l'estimation* $\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}$ *est réalisée pour* r *suffisamment grand* , *et* $|g(z)| = M(r,g)$.

Lemme 3.2.3 [23]. *Si* f *est une fonction méromorphe telle que* $i(f) = p \geq 1$, *alors* $\sigma_p(f) = \sigma_p(f')$.

Lemme 3.2.4 [29]. *Soit* $A(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre iteratif fini et satisfait* $i(A) = p, 0 < p < \infty$. *Si* $i_\lambda\left(\frac{1}{A}\right) < p$ *ou* $\lambda_p\left(\frac{1}{A}\right) < \sigma_p(A)$, *alors nous avons*

$$|A(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\sigma_p(A)+\varepsilon}\right\} \quad (r \notin E_{12}),$$

où E_{12} *est un ensemble de* r *d'une mesure linéaire finie.*

Lemme 3.2.5 [29]. *Soient* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z), F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes, et soit* $f(z)$ *une solution méromorphe de* (2.1.2) *satisfaisante l'une des conditions suivantes :*

(i) $\max\{i(F) = q, i(A_j)(j = 0, ..., k-1)\} < i(f) = p + 1 \,(0 < p < \infty)$,

(ii) $b = \max\{\sigma_{p+1}(F), \sigma_{p+1}(A_j)(j = 0, ..., k-1)\} < \sigma_{p+1}(f)$. *Alors* $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f)$.

3.3 Preuves des Théorèmes

3.3.1 Preuve du Théorème 3.1.2

Soit $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe de l'équation (2.1.1). Si $p = 1$, alors par le Théorème 3.1.1, nous obtenons le Théorème 3.1.2. Maintenant nous supposons que $p \geq 2$. Par l'équation (2.1.1), nous avons

$$-A_0 = \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} + \cdots + A_1\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{3.3.1}$$

Par le Lemme 2.2.4 et (3.3.1), nous avons

$$\begin{aligned} m(r, A_0) \quad &\leq \quad \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = \\ &\sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + O(\log(rT(r,f))) \qquad (r \notin E_2), \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

où $E_2 \subset (1, \infty)$ est un ensemble de r d'une mesure linéaire finie. Donc pour tout $|z| = r \notin E_2$ nous avons

$$T(r, A_0) \leq N(r, A_0) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + O(\log(rT(r,f))). \tag{3.3.3}$$

Soit $b = \max\{\sigma_p(A_j), j = 1, \ldots k-1\}$. Pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \sigma - b)$ donné, et comme $\sigma_p(A_0) = \sigma$, il existe une séquence $\{r_n\}$ satisfaisante $r_n \notin E_2$ et

$$T(r_n, A_0) \geq \exp_{p-1}\left\{r_n^{\sigma-\varepsilon}\right\}, \tag{3.3.4}$$

$$N(r_n, A_0) \leq r^{\alpha} < \exp_{p-1}\left\{r_n^{\sigma+\varepsilon}\right\}, \tag{3.3.5}$$

$$m(r_n, A_j) \leq T(r_n, A_j) \leq \exp_{p-1}\left\{r_n^{\sigma+\varepsilon}\right\}, \qquad j = 1, \ldots k-1. \tag{3.3.6}$$

Donc nous obtenons de (3.3.3) – (3.3.6) que

$$\exp_{p-1}\left\{r_n^{\sigma-\varepsilon}\right\} \leq O(\log(r_n T(r_n, f))).$$

Cela donne

$$i(f) \geq i_{\mu}(f) \geq p+1, \quad \sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0) \tag{3.3.7}$$

D'autre part, de l'équation (2.1.1) nous trouvons que les pôles de $f(z)$ sont seulement les pôles des $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$. Donc $i_{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right) < 1$ et $\lambda_1\left(\frac{1}{f}\right) \leq a = \max\{\lambda_1\left(\frac{1}{A_j}\right) : j = 0, 1, \ldots, k-1\}$. Par le théorème de factorisation d' Hadamard, nous pouvons écrire $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où g, d

sont des fonctions entières satisfaisantes $i(g) = i(f) = t \geq p+1$ et $\sigma_t(f) = \sigma_t(g), \lambda_1(d) = \sigma_1(d) = \lambda_1\left(\frac{1}{f}\right) \leq a < \sigma_1(A_0) = \sigma_1(f) = \infty$. Par le Lemme 2.2.1, il existe une séquence $\{r_n\}$ $(r_n \to \infty)$ telle que on a

$$\frac{f^{(m)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r_n)}{z}\right)^m (1 + o(1)), \qquad m = 1, 2, \dots k-1 \tag{3.3.8}$$

pour r_n assez grand, où $|z| = r_n$ et $|g(z)| = M(r_n, g)$. Pour tout $\varepsilon (> 0)$ donné, et pour r suffisamment grand, nous obtenons à partir des Lemmes 2.2.5 et 3.2.4 que

$$|A_j| \leq \exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_0)+\varepsilon}\right\}, \quad j = 0, 1, \dots k-1, \quad r \notin E_3. \tag{3.3.9}$$

En substituant (3.3.8) – (3.3.9) en (2.1.1) , nous obtenons

$$\begin{aligned}\left(\frac{v_g(r_n)}{|z|}\right)^k |1 + o(1)| &\leq \left(\frac{v_g(r_n)}{|z|}\right)^{k-1} |1 + o(1)| \left(|A_{k-1}| + \cdots + |A_0|\right) \\ &\leq k\left(\frac{v_g(r_n)}{|z|}\right)^{k-1} |1 + o(1)| \exp_p\left\{r_n^{\sigma_p(A_0)+\varepsilon}\right\}.\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Par le Lemme 2.2.2 et (3.3.10) nous aurons

$$\sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(g) = \overline{\lim_{r_n\to\infty}} \frac{\log_{p+1} v_g(r_n)}{\log r_n} \leq \sigma_p(A_0) + \varepsilon. \tag{3.3.11}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on déduit par (3.3.7) et (3.3.11) que $i(f) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

3.3.2 Preuve du Théorème 3.1.3

Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (2.1.1). De l'équation (2.1.1) nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}-A_s &= \left\{\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} + \cdots + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} + A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} + \cdots + A_0\frac{f}{f^{(s)}}\right\} \\ &= \frac{f}{f^{(s)}}\left\{\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f} + A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f} + \cdots + A_0\right\}.\end{aligned}$$

Comme

$$m\left(r,\frac{f}{f^{(s)}}\right)\leq T\left(r,f\right)+T\left(r,\frac{1}{f^{(s)}}\right)=T\left(r,f\right)+T\left(r,f^{(s)}\right)+O\left(1\right),$$

on obtient alors

$$T\left(r,A_s\right)\leq N\left(r,A_s\right)+\sum_{j\neq s}m\left(r,A_j\right)+O\left(\log\left(rT\left(r,f\right)\right)\right)+T\left(r,f\right)+T\left(r,f^{(s)}\right)\quad r\notin E_4.$$

En utilisant la même méthode comme dans la première partie de la preuve du Théorème 3.1.2, nous voyons qu'il existe $\{r_n\}\,(r_n\rightarrow\infty)$ telle que

$$\sigma_p\left(A_s\right)=\lim_{r_n\rightarrow\infty}\frac{\log_p T\left(r_n,A_s\right)}{\log r_n},$$

$$T\left(r_n,A_s\right)\leq T\left(r_n,f\right)+T\left(r_n,f^{(s)}\right)+O\left(\log\left(r_nT\left(r_n,f\right)\right)\right).$$

Donc nous avons $i\left(f\right)\geq p,\sigma_p\left(f\right)\geq\sigma_p\left(A_s\right).$ Comme dans la première partie de la preuve du Théorème 3.1.2, nous pouvons obtenir $i\left(f\right)\leq p+1$ et $\sigma_{p+1}\left(f\right)\geq\sigma_p\left(A_s\right).$ Par conséquent $p\leq i\left(f\right)\leq p+1$ et $\sigma_{p+1}\left(f\right)\leq\sigma_p\left(A_s\right)\leq\sigma_p\left(f\right).$ Comme toutes les solutions de l'équation (2.1.1) sont méromorphes, alors nous pouvons supposer que $\{f_1,f_2,\cdots,f_k\}$ est une base des solutions méromorphes de l'équation (2.1.1) . Par le Lemme 2.2.10 nous avons

$$m\left(r,A_s\right)=O\left\{\log\left(\max_{1\leq n\leq k}T\left(r,f_n\right)\right)\right\}$$

pour r assez grand. On a $N\left(r,A_s\right)<m\left(r,A_s\right).$ En fait, si $N\left(r,A_s\right)\geq m\left(r,A_s\right),$ alors

$$T\left(r,A_s\right)=m\left(r,A_s\right)+N\left(r,A_s\right)\leq 2N\left(r,A_s\right),$$

$$\overline{\lim_{r\rightarrow\infty}}\frac{\log T\left(r,A_s\right)}{\log r}\leq\overline{\lim_{r\rightarrow\infty}}\frac{\log 2N\left(r,A_s\right)}{\log r},$$

$$\sigma_1\left(A_s\right)\leq\lambda_1\left(\frac{1}{A_s}\right).$$

Ce qui contredit la condition $\lambda_1\left(\frac{1}{A_s}\right) \leq a < \sigma_1(A_s)$. Donc nous avons

$$N(r, A_s) < m(r, A_s) = O\left\{\log\left(\max_{1\leq n\leq k} T(r, f_n)\right)\right\},$$

d'où

$$T(r, A_s) = m(r, A_s) + N(r, A_s) = O\left\{\log\left(\max_{1\leq n\leq k} T(r, f_n)\right)\right\}.$$

Donc, il existe un f_n, soit f_1, qui satisfait $T(r, A_s) = O\{\log T(r, f_1)\}$. Donc $i(f_1) \geq p+1$ et $\sigma_{p+1}(f_1) \geq \sigma_p(A_s)$. Par suite, nous avons $i(f_1) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f_1) = \sigma_p(A_s)$.

3.3.3 Preuve du Théorème 3.1.4

Comme toutes les solutions f de l'équation (2.1.2) sont des fonctions méromorphes, alors toutes les solutions de l'équation homogène (2.1.1) correspondante à l'équation (2.1.2) sont aussi des fonctions méromorphes. Donc nous pouvons assumer que $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$ est une base des solutions méromorphes de l'équation (2.1.1). Par le Théorème 3.1.2, nous trouvons que $i(f_j) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f_j) = \sigma_p(A_0)$. Alors toute solution de l'équation (2.1.2) est de la forme

$$f(z) = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_k f_k, \tag{3.3.12}$$

où $A_1, A_2, \cdots, A_k$ sont des fonctions méromorphes vérifiant

$$A_j' = F.G_j(f_1, f_2, \cdots, f_k).W^{-1}(f_1, f_2, \cdots, f_k) \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.3.13}$$

où $G_j(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ est un polynômes différentiel en $f_1, f_2, \cdots, f_k$ et leurs dérivées, $W(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ est le wronskien de $f_1, f_2, \cdots, f_k$. Donc par le Lemme 3.2.3 , nous obtenons

$$i(f) \leq \max\{p+1, q\}. \tag{3.3.14}$$

1) Si $q > p+1$, ou $q = p+1$ et $\sigma_q(F) > \sigma_p(A_0)$, il s'ensuit de (3.3.12) – (3.3.14) et l'équation (2.1.2) que

$$i(f) = i(F) = q \quad \text{et} \qquad \sigma_q(f) = \sigma_q(F).$$

2) Si $i(F) = q < p+1$, ou $q = p+1$ et $\sigma_q(F) < \sigma_p(A_0)$, il s'ensuit de $(3.3.12) - (3.3.14)$ et l'équation (2.1.2) que $i(f) < p+1$, ou $i(f) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_0)$. Maintenant nous affirmons que toute solution f de l'équation (2.1.2) satisfait $i(f) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$ avec au plus une exception. En fait, s'il existe deux solutions méromorphes g_1, g_2 de l'équation (2.1.2) satisfaisantes $i(g_i) < p+1$ ou $\sigma_{p+1}(g_i) \leq \sigma_p(A_0), j = 1, 2$, alors $g = g_1 - g_2$ est une solution de l'équation (2.1.1) qui satisfait aussi $i(g) = i(g_1 - g_2) < p+1$ ou $\sigma_{p+1}(g) = \sigma_{p+1}(g_1 - g_2) \leq \sigma_p(A_0)$. Mais par le Théorème 3.1.2, nous trouvons que $g = g_1 - g_2$ est une solution de l'équation (2.1.1) satisfaisante $i(g) = i(g_1 - g_2) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(g) = \sigma_{p+1}(g_1 - g_2) = \sigma_p(A_0)$. Ceci est une contradiction. Par le Lemme 3.2.5, nous trouvons que toute solution f de l'équation (2.1.2) avec $i(f) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_0)$ satisfait $i_\lambda(f) = i_{\overline{\lambda}}(f) = i(f) = p+1$ et $\lambda_{p+1}(f) = \overline{\lambda}_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f)$. Donc, le Théorème 3.1.4 est complètement démontré.

3.3.4 Preuve du Théorème 3.1.5

Par le Théorème 3.1.3, nous trouvons que $\sigma_{p+1}(g_i) \leq \sigma_p(A_s), j = 1, 2, \cdots, k$ et il existe une fonction g_i, notée g_1, satisfaisante $i(g_1) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(g_1) = \sigma_p(A_s)$.En utilisant la même méthode que dans la preuve du Théorème 3.1.3, nous déduisons que:

1) Si $q > p+1$, ou $q = p+1$ et $\sigma_q(F) > \sigma_p(A_s)$, alors toute solution $f(z)$ de l'équation (2.1.2) satisfait $i(f) = i(F) = q$ et $\sigma_q(f) = \sigma_q(F)$.

2) Si $i(F) = q < p+1$, ou $q = p+1$ et $\sigma_q(F) < \sigma_p(A_s)$ alors toute solution f_c dans G satisfait $i(f_c) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f_c) = \sigma_p(A_s)$ avec au plus une exception. Par le Lemme 3.2.5, nous déduisons que toute solution f_c dans G satisfaisante $i(f_c) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f_c) = \sigma_p(A_s)$ satisfait $i_{\overline{\lambda}}(f_c) = i_\lambda(f_c) = p$ et $\sigma_{p+1}(f_c) = \overline{\lambda}_{p+1}(f_c) = \lambda_{p+1}(f_c)$.

Donc, le Théorème 3.1.5 est complètement démontré.

3.3.5 Preuve du Théorème 3.1.6

Supposons que $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ est une solution méromorphe de (2.1.2), alors par l'équation (2.1.2) nous avons

$$-A_s = \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + \cdots + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} + A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} + \cdots + A_0\frac{f}{f^{(s)}} - \frac{F}{f^{(s)}}. \tag{3.3.15}$$

Par (3.3.15) , nous avons

$$T(r, A_s) \leq MT(r, f) + \sum_{j \neq s} T(r, A_j) + O(\log(rT(r, f))) \quad (r \notin E_{13}), \tag{3.3.16}$$

où $M > 0$ est une constante (les constantes qu'on va utiliser ne sont pas nécessairement les mêmes à chaque occurrence). Par $\mu_p(A_s) > \max\{\sigma_p(A_j)(j \neq s), \sigma_p(F)\}$ et (3.3.16) , nous obtenons $\mu_p(f) \geq \mu_p(A_s)$ .Comme les pôles de f doivent être les pôles de $A_j\,(j = 0, \cdots, k-1)$ et F, nous avons

$$\overline{\lambda}_p\left(\frac{1}{f}\right) = \overline{\lambda}_p(d) \leq \max\left\{\lambda_p\left(\frac{1}{A_j}\right), \lambda_p\left(\frac{1}{F}\right), (j = 0, \cdots, k-1)\right\} < \mu_p(A_s), \tag{3.3.17}$$

et par $\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < \exp_{p-1}\left\{r^b\right\}$,où $b < \mu_p(A_s)$, nous avons $N(r, f) < N(r, f)\exp_{p-1}\left\{r^b\right\}$. Donc

$$\lambda_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) \leq \max\left\{\overline{\lambda}_p\left(\frac{1}{f}\right), b\right\} < \mu_p(A_s). \tag{3.3.18}$$

Par (3.3.18) et $\mu_p(f) \geq \mu_p(A_s)$, nous avons $\mu_p(g) = \mu_p(f)$. Par l'équation (2.1.2) encore, nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq |A_{k-1}|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_s|\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A|_0 + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|. \tag{3.3.19}$$

Par le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble E_1 de r d'une mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$ et $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)) \qquad (j = 1, \cdots, k-1). \tag{3.3.20}$$

Pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$ et $|g(z)| = M(r, g) > 1$, nous avons

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| = \left|\frac{F(z).d(z)}{g(z)}\right| \leq M.\exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_s)}\right\}. \tag{3.3.21}$$

Par le Lemme 2.2.7, il existe un ensemble E_5 de r d'une mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_5$ et pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$|A_j(z)| \leq \exp_p \left\{ r^{\sigma_p(A_s)} \right\} \quad (j = 1, \cdots, k-1). \tag{3.3.22}$$

En substituant (3.3.20) – (3.3.22) dans (3.3.19), nous trouvons

$$\left(\frac{v_f(r)}{z} \right)^k (1 + o(1)) \leq k \left(\frac{v_f(r)}{z} \right)^{k-1} (1 + o(1)) \exp_p \left\{ r^{\sigma_p(A_s)} \right\}. \tag{3.3.23}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit d'aprés (3.3.23) et le Lemme 2.2.2 que $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s)$.

3.3.6 Preuve du Théorème 3.1.9

De (2.1.2), nous obtenons

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left(\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} + A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} + \cdots + A_1 \frac{f'(z)}{f(z)} + A_0 \right). \tag{3.3.24}$$

Il est facile de voir que si f à un zéro à z_0 d'ordre $\alpha (> k)$, et $A_0, \cdots, A_{k-1}$ sont analytiques en z_0, alors F doit avoir un zéro en z_0 d'ordre $\alpha - k$, donc

$$n\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq k\overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right) + n\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} n(r, A_j) \tag{3.3.25}$$

et

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} N(r, A_j). \tag{3.3.26}$$

Par le lemme de la dérivée logarithmique et (3.3.24), nous avons

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, A_j) + O(\log(rT(r, f))) \tag{3.3.27}$$

Par (3.3.26) et (3.3.27), nous avons

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + o(1) \leq k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, F) + \sum_{j=0}^{k-1} T(r, A_j) + O(\log(rT(r, f))). \tag{3.3.28}$$

Supposons que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} T\left(r, A_j\right) + T\left(r, F\right)}{T\left(r, f\right)} = \delta < c < 1. \tag{3.3.29}$$

De la relation $(3.3.29)$, pour r suffisamment grand et pour tout $\varepsilon\left(0 < \varepsilon < c - \delta\right)$, nous avons

$$\sum_{j=0}^{k-1} T\left(r, A_j\right) + T\left(r, F\right) \leq \left(\delta + \varepsilon\right) T\left(r, f\right) < cT\left(r, f\right). \tag{3.3.30}$$

En substituant (3.3.30) dans $(3.3.28)$, nous trouvons

$$T\left(r, f\right) \leq k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + cT\left(r, f\right) + \varepsilon T\left(r, f\right). \tag{3.3.31}$$

Par $(3.3.31)$, nous avons

$$T\left(r, f\right) \leq \frac{k}{1 - c - \varepsilon}\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{2k}{1 - c}\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right). \tag{3.3.32}$$

En utilisant le Lemme 2.2.5 et $(3.3.32)$, nous avons $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right) \geq \sigma_{p+1}\left(f\right)$. Donc

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right) = \lambda_{p+1}\left(f\right) = \sigma_{p+1}\left(f\right).$$

3.3.7 Preuve du Théorème 3.1.10

Supposons que $f\left(z\right) = \frac{g(z)}{d(z)}$ est une solution méromorphe non triviale de (2.1.1). D'aprés (2.3.8)–(2.3.11) dans la preuve du Théorème 2.1.5, il existe une constante $\beta_1 < 1$ tel que pour r suffisamment grand, nous avons

$$\left(1 - \beta_1\right) m\left(r, A_0\right) \leq O\left(\log\left(rT\left(r, f\right)\right)\right) \qquad \left(r \notin E\right). \tag{3.3.33}$$

Comme $i\left(A_0\right) = p$ par le Lemme 2.2.6, nous avons

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p T\left(r, A_0\right)}{\log r} = \sigma_p\left(A_0\right) \qquad \left(r \in E_4\right). \tag{3.3.34}$$

Comme $\delta(\infty, A_0) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{m(r,A_0)}{T(r,A_0)} > 0$, nous obtenons

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p m(r, A_0)}{\log r} = \sigma_p(A_0) \qquad (r \in E_4). \tag{3.3.35}$$

De (3.3.33) et (3.3.35), nous avons $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0)$.

3.3.8 Preuve du Théorème 3.1.11

Supposons que $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ est une solution méromorphe de l'équation (2.1.1), alors d'aprés (2.3.8) – (2.2.10) dans la preuve du Théorème 2.1.5, pour r suffisamment grand, nous avons

$$(1-\alpha) m(r, A_0) \leq O(\log(rT(r,f))) \quad (r \notin E). \tag{3.3.36}$$

De (3.3.36), nous avons

$$(1-\alpha) T(r, A_0) - (1-\alpha) N(r, A_0) \leq O(\log(rT(r,f))) \quad (r \notin E). \tag{3.3.37}$$

Par le Lemme 2.2.6 il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ d'une mesure logarithmique infinie, tel que pour tout z satisfaisant $r \in E_4$, nous avons :

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log r} = \sigma_p(f).$$

Comme $\beta = \max\{\sigma_p(A_j), \lambda_p(A_0)\} < \sigma_p(A_0)$, alors pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma_p(A_0))$ et pour r suffisamment grand, nous avons

$$T(r, A_0) \geq \exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(A_0)-\varepsilon}\right\}, N(r, A_0) \leq \exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(A_0)+\varepsilon}\right\}. \tag{3.3.38}$$

De (3.3.37) et (3.3.38), nous avons

$$(1-\alpha)(1-o(1)) T(r, A_0) \leq O(\log(rT(r,f))) \quad (r \in E_4 \backslash E). \tag{3.3.39}$$

Donc, par la Définition 2.1.1, nous aurons

$$\sigma_{p+1}(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log_{p+1} T(r,f)}{\log r} \geq \sigma_p(A_0).$$

3.3.9 Preuve du Théorème 3.1.12

Supposons que $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ est une solution méromorphe de (2.1.1), alors d'aprés (2.3.16) – (2.3.21) dans la preuve du Théorème 2.1.8, pour r suffisamment grand, nous avons

$$(1-\alpha)\, m(r, A_s) \leq cT(r,f) \quad (r \notin E). \tag{3.3.40}$$

De (3.3.40) nous obtenons

$$(1-\alpha)\, T(r, A_s) - (1-\alpha)\, N(r, A_s) \leq cT(r,f) + O(\log(rT(r,f))) \quad (r \notin E). \tag{3.3.41}$$

Par $\lambda_p\left(\frac{1}{As}\right) < \mu_p(A_s)$ et (3.3.41), nous trouvons que

$$\sigma_p(A_s) \leq \sigma_p(f) \tag{3.3.42}$$

et

$$\mu_p(A_s) \leq \mu_p(f). \tag{3.3.43}$$

Comme les pôles de f doivent être les pôles de $A_j\,(j = 0, 1, \dots, k)$, nous avons

$$\overline{\lambda}_p\left(\frac{1}{f}\right) = \overline{\lambda}_p(d) \leq \max\left\{\lambda_p\left(\frac{1}{Aj}\right), j = 0, \dots k-1\right\} < \mu_p(A_s), \tag{3.3.44}$$

par $\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < M$, nous aurons $N(r,f) < M\overline{N}(r,f)$. Donc

$$\lambda_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) \leq \overline{\lambda}_p\left(\frac{1}{f}\right) = \overline{\lambda}_p(d) \leq \max\left\{\lambda_p\left(\frac{1}{Aj}\right), j = 0, \dots k-1\right\} < \mu_p(A_s), \tag{3.3.45}$$

d'où $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(A_s)$. De (2.1.1) nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq |A_{k-1}|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_s|\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |A_0|. \quad (3.3.46)$$

Par le Lemme 2.2.5, il existe un ensemble E_3 d'une mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin E_3$ et $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^k (1 + o(1)) \qquad (k \in N). \quad (3.3.47)$$

Par le Lemme 3.2.4 il existe un ensemble E_{12} d'une mesure linéaire finie tel que pour tout $|z| = r \notin E_{12}$, et pour tout $\varepsilon > 0$ donné, nous avons

$$|A(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\right\} \quad (r \notin E_6). \quad (3.3.48)$$

En substituant (3.3.47) et (3.3.48) en (3.3.46), nous obtenons

$$\left(\frac{v_f(r)}{|z|}\right)^k |1 + o(1)| \leq k\left(\frac{v_f(r)}{|z|}\right)^{k-1} |1 + o(1)| \exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\right\}. \quad (3.3.49)$$

Par (3.3.49) nous avons

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p v_f(r)}{\log r} \leq \sigma_p(A_s) + \varepsilon. \quad (3.3.50)$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire et par le Lemme 2.2.2, nous aurons

$$\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s). \quad (3.3.51)$$

Enfin, par (3.3.42) et (3.3.51), nous avons $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s) \leq \sigma_p(f)$.

3.3.10 Preuve du Corollaire 3.1.13

Nous constatons du Théorème 3.1.12 pour $s = 0$ que $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_0) \leq \sigma_p(f)$, d'autre part, on a par le Théorème 3.1.11, $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0)$, donc on a $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

3.3.11 Preuve du Théorème 3.1.14

Comme toutes les solutions de (2.1.2) sont des fonctions méromorphes, on obtient que toutes les solutions de l'équation différentielle homogène (2.1.1) correspondante de (2.1.2) sont aussi des fonctions méromorphes. Supposons que $f_1, f_2, \ldots, f_k$ est une base des solutions méromorphes de $(2.1.1)$, du Corollaire 3.1.13 nous avons $\sigma_{p+1}(f_j) = \sigma_p(A_0)$. Ainsi, toutes les solutions de (2.1.2) sont de la forme

$$f(z) = B_1 f_1 + B_2 f_2 + \cdots + B_k f_k, \tag{3.3.52}$$

où $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sont des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisantes

$$B_j' = F \cdot G_j(f_1, f_2, \ldots, f_k) \cdot W^{-1}(f_1, f_2, \ldots, f_k) \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.3.53}$$

où $G_j(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ sont des polynômes différentiels en $f_1, \ldots, f_k$, et leurs dérivées;$W(f_1, \ldots, f_k)$ est le Wronskien de $f_1, f_2, \ldots, f_k$, donc

$$\sigma_{p+1}(G_j) \leq \sigma_{p+1}(f_j) = \sigma_p(A_0). \tag{3.3.54}$$

1) Nous affirmons que l'équation (2.1.2) admet au plus une solution méromorphe f_0 satisfaisante $i(f_0) = p+1$ et $\sigma_{p+1}(f_0) = \sigma_p(A_0)$ avec au plus une exception. En effet, s'il existe une autre solution méromorphe f^* de (2.1.2) satisfaisante $i(f^*) < p+1$ ou $\sigma_{p+1}(f^*) < \sigma_p(A_0)$, alors $i(f_0 - f^*) < p+1$ ou $\sigma_{p+1}(f_0 - f^*) < \sigma_p(A_0)$. Mais $f_0 - f^*$ est une solution de $(2.1.1)$, ce qui contredit le Corollaire 3.1.13. Soit f est une solution méromorphe telle que $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0)$. Puisque $i(F) < p+1$ ou $i(F) = p+1$, $\sigma_{p+1}(F) < \sigma_p(A_0)$ par le Lemme 3.2.3 et $(3.3.53)$, nous avons

$$\sigma_{p+1}(B_j) = \sigma_{p+1}\left(B_j'\right) \leq \max\{\sigma_{p+1}(F), \sigma_p(A_0)\} = \sigma_p(A_0). \tag{3.3.55}$$

Pour $j = 1, 2, \ldots, k$, de (3.3.52) et $(3.3.55)$, nous obtenons

$$\sigma_{p+1}(f) \leq \max\{\sigma_{p+1}(f_j), \sigma_{p+1}(B_j)\} = \sigma_p(A_0). \tag{3.3.56}$$

Par $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0)$ et $(3.3.56)$, nous avons $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$. Par le Lemme 3.2.5, nous aurons $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f)$.

2) Si $q > p+1$ ou $q = p+1$ et $\sigma_q(F) > \sigma_p(A_0)$, il résulte à partir de (3.3.52) – (3.3.56) et l'équation (2.1.2) que $i(f) = i(F) = q$ et $\sigma_q(f) = \sigma_q(F)$.

Bibliographie

[1] S. Bank; *General theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations*, Compositio Math. 25 (1972), 61–70.

[2] B. Belaïdi; *Iterated order of fast growth solutions of linear differential equations*, Aust. J.Math. Anal. Appl. 4 (2007), no. 1, Art. 20, 8.

[3] B. Belaïdi; *Growth and oscillation theory of solutions of some linear differential equations,*Mat. Vesnik 60 (2008), no. 4, 233–246.

[4] B. Belaïdi; *Oscillation of fixed points of solutions of some linear differential equations,* ActaMath. Univ. Comenian. (N.S.) 77 (2008), no. 2, 263–269.

[5] B. Belaïdi, *Growth and oscillation of solutions to linear differential equations with entire coefficients having the same order*, Electron. J. Diff. Eqns. No. 70, (2009).

[6] L. G. Bernal; *On growth k-order of solutions of a complex homogeneous linear differential equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), no. 2, 317–322.

[7] T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng and J. Tu; *On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Ann. Differential Equations 21 (2005),no. 2, 111–122.

[8] T. B. Cao, J. F. Xu and Z. X. Chen; *On the meromorphic solutions of linear differential equations on the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. 364(2010), 130-142.

[9] T. B. Cao and H. X. Yi; *On the complex oscillation of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients*, J. Syst. Sci. Complex. 20 (2007), no. 1, 135–148.

[10] T. B. Cao and L.M.Li; *Oscillation results on meromorphic solutions of second order differential equations in the complex plane*; Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2010, No. 68, 1-13.

[11] Z. X. Chen; *On the rate of growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, *Acta Math. Sinica,* 1999, 42(3) : 552 − 558.

[12] Z. X. Chen; *The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations*, Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed. 20 (2000), no. 3, 425–432 (in Chinese).

[13] Z. X. Chen and S.A.Gao; *the complex oscillation theory of certain non-homogeneous linear differential equations with transcendental entire coefficients*, J.Math. Anal. Appl,1993,179: 403-416.

[14] Z. X. Chen and C.C.Yang; *Quantitative estimations on the zeros and growth of entire solutions of linear differential equations*, *Complex Variable*, 2000, 42: 119-133.

[15] Y. M. Chiang and W. K. Hayman; *Estimates on the growth of meromorphic solutions of linear differential equations,* Comment. Math. Helv. 79 (2004), no. 3, 451–470.

[16] G. Frank and S. Hellerstein, On the meromorphic solutions of nonhomogeneous linear differential equations with polynomial coefficients, Proc. London Math. Soc. (3) , **53** (1986) , **407 − 428**

[17] M. Frei; *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236, (1953), 38–40.

[18] F. Gross, *On the distribution of values of meromorphic functions*, Trans. Amer.Math. Soc. 131 (1968), 199-214.

[19] G. Gundersen; *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, 88–104.

[20] G. G. Gundersen; *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415–429.

[21] S. Hamouda; *Iterated order of solutions of certain linear differential equations with entire coefficients,* Electron. J. Diff. Eqns.Vol. 2007(2007) , No. 83, pp.1-7.

[22] W. K. Hayman; *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.

[23] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York- London-Sydney, 1976.

[24] L. Kinnunen; *Linear differential equations with solutions of finite iterated order*, Southeast Asian Bull. Math. 22 (1998), no. 4, 385–405.

[25] I. Laine; *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[26] I. Laine and J. Rieppo; *Differential polynomials generated by linear differential equations*,Complex Var. Theory Appl. 49 (2004), no. 12, 897–911.

[27] M. S. Liu and X. M. Zhang; *Fixed points of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006), no. 1, 191–211.

[28] R. Nevanlinna; *Eindeutige analytische Funktionen*, Zweite Auflage. Reprint. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[29] J. Tu, Z. X. Chen and X. M. Zheng; *Growth of solutions of complex differential equations with coefficients of finite iterated order*, Electron. J. Differential Equations 2006, No. 54, 1-8.

[30] J. Tu and Z. X, Chen; *Growth of solution of complex differential equations with meromorphic coefficients of finite iterated order*, Southeast Asian Bull. Math. 33 (2009), 153-164

[31] J. Tu and T. Long; *Oscillation of Complex High Order Linear Differential Equations with Coefficients of Finite Iterated Order*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2009, No. 66, 1-13.

[32] J. Tu and C. F. Yi; *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 487–497.

[33] J. Wang and H. X. Yi; *Fixed points and hyper order of differential polynomials generated by solutions of differential equation*, Complex Var. Theory Appl. 48 (2003), no. 1, 83–94.

[34] H. X. Yi and C. C. Yang; *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[35] C.Y.Zhang and J. Tu; *Gowth of solutions to linear differential equations with entire coefficients of slow growth*, Electron. J. Differential Equations 2010, No. 43.

[36] Q. T. Zhang and C. C. Yang; *The Fixed Points and Resolution Theory of Meromorphic Functions*, Beijing University Press, Beijing, 1988 (in Chinese).

[37] J. Zheng; *Value distribution of meromorphic functions*,Tsinghua University Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.