MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Badra ZAITI

Etude de l'Existence de Solution d'un Problème avec Conditions Non-Locales

soutenu publiquement le 01 *octobre* 2025 *devant le jury composé de :*

Président :	Kheira LIMAM	MCA	Université de Mostaganem
Examinateur :	Louiza TABHARIT	MCA	Université de Mostaganem
Encadrante :	Soumia FERRAOUN	MCB	Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2024 / 2025

MASTER

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mon très cher père.

Ma très chère mère.

Mon très cher grands-pères.

Mes chers frères

Mes chères sœurs

Toute ma famille
Oncles, Tantes, Cousins, Cousines, Neveux et Nièces.

Mon encadrante Madame Soumia FERRAOUN.

Tous mes enseignants.

Badra

Remerciements

Avant tout, mes remerciements vont à mon Dieu, le tout puissant de m'avoir aidée à faire ce travail et de m'avoir donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Je tiens particulièrement à remercier mon père, ma mère et mes grands-parents pour leurs encouragements et leurs soutiens durant toutes mes années d'études. Je remercie aussi mes sœurs. Un grand merci à toute ma famille pour leurs encouragements.

Je tiens à remercier très vivement mon encadrante Madame Soumia FERROUAN, Maître de Conférence à l'Université de Mostaganem, de m'avoir encadré, orienté avec ses précieux conseils, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Mes remerciements les plus sincères, pour le temps qu'elle a consacré à m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de ce mémoire de fin d'études.

Je suis très honorée que Madame Kheira LIMAM, Maître de Conférence à l'Université de Mostaganem, ait accepté de présider le jury de ce mémoire.

J'exprime ma gratitude envers Madame Louiza TABHARIT, Maître de Conférence à l'Université de Mostaganem, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je vous remercie sincèrement.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques et Informatique de l'Université de Mostaganem. Ils sont à l'origine de tout mon savoir.

Finalement, je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes amies et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel.

Les mots ne pourront jamais exprimer mes sentiments, ma reconnaissance et ma profonde gratitude.

Je vous remercie du fond du cœur.

Badra

Table des matières

Index des notations **iv**

Introduction **1**

1 Préliminaires **3**
1 Introduction . . . 3
2 Outils d'Analyse Fonctionnelle . . . 3
3 les Opérateurs . . . 5
4 Théorèmes de Point Fixe . . . 6
5 Éléments de Calcul Fractionnaire . . . 6
6 Conclusion . . . 13

2 L'étude de l'existence de solutions **14**
1 Introduction . . . 14
2 Représentation intégrale . . . 15
3 Existence et unicité de solution . . . 15
4 Existence de la solution par le théorème de Krasnoselskii . . . 18
5 Exemple applicatif d'existence et d'unicité . . . 23
6 Conclusion . . . 24

3 Etude de stabilité au sens de Ulam-Hyers **25**
1 Introduction . . . 25
2 Formulation du problème . . . 26
3 Définitions de stabilité . . . 26
4 Étude de la stabilité . . . 27
5 Corollaire sur la stabilité généralisée . . . 28
6 Conclusion . . . 28

Conclusion **30**

Bibliographie **32**

Index des notations

Notation	Signification
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathrm{L}^p([a,b])$	Espace des fonctions p-intégrables sur $[a,b]$.
$\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$	Norme sur l'espace vectoriel E.
$\|\cdot\|$	Valeur absolue (pour les réels) ou module (pour les complexes).
$[\cdot]$	Partie entière d'un nombre réel.
$\Gamma(\cdot)$	Fonction Gamma d'Euler.
$\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$	Fonction Bêta d'Euler.
I^n	Opérateur d'intégration d'ordre entier n.
D^n	Opérateur de dérivation d'ordre entier n.
I^α	Opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$.
${}^{\mathrm{H}}\mathrm{J}^\alpha$	Intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.
D^α	Opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$.
${}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^\alpha$	Dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre α.
$\mathscr{T}$	Opérateur associé au problème intégral fractionnaire étudié.
$\mathrm{L}_f, \mathrm{L}_g$	Constantes de Lipschitz des fonctions f et g, respectivement.
B_{R}	Boule fermée convexe de rayon R dans l'espace X.
Q	Constante liée à la condition de contraction dans le théorème du point fixe.
u^*	Solution unique (point fixe) de l'équation intégrale ou différentielle fractionnaire.

Introduction

> « La science est la tentative de rendre le chaos de notre perception en une correspondance avec un système uniforme de pensée. »
>
> (Pensées - Albert Einstein)

Durant le vingtième siècle, l'analyse mathématique a connu un développement considérable, s'étendant bien au-delà des cadres classiques de la dérivation et de l'intégration.

Dans les années 1940, la question de la stabilité des solutions aux équations fonctionnelles a été posée par le mathématicien S.M. Ulam, et résolue en partie par D.H. Hyers. Ces travaux ont donné naissance au concept de **stabilité au sens de Ulam-Hyers**, qui est aujourd'hui un pilier de l'analyse fonctionnelle.

Actuellement, ce champ de recherche s'étend aux **équations différentielles fractionnaires**, qui ont gagné en importance pour leur capacité à modéliser des systèmes avec des effets de mémoire et des comportements complexes, notamment dans des domaines variés tels que la physique, l'ingénierie et la finance.

Alors que la théorie classique est bien établie, l'étude des propriétés qualitatives de ces équations fractionnaires reste un défi. La stabilité, en particulier, est un aspect essentiel qui garantit la robustesse et la fiabilité des solutions obtenues.

À travers ce mémoire, nous nous proposons d'étudier une équation différentielle fractionnaire qui était adressée par Lachouri A. et Gouri N dans [14], qui possède la forme :

$$ {}^{C}_{H}D^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)) + {}^{H}J^{\beta} g(t, u(t)), \tag{1} $$

avec une condition aux limites non locale. Notre objectif est de démontrer que la solution de ce problème existe, est peut-être unique, et est stable au sens d'Ulam-Hyers (classique et généralisée) sous certaines conditions.

Ce mémoire se compose de trois chapitres, structurés de la manière suivante :

1. **Chapitre 1 : Préliminaires Mathématiques et Outils d'Analyse Fonctionnelle.** Ce chapitre a pour objectif de poser les bases théoriques nécessaires à la suite de l'étude. Nous y rappellerons les définitions fondamentales de l'analyse fonctionnelle (normes, suites de Cauchy, ...) et présenterons des résultats clés tels que le principe de contraction de Banach et le théorème d'Arzelà-Ascoli.
2. **Chapitre 2 : Etude de l'Existence de Solutions** Dans ce chapitre, nous aborderons la question de l'existence et de l'unicité de la solution pour le problème (1). Nous utiliserons des théorèmes de point fixe, tels que le principe de contraction de Banach pour l'existence et l'unicité, et le théorème de Krasnoselskii pour l'existence d'au moins une solution.
3. **Chapitre 3 : Etude de Stabilité au sens d'Ulam-Hyers .** Nous introduirons formellement la notion de stabilité au sens de Ulam-Hyers. Nous y démontrerons la stabilité de la solution du problème (1) en fournissant les conditions suffisantes et une preuve détaillée, puis nous étendrons le résultat à la stabilité généralisée.

Nous conclurons ce mémoire par un résumé général des résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

1 Introduction

Ce chapitre présente les concepts fondamentaux de l'analyse fonctionnelle et du calcul fractionnaire nécessaires à ce mémoire. Il est structuré en quatre sections :

- La première section introduit les notions et définitions de base en analyse fonctionnelle.
- La deuxième section examine les opérateurs et leurs principales propriétés.
- La troisième section traite de plusieurs théorèmes classiques du point fixe.
- La quatrième section explore les fonctions spéciales utilisées dans la dérivation conformable fractionnaire.

2 Outils d'Analyse Fonctionnelle

D'abord, On rappelle les définitions des outils de base de l'analyse fonctionnelle. On propose au lecteur de revenir aux sources originales comme [4, 7, 8, 13, 18, 26].

Définition 1.1 *On note par* $\mathrm{AC}([a,b])$ *l'espace des fonctions absolument continues sur* $[a,b]$, *constitué des fonctions* f *qui sont des primitives de fonctions Lebesgue sommables, c'est-à-dire :*

$$f \in \mathrm{AC}([a,b]) \iff \exists \varphi \in \mathrm{L}^1([a,b]), \quad \textit{telle que}$$
$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt.$$

Définition 1.2 *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on note par* $\mathrm{AC}^n([a,b])$ *l'espace des fonctions à valeurs complexes* $f(x)$ *ayant des dérivées jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *continues sur* $[a,b]$ *telle que* $f^{(n-1)}(x) \in \mathrm{AC}([a,b])$, *c'est-à-dire :*

$$\mathrm{AC}^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f^{(n-1)}(x) \in \mathrm{AC}[a,b]\}.$$

En particulier, on a $\mathrm{AC}^1[a,b] = \mathrm{AC}[a,b]$.

Définition 1.3 *L'espace noté* $\mathrm{AC}^n_\delta[a,b]$ *est défini par :*

$$\mathrm{AC}^n_\delta[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid \delta^{n-1} f(x) \in \mathrm{AC}[a,b], \quad \delta = x\frac{d}{dx}\},$$

cet espace est appelé espace des fonctions absolument continues.

Définition 1.4 (Espace vectoriel) *Un* ***espace vectoriel*** *sur un corps* $\mathbb{K}$ *est un ensemble* E *muni de deux opérations :*

- . *Une* ***addition*** $+ : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *qui associe à tout couple* (x, y) *un élément* $x + y \in \mathrm{E}$.
- . *Une* ***multiplication par un scalaire*** $\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *qui associe à* (λ, x) *un élément* $\lambda x \in \mathrm{E}$.

Ces opérations satisfont les huit axiomes classiques : associativité, commutativité de l'addition, existence d'un élément neutre et d'un opposé, distributivité et compatibilité avec la multiplication scalaire.

Exemple 1.1 ***L'espace*** $\mathbb{R}^n$ *: L'ensemble des vecteurs* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *avec* $x_i \in \mathbb{R}$ *est un espace vectoriel muni de l'addition et de la multiplication scalaire classiques.*

Exemple 1.2 *L'espace des fonctions continues : L'ensemble des fonctions continues* $\mathrm{C}([a, b], \mathbb{R})$ *est un espace vectoriel où l'addition et la multiplication par un scalaire sont définies point par point.*

Définition 1.5 (*Norme*) *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$. *Une* ***norme*** *sur* E *est une application* $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$, *vérifiant les conditions suivantes, pour tout* $x, y \in \mathrm{E}$ *:*

- $\mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0, \quad \forall x \in \mathrm{E}$.
- $\mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathrm{N}(x), \quad \forall x \in \mathrm{E}$.

Si seules les deux dernières propriétés sont satisfaites, on dit que N *est une* ***semi-norme****.*

Définition 1.6 (*Espace vectoriel normé*) *Soient* E *un espace vectoriel et* N *une norme sur* E. *Le couple* (E, N) *est appelé un* ***espace vectoriel normé****.*

Définition 1.7 (*Suite de Cauchy*) *On dit qu'une suite* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *de réels ou de complexes est une* ***suite de Cauchy*** *si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad p, q \geq \mathrm{N}_0 \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon.$$

Définition 1.8 (Limite d'une suite) *On dit qu'une suite réelle* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *a pour limite* $l \in \mathbb{R}$, *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, |x_n - l| < \varepsilon.$$

Si c'est le cas, on dit que la suite est convergente.

Définition 1.9 (Continuité) *Soient* f *une fonction définie sur un intervalle* $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ *et* a *un point de* I. *La fonction* f *est dite continue en* a *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un autre réel* $\delta > 0$ *tel que :*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 1.10 (Famille équicontinue) *Soient* $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{F}$ *une famille de fonctions définies sur* X. *On dit que* $\mathscr{F}$ *est équicontinue en* x *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que :*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathscr{F}.$$

Définition 1.11 (Espace complet) *Un espace vectoriel normé* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ *est dit complet, si toute suite de Cauchy* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge dans* E.

Exemple 1.3 *La droite réelle* $\mathbb{R}$ *est complète, car toute suite numérique de Cauchy converge.*

Définition 1.12 (Espace de Banach) *Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Définition 1.13 (Ensemble relativement compact) *Un ensemble* $G \subset E$ *est relativement compact, si pour toute suite* $\{x_n\}$ *de* G*, il existe une sous-suite* $\{x_{n_k}\}$ *qui converge dans* E.

Définition 1.14 (Ensemble uniformément borné) *On dit que* M *est un ensemble uniformément borné, s'il existe une constante positive* $C > 0$ *telle que :*

$$\|f\| \leq C, \quad \forall f \in M.$$

Définition 1.15 *(Application Lipschitzienne) Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés. Une application* $f : E \to F$ *est dite k-Lipschitzienne si :*

$$\exists k > 0, \forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Définition 1.16 *(Application Contractante) Une application* $f : E \to F$ *est dite contractante, si elle est Lipschitzienne de rapport* $0 < k < 1$.

3 les Opérateurs

Tout au long de cette section, on entend par $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés [13].

Définition 1.17 ***(Opérateur Continu)*** *Soit* T *un opérateur linéaire défini sur un sous-ensemble* $G \subset E$ *dans* F*. Il est dit continu au point* $x_0 \in G$ *si pour toute suite* (x_n) *de* G *qui converge vers* x_0*, la suite* $(T(x_n))$ *converge vers* $T(x_0)$*, c'est-à-dire :*

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Remarque 1.1 *L'opérateur* T *est dit continu sur* G*, s'il est continu en chaque point de l'ensemble* G.

Définition 1.18 ***(Opérateur Compact)*** *Soit* $T : E \to F$ *un opérateur. On dit que* T *est compact s'il est continu et l'image de toute borne de* E *est relativement compacte (c'est-à-dire son adhérence est compacte) dans* F.

Définition 1.19 *Définition 1.15 (Opérateur Borné) Un opérateur linéaire* T *défini sur* E *dans* F *est dit borné s'il existe une constante positive* $C > 0$*, telle que :*

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.20 ***(Opérateur Complètement Continu)*** *On dit que l'opérateur* $T : E \to F$ *est complètement continu s'il est un opérateur compact.*

Le théorème suivant est connu pour son nombre considérable d'applications, entre autres la compacité de certains opérateurs. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

Théorème 1.1 (Ascoli-Arzelà) *Soient* E *un compact et* A *un sous-ensemble de* C(E)*. Si* A *est borné et équicontinu, alors* A *est relativement compact.*

4 Théorèmes de Point Fixe

Les théorèmes de point fixe sont des outils très utiles en mathématiques, essentiellement dans la résolution des équations différentielles[5, 10, 27]. Dans cette section, nous présentons les théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

Définition 1.21 ***(Point fixe)*** *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* I. *On dit que* $x \in \mathrm{I}$ *est un point fixe de* f *lorsque :*

$$f(x) = x.$$

Théorème 1.2 ***(Principe de contraction de Banach)*** *Soient* X *un espace de Banach et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. *Si la fonction* f *est contractante, alors* f *admet un point fixe unique.*

Les théorèmes du point fixe suivants déterminent seulement l'existence d'un point fixe.

Théorème 1.3 ***(Théorème de Krasnoselskii)*** *Soient* $(\mathrm{X}, \|.\|)$ *un espace de Banach,* A *une partie non vide, convexe et fermée de* X. *On suppose que* $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ *sont deux applications satisfaisant les trois conditions suivantes :*

- $\mathrm{T}_1 x + \mathrm{T}_2 y \in \mathrm{A}$, $\forall x, y \in \mathrm{A}$.
- T_1 *est un opérateur compact.*
- T_2 *est une contraction.*

Alors il existe $x^* \in \mathrm{A}$ *tel que* $\mathrm{T}_1 x^* + \mathrm{T}_2 x^* = x^*$.

Remarque 1.2 *Si* $\mathrm{T}_1 = 0$, *alors ce théorème coïncide avec le principe de l'application contractante de Banach.*

5 Éléments de Calcul Fractionnaire

Dans cette section, nous définissons les fonctions élémentaires ainsi que les principaux opérateurs fractionnaires. Nous présentons les notions fondamentales et les propriétés essentielles de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, avant d'introduire les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo. Le calcul fractionnaire, en tant que généralisation du calcul classique, conserve de nombreuses propriétés fondamentales tout en élargissant son champ d'application.

En mathématiques, de nombreux concepts complexes se sont développés à partir de concepts simples. Par exemple, l'extension du factoriel des nombres naturels aux nombres réels joue un rôle fondamental dans certaines formules mathématiques.[1, 2, 3, 16, 25, 17, 19, 20]

Définition 1.22 ***(la fonction Gamma)***[15] *Soit* $x \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Re(x) > 0$, *la fonction Gamma est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \tag{1.1}$$

cette intégrale est convergente pour tout x *complexe tel que* $\Re(x) > 0$.

Remarque 1.3

- $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma(0^+) = +\infty$.
- $\frac{1}{\Gamma(n)} = 0$ *pour* $n = -1, -2, -3, \ldots$.
- *La fonction* $\Gamma(x)$ *est monotone et strictement décroissante pour* $0 < x \leq 1$, *et monotone et strictement croissante pour* $x \geq 2$.

Proposition 1.1 *[15] Pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(x) > 0$, on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.2}$$

Preuve. [15] En effectuant une intégration par parties de l'intégrale définissant la fonction Gamma, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,dt \\ &= \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.1 ***Cas particulier des entiers*** *Pour $x = n \in \mathbb{N}$, la relation précédente donne :*

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{1.3}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= \cdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1) \\ &= n!\end{aligned}$$

■

Définition 1.23 ***(La Fonction Bêta d'Euler)*** *La fonction Bêta est définie pour des nombres complexes u et v à parties réelles strictement positives par :*

$$\beta(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt, \quad \Re(u) > 0, \Re(v) > 0. \tag{1.4}$$

Proposition 1.2
- *La fonction Bêta est symétrique :* $\beta(u,v) = \beta(v,u)$.
- *Elle est liée à la fonction Gamma par :*

$$\beta(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{1.5}$$

5.1 Intégrales Fractionnaires

Soient f une fonction réelle, a appartient au domaine de définition de f et α un nombre réel strictement positif.

Définition 1.24 ***(Intégrale Fractionnaire de Riemann-Liouville)*** *L'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville est défini sur $L^1[a,b]$ par :*

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \quad \alpha > 0, x > a. \tag{1.6}$$

Exemple 1.4 *Soit $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par $h(x)=(x-a)^{\beta}$. L'application de l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha>0$ de Riemann–Liouville donne :*

$$\mathrm{I}_a^{\alpha}h(x)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\alpha+\beta},\quad \beta>-1,\ x>a. \tag{1.7}$$

Preuve. Par définition de l'intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville d'ordre $\alpha>0$, on a :

$$\mathrm{I}_a^{\alpha}h(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}\,dt.$$

Effectuons le changement de variable :

$$t=a+u(x-a),\quad \text{donc } dt=(x-a)du,\quad u\in[0,1].$$

Alors :

$$x-t=(1-u)(x-a),\quad t-a=u(x-a),$$

d'où :

$$\mathrm{I}_a^{\alpha}h(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [(1-u)(x-a)]^{\alpha-1}\,[u(x-a)]^{\beta}\,(x-a)du.$$

$$=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta}\,du.$$

Or,

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta}\,du=\mathrm{B}(\alpha,\beta+1)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Donc :

$$\mathrm{I}_a^{\alpha}h(x)=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.$$

■

Proposition 1.3 *Pour $f,g\in \mathrm{C}([a;b])$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$, l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes :*

1. ***Linéarité** : Pour $\lambda,\gamma\in\mathbb{R}$,*

$$\mathrm{I}^{\alpha}(\lambda f(x)+\gamma g(x))=\lambda\mathrm{I}^{\alpha}f(x)+\gamma\mathrm{I}^{\alpha}g(x),\quad x>a. \tag{1.8}$$

2. ***Propriété de semi-groupe et commutativité** :*

$$\mathrm{I}^{\alpha}\circ\mathrm{I}^{\beta}f(x)=\mathrm{I}^{\beta}\circ\mathrm{I}^{\alpha}f(x)=\mathrm{I}^{\alpha+\beta}f(x),\quad x>a. \tag{1.9}$$

3. ***Cas particulier** :*

$$\mathrm{I}^{0}f(x)=f(x). \tag{1.10}$$

Définition 1.25 ***(Intégration fractionnaire au sens de Hadamard)*** *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $0<a<b\le 1$ et $\alpha>0$. L'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard de f est définie par :*

$$\mathrm{J}_a^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)}{t}\,dt,\quad a<x<b,$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Quelques propriétés

Proposition 1.4 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha > 0$, on a :*

$$\mathrm{J}_a^\alpha(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 \mathrm{J}_a^\alpha f(x) + \lambda_2 \mathrm{J}_a^\alpha g(x).$$

Proposition 1.5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue appartenant à $\mathrm{L}^p([a,b])$. Pour tous $\alpha, \beta > 0$, on a :*

$$\mathrm{J}_a^\alpha \mathrm{J}_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{f(s)}{s} \frac{ds}{t} dt.$$

Proposition 1.6 *Pour toute fonction continue $f \in \mathrm{L}^p([a,b])$ et pour tous $\alpha, \beta > 0$, on a :*

$$\mathrm{J}_a^\alpha \mathrm{J}_a^\beta f(x) = \mathrm{J}_a^{\alpha+\beta} f(x) = \mathrm{J}_a^\beta \mathrm{J}_a^\alpha f(x).$$

– **Exemple :** Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et

$$f(t) = \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}.$$

Alors, l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre α de $f(t)$ avec point initial a est donnée par :

$$^{\mathrm{H}}\mathrm{J}_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}.$$

Remarque 1.4 *En particulier, si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$, alors :*

$$\mathrm{J}_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^\alpha.$$

5.2 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire, et elles sont toutes mathématiquement correctes. Cependant, d'un point de vue physique, chaque définition a sa propre application et interprétation. Nous introduisons ici deux approches majeures.

Définition 1.26 ***(Dérivée au Sens de Riemann-Liouville)*** *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, et $n-1 < \alpha < n$. La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \mathrm{I}^{n-\alpha} f(x), \tag{1.11}$$

avec $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$.

Exemple 1.5 *Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = (x-a)^\beta$ avec $\beta > -1$. Alors la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est donnée par :*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^\alpha h(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.12}$$

Proposition 1.7 *1.* ***Linéarité*** *:*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^\alpha(\lambda f(x) + \gamma g(x)) = \lambda\, ^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^\alpha f(x) + \gamma\, ^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^\alpha g(x). \tag{1.13}$$

2. ***Lien avec l'intégrale fractionnaire*** *:*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{I}^{\alpha}f(x)) = f(x). \tag{1.14}$$

3. ***Non-commutativité*** *:*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}(^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\beta}f(x)) \neq^{\mathrm{RL}} \mathrm{D}^{\beta}(^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}f(x)) \neq^{\mathrm{RL}} \mathrm{D}^{\alpha+\beta}f(x). \tag{1.15}$$

Définition 1.27 ***(Dérivée Fractionnaire de Caputo)***
Soit f une fonction suffisamment régulière, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}f(x) = \mathrm{I}^{n-\alpha}\mathrm{D}^{n}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)\,ds, \quad n = \lceil\alpha\rceil. \tag{1.16}$$

Exemple 1.6 *Soit $f(x) = (x-a)^{\beta}$ avec $\beta > -1$. Alors, la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de $f(x)$ est donnée par :*

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha}f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.17}$$

En particulier, si $f(x) = c$ est une constante, alors $^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha}f(x) = 0$.

Proposition 1.8 *1. Linéarité :*

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}(\lambda f + \mu g) = \lambda\,^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}f + \mu\,^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}g. \tag{1.18}$$

2. Inversion avec l'intégrale fractionnaire :

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{I}^{\alpha}f(x)) = f(x), \tag{1.19}$$

et plus généralement, si $\alpha < \beta$:

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{I}^{\beta}f(x) = \mathrm{I}^{\beta-\alpha}f(x). \tag{1.20}$$

3. Noyau de l'opérateur $^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}$:

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x-a)^i, \quad c_i \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

4. Relation avec l'opérateur d'intégration :

$$\mathrm{I}^{\alpha\,\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}f(x) = f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x-a)^i. \tag{1.22}$$

Lien entre Caputo et Riemann-Liouville :

Théorème 1.4 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 < \alpha < n$, et $f \in \mathrm{C}^n([a,b])$. Alors :*

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}f(x) =^{\mathrm{RL}} \mathrm{D}^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x-a)^i}{i!}f^{(i)}(a)\right]. \tag{1.23}$$

Cette relation montre que la dérivation au sens de Caputo est une dérivation fractionnaire appliquée au reste du développement de Taylor de f.

Démonstration. On considère le développement en série de Taylor de la fonction f au point $x = a$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \mathrm{I}^n \mathrm{D}^n f(x). \tag{1.24}$$

Puis on applique ${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}$ sur les deux membres de l'égalité :

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D} f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}\big((x-a)^i\big) + {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}\big(\mathrm{I}^n \mathrm{D}^n f(x)\big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}\big((x-a)^i\big) + {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D} f(x). \end{aligned} \tag{1.25}$$

D'où

$${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D} f(x) = {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D} f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}\big((x-a)^i\big). \tag{1.26}$$

■

Remarque 1.5 *La formule (1.23) signifie que*

$$\mathrm{I}^n \mathrm{D}^n f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.$$

Définition 1.28 ***(Dérivation fractionnaire au sens d'Hadamard)*** *La dérivée fractionnaire au sens d'Hadamard d'une fonction f est définie par :*

$${}^{\mathrm{H}}\mathrm{D}_a^{\alpha} f(x) = \frac{x}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, \tag{1.27}$$

où $n-1 < \alpha < n$ et $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$.

Proposition 1.9 *Pour $\alpha > 0$ et $f \in \mathrm{C}[a,b]$, on a :*

$${}^{\mathrm{H}}\mathrm{D}_a^{\alpha} \mathrm{J}^{\alpha} f(t) = f(t), \tag{1.28}$$

mais

$$\mathrm{J}^{\alpha}\, {}^{\mathrm{H}}\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t) \neq f(t). \tag{1.29}$$

Exemple 1.7 *Soit f une fonction définie par :*

$$f(t) = \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}, \quad \beta > 0. \tag{1.30}$$

Alors, on a :

$${}^{\mathrm{H}}\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > \alpha. \tag{1.31}$$

Remarque 1.6 *En particulier, si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$, alors la dérivée fractionnaire d'Hadamard d'une fonction constante n'est en général pas nulle, c'est-à-dire :*

$${}^{\mathrm{H}}\mathrm{D}_a^{\alpha} c = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{-\alpha}. \tag{1.32}$$

Lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Hadamard

Pour toute fonction $y \in AC^n_\gamma([a,b])$, nous avons la relation suivante entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Hadamard :

$$ {}^{C}D^{\beta}_{a} y(x) = {}^{H}D^{\beta}_{a}\left(y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}(a)}{i!} (\log \frac{x}{a})^i \right), \tag{1.33} $$

où $n = \lfloor \beta \rfloor + 1$.

5.3 Lemmes auxiliaires

Lemme 1.1 *Soit $f \in AC^n_\gamma([a,b];\mathbb{R})$ et $\beta > 0$, alors on a :*

$$ J^{\beta} D^{\beta} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k (\log x)^k. \tag{1.34} $$

Où $c_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$ et $n-1 < \beta < n$, avec $n = \lfloor \beta \rfloor + 1$.

Définition 1.29 *La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction $u : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ est définie par :[12]*

$$ {}^{C}_{H}D^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-\alpha-1} \delta^n u(s) \frac{ds}{s}, \tag{1.35} $$

où $n-1 < \alpha < n$ et $\delta^n = \left(t \frac{d}{dt} \right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Lemme *Soit $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ et $u \in C^n(J)$. Alors l'équation différentielle fractionnaire de Caputo-Hadamard*

$$ {}^{C}_{H}D^{\alpha} u(t) = 0 \tag{1.36} $$

admet une solution sous la forme :

$$ u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\log t)^k, \tag{1.37} $$

et la formule suivante est valable :

$$ {}^{H}I^{\alpha} \left({}^{C}_{H}D^{\alpha} u(t) \right) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\log t)^k, \tag{1.38} $$

où $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, ..., n-1$.

Exemple 1.8 *1. Soient $a > 0$, $\beta > -1$ et $f(t) = \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta}$, alors on a :*

$$ {}^{C}_{H}D^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} \delta \left(\log \frac{s}{a} \right)^{\beta} \frac{ds}{s}. $$

Pour $\beta = \frac{3}{2}$, $a = \frac{1}{2}$ et $n = 1$, alors :

$$ {}^{C}_{H}D^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\frac{1}{3}} \delta^1 \left(\log \frac{s}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{ds}{s}. $$

En faisant le changement de variable

$$u = \frac{\log \frac{s}{a}}{\log \frac{t}{a}},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{\alpha}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\frac{3}{2}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 \left(\log \tfrac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{3}}\, du, \\ &= \frac{\frac{3}{2}(\log \frac{t}{a})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{3}}\, du, \\ &= \frac{\frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{6}\right)} \left(\log \tfrac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

2. *En particulier, si* $a > 0$ *et* $\beta = 0$*, alors on a :*

$$ {}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{\alpha}(1) = 0.$$

Remarque 1.7 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard d'une constante est nulle.*

Proposition 1.10 ([12]) *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard existent, pour $\alpha, \beta > 0$, on a :*

$$ {}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{\alpha}\left(x\mathrm{I}_a^{\beta} f(t)\right) = x\mathrm{I}_a^{\beta-\alpha}(f(t)).$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors on a :

$$ {}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{\alpha}\left(x\mathrm{I}_a^{\alpha} f(t)\right) = f(t).$$

6 Conclusion

Dans ce chapitre préliminaire, nous avons introduit les concepts fondamentaux nécessaires à l'étude des équations différentielles fractionnaires avec conditions non locales. Nous avons rappelé les définitions et propriétés essentielles du calcul fractionnaire, notamment les dérivées et intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

Par ailleurs, nous avons présenté des résultats clés de l'analyse fonctionnelle, en particulier les théorèmes du point fixe de Banach et de Krasnoselskii, qui joueront un rôle central dans la démonstration de l'existence des solutions dans les chapitres suivants.

Ce cadre théorique constitue une base solide pour aborder les développements ultérieurs du mémoire, en fournissant les outils mathématiques nécessaires à l'étude rigoureuse du problème posé. Dans le chapitre suivant, nous appliquerons ces résultats à l'analyse de l'existence des solutions d'un problème différentiel fractionnaire avec conditions non locales.

Chapitre 2

L'étude de l'existence de solutions

1 Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Cette théorie a de nombreuses applications dans la description de plusieurs événements dans le monde réel. Les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie ...etc.

Le présent travail [14] s'inscrit dans cette dynamique et s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'existence et l'unicité de solution positive pour le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)) + {}^{H}J^{\beta} g(t, u(t)), & t \in [1, T] \\ u(1) = \lambda \displaystyle\int_{1}^{T} K(s)\, u(s)\, ds + d, & \lambda \geq 0, \quad d > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

sous les conditions suivantes :

- $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$: ordres fractionnaires,
- $f, g : [1, T] \times [0, \infty[\to [0, \infty)$ continues,
- $K : [1, T] \to [0, \infty[$ continue,
- $g(t, u)$ est croissante par rapport à u.

avec ${}^{C}_{H}D^{\alpha}$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard, et ${}^{H}J^{\beta}$ l'intégrale fractionnaire de Hadamard.

Ce chapitre se consacre à l'étude fondamentale de l'existence et de l'unicité des solutions pour une classe d'équations intégrales non linéaires, potentiellement issues de problèmes différentiels fractionnaires avec des conditions non locales. L'établissement de telles propriétés est crucial dans l'analyse qualitative de ces équations, permettant d'assurer la validité et la pertinence des modèles mathématiques qu'elles représentent.

Dans un premier temps, nous aborderons la question de l'unicité de la solution en nous appuyant sur le puissant outil du théorème de contraction de Banach. Pour ce faire, nous introduirons un espace fonctionnel approprié, muni d'une norme adéquate, et définirons un opérateur dont les points fixes correspondent aux solutions de notre problème. L'unicité sera alors démontrée en prouvant que cet opérateur est une contraction sur l'espace fonctionnel considéré, sous certaines conditions sur les fonctions et les paramètres impliqués.

Par la suite, nous nous tournerons vers l'existence d'au moins une solution. Face à la complexité potentielle du problème, nous emploierons le théorème de Krasnoselskii, un résultat clé de l'analyse non linéaire. Ce théorème permet de prouver l'existence d'un

point fixe pour une somme d'opérateurs, où l'un est une contraction et l'autre est complètement continu. Nous décomposerons ainsi l'opérateur associé à notre équation en deux parties distinctes et vérifierons les hypothèses du théorème de Krasnoselskii, notamment la contractivité de l'une des parties et la compacité de l'autre.

À travers ces deux approches complémentaires, ce chapitre vise à fournir un cadre rigoureux pour l'analyse de l'existence et de l'unicité des solutions, contribuant ainsi à une compréhension approfondie des propriétés fondamentales des équations intégrales étudiées.

2 Représentation intégrale

Lemme : [14] La représentation intégrale du problème (2.1) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} \\ + \lambda \int_1^T K(s)u(s)ds + d, \quad t \in [1,T] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve : On a

$$ {}^{C}_{H}D^{\alpha} u(t) = f(t,u(t)) + {}^{H}J^{\beta} g(t,u(t)), \quad t \in [1,T] \tag{1}$$

On applique ${}^{H}J^{\alpha}$ sur(1), on trouve :

$$ {}^{H}J^{\alpha}({}^{C}_{H}D^{\alpha} u(t)) = {}^{H}J^{\alpha} f(t,u(t)) + {}^{H}J^{\alpha}({}^{H}J^{\beta} g(t,u(t))) $$

Alors,

$$ u(t) - c_0 = {}^{H}J^{\alpha} f(t,u(t)) + {}^{H}J^{\alpha+\beta} g(t,u(t)) $$

D'où,

$$ u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} + c_0 \tag{2}$$

On passe maintenant à déterminer la constante c_0 en utilisant la condition initiale du problème (2.1). On trouve :

$$ u(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^1 f(s,u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^1 \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} + c_0 $$

$$ u(1) = c_0 = \lambda \int_1^T K(s)\, u(s)\, ds + d \tag{3}$$

Enfin, en remplaçant la quantité (3) dans (2), on obtient (2.2), d'où le résultat.

3 Existence et unicité de solution

En général, pour résoudre un problème de point fixe, on doit identifier trois éléments fondamentaux, à savoir :

1. Un ensemble convenable E apte à contenir les solutions du problème.
2. Une application T : E → E ayant la particularité qu'un point fixe est solution du problème.
3. Un théorème de point fixe qui assure l'existence d'un tel point fixe de T sur E.

3.1 Existence et unicité de la solution par le théorème du point fixe de Banach

Espace fonctionnel

Considérons l'éspace de Banach suivant :

$$\mathrm{X} := \{u, u \in \mathrm{C}([1,\mathrm{T}], \mathbb{R}^+)\}$$

muni de la norme

$$\|u\| := \sup_{t\in[1,\mathrm{T}]} |u(t)|.$$

Opérateur associé

On présente l'opérateur $\mathcal{T}$ définit par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathrm{X} &\longrightarrow \mathrm{X} \\ u &\longrightarrow \mathcal{T}u \end{aligned}$$

tel que pour tout $t \in [1,\mathrm{T}]$, on a :

$$(\mathcal{T}u)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s))\frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s))\frac{ds}{s} + \lambda\int_1^{\mathrm{T}} \mathrm{K}(s)u(s)ds + d,$$

où $\alpha, \beta > 0$, et f, g satisfont des hypothèses.

Théorème 2.1 *[14] Supposons que les hypothèses suivantes sont valides :*

(P1) *il existe des constantes* $\mathrm{L}_f, \mathrm{L}_g > 0$ *tels que, pour tout* $t \in [1,\mathrm{T}]$ *et pour tout* $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le \mathrm{L}_f|u_1 - u_2|,$$

$$|g(t,u_1) - g(t,u_2)| \le \mathrm{L}_g|u_1 - u_2|.$$

(P2) *il existe une constante* $\mathrm{M}_k > 0$ *tel que :*

$$\mathrm{K}(t) \le \mathrm{M}_k, \quad \forall t \in [1,\mathrm{T}]$$

(P3) *On a* $\mathrm{Q} < 1$ *où*

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{L}_f(log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mathrm{L}_g(log\mathrm{T})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \lambda\mathrm{M}_k(\mathrm{T}-1)$$

D'après le théorème de contraction de Banach, le problème (2.1) *admet une solution unique sur* $[1,\mathrm{T}]$.

Preuve.

Soient $u, v \in \mathrm{X}$. Alors, pour tout $t \in [1,\mathrm{T}]$, on a :

$$\mathcal{T}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s))\frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s))\frac{ds}{s} + \lambda\int_1^{\mathrm{T}} \mathrm{K}(s)u(s)ds + d,$$

$$\mathcal{T}v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,v(s))\frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,v(s))\frac{ds}{s} + \lambda\int_1^{\mathrm{T}} \mathrm{K}(s)v(s)ds + d.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}u(t)-\mathcal{T}v(t)| = \Big|&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s))\frac{ds}{s}\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s))\frac{ds}{s}\\ &+\lambda\int_1^{\mathrm{T}}\mathrm{K}(s)u(s)ds+d\\ &-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,v(s))\frac{ds}{s}\\ &-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,v(s))\frac{ds}{s}\\ &-\lambda\int_1^{\mathrm{T}}\mathrm{K}(s)v(s)ds-d\Big|.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}u(t)-\mathcal{T}v(t)| = \Big|&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\big(f(s,u(s))-f(s,v(s))\big)\frac{ds}{s}\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\big(g(s,u(s))-g(s,v(s))\big)\frac{ds}{s}\\ &+\lambda\int_1^{\mathrm{T}}\mathrm{K}(s)\big(u(s)-v(s)\big)ds\Big|.\end{aligned}$$

Par l' hypothèse **(P1)**, on obtient :

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}u(t)-\mathcal{T}v(t)| \le &\frac{\mathrm{L}_f}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|u(s)-v(s)|\frac{ds}{s}\\ &+\frac{\mathrm{L}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}|u(s)-v(s)|\frac{ds}{s}\\ &+\lambda\int_1^{\mathrm{T}}|\mathrm{K}(s)||u(s)-v(s)|ds.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse **(P2)** et la norme $\|\cdot\|$, on obtient :

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}u(t)-\mathcal{T}v(t)| \le &\frac{\mathrm{L}_f}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\cdot\|u-v\|\\ &+\frac{\mathrm{L}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\cdot\|u-v\|+\lambda\mathrm{M}_k\int_1^{\mathrm{T}}ds\|u-v\|\end{aligned}$$

D'où

$$\|\mathcal{T}u-\mathcal{T}v\| \le \left(\frac{\mathrm{L}_f}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{I}_1+\frac{\mathrm{L}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)}\mathrm{I}_2+\lambda\mathrm{M}_k\mathrm{I}_3\right)\|u-v\|,$$

avec

$$\mathrm{I}_1 := \sup_{t\in[1,\mathrm{T}]}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s},$$

$$\mathrm{I}_2 := \sup_{t\in[1,\mathrm{T}]}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s},$$

$$\mathrm{I}_3 := \int_1^{\mathrm{T}}ds.$$

Calcul explicite des intégrales

Posons $\tau = \log \frac{t}{s} \Longrightarrow s = te^{-\tau}$, donc

$$ds = -te^{-\tau}d\tau = -sd\tau,$$

d'où

$$\frac{ds}{s} = -d\tau.$$

Quand s varie de 1 à t, τ varie de $\log t$ à 0.

Ainsi

$$\int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\gamma-1} \frac{ds}{s} = \int_{\log t}^0 \tau^{\gamma-1}(-d\tau) = \int_0^{\log t} \tau^{\gamma-1}d\tau = \frac{(\log t)^\gamma}{\gamma},$$

pour tout $\gamma > 0$.

Donc,

$$I_1 = \sup_{t\in[1,T]} \frac{(\log t)^\alpha}{\alpha} = \frac{(\log T)^\alpha}{\alpha}, \quad I_2 = \sup_{t\in[1,T]} \frac{(\log t)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} = \frac{(\log T)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}, \quad I_3 = (T-1).$$

Par conséquent, on obtient :

$$\|\mathcal{T}u - \mathcal{T}v\| \leq \left(\frac{L_f(logT)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L_g(logT)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \lambda M_k(T-1)\right)\|u-v\|$$

Ce qui implique :

$$\|\mathcal{T}u - \mathcal{T}v\| \leq Q\|u-v\|$$

Comme l'hypothèse **(P3)** assure que $Q < 1$, alors $\mathcal{T}$ est une contraction sur X.

Donc, d'après le théorème de contraction de Banach, $\mathcal{T}$ admet un unique point fixe $u^* \in X$, solution unique du problème (2.1).

■

4 Existence de la solution par le théorème de Krasnoselskii

Objectif

Nous cherchons à prouver l'existence d'une solution à une équation différentielle fractionnaire avec conditions non locales, à l'aide du théorème de **Krasnoselskii** [5].

L'équation est convertie en une équation intégrale de la forme :

$$u(t) = A(u)(t) + B(u)(t)$$

où :

- A est un opérateur contractant.
- B est un opérateur complètement continu (relativement compact).

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses suivantes*

(H1) *les fonctions f ,et g sont continues sur* X *pour tout $t \in [1,T]$ et la fonction* K *est continue sur* $[1,T]$.

(H2) *il existe une constantes $L_f > 0$ tels que, pour tout $t \in [1,T]$ et pour tout $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$,*

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq L_f|u_1 - u_2|,$$

(H3) *il existe des constantes* $M_k > 0$, $M_g > 0$, *et* $M_f > 0$, *telles que* $\forall\, t \in [1,T]$, *on a :*

$$|K(t)| \leq M_k, \quad |g(t,u(t))| \leq M_g, \quad et \ |f(t,u(t))| \leq M_f,$$

(H4) *On a* $Q_1 < 1$ *où*

$$Q_1 = \frac{L_f (log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

le problème (2.1) *admet au moins une solution dans* X.

Preuve. Soit $B_R = \{u \in X, \|u\| \leq R\}$ un sous-ensemble fermé de X, où R est donné par :

$$R \geq \frac{N_1}{1-N_2}$$

tels que :

$$N_1 := \frac{M_f (log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M_g (log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + d$$

et

$$N_2 := \frac{L_f (log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \lambda M_k (T-1) \neq 1.$$

On introduit les opérateurs $A : B_R \longrightarrow X$ et $B : B_R \longrightarrow X$, tels que pour tout $t \in [1,T]$, A et B sont donnés par :

$$A(u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s)) \frac{ds}{s},$$
$$B(u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^T K(s)u(s)ds + d.$$

Alors, on précède comme suit :

Etape 1 : On montre que pour tout u, $v \in B_R$, on a $Au + Bv \in B_R$.

Soient $u, v \in B_R$. Alors,pour tout $t \in [1,T]$, on a :

$$\begin{aligned} |Au(t) + Bv(t)| \quad = \quad & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s)) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,v(s)) \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^T K(s)v(s)ds + d \right| \end{aligned} \tag{2.3}$$

Alors,

$$\begin{aligned} |Au(t) + Bv(t)| \quad \leq \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,u(s))| \frac{ds}{s} \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |g(s,v(s))| \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^T |K(s)||v(s)|ds + d \end{aligned} \tag{2.4}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |Au(t) + Bv(t)| \quad \leq \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,u(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)| \frac{ds}{s} \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |g(s,v(s))| \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^T |K(s)||v(s)|ds + d \end{aligned} \tag{2.5}$$

En utilisant les hypothèses **(H2)** et **(H3)**, on obtient :

$$\begin{aligned}|\mathrm{A}u(t)+\mathrm{B}v(t)| &\leq \frac{\mathrm{L}_f}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|u(s)|\frac{ds}{s}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|f(s,0)|\frac{ds}{s}\\ &\quad+\frac{\mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}+\lambda\mathrm{M}_k\int_1^{\mathrm{T}}|v(s)|ds+d\\ &\leq \frac{\mathrm{L}_f}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\mathrm{T}}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\sup_{s\in[1,\mathrm{T}]}|u(s)|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\mathrm{T}}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\sup_{s\in[1,\mathrm{T}]}|f(s,0)|\\ &\quad+\frac{\mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{\mathrm{T}}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}+\lambda\mathrm{M}_k\int_1^{\mathrm{T}}ds\sup_{s\in[1,\mathrm{T}]}|v(s)|+d\end{aligned} \tag{2.6}$$

Calculons les intégrales et on passe à la norme $\|\|$, on trouve que :

$$\|\mathrm{A}u+\mathrm{B}v\| \leq \frac{\mathrm{L}_f(log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|+\frac{\mathrm{M}_f(log\mathrm{T})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\mathrm{M}_g(log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\lambda\mathrm{M}_k(\mathrm{T}-1)\|v\|+d \tag{2.7}$$

Comme $u, v \in \mathrm{B}_\mathrm{R}$, alors, cela implique que :

$$\begin{aligned}\|\mathrm{A}u+\mathrm{B}v\| &\leq \frac{\mathrm{N1}}{1-\mathrm{N}_2}\\ &\leq \mathrm{R}\end{aligned} \tag{2.8}$$

Où :

$$\mathrm{N}_1 := \frac{\mathrm{M}_f(log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\mathrm{M}_g(log\mathrm{T})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+d$$

et

$$\mathrm{N}_2 := \frac{\mathrm{L}_f(log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-\lambda\mathrm{M}_k(\mathrm{T}-1)$$

D'où, $\forall u, v \in \mathrm{B}_\mathrm{R}$, on $\mathrm{A}u+\mathrm{B}v \in \mathrm{B}_\mathrm{R}$.

Etape 2 : On montre que l'opérateur A est contractant :
Soient $u, v \in \mathrm{B}_\mathrm{R}$. Pour tout $t \in [1,\mathrm{T}]$, on a

$$\begin{aligned}|\mathrm{A}u(t)-\mathrm{A}v(t)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))\frac{ds}{s}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,v(s))\frac{ds}{s}\right|\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|f(s,u(s))-f(s,v(s))|\frac{ds}{s}\end{aligned} \tag{2.9}$$

En utilisant l'hypothèse **(H2)** , on trouve :

$$\begin{aligned}|\mathrm{A}u(t)-\mathrm{A}v(t)| &\leq \frac{\mathrm{L}_f}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|u(s)-v(s))|\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{\mathrm{L}_f}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\mathrm{T}}\left(\log\frac{\mathrm{T}}{s}\right)^{\alpha-1}\sup_{s\in[1,\mathrm{T}]}|u(s)-v(s))|\frac{ds}{s}\end{aligned} \tag{2.10}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{A}u(t)-\mathrm{A}v(t)\| &\leq \frac{\mathrm{L}_f(log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|u-v\|\\ &\leq \mathrm{Q}_1\|u-v\|\end{aligned} \tag{2.11}$$

Selon l'hypothèse **(H4)**, on a $\mathrm{Q}_1 < 1$. Par conséquence, l'opérateur A est contractant.

Etape 3 : On montre que B est relativement compact, en prouvant successivement que :

(i) B est continu.

(ii) B est borné.

(iii) B est équicontinu.

(i) Montrons que B est continu :

Soit $(u_n)_n \subset \mathrm{B_R}$ une suite telle que $u_n \to u$ quand $n \longrightarrow +\infty$ dans $\mathrm{B_R}$.

Montrons que $\mathrm{B}(u_n) \to \mathrm{B}(u)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, . Par définition de B, on a :

$$\begin{aligned} |\mathrm{B}(u_n)(t) - \mathrm{B}(u)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} (g(s,u_n(s)) - g(s,u(s))) \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_1^{\mathrm{T}} \mathrm{K}(s)(u_n(s) - u(s))ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |g(s,u_n(s)) - g(s,u(s))| \frac{ds}{s} \\ &\quad + \lambda \int_1^{\mathrm{T}} |\mathrm{K}(s)||(u_n(s) - u(s))|ds \end{aligned} \tag{2.12}$$

Alors, on a :

$$|\mathrm{B}(u_n)(t) - \mathrm{B}(u)(t)| \leq \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2,$$

avec

$$\mathrm{I}_1 := \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \left|g(s,u_n(s)) - g(s,u(s))\right| \frac{ds}{s},$$

$$\mathrm{I}_2 := \lambda \int_1^{\mathrm{T}} |\mathrm{K}(s)||u_n(s) - u(s)|ds.$$

Selon l'hypothèse **(H1)**, g est continue. Donc

$$|g(s,u_n(s)) - g(s,u(s))| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow 0,$$

d'où :

$$\mathrm{I}_1 \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

De même,

$$\mathrm{I}_2 \leq |\lambda| \int_1^{\mathrm{T}} |\mathrm{K}(s)||u_n(s) - u(s)|ds \leq |\lambda| \|u_n - u\| \int_1^{\mathrm{T}} |\mathrm{K}(s)|ds,$$

et donc $\mathrm{I}_2 \to 0$.

On conclut que

$$\|\mathrm{B}(u_n) - \mathrm{B}(u)\| \to 0,$$

donc B est continu.

(ii) Montrons que B est borné.

Soit $u \in \mathrm{B_R}$. Alors, pour tout $t \in [1,\mathrm{T}]$, on a :

$$|\mathrm{B}(u)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |g(s,u(s))| \frac{ds}{s} + |\lambda| \int_1^{\mathrm{T}} |\mathrm{K}(s)||u(s)|ds + d$$

Par hypothèses **(H3)**, on a :

$$|\mathrm{B}(u)(t)| \leq \frac{\mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} + |\lambda| \mathrm{M}_k \int_1^{\mathrm{T}} |u(s)|ds + d$$

D'où, on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathrm{B}(u)(t)| &\leq \frac{\mathrm{M}_g (log\mathrm{T})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \lambda \mathrm{M}_k (\mathrm{T}-1)\mathrm{R} + d \\ &:= \mathrm{M} \end{aligned}$$

Comme M est une constante positive, alors, pour tout $t \in [1,\mathrm{T}]$, on a :

$$\|\mathrm{B}u\| \leq \mathrm{M}$$

D' où, B transforme tout ensemble borné en un ensemble borné de X.

(iii) Montrons que B est équicontinu

Soit $u \in \mathrm{B_R}$. Soient $t_1, t_2 \in [1,\mathrm{T}]$ avec $t_1 < t_2$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} |\mathrm{B}u(t_2) - \mathrm{B}u(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} \right| \end{aligned}$$

Comme $t_1 < t_2$, on peut l'écrire comme :

$$\begin{aligned} |\mathrm{B}u(t_2) - \mathrm{B}u(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} \right| \end{aligned}$$

D'où, on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathrm{B}u(t_2) - \mathrm{B}u(t_1)| &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} - \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \right] g(s,u(s)) \frac{ds}{s} \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left| \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} - \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \right| |g(s,u(s))| \frac{ds}{s} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |g(s,u(s))| \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse **(H3)**, et le fait que $1 \leq t_1 < t_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathrm{B}u(t_2) - \mathrm{B}u(t_1)| &\leq \frac{\mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} - \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \right] \frac{ds}{s} \\ &\quad + \frac{\mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

qui implique :

$$\begin{aligned} |\mathrm{B}u(t_2) - \mathrm{B}u(t_1)| &\leq \frac{\mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} - \frac{\mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} \\ &\quad + \frac{\mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

Calculons les intégrales, on trouve que

$$|\mathrm{B}u(t_2)-\mathrm{B}u(t_1)| \leq \frac{\mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left((log\,t_2)^{\alpha+\beta}-(log\,t_1)^{\alpha+\beta}\right)$$

Alors, quand $t_1 \longrightarrow t_2$ alors $|\mathrm{B}u(t_2)-\mathrm{B}u(t_1)| \longrightarrow 0$. Ainsi, $\mathrm{B}(\mathrm{B}_\mathrm{R})$ est un ensemble équicontinu dans X.

On a prouvé que $\mathrm{B}(\mathrm{B}_\mathrm{R})$ est borné et équicontinu. Donc, par le théorème d'Arzelà-Ascoli, $\mathrm{B}(\mathrm{B}_\mathrm{R})$ est relativement compact et L'opérateur B est complètement continu.

D'après les étapes 1,2, et 3, on a montré que :

- $\mathrm{A}(u)+\mathrm{B}(v) \in \mathrm{B}_\mathrm{R}$ pour tous $u, v \in \mathrm{B}_\mathrm{R}$.
- A est une contraction sur B_R,
- B est complètement continu (continu, borné, équicontinu),

Alors, et d'après le théorème de Krasnoselskii, il existe au moins un point fixe $u^{**} \in \mathrm{B}_\mathrm{R}$ tel que :

$$u^{**} = \mathrm{A}(u^{**}) + \mathrm{B}(u^{**})$$

Par conséquent, le problème (2.1) admet au moins une solution dans X. ■

5 Exemple applicatif d'existence et d'unicité

Dans cette section, nous illustrons l'application concrète des résultats d'existence et d'unicité des solutions obtenus dans les sections précédentes, à travers un exemple mathématique rigoureux. Nous considérons un problème d'équation intégrale fractionnaire avec conditions non locales, formulé en fonction de la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard.

Exemple 2.1 *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{1/2}u(t) = \dfrac{2}{sin(t)+4t} + \dfrac{5u(t)}{31} + \dfrac{1}{7}\,{}^{\mathrm{H}}\mathrm{J}^{1/5}\dfrac{u(t)}{5t+1}, \quad t \in [1,e] \\ u(1) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t^{2/5}}u(s)ds + \frac{1}{7}, \end{cases} \tag{2.13}$$

Dans ce problème, on a : $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\lambda = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{7}$, *et*

$$f(t,u(t)) = \frac{2}{sin(t)+4t} + \frac{5u(t)}{31}$$

,

$$g(t,u(t)) = \frac{u(t)}{7(5t+1)}$$

,

$$\mathrm{K}(t) = \frac{1}{t^{2/5}}$$

Il est claire que les fonctions f, g *et* K *sont continues.*
De plus, pour tout $t \in [1,e]$, $x, y \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq \frac{5}{31}|x-y|$$

$$|g(t,x)-g(t,y)| \leq \frac{1}{42}|x-y|$$

et

$$|\mathrm{K}(t)| \leq 1, \forall\, t \in [1,e]$$

Donc, calculons Q*, on trouve :*

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{L}_f (log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mathrm{L}_g (log\mathrm{T})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \lambda \mathrm{M}_k(\mathrm{T}-1) \approx 0.78 < 1$$

*Comme les hypothèse de "***Théorème 2.1***" sont toutes vérifiées, alors, ce problème admet une solution unique dans* X*.*

6 Conclusion

Ce chapitre a présenté une analyse de l'existence et de l'unicité des solutions pour une classe de problèmes d'équations différentielles fractionnaires avec des conditions aux limites non locales. La méthode de l'opérateur intégral a permis d'appliquer avec succès le principe de contraction de Banach pour garantir l'unicité sous des conditions explicites. L'existence d'au moins une solution a été établie par le théorème de Krasnoselskii, en décomposant l'opérateur en une partie contractante et une autre compacte, dont la compacité a été démontrée à l'aide du théorème d'Arzelà-Ascoli. Ces résultats confirment la pertinence des théorèmes de point fixe dans l'étude des propriétés qualitatives des équations différentielles fractionnaires, et servent de fondement pour des analyses futures, comme l'étude de la stabilité ou du comportement asymptotique des solutions.

Chapitre 3

Etude de stabilité au sens de Ulam-Hyers

1 Introduction

L'analyse qualitative des équations différentielles, et en particulier des équations fractionnaires, ne se limite pas à la seule existence ou unicité des solutions. L'un des aspects fondamentaux dans ce domaine est la **stabilité** des solutions. Celle-ci permet de comprendre comment une solution réagit face à de petites perturbations, qu'elles soient dues à des erreurs de mesure, des approximations numériques ou encore à des incertitudes sur les données du problème[22]. Dans les années 1940, le mathématicien S.M. Ulam[24] formula un problème ouvert concernant la stabilité des homomorphismes entre groupes. Ce problème fut résolu partiellement en 1941 par D.H. Hyers[9], qui établit un résultat fondamental donnant naissance à ce que l'on appelle aujourd'hui la **stabilité au sens de Ulam-Hyers**. Ce concept a depuis été généralisé à plusieurs cadres fonctionnels[23], y compris les équations différentielles classiques, puis étendu aux **équations différentielles fractionnaires**, grâce à la souplesse qu'offrent les outils du calcul fractionnaire. L'intérêt de cette notion est double. D'une part, elle garantit qu'une solution approchée (obtenue par exemple via une méthode numérique) est proche d'une solution exacte du problème ; d'autre part, elle offre une mesure quantitative de cette proximité, généralement proportionnelle à l'erreur initiale. Dans le contexte des équations fractionnaires, et notamment pour les équations faisant intervenir des opérateurs comme la dérivée de Caputo-Hadamard et l'intégrale fractionnaire d'Hadamard, la stabilité devient encore plus délicate à établir. Ces opérateurs introduisent un effet de mémoire qui rend les solutions dépendantes de l'historique de l'évolution du système, rendant ainsi toute perturbation potentiellement plus influente. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité au sens de Ulam-Hyers (classique et généralisée) de la solution d'un problème intégral fractionnaire comportant :

- une dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard ;
- une intégrale fractionnaire au sens d'Hadamard ;
- une condition non locale exprimée sous forme d'intégrale.

Notre objectif est de démontrer que, sous certaines hypothèses raisonnables, la solution exacte du problème est stable au sens de Ulam-Hyers. Nous fournirons une démonstration complète et détaillée du théorème de stabilité, en précisant toutes les étapes de calcul et les estimations nécessaires. Nous montrerons également que cette stabilité peut être étendue à une version généralisée, via une fonction de contrôle Ψ. Cette étude vient compléter l'analyse théorique amorcée dans les chapitres précédents[1, 6, 11], en garantissant la robustesse des solutions obtenues dans un cadre applicatif.

2 Formulation du problème

Nous considérons dans ce chapitre le problème intégral fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t)) + {}^{H}J^{\beta}g(t,u(t)), \quad t \in [1,T], \\ u(1) = \lambda \displaystyle\int_1^T K(s)u(s)\,ds + d, \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}^{C}_{H}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre $\alpha \in (0,1)$, ${}^{H}J^{\beta}$ est l'intégrale fractionnaire d'Hadamard d'ordre $\beta \in (0,1)$, $f, g : [1,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $K : [1,T] \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues. Les constantes $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $d \in \mathbb{R}_+$ sont données.

3 Définitions de stabilité

Afin d'analyser rigoureusement la stabilité du problème (3.1), nous introduisons les notions classiques de stabilité au sens de Ulam-Hyers ainsi que sa version généralisée[9]. Ces définitions sont formulées dans le cadre des espaces de Banach des fonctions continues sur $[1,T]$, muni de la norme de type sup :

$$\|x\| := \sup_{t\in[1,T]} |x(t)|$$

Définition 3.1 (Stabilité au sens de Ulam-Hyers) *Le problème (3.1) est dit **stable au sens de Ulam-Hyers** s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in X$ satisfaisant l'inégalité suivante :*

$$\left| {}^{C}_{H}D^{\alpha}v(t) - f(t,v(t)) - {}^{H}J^{\beta}g(t,v(t)) \right| \le \varepsilon, \quad \forall t \in [1,T], \tag{3.2}$$

il existe une solution exacte u de (3.1) qui vérifie :

$$\begin{aligned} {}^{C}_{H}D^{\alpha}u(t) &= f(t,u(t)) + {}^{H}J^{\beta}g(t,u(t)), \quad t \in [1,T] \\ u(1) &= \lambda \int_1^T K(s)u(s)\,ds + d, \quad \lambda \ge 0, \quad d > 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

telle que :

$$\|v - u\| \le C\varepsilon.$$

Définition 3.2 (Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée) *Le problème (3.1) est dit **stable au sens de Ulam-Hyers généralisée** s'il existe une fonction continue et croissante $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, avec $\Psi(0) = 0$, telle que pour toute fonction $v \in C([1,T])$ vérifiant :*

$$\left| {}^{C}_{H}D^{\alpha}v(t) - f(t,v(t)) - {}^{H}J^{\beta}g(t,v(t)) \right| \le \varepsilon, \quad \forall t \in [1,T],$$

il existe une solution exacte u de (3.1) qui vérifie :

$$\begin{aligned} {}^{C}_{H}D^{\alpha}u(t) &= f(t,u(t)) + {}^{H}J^{\beta}g(t,u(t)), \quad t \in [1,T] \\ u(1) &= \lambda \int_1^T K(s)u(s)\,ds + d, \quad \lambda \ge 0, \quad d > 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

telle que :

$$\|v - u\| \le \Psi(\varepsilon).$$

Remarque 3.1 • *Une fonction* $v \in \mathrm{X}$ *est une solution de l'inégalité (3.2) si il existe une fonction* $\mathrm{K} \in \mathrm{C}([1,\mathrm{T}];\mathbb{R})$ *telle que :*
– $|\mathrm{K}(t)| \leq \varepsilon$, $\forall t \in [1,\mathrm{T}]$,
– ${}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{\alpha} v(t) = f(t, v(t)) + {}^{\mathrm{H}}\mathrm{J}^{\beta} g(t, v(t)) + \mathrm{K}(t)$
• *il est claire que si un problème est stable au sens de Ulam-Hyers alors il est aussi stable au sens de Ulam-Hyers généralisé.*

4 Étude de la stabilité

Théorème 3.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont valides :*

(P1) *il existe des constantes* $\mathrm{L}_f, \mathrm{L}_g > 0$ *tels que, pour tout* $t \in [1,\mathrm{T}]$ *et pour tout* $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq \mathrm{L}_f |u_1 - u_2|,$$
$$|g(t,u_1) - g(t,u_2)| \leq \mathrm{L}_g |u_1 - u_2|.$$

(P2) *On a* $\mathrm{Q}_c < 1$ *où*

$$\mathrm{Q}_c = \frac{\mathrm{L}_f (log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mathrm{L}_g (log\mathrm{T})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

Alors le problème (3.1) est stable au sens de Ulam-Hyers.

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$, et $v \in \mathrm{X}$ une fonction qui vérifie (3.2)

$$\left| {}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{\alpha} v(t) - f(t, v(t)) - {}^{\mathrm{H}}\mathrm{J}^{\beta} g(t, v(t)) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [1,\mathrm{T}], \tag{3.5}$$

D'une part, on a $u \in \mathrm{X}$ est la solution unique du problème (3.1) et elle est aussi la solution unique du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)) + {}^{\mathrm{H}}\mathrm{J}^{\beta} g(t, u(t)), \quad t \in [1,\mathrm{T}] \\ u(1) = v(1) \end{cases} \tag{3.6}$$

D'après (2.2), on a :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} + u(1), \quad t \in [1,\mathrm{T}] \tag{3.7}$$

Puisque $u(1) = v(1)$, alors, on a :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s)) \frac{ds}{s} + v(1), \quad t \in [1,\mathrm{T}] \tag{3.8}$$

D'autre part, on intègre l'équation (3.5) et on trouve :

$$\left| \begin{array}{l} v(t) - v(1) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,v(s)) \frac{ds}{s} \\ \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,v(s)) \frac{ds}{s} \end{array} \right| \leq \varepsilon \frac{(\log \mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{3.9}$$

Donc, pour tout $t \in [1,\mathrm{T}]$, on obtient :

$$\begin{aligned} |v(t)-u(t)| &\leq \left| v(t)-v(1)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s))\frac{ds}{s} \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,u(s))\frac{ds}{s} \right| \\ &\leq \left| v(t)-v(1)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,v(s))\frac{ds}{s} \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} g(s,v(s))\frac{ds}{s} \right| \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,v(s))-f(s,u(s))|\frac{ds}{s} \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |g(s,v(s))-g(s,u(s))|\frac{ds}{s} \end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant l'hypothèse **(P1)** et (3.9), et après les calculs nécéssaires, on trouve :

$$|v(t)-u(t)| \leq \varepsilon\frac{(\log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \left[\frac{\mathrm{L}_f(\log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mathrm{L}_g(\log\mathrm{T})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right] \sup_{t\in[1,\mathrm{T}]} |v(t)-u(t)| \tag{3.11}$$

D'où, on obtient

$$\|v-u\| \leq \mathrm{C}\varepsilon \tag{3.12}$$

où

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}_1}{1-\mathrm{Q}_c}$$

avec

$$\mathrm{C}_1 = \frac{(\log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \text{ et } \mathrm{Q}_c = \left[\frac{\mathrm{L}_f(\log\mathrm{T})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mathrm{L}_g(\log\mathrm{T})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right] \leq 1$$

Comme en a **(P2)**, alors $\mathrm{C} > 0$. Par conséquent, on peut conclure que le system (3.1) est stable au sens de Ulam-Hyers.

■

5 Corollaire sur la stabilité généralisée

Corollaire 3.1 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.1 , le problème* (3.1) *est également stable au sens de Ulam-Hyers généralisée. [21]*

Preuve. La démonstration est directe en posant $\Psi(\varepsilon) = \mathrm{C}\varepsilon$. ■

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié en détail la stabilité de la solution du problème intégral fractionnaire (3.1). En supposant des conditions de Lipschitz et une condition de contraction sur la quantité Q, nous avons démontré que le problème est stable au sens de

Ulam-Hyers, avec une borne proportionnelle à l'erreur. Nous avons également établi que le problème est stable au sens de Ulam-Hyers généralisée. Cette propriété de stabilité est essentielle, car elle garantit la robustesse des solutions obtenues face à de petites perturbations. Elle complète ainsi l'étude théorique en assurant la fiabilité du modèle étudié.

Conclusion

Ce travail de mémoire s'est inscrit dans une démarche théorique visant à approfondir notre compréhension des équations différentielles fractionnaires, un domaine en pleine expansion dont les applications s'étendent de la physique à la biologie, en passant par l'ingénierie et l'économie. Contrairement aux modèles classiques, le calcul fractionnaire offre la possibilité de décrire des systèmes avec des propriétés de mémoire et des effets non locaux, ce qui en fait un outil de modélisation particulièrement pertinent pour les phénomènes complexes. Notre principale ambition a été d'analyser en profondeur une classe spécifique d'équations et formulée dans le cadre du calcul fractionnaire de Hadamard. Le problème étudié est de la forme :

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)) + {}^{\mathrm{H}}\mathrm{J}^{\beta} g(t, u(t)), \quad t \in (1, \mathrm{T}] \\ u(1) = \lambda \displaystyle\int_1^{\mathrm{T}} \mathrm{K}(s) u(s)\, ds + d, \quad \lambda \geq 0, \quad d > 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

où ${}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\mathrm{D}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard et ${}^{\mathrm{H}}\mathrm{J}^{\beta}$ est l'intégrale fractionnaire de Hadamard, ce qui confère une spécificité à la fois en termes de régularité et de propriétés fonctionnelles. Pour parvenir à nos fins, la première partie de ce mémoire a été consacrée à l'établissement des fondations théoriques. Nous avons rappelé les notions fondamentales d'analyse fonctionnelle, en particulier les espaces de Banach et les théorèmes de point fixe, qui constituent la boîte à outils essentielle pour ce type d'étude. Parallèlement, nous avons introduit les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaire de Hadamard, soulignant leurs propriétés et les liens qui les unissent. Le cœur de notre travail a résidé dans l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions pour le problème posé. En transformant l'équation différentielle en une équation intégrale équivalente, nous avons pu appliquer des théorèmes de point fixe. Le principe de contraction de Banach a permis d'établir des conditions suffisantes pour l'unicité de la solution. De plus, le théorème de Krasnoselskii a été un outil précieux pour garantir l'existence d'au moins une solution, en décomposant l'opérateur intégral en une somme d'opérateurs, dont la compacité de l'un a été rigoureusement démontrée grâce au théorème d'Arzelà-Ascoli. Enfin, une dimension essentielle de notre analyse a été l'étude de la stabilité de ces solutions au sens d'Ulam-Hyers et de sa version généralisée. Cette stabilité, qui assure que de petites perturbations dans le problème n'engendrent pas de grandes variations dans la solution, est un critère crucial pour la robustesse des modèles mathématiques. Nous avons établi des conditions de Lipschitz et de bornitude sur les fonctions du problème qui garantissent cette stabilité. En conclusion, ce mémoire a non seulement fourni un cadre théorique rigoureux pour l'analyse d'une classe d'équations différentielles fractionnaires, mais a également démontré la puissance et la pertinence des outils de l'analyse fonctionnelle pour ce domaine. Les résultats obtenus ouvrent la voie à des perspectives de recherche futures, comme le développement de schémas numériques pour la résolution effective de ces équations ou l'application de ces modèles à des problèmes physiques

concrets, renforçant ainsi le pont entre la théorie mathématique et le monde réel.
Ce travail constitue une extension du travail de Lachouri A., tout en s'en distinguant par la méthodologie et les objectifs. Alors que Lachouri a utilisé le théorème de Schauder pour établir l'existence des solutions, nous avons appliqué dans ce mémoire le théorème de Krasnoselskii, offrant ainsi une approche plus générale et flexible. De plus, nous avons introduit une étude de la stabilité au sens d'Ulam–Hyers, classique et généralisée, aspect qui n'a pas été abordé dans le travail de Lachouri. Ainsi, notre contribution réside dans l'originalité de l'approche théorique, en élargissant le cadre de l'existence et de l'unicité vers l'analyse de la stabilité des équations différentielles fractionnaires avec conditions non locales.

Bibliographie

[1] **Akkouchi, M.** (2011), *Stability of certain functional equations via a fixed point of Čirić*, Filomat, **25**(2), pp. 121–131. doi : 10.2298/FIL1102121A. 6, 25

[2] **Amirian, M.M. and Jamali, Y.** (2017), *The Concepts and Applications of Fractional Order Differential Calculus in Modelling of Viscoelastic Systems : A Primer*, Noûs, vol. 5, pp. 1–36. 6

[3] **Baker, J.** (1991), *The Stability of Certain Functional Equations*, Proceedings of the American Mathematical Society, **112**(3), pp. 729–729. doi : 10.1090/S0002-9939-1991-1052568-7. 6

[4] **Bourbaki, N.** (2009), *Éléments de Mathématique*, Springer, New York. 3

[5] **Burton, T. A.** (1998), *A fixed-point theorem of Krasnoselskii*, Applied Mathematics Letters, **11**(6), pp. 85–88. 6, 18

[6] **François, M.**, *Fonction Gamma d'Euler et fonction zêta de Riemann*, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, Orsay, France. (Document de cours non daté). 25

[7] **Francis, H. and Gilles, L.** (2009), *Analyse 1*, Dunod, Paris. (Information complétée). 3

[8] **Gustave, C.** (2010), *Cours de topologie*, 2ème édition, Dunod, Paris. 3

[9] **Hyers, D.H.** (1941), *On the Stability of the Linear Functional Equation*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **27**(4), pp. 222–229. doi : 10.1073/pnas.27.4.222. 25, 26

[10] **Ioannis, F., & Martin, M.** (2013), *Fixed Point Theorems and Their Applications*, World Scientific, New York. 6

[11] **Janusz, B.** (2013), *On Ulam's Type Stability of the Cauchy Additive Equation*, The Scientific World Journal, 2014, Article ID 540164. doi :10.1155/2014/540164. 25

[12] **Jarad, F., Abdeljawad, T., & Baleanu, D.** (2012), *Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives*, Advances in Difference Equations, 2012(142), pp. 1–8. 12, 13

[13] **Kolmogorov, A., & Fomine, S.** (1999), *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, Paris. 3, 5

[14] **Lachouri A., & Gouri, N.** (2022), *Existence and uniqueness of positive solutions for a class of fractional integro-differential equations*, Mémoire de Master/Thèse, Palestine Polytechnic University. (Forme de document de recherche). 1, 14, 15, 16

[15] **Miller, K. S., & Ross, B.** (1993), *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York. 6, 7

[16] **Oldham, K. B., & Spanier, J.** (2009), *The Fractional Calculus : Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Dover Publications, Mineola, New York. 6

[17] **Omar, A. A., & Hasan, R.** (2013), *Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications*, Proceedings of the International Conference on Information Technology. (Forme de conférence). 6

[18] **Pierre, C.** (2009), *Éléments d'analyse et d'algèbre*, École Polytechnique, France. 3

[19] **Richard, H.**, *Fractional Calculus : An Introduction for Physicists*, World Scientific, GigaHedron, Germany. (Document non daté). 6

[20] **Sabatier, J., Agrawal, O. P., & Tenreiro Machado, J. A.** (2003), *Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications*, Springer, The Netherlands. 6

[21] **Soon Mo, J.** (2011), *Hyers–Ulam–Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis*, Springer, New York. 28

[22] **Themistocles, M.** (2010), *Handbook of Functional Equations : Stability Theory*, Springer, New York. 25

[23] **Tosio, A.** (1950), *On the Stability of the Linear Transformation in Banach Spaces*, Journal of the Mathematical Society of Japan, **2**(1), pp. 65–66. 25

[24] **Ulam, S. M.** (1960), *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience, New York. 25

[25] **Wheeler, N.** (1997), *Construction & Physical Application of the Fractional Calculus*, Rapport technique du Reed College Physics Department. 6

[26] **Yannick, P.**, *Espaces vectoriels normés et topologie*, Institut Élie Cartan Nancy, Université Henri Poincaré Nancy 1. (Document de cours non daté). 3

[27] **Yicheng, L., & Zhixiang, L.** (2012), *Krasnoselskii Type Fixed Point Theorems and Applications*, American Mathematical Society, **136**(4), pp. 1213–1220. 6

Etude de l'Existence de Solution d'un Problème avec Conditions Non-Locales

Résumé : Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème d'équations différentielles fractionnaires avec conditions non locales, en nous concentrant sur l'analyse de l'existence, de l'unicité et de la stabilité des solutions. La méthode adoptée repose sur la transformation de l'équation différentielle considérée en une équation intégrale équivalente, ce qui nous a permis d'appliquer plusieurs résultats issus de la théorie des points fixes, notamment les théorèmes de Banach et de Krasnoselskii.

Ces outils nous ont permis d'établir que le problème étudié admet une solution unique et stable. Par ailleurs, l'étude de la stabilité d'Ulam-Hyers a montré que les solutions demeurent proches de la solution exacte même en présence de petites perturbations, ce qui confirme la rigueur et la solidité des résultats obtenus.

Ainsi, ce mémoire constitue une contribution à l'approfondissement théorique de l'étude des équations différentielles fractionnaires avec conditions non locales, et confirme leur pertinence en tant que modèles mathématiques capables de décrire avec précision des systèmes complexes. Il ouvre également des perspectives de recherche future, telles que l'examen de problèmes fractionnaires avec conditions impulsives, l'analyse d'autres formes de stabilité, ainsi que le développement de méthodes numériques adaptées à ce type de problèmes.

Mots-Clés. Équations différentielles fractionnaires, conditions non locales, stabilité d'Ulam-Hyers, existence et unicité.

Study of the Existence of Solution for a Problem with Non-Local Conditions

Abstract : In this dissertation, we studied a problem of fractional differential equations with nonlocal conditions, focusing on the analysis of existence, uniqueness, and stability of solutions. The adopted approach was based on transforming the considered differential equation into an equivalent integral equation, which enabled us to apply several results from fixed point theory, particularly the theorems of Banach and Krasnoselskii.

These tools allowed us to establish that the studied problem admits a unique, and stable solution. Moreover, the investigation of Ulam-Hyers stability demonstrated that the solutions remain close to the exact solution even in the presence of small perturbations, thereby confirming the rigor and robustness of the obtained results.

Thus, this dissertation represents a contribution to the theoretical advancement of the study of fractional differential equations with nonlocal conditions and confirms their relevance as mathematical models capable of accurately describing complex systems. It also opens perspectives for future research, such as the examination of fractional problems with impulsive conditions, the analysis of other types of stability, as well as the development of numerical methods adapted to this class of problems.

Key Words. Fractional differential equations, nonlocal conditions, Ulam-Hyers stability, existence and uniqueness.

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحميد بن باديس-مستغانم-
كلية العلوم الاجتماعية و الإنسانية

تصريح شرفي خاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية لإنجاز البحث

أنا الممضي أدناه،

الطالب(ة): .....زعيطي.....بورة..... رقم التسجيل الجامعي:.....18.37.03.64.08.....

الحامل لبطاقة التعريف الوطنية رقم 11.00.09.63.03.33.39.0002 والصادرة بتاريخ: .....20.25.05.08.....

عن.....زعيطي.....بورة.....

المسجل ب كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي / قسم .....الرياضيات.....والإعلام الآلي.....

شعبة .....رياضيات..... / التخصص .....M.C.O.....

والمكلف بإنجاز مذكرة ماستر بعنوان:

.....

.....Etude de l'existence de solution d'un.....

.....problème avec conditions non locales.....

.....

أصرح بشرفي أني ألتزم بمراعاة المعايير العلمية والمنهجية ومعايير الأخلاقيات العلمية والنزاهة الأكاديمية المطلوبة في إنجاز البحث ، وأتحمل المسؤولية الشخصية عن كل المحتوى المتضمن في البحث المذكور أعلاه .

التاريخ .....21/05/2025.....

إمضاء المعني

* ملحق القرار الوزاري رقم 933 المؤرخ في 28 جويلية 2016 الذي يحدد القواعد المتعلقة بالوقاية من السرقة العلمية ومكافحتها.