REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté par

MARIR.SALIHA

Pour Obtenir

LE DIPLÔME DE MAGISTER

Spécialité : **Mathématiques**

Option :

Analyse des Systèmes, Contrôle et Optimisation Numérique

Intitulé :

"Problèmes De Contrôlabilité Des Systèmes Différentiels Fractionnaires"

Composition du jury de soutenance :

B. BENDOUKHA	**Professeur**	**Président**	**UMAB**
M. CHEGAG	**Maître de Conférences A**	**Examinateur**	**ENSET ORAN**
A. AMIR	**Maître de Conférences A**	**Examinateur**	**UMAB**
D. BOUAGADA	**Maître de Conférences A**	**Encadreur**	**UMAB**

Année Universitaire : 2011/2012

Table des matières

Remerciements

Je remercie Allah le tout puissant d'avoir exaucé mon rêve qui a duré une vingtaine d'années, de m'avoir donnée la santé, la volonté et le courage de mener à bien ce travail.

Je tiens particulièrement à remercier mon encadreur Monsieur BOUAGADA Djillali, Maître de conférence A à l'université de Mostaganem qui a suscité mon intérêt pour le sujet et qui a su m'orienter par son soutien permanent, ses conseils utiles et ses critiques qui m'ont beaucoup aidée à apprécier ce travail malgré ses occupations.
Je le remercie vivement d'avoir surtout initié mes premières recherches en théorie des systèmes et de contrôle.
Je lui suis reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordeé et la libèrté qu'il m'a laissée.

Je remercie vivement Monsieur BENDOUKHA Berrabah, Professeur à l'université de Mostaganem, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance, ainsi que Messieurs AMIR Abdessamad, Maître de conférence A à l'université de Mostaganem et CHEGAG Mustapha, Maître de conférence A à l'ENSET d'oran, pour l'honneur qu'ils m'ont faite en acceptant d'examiner mon manuscrit de mémoire.

Je remercie également tous ceux qui tout au long de ces années d'études, m'ont encadrée, observée, aidée, conseillée, et plus particlièrement à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.
Je remercie vivement Messieurs, A. AMIR, S. M. BAHRI, Z. DAHMANI, D. BOUAGADA et O. BELHAMITI membres de l'équipe pédagogique de la post-graduation Analyse des Systèmes, Contrôle et Optimisation Numérique.

Que Monsieur Said GUERMAH, chercheur à l'université Mouloud Maameri de Tizi Ouzou, trouve ici l'expression de ma grattitude, pour avoir éclairé mes perspectives et m'avoir été d'une grande aide , surtout dans les moments les plus difficiles. Merci !

J'adresse un grand merci à toutes les étudiantes du Master 1 et 2 du dépaertement de Mathématiques, que j'ai eu le plaisir de cotoyer durant ces deux années d'études.

Mes remerciements vont aussi d'une façon particulière à Mademoiselle LADJAL Noria, qui n'a jamais cessé depuis notre première rencontre, de m'encourager et de me remonter le moral dans les moments de détresse, et ceci malgré son jeune-âge.

Que Mademoiselle BELHADJ Djahida trouve ici l'expression de ma reconnaissance envers tout ce qu'elle a fait pour moi, et surtout pour tout le temps qu'elle m'a accordée. Je n'oublierai jamais sa disponibilité et son soutien permanents.

Enfin, j*'aimerais conclure en saluant tous ceux qui accomplissent leur travail consciencieusement et qui font tout pour l'évolution de notre cher PAYS.*

Dédicaces

Par le biais de cet humble et modeste travail synonyme de concrétisation, de labeur et d'efforts, je dédie le fruit de ma persévérance :

A ma raison de vivre et ma fleur de vie ma mére, symbole d'amour,d'affection et de bienveillance, pour sa patience, ses sacrifices, sa conscience, ses conseils qui ont éclairé mon chemin, et surtout pour l'amour qu'elle m'a apportée depuis ma naissance.

A mon cher père, en reconnaissance de de tout ce qu'il a fait pour moi tout au long de son existence, pour son soutien moral, son encouragement continuel et pour sa compréhention.

A tous les membres de la famille à qui je souhaite une vie pleine de bonheur et de joie.

A mes enfants, Abdessamad, Anes et Mohamed, qui ont toujours veillé à faire régner le silence dans notre foyer et à sacrifier leurs moments de distraction afin de laisser leur maman travailler. je leur souhaite tout le bonheur du monde, et beaucoup de réussite dans tous ce qu'ils entreprendront.

Et tout particulièrement à mon mari, grâce à qui j'ai pu entramer ce travail.

Son aide, son amour, son soutien moral et son attention m'ont donnée la force et le courage d'aller jusqu'au bout de mon projet.

Je lui témoigne ici toute ma reconnaissance.

Notations

$\mathbb{N}$	L$^{'}$ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}^{+}$	L$'$ensemble des nombres réels non-négatifs
$\mathbb{R}^{n}$	L'espace des vecteurs à n composantes réelles
$\mathbb{R}^{n}_{*}$	L'espace des vecteurs non nuls à n composantes réelles
$\mathbb{R}^{m\times n}$	L'espace des matrices réelles de dimension $m \times n$
A^{T}	Transposée de matrice
A^{-1}	Inverse de matrice
I_{n}	Matrice identité d'ordre n
0_{n}	Matrice nulle d'ordre n
$\pounds$	Transformée de Laplace
$\pounds^{-1}$	Transformée inverse de Laplace
${}^{c}D^{\alpha}$	Dérrivée fractionnaire d'ordre α de *Caputo*
$\delta(t)$	La fonction de *Dirac*
$\Gamma(\alpha)$	La fonction Gamma-d' *Euler*
$\Im m(A)$	Image de matrice
$Ker(A)$	Noyau de matrice
$B^{\perp}$	Ensemble orthogonal à B
$*, \langle\rangle$	Produit de convolution (respectivement scalaire)
LTI	Système linéaire à temps invariant
$\cap, \cup$	Intersection (respetivement réunion) d'ensembles
$W_{r}(t)$	Gramien d'atteignabilité d'un système LTI
${}_{\alpha}W_{r}(t)$	Gramien d'atteignabilité d'un système linéaire fractionnaire
C	Matrice d' atteignabilité d'un système LTI
${}_{\alpha}W_{c}(t)$	Gramien de contrôlabilité d'un système linéaire fractionnaire
${}_{\alpha}C$	Matrice de contrôlabilité d'un système linéaire fractionnaire
${}_{\alpha}O$	Matrice d'observabilité d'un système linéaire fractionnaire
${}_{\alpha}W_{o}(t)$	Gramien d'observabilité d'un système fractionnaire

Abréviations

SISO	Singl Input-Single output (une seule entrée-une seule sortie)
LTI	Linéaire invariant dans le temps (Linéaire à temps invariant)

0.1 Introduction

Le monde industriel connait actuellement un énorme développement technologique sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performance. En grande partie, ce progrés est dû au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en oeuvre des méthodes et des approches trés complexes pour l'identification et la commande des systèmes. Le développement des mathématiques en général a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de plus en plus complexes posés par la physique et les sciences de l'ingénieur. L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie est celle du *Calcul Fractionnaire* qui étend la *dérivation* et l'*intégration* aux ordres *fractionnaires*. Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend compte vite qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle même et donc on peut introduire la dérivée seconde,... puis les dérivées successives d'ordre entiers naturels. L'intégration, opération inverse de la dérivée peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre "moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivaut d'ordre fractionnaire.

Au début, c'était presque un jeu d'ésprit pour certains mathématiciens de renommée. Le 30 septembre 1695, *Leibnitz* adresse une lettre à l'*Hospital* dans laquelle, il aborde le problème de dérivation fractionnaire. Ce dernier lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre "un demi" d'une fonction x. *Leibnitz* lui répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles résultats. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier *Euler*(1730) , *Fourier*(1823) , *Liouville*(1832) , *Riemann*(1847) ,etc...

Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

Durant presque plus de 300 ans, la théorie du Calcul Fractionnaire a été développée uniquement en tant que théorie pure utile juste pour les mathématiciens. Ce n'est qu'au début des années 1950 que *Vanderziel* [41] dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis *Davidson* et *Cole* [11] dans leurs travaux sur la relaxation diélèctrique dans certains liquides ont pu modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée d'ordre fractionnaire.

Depuis ces découvertes, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leurs intérêt dans différentes disciplines telles que : l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'automatique, le traitement de signal et dans différentes applications telles que : la modélisation, l'identification et la commande. En effet, il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématiques d'ordre fractionnaire, par exemple :

-Les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans les modèles mathématiques du visco-élastique des matières [4, 36] .

-Les problèmes magnétiques peuvent être décrits en utilisant des équations intégro-différentielles fractionnaires [13, 20] .

-Dans la physiochimie, le courant est proportionnel aux dérivées fractionnaires du voltage quand l'interface fractale est mise entre un métal et un milieu ionique [24]

-En biologie, il a été déduit que les membranes de cellules d'organisme biologique ont la conductance électrique d'ordre fractionnaire [9], il est donc classé dans le groupe des modèles d'ordre non entiers.

Nombreux sont les chercheurs scientifiques dont l'attention est attirée par la classe des systèmes différentielles d'ordre fractionnaire tels que : le circuit de *Chua* d'ordre fractionnaire [19], le système de *Duffing* d'ordre fractionnaire [3], le système de *Rössler* d'ordre fractionnaire [10] ,...

Les publications dans ce domaine sont considérables :

D. Matignon (1994) [27], D. Matignon et B. Andréa-Novel (1996) [28],Y. Peng , X. Guangming et W. Long (2003) [34], S. Guermah,S. Djennoune et M. Bettayeb (2008) [181], T. Kaczorek (2008) [21] , B. M. Vinagre, C. A. Monje et A. J. Caldero (2002) [42], J. Tenreiro Macchado (2011) [39] et la liste reste longue.

Les systèmes sur lesquels on va se pencher sont les systèmes linéaires standards d'ordre fractionnaire à temps continu définis par les équations d'état,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} {}^{c}D^{\alpha}x\left(t\right) & = & Ax\left(t\right)+Bu\left(t\right) \quad N-1<\alpha\leq N,\left(N\in\mathbb{N}^{*}\right) \\ y\left(t\right) & = & Cx\left(t\right)+Du\left(t\right) \end{array} \right. \tag{1}$$

où : ${}^{c}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de *Caputo*.entre 0 et t.

<u>Présentation du mémoire</u> :

Ce mémoire est organisé en trois parties.

La première partie comportera une base théorique du calcul fractionnaire dont la définition de l'opérateur dérivé fractionnaire, quelques propriétés, sa transformée de Laplace en évoquant par le même biais quelques propriétés de l'opérateur transformé de Laplace nécessaires pour le développement des chapitres qui vont suivre.

Quelques notions de base de l'algèbre linéaire seront aussi citées dans cette partie.

L'objectif de la deuxième partie est de rappeller certains concepts élémentaires concernant l'identification des systèmes linéaires standards à temps continu où on rappelle les formules de la solution générale, de la réponse impulsionnelle, ainsi que celle de la fonction de transfert. Pour le problème de contrôle, on s'est limité à étaler des conditions nécessaires et suffisantes pour l'atteignabilité à partir de l'origine, résultats trés connus dans la littérature classique.

La troisième partie , qui représente l'objet de ce mémoire, est partagée en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on a généralisé le travail de la littérature [T. Kaczorek, I. Podlubny,...], en utilisant la notion de la transformée de Laplace pour un ordre arbitraire entre n et n-1. La recherche de la solution moyennant l'outil Laplace a été donc dérivée. Le choix de la dérivation au sens de Caputo dans ce manuscrit est justifié. les notions de représentations d'état et de la fonction de transfert pour ce type de systèmes ont fait l'objet d'une section à part.

Le deuxième et troisième chapitre sont consacrés aux problèmes de d'atteignabilité et de contrôlabilité. Les définitions classiques y sont adaptées, pour ensuite étendre le critère de

Kalman pour ce type de systèmes où on a définit la matrice de contrôlabilté et le Gramian de contrôlabilté. Pour cela, on a donné de nouvelles démonstrations à des résultats connus.

Le dernier chapitre est dédié à l'observabilité d'un système linéaire fractionnaire. Là aussi, on a adapté les mêmes définitions classiques, des extensions et de nouveaux tests ont de même été réalisés. Dans ce cadre, nombreux résultats nouveaux ont été dérivés.

Certains résultats ont été communiqués aux journées scientifiques organisées par la Faculté SESNV de l'université de Mostaganem. Un autre travail a été soumis à la conférence SOFA2011 et a été accepté pour présentation orale.

Une autre contribution a été de même soumise au $5^{ième}$ workshop sur la modélisation, contrôle et analyse des systèmes qui se déroulera à Tanger en Novembre 2011.

Première partie

Notions générales

Chapitre 1

Dérivation et intégration fractionnaire

L'objectif de ce chapitre dans un premier temps est de mettre en évidence les bases théoriques des dérivées d'ordre fractionnaire, les principales propriétés de l'opérateur de dérivation fractionnaire. Plusieurs approches et définitions ont été le fruit de contributions de mathématiciens de renommée. Dans ce mémoire, on va se limiter aux trois approches les plus populaires et les plus pratiquables qui sont celles de *Grünwald-Letnikov*, de *Riemann-Liouville* et enfin l'approche de *Caputo* [17, 19, 35] .

Un aperçu sur la transformée de Laplace et ses propriétés sera bénéfique pour les chapitres qui vont suivre.

1.1 La fonction Gamma

Une des fonctions de base pour le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'*Euler*[1] notée $\Gamma(z)$ qui n'est qu'une généralisation de factorielle n $(n!)$ où n peut être non entier et même complexe.

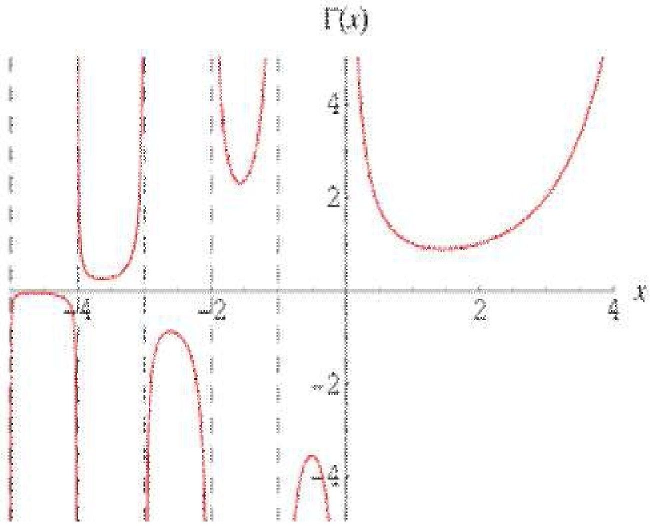
Définition 1.1 *La fonction Gamma notée par* $\Gamma(z)$ *est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_{O}^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.1}$$

pour tout complexe z *dont la partie réelle est strictement positive* $(\mathrm{Re}(z) > 0)$.

[1] Leonhard Euler est né le 15 Avril 1707 à Basel en Suisse d'un père pasteur calviniste. Il est diplômé de l'université de Basel en 1724 en théologie et hébreux. Son professeur de mathématiques Johann Bernoulli convaint son père de son avenir de mathématicien. Il est successivement mathématicien à l'académie des sciences de Saint Petersbourg, de Berlin puis de nouveau de Saint Petersbourg. Ses contributions aux différents champs des mathématiques sont innombrables. Citons entre autres, la standardisation des notations mathématiques (f(x), e, ■, i et ■), la preuve que e est irrationnel, la fondation de l'analyse mathématique (Introductio in analysin infinitorum en 1748, Institutiones calculi differentialis en 1755 et Institutiones calculi integralis en 1770) l'invention du calcul des variations (Methodus inveniendi lineas curvas en 1740), son travail sur les séries infinies (problème de Basel, constante d'Euler, formule d'Euler-MacLaurin), la résolution du problème aux trois corps, son travail sur la théorie des nombres (étude de nombreuses conjectures de Fermat, preuve du dernier théorème de Fermat pour n = 3). Outre les travaux mathématiques, il contribue également en mécanique (Mechanica en 1736 et Theoria motus corporum solidorum en 1765) et en hydrostatique. Il est mort le 18 Septembre 1783 à Saint Petersbourg d'une attaque.

Nous donnerons une représentation graphique de la fonction gamma comme dans [35, 39]



(1.2)

Fig 1-Représentation de la fonction Gamma sur $\mathbb{R}$

Une des plus importantes propriétés de la fonction Gamma est :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.3}$$

en effet, par intégration par partie on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_O^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\
&= \left[-e^{-t} t^z\right]_0^{+\infty} + z\int_O^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= 0 + z\int_O^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

1.2 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^z joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier.

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}, z \in \mathbb{C} \tag{1.4}$$

Une généralisation de e^z à un paramètre est la fonction de *Mittag-Leffler* ou *fonction exponentielle généralisée,* notée par $E_\alpha(z)$, définie pour tout complexe z par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \; (\alpha > 0) \tag{1.5}$$

et qui est représentée graphiquement [35, 39] par,

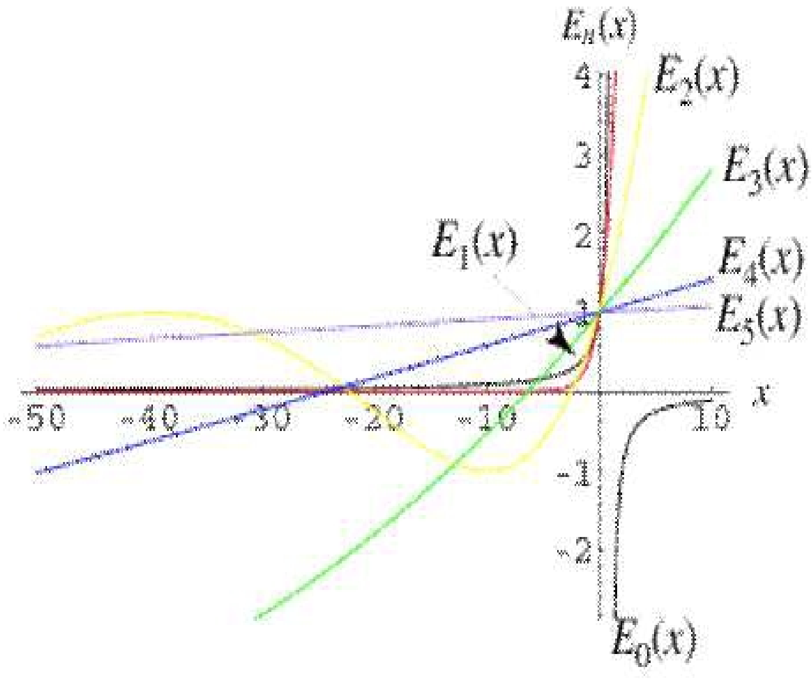


Fig 2-Représentation de la fonction de Mittag-Leffler
pour quelques valeurs de α

Cette fonction peut être généralisée pour deux paramètres :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \, (\alpha > 0, \ \beta > 0) \tag{1.6}$$

1.3 *Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov*

1.3.1 La dérivation d'ordre entier relatif :

Soit $f(x)$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ .On a

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{1.7}$$

l'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \tag{1.8}$$

et par induction, on peut généraliser cette formule pour tout entier naturel n

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh) \tag{1.9}$$

où,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \tag{1.10}$$

notons,

$$f_h^{(p)}(x) = \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(x-kh) \tag{1.11}$$

où p et n sont des entiers naturels.
-Pour $p \leq n$ on a

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) = \frac{d^p f(x)}{dx^p} \tag{1.12}$$

car,

$$\binom{p}{k} = 0, k = p+1, p+2, ..., n \tag{1.13}$$

-Considérons maintenant les valeurs négatives de p. Pour cela posons,

$$\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)(p+2)...(p+k-1)}{k!} \tag{1.14}$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \binom{-p}{k} &= \frac{(-p)(-p-1)(-p-2)\cdots(-p-k+1)}{k!} && (1.15) \\ &= (-1)^k \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} && (1.16) \end{aligned}$$

Si on remplace dans (1.11) p par $(-p)$, on obtient,

$$\begin{aligned} f_h^{(-p)}(x) &= \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-p}{k} f(x-kh) && (1.17) \\ &= \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f(x-kh) \end{aligned}$$

où p désigne un entier naturel.
Si n est fixé alors $f_h^{(-p)}(x)$ tend vers une limite nulle quand $h \to 0$.
Pour avoir une limite non nulle, on doit supposer que $n \to \infty$ quand $h \to 0$, pour cela on peut prendre

$$h = \frac{x-a}{n} \tag{1.18}$$

notons par

$$D_a^{-p} f(x) = \lim_{h\to 0} f_h^{(-p)}(x) \tag{1.19}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right] f(x-kh) \tag{1.20}$$

l'expression $D_a^{-p} f(x)$ représente l'intégrale de la fonction $f(x)$ répétée p fois : en effet, pour $p=1$ on a,

$$\begin{aligned} D_a^{-1} f(x) &= \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh = x-a}} \frac{1}{h^{-1}} \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} 1 \\ k \end{array} \right] f(x-kh) \\ &= \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh = x-a}} \frac{1}{h^{-1}} \sum_{k=0}^{n} f(x-kh) \\ &= \int_a^x f(t)\, dt \end{aligned}$$

d'où

$$D_a^{-1} f(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{1.21}$$

pour $p=2$, on a,

$$\begin{aligned} D_a^{-2} f(x) &= \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh = x-a}} \frac{1}{h^{-2}} \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} 2 \\ k \end{array} \right] f(x-kh) \\ &= \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh = x-a}} \frac{1}{h^{-2}} \sum_{k=0}^{n} (k+1) f(x-kh) \\ &= \int_a^x (x-t) f(t)\, dt \\ &= \int_a^x \int_a^\tau f(\tau)\, d\tau dt \end{aligned}$$

d'où,

$$D_a^{-2} f(x) = \int_a^x \int_a^\tau f(\tau)\, d\tau dt \tag{1.22}$$

et par réccurence, on peut généraliser les formules (1.21) et (1.22)

$$D_a^{-p} f(x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)\, dt \tag{1.23}$$

$$= \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{p-1}} f(x_p)\, dx_p \cdots dx_2 dx_1 \tag{1.24}$$

Conclusion 1.1 *La dérivée d'ordre entier p et l'intégrale répétée p fois d'une fonction $f(x)$ sont des cas particuliers de l'expression générale,*

$$D_a^p f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(x-kh) \tag{1.25}$$

qui représente :
-La dérivée d'ordre entier m si $p = m$

$$D_a^m f(x) = \frac{f^{(m)}(x)}{dx^m} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} f(x-kh) \tag{1.26}$$

-L'intégrale de f répétée m fois si $p = -m$

$$D_a^{-m} f(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-t)^{m-1} f(t)\, dt \tag{1.27}$$

On peut noter,

$$D_a^{-m} f(x) = I_a^m f(x) \tag{1.28}$$

1.3.2 Extention de la dérivée d'ordre entier à l'ordre réel

Il est trés naturel qu'après être arrivé à la généralisation dont la formule est (1.25) de se poser la question suivante : qu'en est-il de la dérivation si p est réel ou même complexe ?. On se resteind dans notre cas juste pour les valeurs réelles de p.

-Considérons le cas où $p > 0$. Notre but est d'évaluer la limite suivante

$$D_a^p f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(x-kh) \tag{1.29}$$

Pour cela, on a besoin du théorème de *Letnikov*

Théorème 1.1 [19]*Soient deux suites $(\beta_k), k = 1, 2, \cdots$ et $(\alpha_{n,k}), n = 1, 2, \cdots$ telles que*

$\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{n,k} = 0$ *pour tout k.*

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} = A$

$\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_{n,k}| < M$ *pour tout n.*

Alors : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = A$

En utilisant la proriété connue des coéfficients du binôme,

$$\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

et en appliquant le théorème de *Letnikov,* après une série de calculs, (pour plus de détails, voir [35]), on aboutit à la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire de *Grünwald-Letnikov.*

Définition 1.2 *Pour toute fonction* $f \in C^{m+1}([a,b])$ *où* m *est le plus petit entier qui vérifie* $m < p < m+1$, *la dérivée fractionnaire de* Grünwald-Letnikov *d'ordre* $p > 0$ *de la fonction* f *est définie pour tout* $x \in [a,b]$ *par :*

$${}_{a}^{gl}D_{x}^{p} f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p+1)} \int_a^x (x-t)^{m-p} f^{(m+1)}(t)\,dt \tag{1.31}$$

Propriété[19]

Sous les conditions : $f^{(k)}(a) = 0 \;\; (k = 0, 1, 2, \cdots, p-1)$

$${}_{a}^{gl}D_{x}^{\alpha}\left[{}_{a}^{gl}D_{x}^{\beta} f(x)\right] = {}_{a}^{gl}D_{x}^{\beta}\left[{}_{a}^{gl}D_{x}^{\alpha} f(x)\right] = {}_{a}^{gl}D_{x}^{\alpha+\beta} f(x) \tag{1.32}$$

Où : $p = \max(m,n)$ avec $0 \leq m < \alpha < m+1$ et $0 \leq n < \beta < n+1$

1.4 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-*Liouville*

1.4.1 Intégrale fractionnaire sur l'intervalle $[a,b]$

Soit une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$

$$f^{(-1)}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$f^{(-2)}(x) = \int_a^x \int_a^t f(\tau)\,d\tau dt = \int_a^x (x-t) f(t)\,dt$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

par réccurence, on peut montrer la formule de *Cauchy* pour tout entier naturel *:*

$$\begin{aligned} f^{(-n)}(x) &= \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n \cdots dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \end{aligned} \tag{1.33}$$

Depuis la généralisation du *factoriel* par la fonction *Gamma, Riemann* se rendit compte que le second membre de (1.33) pouvait avoir un sens même si n prenait une valeur non entière. Il définit alors l'intégrale fractionnaire comme suit

Définition 1.3 *L' intégrale fractionnaire d'ordre p au sens de* Riemann-Liouville *d'une fonction continue sur $[a,b]$ est définie par*

$$\begin{cases} {}_{a}^{rl}D_{x}^{-p}f(x) & = & \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{a}^{x}(x-t)^{p-1}f(t)\,dt & \text{pour } p>0 \\ {}_{a}^{rl}D_{x}^{0}f(x) & = & f(x) & \text{pour } p=0 \end{cases} \tag{1.34}$$

Propriété[31, 35]

Pour toute fonction continue sur $[a,b]$, pour tout $\alpha>0$ et $\beta>0$, on a

$${}_{a}^{rl}D_{x}^{-\alpha}\left({}_{a}^{rl}D_{x}^{-\beta}f(x)\right)={}_{a}^{rl}D_{x}^{-\beta}\left({}_{a}^{rl}D_{x}^{-\alpha}f(x)\right)={}_{a}^{rl}D_{x}^{-(\alpha+\beta)}f(x) \tag{1.35}$$

Cette propriété s'appelle *propriété de semi-groupe.*

1.4.2 Dérivée fractionnaire sur $[a,b]$ au sens de Riemann-*Liouville*

Dans la formule de *Cauchy :*

$$f^{(-n)}(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt \qquad n\geq 1$$

Pour k entier naturel ($k\geq 0$), il est évident qu'on peut obtenir

$$f^{(-k-n)}(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}D^{-k}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt \tag{1.36}$$

où le symbole D^{-k} ($k\geq 0$) désigne l'intégration d'ordre k.

D'un autre côté, si on fixe n, pour tout entier k ($k\geq n$) la dérivation d'ordre $(k-n)$ de la fonction f peut s'écrire,

$$f^{(k-n)}(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}D^{k}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt \tag{1.37}$$

où le symbole D^{k} ($k\geq 0$) désigne la dérivation d'ordre k.

A partir de la formule (1.37) , on peut prévoir une extension pour la dérivée d'ordre non entier.

On va fixer dans la formule (1.37) l'entier k ($k\geq 0$) et remplacer l'entier n par un réel α tel que $k-\alpha>0$, ceci donne :

$$D^{k-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}D^{k}\int_{a}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt \qquad 0<\alpha\leq 1 \tag{1.38}$$

En posant $p=k-\alpha>0$, on aboutit à,

Définition 1.4 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $p>0$. La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de* Riemann-Liouville *est donnée par,*

$${}_{a}^{rl}D_{x}^{p}f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k-p)}\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left(\int_{a}^{x}(x-t)^{k-p-1}f(t)\,dt\right) & k-1<p<k \\ \frac{d^{k}}{dx^{k}}f(x) & p=k \end{cases} \tag{1.39}$$

k est un entier naturel qui satisfait : $k-1=[p]$ la partie entière de p.

Remarque 1.1 *1-Si la fonction $f \in C^k([a,b])$, en intégrant par partie la formule* (1.39) *on montre que :*

$$ {}_a^{rl}D_x^p f(x) = {}_a^{gl}D_x^p f(x) $$

2-On remarque aussi que Riemann-Liouville *a affaiblit les conditions sur l'existence de la dérivée fractionnaire d'une fonction.*

Nous citerons, par suite quelques propriétés importantes,

Propriétés [35]

1-Une des plus importantes propriétés de la dérivée de *Riemann-Liouville* est :
Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$ et pour tout réel $p > 0$,

$$ {}_a^{rl}D_x^p \left({}_a^{rl}D_x^{-p} f(x) \right) = f(x) \tag{1.40} $$

Cette propriété montre que l'opérateur de dérivation fractionnaire de *Riemann-Liouville* est l'inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de *Riemann-Liouville*

2-Comme généralisation de la propriété précédente, nous avons,
pour tout $p > 0,\ q > 0$

$$ {}_a^{rl}D_x^{(p)} \left({}_a^{rl}D_x^{(-q)} f(x) \right) = {}_a^{rl}D_x^{(p-q)} f(x) \tag{1.41} $$

1.5 Dérivée fractionnaire au sens de *Caputo*

Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement lesquelles contiennent $f'(a), f''(a), f^{(3)}(a), \cdots$ chose qui n'est pas réalisée à partir de l'approche de la dérivation fractionnaire proposée par *Riemann-Liouville* qui mène à des conditions initiales contenant des limites des dérivées fractionnaires à la borne inférieure a qui ne sont pas interprétables physiquement.

Une certaine solution à ce conflit a été proposée par *M.Caputo* en se basant sur les fonctions généralisées (distributions).

Définition 1.5 *Pour toute fonction $f \in C^N([a,b]), N \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $\alpha > 0$ la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de* Caputo *est définie par,*

$$ {}_a^cD_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{N-\alpha-1} f^{(N)}(\tau)\, d\tau & N-1 < \alpha < N \\ \frac{d^N f(t)}{dt^N} & \alpha = N \end{cases} \tag{1.42} $$

1.5.1 Comparaison entre les dérivées fractionnaires de *Riemann-Liouville et M.Caputo*

1-Sous la condition que f admette $(N+1)$ dérivées continues sur $[a,b]$, quand $\alpha \to N$, la dérivée fractionnaire de la fonction f au sens de *Caputo* devient la dérivée $N^{ième}$ de la fonction f.

en effet,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to N} \left({}_a^c D_x^\alpha f(x) \right) &= \lim_{\alpha \to N} \left[\frac{f^{(N)}(a)(x-a)^{N-\alpha}}{\Gamma(N-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(N-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{N-\alpha} f^{(N+1)}(t)\, dt \right] \\
&= f^{(N)}(a) + \int_a^x f^{(N+1)}(t)\, dt \\
&= f^{(N)}(x), \qquad N = 1, 2, 3 \cdots
\end{aligned}$$

2-Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et ${}_a^c D_x^\alpha f(x)$ et ${}_a^{rl} D_x^\alpha f(x)$ coexistent, elles sont reliées par la relation :

$$ {}_a^c D_x^\alpha f(x) = {}_a^{rl} D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \tag{1.43}$$

3-Dans le cas où : $f^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, \cdots, N-1$

$$ {}_a^c D_x^\alpha f(x) = {}_a^{rl} D_x^\alpha f(x) \tag{1.44}$$

4-Pour tout $\alpha > 0$, pour toute constante c on a,

$$\begin{aligned}
{}_a^c D_x^\alpha c &= 0 \qquad (1.45) \\
{}_a^{rl} D_x^\alpha c &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, t > 0
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

La transformée de *Laplace* est un outil qui permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire où disparaissent les formes dérivées. Une telle pratique permet de transposer le problème de l'espace de temps (notre monde temporel) vers un espace dit espace des phases (un monde parallèle), de le résoudre dans cet espace puis transposer de nouveau la solution vers le monde réel par la transformée inverse de *Laplace* $[31, 39]$.

Définition 2.1 *La transformée de* Laplace *est une application qui à une fonction $f(t)$ de l'espace des temps, associe une fonction $F(s)$ de l'espace des phases définie par,*

$$\pounds\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \;\; s \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

Théorème 2.1 *(d'existence) Si une fonction $f(t)$ est continue par morçeaux sur l'intervalle $[0, \infty[$ et est bornée sur cet intervalle, i.e. pour tout $t > 0$,*

$$|f(t)| \leq K e^{at} \tag{2.2}$$

où K et a sont des réels positifs alors La transformée de Laplace *de $f(t)$ existe pour toute phase $Re(s) > a$*

Preuve. $f(t)$ continue par morçeaux sur l'intervalle $]0, \infty[$ alors $e^{-st} f(t)$ .est intégrable alors

$$0 \leq |\pounds\left[f(t)\right]| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_0^{\infty} \left| e^{-st} f(t) \right| dt = \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)|\, dt$$

Pour la convergence de $\int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)|\, dt$, il faut imposer à $|f(t)|$ de croître moins vite que e^{-st} ne décroît quand $t \to 0$, donc si on choisit $|f(t)| < K e^{at}$ pour tout t alors,

$$\int_0^{\infty} \left| e^{-st} f(t) \right| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} K e^{at} dt = \frac{K}{s - a}$$

sous la condition que $Re(s) > a$. ■

2.1 Propriétés de la transformée de Laplace

On cite ci-dessous quelques propriétés de la transforméé de *Laplace.*

1-La transformée de *Laplace* est une application linéaire, i.e.
pour toutes fonctions f et g admettant des transformées de *Laplace* et pour tous réels α et β :

$$\pounds\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right]=\alpha\pounds\left[f(t)\right]+\beta\pounds\left[g(t)\right] \tag{2.3}$$

2-Sous les mêmes conditions on a,

$$\pounds\left[(f*g)(t)\right]=\pounds\left[f(t)\right].\pounds\left[g(t)\right] \tag{2.4}$$

où $*$ désigne le produit de convolution défini par

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau=\int_0^t g(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

f et g etant deux fonctions continues sur $[0,\infty[$

3-Si $F(s)$ et $G(s)$ désignent la transformée de *Laplace* de $f(t)$ et $g(t)$ respectivement alors,

$$\begin{aligned}\pounds\left[f(t)\right] &= F(s)\Longleftrightarrow f(t)=\pounds^{-1}\left[F(s)\right] && (2.5)\\ \pounds\left[(f*g)(t)\right] &= F(s)\,G(s)\Longleftrightarrow \pounds^{-1}\left[F(s)\,G(s)\right]=(f*g)(t) && (2.6)\end{aligned}$$

$\pounds^{-1}$ désigne l'opérateur inverse de *Laplace* défini par

$$\pounds^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds$$

où γ est choisi de telle façon que l'intégrale converge, ce qui implique que γ doit être supérieur à la partie réelle de toute singularité de $F(s)$.

2.2 Transformée de Laplace de quelques fonctions

On donne ici la transforméé de *Laplace* de quelques fonctions usuelles utiles pour le reste du travail.

1-$\pounds\left[\delta(t)\right]=1,\delta(t)$ la fonction de *Dirac.*

2-$\pounds\left[t^a\right]=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}},a>-1$

3-$\pounds\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^{(k)}(0),n=1,2,\cdots$

4-$\pounds\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$

5-$\pounds\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(t)\,dt$

6-$\pounds\left[\delta^{(n)}(t)\right] = s^n, n = 0, 1, 2, \cdots$

2.3 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

2.3.1 Transformée de Laplace de la dérivée de Grünwald-Letnikov

-Dans le cas où la borne inférieure est $t = 0$ on a,

$$ {}_0^{gl}D_x^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)\, t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p+1)} \int_0^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\, d\tau $$

En appliquant la transformée de *Laplace* on obtient :

$$ \pounds\left[{}_0^{gl}D_x^\alpha f(t)\right] = s^\alpha F(s) \tag{2.7} $$

2.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville

En tenant compte des transformées de Laplace de fonctions usuelles, on obtient la formule suivante :

pour $N - 1 \leq \alpha < N$,

$$ \pounds\left[{}_0^{rl}D_x^\alpha f(t)\right] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{N-1} s^k \left[D^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0} \tag{2.8} $$

Remarque :

Cette transformée est bien connue, cependant son application pratique est limitée vu l'absence d'une interprétation physique des limites des valeurs initiales des dérivées fractionnaires à la borne inférieure $t = 0$.

2.3.3 Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace on arrive à,

pour $N - 1 < \alpha \leq N \quad (N \in \mathbb{N}^*)$,

$$ \pounds\left[{}_0^{c}D_t^\alpha f(t)\right] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{N-1} s^{\alpha-k-1} \left[D^{(k)} f(t)\right]_{t=0} \tag{2.9} $$

Remarque :

On voit bien que cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo induit des valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées à la borne inférieure

$t = 0$ pour lesquelles une certaine interprétaion physique existe par exemple $f(0)$ est la position initiale, $f'(0)$ la vitesse initiale, $f''(0)$ l'accélération initiale, on peut alors éspérer que ça peut être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant à des équations différentielles fractionnaires à coéfficients constants accompagnés de conditions initiales dans leurs formes traditionnelles.

Chapitre 3

Rappels d'algèbre linéaire

L'étude des matrices est tout à fait ancienne. *Leibnitz* est l'un des fondateurs de l'analyse qui a développé la théorie des determinants en *1693* pour faciliter la résolution des équations différentielles.

Les matrices sont maintenant utilisées pour de multiples applications et servent notamment à représenter les coéfficients d'équations linéaires $[1, 14, 25, 37]$

3.1 Notions de base

Définition 3.1 *Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique si et seulement si*

$$A^T = A$$

Définition 3.2 *Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A symetrique.*

-*On dit que A est semi-définie positive si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \geq 0$$

-*On dit que A est semi-définie négative si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \leq 0$$

-*On dit que A est définie-positive si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n_* : x^T A x > 0$$

-*On dit que A est définie-négative si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n_* : x^T A x < 0$$

Définition 3.3 -*Le noyau d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, noté $Ker\,(A)$, est le noyau de l'application linéaire canonique associée à A et on a*

$$Ker\,(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

-L'image d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *notée* $\Im m\,(A)$, *est l'image de l'application linéaire canonique associée à* A *et on a*

$$\Im m\,(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } Ax = y\}$$

Le rang de A *est la dimension de l'image de* A. *C'est le nombre maximal de colonnes de* A *formant une famille libre de* $\mathbb{R}^n$.

$$rang\,(A) = \dim\left[\Im m\,(A)\right]$$

Théorème 3.1 *(du rang) Soient* E *et* F *deux* $\Bbbk$ *espaces vectoriels* $(\Bbbk = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$, E *etant de dimension finie. Soit l'application linéaire de* E *dans* F *représentée par la matrice* A.

on a

$$rang\,(A) = \dim(E) - \dim\left[Ker\,(A)\right]$$

Corollaire 3.1 *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

-A *inversible*

-$Ker\,(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

-$rang\,(A) = n$

Définition 3.4 *Deux vecteurs* x *et* y *de* $\mathbb{R}^n$ *sont orthogonaux si et seulement si* $< x, y >= 0$. *On note* $x \perp y$.

Définition 3.5 *Soit* K *une partie de* $\mathbb{R}^n$. *L'orthogonal à* K *est le sous ensemble de* $\mathbb{R}^n$, *noté* $K^\perp$, *formé de tous les vecteurs orthogonaux aux vecteurs de* K. $K^\perp$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.1 *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *on a*

$$\begin{aligned} Ker\left(A^T\right) &= \left[\Im m\,(A)\right]^\perp \\ \Im m\left(A^T\right) &= \left[Ker\,(A)\right]^\perp \end{aligned}$$

3.2 Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition 3.6 *Soit* A *une matrice carrée à coefficients dans un corps* $\Bbbk\,(= \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$. *Le polynôme caractéristique de* A *est le polynôme* $P_A(\lambda)$ *à coefficients dans* $\Bbbk$ *défini par :*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{3.1}$$

C'est un polynôme de degré égal à n *et dont le coefficient du monôme de degré* n *est égal à* $(-1)^n$.

Théorème 3.2 *(*Cayley-Hamilton[2]*) Si A est une matrice carrée de dimension n et $P_A(\lambda)$ son polynôme caractéristique alors,*

$$P_A(A) = 0 \tag{3.2}$$

3.3 Exponentielle d'une matrice

Définition 3.7 *Soit A une matrice carrée réelle de dimension $n \times n$. On définit l'exponentielle de la matrice A par,*

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

C'est une série normalement convergente *dans l'espace de* Banach $M_n(\mathbb{R})$ *espace des matrices carrées réelles.*

En effet,

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=p}^{q} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=p}^{q} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|} \tag{3.3}$$

Exemple 3.1

$$\exp\left[diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\right] = diag\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \cdots, e^{\lambda_n}\right) \tag{3.4}$$

En particulier

$$\exp(0_n) = I_n \tag{3.5}$$

Proposition 3.2 *Soient A et B deux matrices carrées réelles de même dimensions $n \times n$.*

1)-Si A et B commutent,i.e.

$$A \times B = B \times A$$

alors

$$e^{A+B} = e^A \times e^B \tag{3.6}$$

2)-e^A est inversible *et*

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A} \tag{3.7}$$

3)-A et e^A commutent, i.e.

$$A \times e^A = e^A \times A \tag{3.8}$$

4)-L'application $f(t) = e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$f'(t) = A \times e^{tA} = e^{tA} \times A \tag{3.9}$$

[2]William Rowan Hamilton est né le 4 août 1805 à Dublin en Irlande de Archibald Hamilton et de Sarah Hutton. A 5 ans, il sait le Latin, le Grec et l'Hébreu. Il marque son intérêt pour les mathématiques dés l'age de 12 ans et commence à étudier les travaux de Clairaut (Algebra), de Newton et de Laplace. Après être entré au Trinity College, il soumet son premier article à la Royal Irish Academy en 1824. Il obtient le poste de Professeur d'astronomie du Trinity College en 1827 à l'âge de 21 ans. Il publie en 1832 son troisième supplément à son livre "Theory of Systems of Rays". Il publie "On General Method in Dynamics" en 1834 et est anobli en 1835. Il produit sa théorie des quaternions en 1843 en se promenant avec sa femme le long du canal royal. Malgré sa dépendance vis-à-vis de l'alcool dans le dernier tiers de sa vie, il publie "Lectures on Quaternions" en 1853 puis "Elements of Quaternions" dont le dernier chapitre reste inachevé. Il meurt d'une sévère attaque de goutte après avoir appris son élection comme premier membre admis à la National Academy of Sciences des Etats Unis.

Proposition 3.3 *Pour toute matrice carrée A et tout $t \geq 0$:*

$$\pounds\left[e^{At}\right] = [sI - A]^{-1} \tag{3.10}$$

Preuve. On sait que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At}$$

En appliquant la transformée de *Laplace*,
on obtient :

$$\begin{aligned}
\pounds\left[\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)\right] &= \pounds\left[Ae^{At}\right] && (3.11)\\
s\pounds\left[e^{At}\right] - e^{A0} &= A\pounds\left[e^{At}\right] && (3.12)\\
[sI - A]\,\pounds\left[e^{At}\right] &= I && (3.13)\\
\pounds\left[e^{At}\right] &= [sI - A]^{-1}
\end{aligned}$$

par suite, on aboutit au résultat estimé. ■

Deuxième partie

Systèmes dynamiques linéaires à temps continu

Un système, aggrégation d'éléments interconnectés, est constitué naturellement ou artificiellement afin d'accomplir une tâche prédéfinie. Son état est affecté par une ou plusieurs variables, les *entrées* du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de *sorties.* L'ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entre les entrées et les sorties constitue le *modèle mathématique.* La modélisation est donc l'étape préliminaire de l'analyse d'un système quelconque. Elle consiste à décrire le système par des équations différentielles de type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{3.14}$$

Sous l'hypothèse que le temps t dans lequel évolue le système est continue $(t \in \mathbb{R})$, le vecteur $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'*entrée (*ou *commande)* du système. Sa valeur peut être choisie arbitrairement pour tout t. Le vecteur $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la *sortie* du système et peut être mesurée avec une certaine précision. Le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est appellé *état* du système. Il représente la *mémoire* du système c'est-à-dire l'ensemble des informations dont le système a besoin pour prédire son propre avenir pour une entrée $u(t)$ connue. La première équation du système (3.10) s'appelle équation d'*évolution* ou équation *dynamique.* Il s'agit d'équation différentielle qui permet de savoir vers où va se diriger l'état $x(t)$ sachant sa valeur à l'instant présent t et la commande $u(t)$ que nous sommes en train d'exercer. La deuxième équation s'appelle équation d'*observation.* Elle permet de calculer le vecteur de sortie $y(t)$ connaissant l'état et la commande. Les deux équations de (3.10) forment *la représentation d'état du système.*

Chapitre 4

Représentation d'état des systèmes linéaires

Une classe particulière dont l'importance pratique est remarquable est celle des systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles linéaires. On parle alors de *systèmes linéaires.* Dans le cas contraire, un processus de *linéarisation* est alors nécessaire. Pour accomplir cette partie, nous avons eu recours à différents ouvrages [8, 25, 33, 37] .

Tout au long de ce mémoire nous essayons d'étendre des résultats répandus dans la littérature des systèmes linéaires continus, résultats qui sont rappellés dans cette partie.

Exemple 4.1 *(Introductif)* Circuit RLC : *Le système de la figure ci-dessous a pour entrée la tension* $u(t)$ *et pour sortie* $y(t)$ *.Cherchons à modéliser ce système*

<u>Equations différentielles régissant le système</u>

Soit i_1 *le courant élèctrique dans la résistance* R_1*(de haut en bas).*
D'aprés les lois de Kirchhoff *pour les mailles et les noeuds,on a :*

$$\begin{cases} u(t) - v(t) - R_1 i_1(t) = 0 \text{ (Lois des mailles)} \\ L\frac{d}{dt}i(t) - R_1 i_1(t) = 0 \text{ (Lois des mailles)} \\ i(t) + i_1(t) - c\frac{d}{dt}v(t) = 0 \text{ (Lois des noeuds)} \end{cases}$$

<u>Equations d'état pour ce système</u> *:*

Intuitivement, on peut comprendre que la mémoire du système correspond à la charge du condensateur et au flux élèctromagnétique dans la bobine. En effet, si ces quantités sont *connues à l'instant $t = 0$, pour une entrée connue, le futur du système est déterminé de façon unique. Ainsi des variables d'états possibles sont données par les quantités $i(t)$ proportionnelle au flux et $v(t)$ proportionnelle à la charge. On obtient les équations d'états en cherchant à se débarasser de i_1 dans les équations précédentes et en isolant $\frac{di}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$. On obtient,*

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{cR_1}v(t) + \frac{1}{c}i(t) + \frac{1}{cR_1}u(t) \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v(t) - \frac{R_2}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

or la sortie est donnée par

$$y(t) = R_2 i(t) \tag{4.2}$$

on obtient finalement la représentation d'état d'un système linéaire donné par,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{cR_1} & \frac{1}{c} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{cR_1} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t) \tag{4.3}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Définition 4.1 *La représentation d'état d'un sysème linéaire standard à temps invariant **(LTI)** est donnée par :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{4.5}$$

où :
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est la matrice* dynamique *ou d'*évolution.
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *est la matrice de* commande *ou d'*entrée.
$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *est la matrice de* mesure *ou de* sortie.
$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *est la matrice de* transmission directe.

Théorème 4.1 [27] *Considérons le système (4.5), notons $x(t_0) = x_0$ l'état initial. L'état du système à l'instant t est donné par,*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \tag{4.6}$$

et la sortie s'exprime par,

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t) \tag{4.7}$$

la fonction

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \tag{4.8}$$

est appellée solution homogène, libre *ou* transitoire *et la fonction*

$$x_f(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \tag{4.9}$$

est appellée solution forcée.

Preuve. Posons
$$z(t) = e^{-At}x(t)$$
alors
$$x(t) = e^{At}z(t).$$
par dérivation,
$$\dot{x}(t) = Ae^{At}z(t) + e^{At}\dot{z}(t) \tag{4.10}$$
par identification avec l'équation d'évolution
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
et après simplification,
$$\dot{z}(t) = e^{-At}Bu(t) \tag{4.11}$$
par intégration,on obtient,
$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau \tag{4.12}$$
donc,
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}\left[z(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau\right] \\ &= e^{At}\left[e^{-At_0}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau\right] \\ &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$
pour obtenir la sortie, il suffit de noter $y(t) = Cx(t) + Du(t)$
donc
$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$
2ème méthode pour déterminer la solution du système :

En appliquant la transformée de *Laplace* à l'équation dynamique, on obtient

$$\begin{aligned} \pounds\left[\dot{x}(t)\right] &= \pounds\left[Ax(t) + Bu(t)\right] \\ sX(s) - x(0) &= A\pounds\left[x(t)\right] + B\pounds\left[u(t)\right] \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ sX(s) - AX(s) &= x(0) + BU(s) \\ \left[sI - A\right]X(s) &= x(0) + BU(s) \\ X(s) &= \left[sI - A\right]^{-1}x(0) + \left[sI - A\right]^{-1}BU(s) \end{aligned} \tag{4.13}$$

En appliquant la transformée inverse de *Laplace* à l'équation (4.13) , on obtient,

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left[X(s)\right] &= \pounds^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]x(0)+\pounds^{-1}\left[(sI-A)^{-1}BU(s)\right]\\
x(t) &= e^{At}x_0+e^{At}*Bu(t)\\
x(t) &= e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

c'est l'état du système à l'instant t. ■

4.1 Matrice de transition

La matrice de transition fait passer un système dynamique livré à lui même, sans commande, de l'état initial $x(t_0)$ à l'état $x(t)$ à l'instant t.

Définition 4.2 *Considérons le système homogène,*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t)\\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{4.14}$$

la solution est

$$x_l(t)=e^{A(t-t_0)}x_0=\Phi(t-t_0)\,x_0 \tag{4.15}$$

La matrice $\Phi(t,t_0)=\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$ de dimension $n\times n$ est appelée ***matrice de transition*** *du système,*

Propriétés de la matrice de transition :

Nous citerons quelques propriétés de la matrice de transition qui ont comme intérêt de bien mettre en évidence sa signification physique.

1-La matrice de transition est solution de l'équation homogène

$$\dot{\Phi}(t,t_0)=A\Phi(t,t_0) \tag{4.16}$$

2-Relation de semi-groupe :

Etant donnés trois instants t_0,t_1,t_2. On a,

$$\Phi(t_2,t_0)=\Phi(t_2,t_1)\times\Phi(t_1,t_0) \tag{4.17}$$

3-La matrice de transition $\Phi(t,t_0)$ est inversible.

$$\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$$

4-Il est facile de voir que :

$$\frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t,t_0)=-\Phi^{-1}(t,t_0)\,A \tag{4.18}$$

4.2 Matrice de réponse impulsionnelle

Définition 4.3 *La Matrice de réponse impulsionnelle d'un système linéaire, notée* $g(t)$ *, est la sortie de ce système (à conditions initiales nulles) quand on l'excite en entrée par une impulsion de* Dirac.

$$\mathrm{g}(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \tag{4.19}$$

En effet, posons pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, $t \geq 0$:

$$u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} e_i \tag{4.20}$$

$$u(t) = 0, \text{sinon} \tag{4.21}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, t \in [0, \varepsilon] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{4.22}$$

$$u(t) = \delta(t)\, e_i \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{tA}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\tau A}Be_i d\tau + D\delta(t)\, e_i && (4.24) \\ &= Ce^{tA}\int_0^t \frac{1}{\varepsilon}e^{-\tau A}Be_i d\tau + D\delta(t)\, e_i && (4.25) \\ &= \left[Ce^{tA}B + D\delta(t)\right] e_i && (4.26) \\ &= g(t)\, e_i && (4.27) \end{aligned}$$

Remarque 4.1 *A chaque instant* t, $g(t)$ *est une matrice de dimension* $p \times m$. *L'élément* (i, j) *donne la relation entre la* $i^{\text{ème}}$ *entrée et la* $j^{\text{ème}}$ *sortie à l'instant* t.

4.3 La matrice de transfert

Originellement définie pour les systèmes à une variable d'entrée, une variable de sortie SISO (single input, single output), la notion de fonction de *transfert* a été essentiellement définie par *A.C HALL* dans sa thèse en 1943 où il utilise la transformée de *Laplace* et le calcul opérationnel inventé par *O. Heaviside* en 1892 pour caractériser le comportement *entrée-sortie* des servomécaniques.

Soit le système multivariable L.T.I dont le modèle d'état est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.28}$$

où

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

du fait de la linéarité de l'opérateur de *Laplace,* il est possible de l'appliquer aux équations de (4.28)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} sX(s) - x & = & AX(s) + BU(s) \\ Y(s) & = & CX(s) + DU(s) \end{array} \right. \tag{4.29}$$

où :

$$\begin{array}{lcl} X(s) & = & \pounds\,(x(t)) \\ U(s) & = & \pounds\,(u(t)) \\ Y(s) & = & \pounds\,(y(t)) \end{array}$$

En résolvant les équations (4.29) par rapport à $Y(s)$, il vient,

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1}[BU(s) + x_0] + DU(s) \tag{4.30}$$

Pour des conditions initiales nulles $x_0 = 0$, on obtient la relation entrée-sortie :

$$Y(s) = [C(sI_n - A)^{-1}B + D]U(s) \tag{4.31}$$

notons

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \tag{4.32}$$

Il vient alors,

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{4.33}$$

Définition 4.4 *La matrice $G(s) \in \mathbb{C}^{p\times m}$ définie par*

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

est appellée matrice de transfert *liant l'entrée $U(s)$ à la sortie $Y(s)$ par la relation*

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Remarque 4.2 *Voici quelques remarques caractérisant la matrice de transfert :*

-La notion de matrice de transfert n'est définie que pour des conditions initiales nulles.

-Le concept de matrice de transfert permet de représenter le comportement dynamique du système de manière algébrique.

-la matrice de transfert est une caractéristique du système indépendante de l'amplitude et de la nature de l'entrée du système.

-C'est un modèle entrée-sortie *qui ne contient aucune information sur la nature physique du système.*

-La transformée de Laplace *permet de relier* la matrice de réponse impulsinnelle *et* la matrice de transfert *par :*

$$G(s) = \pounds\,[g(t)] \tag{4.34}$$

d'où le théorème suivant :

Théorème 4.2 *La réponse d'un système linéaire à temps continu avec des conditions initiales nulles, dont la matrice de transfert est $G(s)$ est donnée par l'intégrale de convolution suivante*

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^t g(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau \tag{4.35}$$

Preuve. En appliquant l'opérateur inverse de *Laplace* à (4.33), tenant compte de (4.34), on a

$$\begin{aligned} \pounds^{-1}[Y(s)] &= \pounds^{-1}[G(s)\,U(s)] \\ y(t) &= g(t) * u(t) \\ y(t) &= \int_0^t g(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^t g(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{4.36}$$

■

Exemple 4.2 *Voici un exemple de calcul de matrice de transfert :*

On considère le système linéaire invariant à temps continu décrit par sa représentarion d'état,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)\,;\; x(t_0) = 0 \tag{4.37}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \tag{4.38}$$

Sa matrice de transfert est,

$$\begin{aligned} G(s) &= C\,(sI_n - A)^{-1}\,B + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -3 \\ -2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ G(s) &= \begin{pmatrix} \frac{2s^2+s-7}{s^2-s-6} \\ \frac{s+3}{s^2-s-6} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.39}$$

Chapitre 5

Atteignabilité d'un système linéaire à temps invariant (LTI)

Les concepts de contrôlabilité et d'observabilité sont des concepts fondamentaux pour l'étude des systèmes. Ils décrivent respectivement comment les états d'un système sont influencés par les entrées et quelle information, les sorties mesurées donnent sur les états du système. Par exemple, le fait de tourner le volant ou non d'une automobile ne va pas affecter la vitesse (la vitesse n'est pas contrôllable par le volant), alors que le fait de décélérer ne va pas influencer la direction de la voiture. Un des buts principaux de l'analyse des systèmes est d'établir des lois de commande pour qu'un système évolue selon un objectif prédéterminé.

5.1 Notions d' Atteignabilité

Soit le système linéaire à temps continu défini par l'équation d'évolution et l'équation de sortie suivantes,

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dot{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right. \tag{5.1}$$

On se pose la question suivante : étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un contrôle $u(t)$ qui transfère l'état du système $x(t)$ de l'état initial $x_0 = x(t=t_0)$ à l'état $x_1 = x(t=t_1)$ en un temps $t_1 - t_0$?

Cela est un problème de contrôle.

Définition 5.1 *Un état $x_1 \in \mathbb{R}^n$ est dit* atteignable *à partir de l'état initial x_0 en un temps fini $t_1 - t_0$ s'il existe un contrôle $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ qui transfère l'état du système $x(t)$ de l'état initial $x_0 = x(t=t_0)$ à l'état $x_1 = x(t=t_1)$*

i.e.

$$x_1 = x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \tag{5.2}$$

L'état x_1 est dit atteignable *en temps $t_1 - t_0$.*

Remarque 5.1 *si on pose*

$$T = t_1 - t_0$$

et

$$\delta = \tau - t_0$$

la solution du système s'écrit alors

$$x_1 = x(T + t_0) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\delta)}Bu(\delta + t_0)\, d\delta \tag{5.3}$$

notons maintenant

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1 - e^{AT}x_0 && (5.4) \\ \hat{u}(\delta) &= u(\delta + t_0) && (5.5) \end{aligned}$$

d'où

$$\hat{x}_1 = \int_0^T e^{A(T-\tau)}B\hat{u}(\delta)\, d\delta \tag{5.6}$$

On remarque donc que le transfert de l'état du système de $x_0 = x(t = t_0)$ à $x_1 = x(t = t_1)$ est identique au transfert de l'état du système de $x_0 = x(t_0 = 0) = 0$ à $\hat{x}_1 = \hat{x}(t = T)$. C'est ce qu'on appelle *transfert de l'état du système à partir de l'origine.*

On introduit alors la définition suivante,

Définition 5.2 *Un état x_f est dit* atteignable *ou* contrôlable à partir de l'origine *s'il existe un temps fini $t > 0$ et un contrôle $u(\tau), \tau \in [0, t]$ qui transfère l'état du système de l'état initial $x_0 = x(0) = 0$ à l'état $x_f = x(t)$ en un temps fini t.*

i.e.

$$x_f = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\, d\tau \tag{5.7}$$

Définition 5.3 *L'ensemble de tous les états atteignables en temps t noté $\Re_t$, est dit* sous-espace d'atteignabilité du système *ou* de la paire (A,B) en temps t *et on écrit,*

$$\Re_t = \left\{ x_f \in \mathbb{R}^n / \exists u(\tau), \tau \in [0, t] : x_f = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\, d\tau \right\} \tag{5.8}$$

Définition 5.4 *L'ensemble de tous les états atteignables, noté $\Re$, est défini par :*

$$\Re = \underset{t \geq 0}{\cup} \Re_t \tag{5.9}$$

Remarque 5.2 *Le sous-espace $\Re$ est parfois dit* sous-éspace de contrôlabilité à partir de l'origine.

Définition 5.5 *Le système* (5.1) *avec $x_0 = x(t_0 = 0) = 0$ est dit atteignable en temps t si et seulement si*

$$\Re_t = \mathbb{R}^n$$

Définition 5.6 *Le système* (5.1) *avec $x_0 = x(t_0 = 0) = 0$ est dit complètement atteignable si et seulement si*

$$\Re = \mathbb{R}^n \tag{5.10}$$

5.2 Gramian d'atteignabilité-Matrice de contrôlabilité

Vue que l'atteignabilité d'un système est difficile à prouver en utilisant la définition analytique, il est plus commode de trouver un autre moyen plus simple à appliquer pour aboutir à ce critère.

Définition 5.7 *Le gramian d'atteignabilité en temps t du système* (5.1) *avec $x_0 = x(0) = 0$ est défini par*

$$W_r(0,t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} B B^T e^{(t-\tau)A^T} d\tau \tag{5.11}$$

C'est une matrice de dimension $n \times n$.

Propriétés du Gramian d'atteignabilité

1-La matrice $W_r(0,t)$ est symétrique pour tout $t > 0$.
En effet,

$$\begin{aligned} W_r^T(0,t) &= \left[\int_0^t e^{(T-\tau)A} B B^T e^{(t-\tau)A^T} d\tau\right]^T & (5.12)\\ &= \left[\int_0^t \left(e^{(t-\tau)A} B\right)\left(B^T e^{(t-\tau)A^T}\right) d\tau\right]^T & (5.13)\\ &= \left[\int_0^t \left(e^{(t-\tau)A} B\right)\left(e^{(t-\tau)A} B\right)^T d\tau\right]^T & (5.14)\\ &= \int_0^t \left(e^{(t-\tau)A} B\right)\left(B^T e^{(t-\tau)A^T}\right)^T d\tau & (5.15)\\ &= W_r(0,t) & (5.16)\end{aligned}$$

2-La matrice $W_r(0,t)$ est semi définie-positive pour tout $t > 0$
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n, (x \neq 0)$

$$\begin{aligned} x^T W_r(0,t)\, x &= \int_0^t x^T \left(e^{(t-\tau)A} B\right)\left(e^{(t-\tau)A} B\right)^T x d\tau & (5.17)\\ &= \int_0^t \left(x^T e^{(t-\tau)A} B\right)\left(x^T e^{(t-\tau)A} B\right)^T d\tau & (5.18)\\ &= \int_0^t \left\|x^T e^{(t-\tau)A} B\right\|^2 d\tau \geq 0 & (5.19)\end{aligned}$$

Exemple 5.1 *: Considérons le système suivant,*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on a

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; e^{At}B = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Le gramian d'atteignabilité sera donné par

$$W_r(0,t) = \int_0^t \begin{bmatrix} t-\tau \\ 1 \end{bmatrix} [t-\tau, 1]\, d\tau \tag{5.21}$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} (t-\tau)^2 & t-\tau \\ t-\tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \tag{5.22}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 & \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{2}t^2 & t \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

Définition 5.8 *(*Matrice de Contrôlabilité *ou* Matrice de Kalman[3])

La matrice de contrôlabilité du système (5.1) *avec* $x_0 = x(t_0 = 0) = 0$ *est la matrice, notée* C, *définie par*

$$C = \left[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B\right] \tag{5.24}$$

Les colonnes de C *sont les colonnes de* $B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B$

$$\dim C = n \times (m.n) \tag{5.25}$$

Exemple 5.2 *Considérons le système*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de contrôlabilité est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappellons une première caractérisation [33]

Théorème 5.1 *Le sous-espace d'atteignabilité du système* (5.1) *avec* $x_0 = x(t_0 = 0) = 0$ *est exactement l'image de* C, *i.e.*

$$\Re = \Im m(C) \tag{5.26}$$

[3]Rudolf Kalman est né le 19 mai 1930 à Budapest, Hongrie d'un père ingénieur en génie électrique. Il émigre aux Etats-Unis et obtient son diplôme de Master du MIT en 1954 en génie électrique. Il poursuit ses études de doctorat à l'université de Columbia et obtient son Ph. D. en 1957 sous la direction du Professeur J.R. Ragazzini. Ses premi'eres recherches en théorie de la commande sont centrées autour de la notion d'état. De 1957 à 1958, il travaille au laboratoire de recherche d'IBM à Poughkeepsie où ses contributions concernent les systèmes échantillonnés et la théorie de Lyapunov. En 1958, il rejoint le RIAS (Research Institue for Advanced Study) où il propose ses contributions majeurs jusqu'en 1964 : notions de commandabilité et d'observabilité, commande optimale quadratique et liens avec le calcul des variations, filtre de Kalman et de Kalman-Bucy. En 1964, il rejoint l'université de Stanford ou' ses travaux concernent la théorie de la réalisation et la théorie algébrique des systèmes. En 1971, il rejoint l'université de Floride à Gainesville où il est directeur du centre pour la théorie mathématique des systèmes. En 1973, il est également chercheur associé à l'école polytechnique fédérale de Zurich (ETH). Il est membre de l'académie des sciences américaine, hongroise, française et russe)

Ce théorème est trés intéressant : il fait le lien entre une notion analytique difficile à appréhender à priori l'atteignabilité, une caractérisation géométrique (le sous-espace vectoriel $\Re$) et une caractérisation purement algébrique simple (l'image de la matrice C) !

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du lemme suivant,

Lemme 5.1 $\Im m\,(C) = \Im m\,(W_r\,(0,t))$, *pour tout* $t > 0$

Preuve. Remarquons que

$$\Im m\,(C) = \Im m\,(W_r\,(0,t)) \Longleftrightarrow (\Im m\,(C))^{\perp} = [\Im m\,(W_r\,(0,t))]^{\perp} \tag{5.27}$$

or en dimension finie,

$$[\Im m\,(W_r\,(0,t))]^{\perp} = Ker\left(W_r^T\,(0,t)\right) \tag{5.28}$$

vu que $W_r\,(0,t)$ est réelle et symetrique alors

$$W_r^T\,(0,t) = W_r\,(0,t)$$

par suite

$$[\Im m\,(W_r\,(0,t))]^{\perp} = Ker\,(W_r\,(0,t)) \tag{5.29}$$

donc

$$\Im m\,(C) = \Im m\,(W_r\,(0,t)) \Longleftrightarrow (\Im m\,(C))^{\perp} = Ker\,(W_r\,(0,t)) \tag{5.30}$$

1-Soit

$$x \in Ker\,(W_r\,(0,t))$$

ce qui veut dire,

$$(W_r\,(0,t))\,x = 0$$

et donc

$$x^T W_r\,(0,t)\,x = 0$$

i.e.

$$\begin{aligned} \int_0^t x^T \left(e^{(t-\tau)A}B\right)\left(e^{(t-\tau)A}B\right)^T x d\tau &= 0, \tau \in [0,t] \\ \int_0^t \left[\left(e^{(t-\tau)A}B\right)^T x\right]^T \left[\left(e^{(t-\tau)A}B\right)^T\right] x d\tau &= 0, \tau \in [0,t] \\ \int_0^t \left\|\left(e^{(t-\tau)A}B\right)^T x\right\|^2 d\tau &= 0, \tau \in [0,t] \end{aligned}$$

on déduit alors

$$\left\|B^T e^{(t-\tau)A^T} x\right\| = 0, \tau \in [0,t]$$

i.e.

$$B^T e^{(t-\tau)A^T} x = 0, \tau \in [0,t] \tag{5.31}$$

On dérive l'expression (5.32) par rapport à τ $0, 1, 2, \cdots, n-1$ fois, ensuite on prend $\tau = t$

on obtient

$$\begin{aligned} B^T x &= 0 \\ B^T A^T x &= 0 \\ B^T \left(A^T\right)^2 x &= 0 \\ &\vdots \\ B^T \left(A^T\right)^{n-1} x &= 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned} x &\in \overset{n-1}{\underset{i=0}{\cap}} Ker\left[B^T\left(A^T\right)^i\right] = \overset{n-1}{\underset{i=0}{\cap}}\left[\Im m\left(\left(B^T\left(A^T\right)^i\right)^T\right)\right]^{\perp} \\ x &\in \overset{n-1}{\underset{i=0}{\cap}}\left[\Im m\left(A^i B\right)\right]^{\perp} \\ x &\in \left[\sum_{i=0}^{n-1}\Im m\left(A^i B\right)\right]^{\perp} \\ x &\in \left[\Im m\left(C\right)\right]^{\perp} \end{aligned}$$

enfin

$$\boxed{Ker\left(W_r\left(0,t\right)\right) \subset \left[\Im m\left(C\right)\right]^{\perp}} \tag{5.32}$$

2-Inversement, soit

$$x \in \left[\Im m\left(C\right)\right]^{\perp}$$

or

$$\left[\Im m\left(C\right)\right]^{\perp} = Ker\left(C^T\right) = Ker\begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T\left(A^T\right)^{n-1} \end{bmatrix}$$

donc

$$x \in Ker\left(C^T\right)$$

alors

$$\begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T\left(A^T\right)^{n-1} \end{bmatrix} x = 0$$

i.e.

$$\begin{cases} B^T x = 0 \\ B^T A^T x = 0 \\ \vdots \\ B^T\left(A^T\right)^{n-1} x = 0 \end{cases}$$

or d'après le théorème de *Cayley-Hamilton :*

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0$$

soit donc pour tout entier naturel $k \geq n$, A^k peut s'écrire comme combinaison linéaire de $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$

Il s'ensuit alors

$$B^T \left(A^T\right)^k x = 0, \forall k \geq n$$

et donc

$$B^T e^{(t-\tau)A^T} x = 0, \tau \in [0, t]$$

de même

$$x^T e^{(t-\tau)A} B = 0$$

par suite

$$x^T e^{(t-\tau)A} B B^T e^{(t-\tau)A^T} x = 0$$

$$\int_0^T x^T e^{(t-\tau)A} B B^T e^{(t-\tau)A^T} x d\tau = 0$$

i.e.

$$x^T W_r(0, t) x = 0 \tag{5.33}$$

comme $W_r(0, t)$ est symétrique et semi-définie positive, elle peut être écrite

$$W_r(0, t) = H^T H \tag{5.34}$$

où H est une matrice.

de l'équation (5.34) et (5.35)

$$x^T H^T H x = 0$$

i.e.

$$\|Hx\|^2 = 0$$

i.e.

$$Hx = 0$$

on déduit

$$W_r(0, t) x = H^T H x = 0$$

i.e.

$$x \in Ker(W_r(0, t))$$

alors

$$\boxed{[\Im m(C)]^{\perp} \subset Ker(W_r(0, t))} \tag{5.35}$$

de (5.32) et (5.35) on a

$$[\Im m(C)]^{\perp} = Ker(W_r(0, t)) = \left[\Im m\left(W_r^T(0, t)\right)\right]^{\perp} = [\Im m(W_r(0, t))]^{\perp} \tag{5.36}$$

finalement, on obtient l'égalité $\Im m(C) = \Im m(W_r(0, t))$ ■

Passons maintenant à la démonstration du théorème (5.1)

Preuve. 1-Soit $x \in \Re$, alors il va exister un temps $t > 0$, un contrôle $u(\tau), \tau \in [0, t]$ tels que,

$$x = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau \tag{5.37}$$
$$= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} (t-\tau)^k Bu(\tau)\, d\tau \tag{5.38}$$

or d'après le théorème de *Cayley-Hamilton*

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n = 0 \tag{5.39}$$

donc pour tout entier naturel $k \geq n$, A^k peut s'écrire comme combinaison linéaire de $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$,

Il s'ensuit alors

$$x = \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} A^k a_k (t-\tau) Bu(\tau)\, d\tau$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^t a_k (t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

en posant

$$x_k = \int_0^t a_k (t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

d'où,

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B x_k$$

par suite,

$$x \in \Im m(C)$$

$$\boxed{\Re \subset \Im m(C)} \tag{5.40}$$

on obtient la première inclusion.

2-Montrons

$$\Im m(C) \subset \Re$$

Soit

$$x \in \Im m(C) = \Im m(W_r(0,t))$$

alors il va exister $\eta \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = W_r(0,t)\, \eta \tag{5.41}$$
$$= \int_0^t e^{(t-\tau)A} BB^T e^{(t-\tau)A^T} \eta d\tau \tag{5.42}$$

Il suffit de prendre comme contrôle

$$u(t) = B^T e^{(t-\tau)A^T} \eta \tag{5.43}$$

donc

$$x = \int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau)\, d\tau$$

d'où

$$x \in \Re \tag{5.44}$$

par conséquent

$$\boxed{\Im m(C) \subset \Re} \tag{5.45}$$

Enfin de (5.40) et (5.45) , on obtient alors $\Im m(C) = \Re$. ■

Le théorème suivant contient les principaux résultats d'atteignabilité.

Théorème 5.2 ***(Condition Nécessaire et Suffisante d'Atteignabilité)*** [8]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
1-*Le système* (5.1) *est complètement* atteignable.
2-*Le Gramian d'atteignabilité est inversible.*
3-*La matrice de contrôlabilité est de rang plein (Critère de* Kalman).
i.e.

$$(\Re = \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (rg(W_r(0,t)) = n, \forall t > 0) \Leftrightarrow (rg(C) = n) \tag{5.46}$$

Preuve. D'après le théorème précédent (5.1) les assertions (1) et (3) sont équivalentes.
Pour (1) $\Longleftrightarrow$ (2), on a

$$\left\{ \begin{array}{c} \Re = \mathbb{R}^n \\ \Re = \Im m(W_r(0,t)) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\Im m(W_r(0,t)) = \mathbb{R}^n) \tag{5.47}$$

$$\Leftrightarrow (rg(W_r(0,t)) = n, \forall t > 0) \tag{5.48}$$

d'où le résultat estimé. ■

Remarque 5.3 *Si le système* (5.1) *est complètement atteignable, pour tout état x_f, et tout $t > 0$ fixé on prend pour contrôle*

$$u(\tau) = B^T e^{(t-\tau)A^T} W_r^{-1}(0,t)\, x_f, \tau \in [0,t] \tag{5.49}$$

Exemple 5.3 *Reprenons l'exemple* (5.1) *vu pécédemment dans la section* (5.2) ,

$$\det(W_r(0,t)) = \frac{1}{12} t^4 \neq 0, \forall t > 0 \tag{5.50}$$

On déduit alors que la paire (A,B) est atteignable.

Troisième partie

Système Linéaire Fractionnaire à temps continu

Une nouvelle classe de systèmes dynamiques fractionnaires décrite par des équations à espaces d'états en temps continu est introduite. Notons que les systèmes différentiels fractionnaires trouvent des applications dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur tels l'électronique, électromagnétisme , machine électrique, mécanique, automatique et dans le domaine de la théorie de contrôle. Dans ce mémoire, on s'intéresse à la classe des systèmes linéaires à temps continu et notre contribution portera sur le problème de solvabilité en premier lieu pour ensuite s'intéresser aux problèmes de contrôle. Des conditions d'atteignabilité, de contrôlabilité ainsi que des tests seront alors caractérisés. Le problème d'observabilité fera l'objet de la dernière étape du mémoire. Comme partie introductive à la théorie, on se base sur de nombreuses références et quelques travaux récents $[18, 21, 22, 23, 26, 27, 29, 30]$.

Le but de ce chapitre est de faire une étude analytique des systèmes linéaires fractionnaires à temps continu.

La première partie de ce chapitre aborde la résolution de l'équation différentielle.

Dans la deuxième partie, des conditions d'atteignabilité sont mises en évidence.

Dans la troisième et quatrième partie, on expose de manière exhaustive la controlabilité et l'observabilité.

Définition 5.9 *Un système linéaire fractionnaire en temps continu d'ordre α au sens de* Caputo *est défini par les équations d'états suivantes*[4] *:*

$$\left\{\begin{array}{llll} {}^cD^{\alpha}x\left(t\right) & = & Ax\left(t\right)+Bu\left(t\right), & N-1<\alpha\leq N,\ N\in\mathbb{N}^{*} \\ y\left(t\right) & = & Cx(t)+Du\left(t\right) & \\ x\left(0\right)=x_0, & \dot{x}\left(0\right)=x_1, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & x^{(N-1)}\left(0\right)=x_{N-1} \end{array}\right. \tag{5.51}$$

où $x\left(t\right)\in\mathbb{R}^n, u\left(t\right)\in\mathbb{R}^m, y\left(t\right)\in\mathbb{R}^p$ sont respectivement les variables d'état, d'entrée et de sortie.

$A\in\mathbb{R}^{n\times n},\ B\in\mathbb{R}^{n\times m},\ C\in\mathbb{R}^{p\times n},\ D\in\mathbb{R}^{p\times m}$

[4] le symbole ${}^cD^{\alpha}x\left(t\right)$ déigne la dérivée fractionnaire de $x\left(t\right)$ entre 0 et t.

Chapitre 6

Solution d'un Système Linéaire Fractionnaire à temps continu

Soit le système (5.51), une première caractérisation est donnée par le théorème suivant,

Théorème 6.1 *La solution de la première équation du système* (5.51) *est donnée par,*

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i(t)\, x_i + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau, && (6.1)\\ x_i &= x^{(i)}(0)\,, \quad i = 0, \ldots, N-1. && (6.2) \end{aligned}$$

où

$$\Phi_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{\alpha k+i}}{\Gamma(\alpha k + i + 1)}, i = 0, \cdots, N-1, \tag{6.3}$$

$$\Phi(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha})\,. \tag{6.4}$$

$E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha})$ *est la fonction matrice de* Mittag-Leffler *à deux paramètres.*

Preuve. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation d'état, on obtient

$$\pounds\left[{}^{c}D^{\alpha}x(t)\right] = \pounds\left[Ax(t) + Bu(t)\right]$$

d'aprés la formule (2.9)

$$\pounds\left[{}^{c}D^{\alpha}x(t)\right] = s^{\alpha}X(s) - \sum_{i=0}^{N-1} s^{\alpha-i-1}\left[D^{(i)}x(0)\right] = AX(s) + BU(s)$$

où

$$\begin{aligned} X(s) &= \pounds(x(t)) \\ U(s) &= \pounds(u(t)) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} s^{\alpha}X(s) - AX(s) &= \sum_{i=0}^{N-1} s^{\alpha-i-1}\left[D^{(i)}x(0)\right] + BU(s) \\ \left[s^{\alpha}I_n - A\right]X(s) &= \sum_{i=0}^{N-1} s^{\alpha-i-1}\left[D^{(i)}x(0)\right] + BU(s) \end{aligned}$$

comme $s^{\alpha}I_n - A$ est régulière, alors

$$X(s) = \left[s^{\alpha}I_n - A\right]^{-1}\left[\sum_{i=0}^{N-1} s^{\alpha-k-1}\left[D^{(i)}x(0)\right] + BU(s)\right]$$

or

$$\left[s^{\alpha}I_n - A\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} \tag{6.5}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k\alpha+1)}x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k\alpha+2)}x_1 + \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k\alpha+N)}x_{N-1} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha}BU(s) \end{aligned} \tag{6.6}$$

En appliquant la transformée inverse de *Laplace*, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \pounds^{-1}\left[X(s)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \pounds^{-1}\left[s^{-(k\alpha+1)}\right]x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \pounds^{-1}\left[s^{-(k\alpha+2)}\right]x_1 + \cdots \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \pounds^{-1}\left[s^{-(k\alpha+N)}\right]x_{N-1} + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \pounds^{-1}\left[s^{-(k+1)\alpha}BU(s)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i(t)\,x_i + \int_0^t \Phi(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{6.7}$$

où

$$\Phi_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \pounds^{-1}\left[s^{-(k\alpha+i+1)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{\alpha k+i}}{\Gamma(\alpha k+i+1)} \qquad i = 0, \cdots, N-1$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \pounds^{-1}\left[s^{-(k+1)\alpha}\right] = \sum \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma\left[(k+1)\alpha\right]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma\left[(k+1)\alpha\right]} t^{\alpha-1} && (6.8) \\ &= t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma\left[(k\alpha+\alpha)\right]} && (6.9) \\ &= t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(At^{\alpha}\right) && (6.10) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Dans tout ce qui suit, on va se limiter au cas $0 < \alpha \leq 1$

Théorème 6.2 *Considérons le système*

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}x(t) & = & Ax(t)+Bu(t), \qquad 0<\alpha\leq 1 \\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t) \end{cases} \tag{6.11}$$

et notons $x(0)=x_0$ l'état à l'instant $t=0$. L'état du système à l''instant t est donné par

$$x(t)=\Phi_0(t)\,x_0+\int_0^t \Phi(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau \tag{6.12}$$

avec

$$\Phi_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}=E_\alpha(At^\alpha) \tag{6.13}$$

$$\Phi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \tag{6.14}$$

et la sortie s'exprime par,

$$y(t)=C\Phi_0(t)\,x_0+\int_0^t C\Phi(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau+Du(t) \tag{6.15}$$

Comme $0<\alpha\leq 1$ alors $N=1$, d'après la formule (6.7) on a,

$$x(t)=\Phi_0(t)\,x_0+\int_0^t \Phi(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau \tag{6.16}$$

c'est l'état du système à l'instant t. Pour $y(t)$ il suffit de remplacer (6.12) dans la seconde équation du système (6.11).

Remarque 6.1 ***1)****-Pour $\alpha=1$*

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{k}}{\Gamma(k+1)}=e^{At} \tag{6.17}$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{(k+1)-1}}{\Gamma[(k+1)]}=e^{At} \tag{6.18}$$

on trouve

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \tag{6.19}$$

qui n'est rien d'autre que la solution du système

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

2)*-D'une façon générale pour le cas où $t\in[t_0,t]$, avec $t_0\neq 0$, nous proposons pour le système,*

$$\begin{cases} {}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x(t) & = & Ax(t)+Bu(t),\ 0<\alpha\leq 1 \\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases} \tag{6.20}$$

la solution

$$x(t) = \Phi_0(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \tag{6.21}$$

En effet, faisons le changement de variable

$$T = t - t_0 \tag{6.22}$$

et notons

$$z(T) = x(t) = x(T + t_0) \tag{6.23}$$

alors

$$z(0) = x_0 \tag{6.24}$$

Le système (6.20) *s'écrit alors*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} {}^{c}D^{\alpha}z(T) & = & Az(T) + Bv(T), \ 0 < \alpha \leq 1 \\ h(T) & = & Cz(T) + Dv(T) \\ z(0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{6.25}$$

où

$$\begin{aligned} h(T) &= y(T + t_0) && (6.26) \\ v(T) &= u(T + t_0) && (6.27) \end{aligned}$$

d'après le théorème (6.2) *la solution est*

$$z(T) = \Phi_0(T)z(0) + \int_0^T \Phi(T - \tau)Bv(\tau)d\tau \tag{6.28}$$

Revenons à la variable t

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(T - \rho + t_0)v(\rho - t_0)d\rho && (6.29) \\ \rho &= \tau + t_0 && (6.30) \\ x(t) &= \Phi_0(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \rho)u(\rho)d\rho && (6.31) \end{aligned}$$

Exemple 6.1 *Essayons de trouver la solution du système* (6.11) *avec*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ u(t) &= \left\{ \begin{array}{l} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{array} \right. && (6.32) \end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && (6.33) \\ A^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, k \geq 2 && (6.34) \end{aligned}$$

$$\Phi_0(t) = I_2 + A\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

$$\Phi(t) = I_2\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + A\frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} = \begin{bmatrix} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \\ 0 & \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

La substitution de (6.35) *et* (6.36) *dans la formule* (6.12) *donne*

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{bmatrix}$$

6.1 Matrice de transition d'un système linéaire fractionnaire

Etant donné un système linéaire fractionnaire homogène, laché à l'instant t_0 avec une condition initiale $x(t_0)$, l'état $x(t)$ à l'instant t se déduit de l'état initial par l'application d'une certaine matrice de dimension $n \times n$.

Définition 6.1 *Soit le système linéaire fractionnaire homogène (système sans commande)*

$$\begin{cases} {}_{t_0}^{c}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{6.37}$$

La solution est donc

$$x(t) = \Phi_0(t-t_0)\, x_0 \tag{6.38}$$

La matrice $\Phi_0(t-t_0)$ *est la matrice de transition du système entre* t_0 *et* t.

Remarque 6.2 *Rappelons que*

$$\Phi_0(t-t_0) = E_\alpha\left[A(t-t_0)^\alpha\right]$$

Il est donc clair que la fonction matrice de Mittag-Leffler *ou* fonction matrice exponentielle généralisée *joue ici le même rôle que la fonction exponentielle dans le cas des systèmes d'ordre entier. Elle constitue donc la matrice de transition pour les systèmes fractionnaires.*

6.1.1 Propriétés de la matrice de transition

Nous citerons maintenant quelques propriétés de la matrice de transition, tout à fait semblables aux propriétés de la matrice de transition des systèmes linéaires standards.

1-La matrice de transition est solution de l'equation homogène.

i.e.,

$${}^cD^\alpha\Phi_0(t) = A\Phi_0(t) \tag{6.39}$$

En effet, pour toute condition initiale x_0, la solution du système (6.37) est

$$x(t) = \Phi_0(t)\, x_0$$

alors

$$^{c}D^{\alpha}x(t) = {}^{c}D^{\alpha}\left[\Phi_0(t)\,x_0\right]$$

or

$$^{c}D^{\alpha}x(t) = Ax(t)$$

par conséquent

$$Ax(t) = {}^{c}D^{\alpha}\left[\Phi_0(t)\right]x_0$$

$$A\Phi_0(t)\,x_0 = {}^{c}D^{\alpha}\left[\Phi_0(t)\right]x_0$$

$$\left[{}^{c}D^{\alpha}\left[\Phi_0(t)\right] - A\Phi_0(t)\right]x_0 = 0$$

$$^{c}D^{\alpha}\left[\Phi_0(t)\right] - A\Phi_0(t) = 0$$

enfin

$$^{c}D^{\alpha}\left[\Phi_0(t)\right] = A\Phi_0(t)$$

2-On a comme conséquence de la définition

$$\Phi_0(0) = I_n \tag{6.40}$$

en effet,

$$\begin{aligned}\Phi_0(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\\ &= I_n + A\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + A^2\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots\end{aligned} \tag{6.41}$$

pour $t = 0$

$$\Phi_0(0) = In$$

3-Propriété de semi-groupe
Etant donné trois temps t_0, t_1, t_2, on a

$$\Phi_0(t_2 - t_0) = \Phi_0(t_2 - t_1)\,\Phi_0(t_1 - t_0) \tag{6.42}$$

En effet, la solution de l'équation différentielle

$$^{c}_{t_i}D^{\alpha}_{t}x(t) = Ax(t)$$

est

$$x(t) = \Phi_0(t - t_i)\,x(t_i)\,, \forall t \geq t_i$$

pour $t_i = t_0$ et $t = t_2$ on a

$$x(t_2) = \Phi_0(t_2 - t_0)\,x(t_0)$$

pour $t_i = t_0$ et $t = t_1$ on a

$$x(t_1) = \Phi_0(t_1 - t_0)\,x(t_0)$$

pour $t_i = t_1$ et $t = t_2$ on a

$$x(t_2) = \Phi_0(t_2 - t1)\, x(t_1)$$

Les deux dernières relations donnent

$$x(t_2) = \Phi_0(t_2 - t_1)\, \Phi_0(t_1 - t_0)\, x(t_0)$$

d'où, comparant avec la première relation, on obtient l'égalité (6.42) .

4-Inversion

Pour tous $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ on a,

$$\Phi_0^{-1}(t_2 - t_1) = \Phi_0(t_1 - t_2)$$

Il suffit de faire $t_0 = t_2$ dans (6.42) et de tenir compte de (6.40)

Une autre méthode pour illustrer l'inversion de $\Phi_0(t)$ est la suivante :

Pour ce faire, on démontre le lemme suivant

Lemme 6.1 [22] *La matrice fondamentale*

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

est non singulière pour tout $t \geq 0$ et toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
i.e.,

$$\forall t \geq 0, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det[\Phi_0(t)] \neq 0$$

Preuve. Considérons la fonction

$$\Phi_0(z, t) = E_\alpha(zt^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \tag{6.43}$$

Démontrons que $\det[\Phi_0(A, t)] \neq 0$ pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

La fonction définie par la formule (6.43) est bien définie sur le spectre de la matrice A. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda n$, les valeurs propres de A, elles peuvent être réelles ou complexes (non necessairement distinctes). De (6.43), il vient que pour tout réel λ_i, $i = 1, \ldots, n$

$$\Phi_0(\lambda_i, t) \neq 0$$

et pour toute paire de conjugués $(\lambda_i, \lambda_{i+1})\,, i = 1, \ldots, n-1$

$$\Phi_0(\lambda_i, t)\, \Phi_0(\lambda_{i+1}, t) \neq 0$$

Il est bien connu que les valeurs propres de $\Phi_0(A,t)$ [21.35] sont

$$\Phi_0(\lambda_1,t),\ \Phi_0(\lambda_2,t),\ldots,\Phi_0(\lambda_n,t)$$

et de plus

$$\det[\Phi_0(A,t)] = \Phi_0(\lambda_1,t)\,\Phi_0(\lambda_2,t)\ldots\Phi_0(\lambda_n,t) \neq 0$$

ce qui achève la démonstration. ■

Une $2^{ième}$ autre méthode pour illustrer l'inversion de $\Phi_0(t)$ est la suivante :

Appliquons la transformée de Laplace à la formule (6.39)

$$\pounds\left[{}^{c}D^{\alpha}\Phi_0(t)\right] = \pounds\left[A\Phi_0(t)\right]$$

$$s^{\alpha}\pounds\left[\Phi_0(t)\right] - s^{\alpha-1}I_n = A\pounds\left[\Phi_0(t)\right]$$

$$\left[s^{\alpha}I_n - A\right]\pounds\left[\Phi_0(t)\right] = s^{\alpha-1}I_n$$

$$s^{1-\alpha}\left[s^{\alpha}I_n - A\right]\pounds\left[\Phi_0(t)\right] = I_n$$

$$\pounds\left[\Phi_0(t)\right] = \left(s^{1-\alpha}\left[s^{\alpha}I_n - A\right]\right)^{-1}$$

Comme l'opérateur $\pounds$ est un isomorphisme, on déduit que $\Phi_0(t)$ est inversible.

6.1.2 Méthode de calcul de $\Phi_0(t)$

Il existe plusieurs méthodes proposées pour le calcul de la matrice de transition, soit la matrice $\Phi_0(t)$ qui ne sont qu'une généralisation des méthodes connues dans la littérature pour la cas entier des systèmes **LTI**.

Il est supposé que la matrice A possède n valeurs propres distinctes λ_i, $i = 1,\cdots,n$. Parmi ces méthodes, on citera *la méthode de Cayley-Hamilton*.

Sachant que toute matrice carrée satisfait son polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.

i.e.,

$$P_A(A) = 0$$

On rappelle que $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Pour toute fonction $f(A,t)$, qui peut être développée en série matrice *série de Taylor* et en appliquant la formule (3.2), on peut réduire cette série infinie en un polynôme d'ordre $(n-1)$ de la matrice A avec des coefficients dépendants de t. Tenant compte de $P_A(\lambda_i) = 0$ est aussi vérifiée (λ_i valeur propre de A), il s'ensuit que $f(\lambda_i,t)$ peut aussi être écrite en un polynôme d'ordre $(n-1)$ de λ_i avec les mêmes coefficients dépendants du temps t.

Ces coefficients doivent être déterminés.

On a

$$f(\lambda_i,t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\,\lambda_i^k,\ i = 1,\cdots,n$$

On peut écrire cette formule sous forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1,t) \\ f(\lambda_2,t) \\ \vdots \\ f(\lambda_n,t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$ peut être déterminé de façon unique si et seulement si la matrice H est inversible, or comme H est la matrice de *Vandermonde* et les valeurs propres λ_i sont supposés distinctes , alors la matrice H est inversible. Les fonctions $a_i(t), i = 1, \cdots, n$ peuvent être alors déterminées à partir de

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} f(\lambda_1,t) \\ f(\lambda_2,t) \\ \vdots \\ f(\lambda_n,t) \end{bmatrix}$$

Prenons maintenant pour fonction $f(A,t)$, la fonction $f(A,t) = \Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha)$. Par conséquent,

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) A^k \tag{6.44}$$

Les $a_k(t), k = 0, \cdots, n-1$ peuvent être déterminés comme précédement en prenant $f(\lambda_i,t) = E_\alpha(\lambda_i t^\alpha), i = 1, \cdots, n$.

De cette façon, $\Phi_0(t)$ est complètement déterminée.

Pour le développement de $\Phi_0(t)$ on a besoin du lemme suivant qui est utile pour la contrôlabilité et l'observabilité ;

Lemme 6.2 *Les fonctions puissances d'ordre fractionnaire* $\left\{1, t^\alpha, t^{2\alpha}, \cdots, t^{\alpha(k-1)}\right\}, k \in \mathbb{N}^*$, $t \geq 0$ *sont* linéairement indépendantes.

Preuve. La démonstration se fait par contradiction.

Pour ce, supposons que ces fonctions sont linéairement dépendantes, alors il va exister un ensemble de nombres réels $\{v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}\}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{k-1} v_i t^{k\alpha} = 0, \forall t \geq 0$.

Choisissons un ensemble de k valeurs de temps croissantes $\{t_0, t_1, \cdots, t_{k-1}\}$. La condition précédente est vérifiée pour toute valeur $t_i, i = 0, \cdots, k-1$. Cette condition est exprimée en formule matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_0^{\alpha} & t_0^{2\alpha} & \cdots & t_0^{\alpha(k-1)} \\ 1 & t_1^{\alpha} & t_1^{2\alpha} & \cdots & t_1^{\alpha(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_{k-1}^{\alpha} & t_{k-1}^{2\alpha} & \cdots & t_{k-1}^{\alpha(k-1)} \end{pmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^k}$$

Etant donnée que la matrice H est de *Vandermonde,* elle est inversible si $t_{i_1}^{\alpha} \neq t_{i_2}^{\alpha}, 0 \leq i_1, i_2 \leq k-1$.

Or la fonction t^{α}est croissante si $\alpha > 0$, alors toutes les valeurs t_i^{α} sont distinctes deux à deux du fait que les valeurs t_i sont supposées distinctes, par conséquent la matrice H est inversible ce qui mène à $\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^k}$, d'où la contradiction. ■

Lemme 6.3 *Si toutes les valeurs propres de la matrice A, $\lambda_i, 1 \leq \lambda_i \leq n$ sont distinctes, alors les fonctions $a_k(t), 0 \leq k \leq n-1$ de la formule* (6.44)*sont linéairement indépendantes.*

6.2 La matrice de réponse impulsionnelle

Définition 6.2 *La matrice de réponse impulsionnelle d'un système linéaire fractionnaire à conditions initiales nulles est la sortie de ce système quand on l'excite en entrée par une impulsion de* Dirac

$$g(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) \tag{6.45}$$

En effet posons pour tout $t \in [0, \varepsilon], t \geq 0$:

$$u(t) = \frac{1}{\varepsilon} e_i \tag{6.46}$$

$$u(t) = 0, sinon \tag{6.47}$$

avec

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, t \in [0, \varepsilon] \\ 0, \; sinon \end{cases} \tag{6.48}$$

pour des conditions initiales nulles, le système (6.11) *a pour état*

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau \tag{6.49}$$

et pour sortie

$$y(t) = C\int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau + Du(t) \tag{6.50}$$

en substituant dans $y(t), u(t) = \delta(t) e_i$

$$\begin{aligned}
y(t) &= C\int_0^t \Phi(t-\tau) B\delta(\tau) e_i d\tau + D\delta(t) e_i \\
&= C\left[\int_0^t \Phi(t-\tau)\delta(\tau) d\tau\right] Be_i + D\delta(t) e_i \\
&= \left[C\left(\int_0^t \Phi(t-\tau)\delta(\tau) d\tau\right) B + D\delta(t)\right] e_i \\
&= \left[C\Phi(t) B + D\delta(t)\right] e_i \qquad (6.51)
\end{aligned}$$

la matrice de réponse impulsionnelle est

$$g(t) = C\Phi(t) B + D\delta(t) \qquad (6.52)$$

L'élément $g_{ij}(t)$ *relie la* $j^{ième}$ *sortie avec la* $i^{ième}$ *entrée*

Remarque :

On a vu précédement que pour $\alpha = 1$,

$$\Phi(t) = e^{At} \qquad (6.53)$$

alors

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

On retrouve la matrice de réponse impulsionnelle du système linéaire standard

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

6.3 Matrice de transfert

Soit le système dynamique suivant

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \ 0 < \alpha \leq 1 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(0) &= 0 \end{cases} \qquad (6.54)$$

On rappelle que la notion de matrice de transfert n'est définie que pour des conditions initiales nulles.

L'application de la transformée de *Laplace* à l'équation d'état du système donne

$$\begin{aligned}
s^\alpha X(s) &= AX(s) + BU(s) \qquad (6.55) \\
\left[s^\alpha I_n - A\right] X(s) &= BU(s) \qquad (6.56) \\
X(s) &= \left[s^\alpha I_n - A\right]^{-1} BU(s) \qquad (6.57)
\end{aligned}$$

L'application de la transformée de *Laplace* à l'équation de sortie du système donne

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \qquad (6.58)$$

en substituant (6.57) dans (6.58), on obtient

$$\begin{aligned} Y(s) &= C\left[s^{\alpha}I_n - A\right]^{-1}BU(s) + DU(s) \\ Y(s) &= \left[C\left[s^{\alpha}I_n - A\right]^{-1}B + D\right]U(s) \end{aligned}$$

en posant

$$G(s) = C\left[s^{\alpha}I_n - A\right]^{-1}B + D$$

alors

$$Y(s) = G(s)\,U(s) \tag{6.59}$$

d'où la définition suivante

Définition 6.3 *La matrice* $G(s) \in \mathbb{C}^{p\times m}$ *définie par* $G(s) = C\left(s^{\alpha}I_n - A\right)^{-1}B + D$ *est appellée* matrice de transfert *du système* (6.54) *liant l'entrée* $U(s)$ *à la sortie* $Y(s)$.

Remarque 6.3 *La transformée de* Laplace *permet de relier* la matrice de réponse impulsinnelle *et* la matrice de transfert *d'un système linéaire fractionnaire par la relation*

$$G(s) = \pounds\left[g(t)\right] \tag{6.60}$$

en effet

$$g(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace

$$\begin{aligned} \pounds\left[g(t)\right] &= C\pounds\left[\Phi(t)\right]B + D\pounds\left[\delta(t)\right] \\ &= C\pounds\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma\left[(k+1)\alpha\right]}\right]B + D \\ &= C\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma\left[(k+1)\alpha\right]}\pounds\left(t^{(k+1)\alpha-1}\right)\right]B + D \\ &= C\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma\left[(k+1)\alpha\right]}\frac{\Gamma\left[(k+1)\alpha\right]}{s^{(k+1)\alpha}}\right]B + D \\ &= C\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{s^{(k+1)\alpha}}\right]B + D \\ &= C\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\left(s^{\alpha}\right)^{(k+1)}}\right]B + D \\ &= C\left[s^{\alpha}I_n - A\right]^{-1}B + D \\ &= G(s) \end{aligned}$$

Chapitre 7

Atteignabilité d'un système linéaire fractionnaire

7.1 Notions d'Atteignabilité

Un système est dit contrôllable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle.

Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} {}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha} x(t) & = & Ax(t) + Bu(t), \ 0 < \alpha \leq 1 \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{array} \right. \tag{7.1}$$

Nous allons, dans ce qui suit, caractériser des conditions nécessaires et suffisantes pour que de tels systèmes soient atteignables. Pour cela, nous commençons par citer les définitions de base sur l'atteignabilité. Les mêmes définitions vues pour un système **LTI** sont adaptées pour un système fractionnaire.

Définition 7.1 *Un état $x_1 \in \mathbb{R}^n$ est dit* atteignable *à partir de l'état initial x_0 en un temps fini $t_1 - t_0$ s'il existe un contrôle $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_1]$ qui transfère l'état du système de l'état initial $x_0 = x(t_0)$ à l'état $x_1 = x(t_1)$*

i.e.,

$$x_1 = x(t_1) = \Phi_0(t_1 - t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - t_0) Bu(\tau) \, d\tau \tag{7.2}$$

L'état x_1 est dit atteignable *en temps $t_1 - t_0$.*

Remarque 7.1 *Si on pose*

$$T = t_1 - t_0$$

et

$$\delta = \tau - t_0$$

la solution (7.2) du système s'écrit alors

$$x_1 = x(T + t_0) = \Phi_0(T) x_0 + \int_0^T \Phi(T - \delta) Bu(\delta + t_0) \, d\delta \tag{7.3}$$

notons maintenant

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1 - \Phi_0(T)\, x_0 &(7.4)\\ \hat{u}(\delta) &= u(\delta + t_0) &(7.5)\end{aligned}$$

d'où

$$\hat{x}_1 = \int_0^T \Phi(T-\delta)\, B\hat{u}(\delta)\, d\delta \tag{7.6}$$

On remarque donc que le transfert de l'état du système de $x_0 = x(0)$ à $x_1 = x(t_1)$ est identique au transfert de l'état du système de $x_0 = x(0) = 0$ à $\hat{x}_1 = \hat{x}(T)$. C'est ce qu'on appelle *transfert de l'état du système à partir de l'origine.*

On introduit alors la définition suivante,

Définition 7.2 *Un état x_f est dit* atteignable *ou* contrôlable à partir de l'origine *s'il existe un temps t et un contrôle $u(\tau), \tau \in [0,t]$ qui transfère l'état du système de l'état initial $x_0 = x(0) = 0$ à l'état $x_f = x(t)$, i.e.*

.

$$x_f = \int_0^t \Phi(t-\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \tag{7.7}$$

Définition 7.3 *L'ensemble de tous les états atteignables en temps t, noté ${}_\alpha\Re_t$, est dit* sous-espace d'atteignabilité du système *ou* de la paire (A,B) *en temps* t,*i.e.*

$${}_\alpha\Re_t = \left\{ x_f \in \mathbb{R}^n / \exists u(\tau), \tau \in [0,t] : x_f = \int_0^t \Phi(t-\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \right\}$$

Définition 7.4 *L'ensemble de tous les états atteignables, noté ${}_\alpha\Re$, est défini par*

$${}_\alpha\Re = \bigcup_{t \geq 0} {}_\alpha\Re_t \tag{7.8}$$

Remarque 7.2 *Le sous-espace $\Re$ est parfois dit* sous-espace de contrôlabilité à partir de l'origine.

Définition 7.5 *Le système* (7.1) *est dit atteignable en temps t si et seulement si*

$${}_\alpha\Re_t = \mathbb{R}^n \tag{7.9}$$

Définition 7.6 *Le système* (7.1) *est dit complètement atteignable si et seulement si*

$${}_\alpha\Re = \mathbb{R}^n \tag{7.10}$$

7.2 Gramian d'atteignabilité-*Matrice de contrôlabilité*

Autres tests d'atteignabilité et de contrôlabilité sont cependant dérivés.

Définition 7.7 [5.21] *Le Gramian d'atteignabilité en temps t du système (7.1) est défini par*

$$_{\alpha}W_r(0,t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) BB^T \Phi^T (t-\tau)(t-\tau)^{2(1-\alpha)} d\tau \tag{7.11}$$

C'est une matrice réelle de dimension $n \times n$.Le terme $(t-\tau)^{2(1-\alpha)}$ a été ajouté pour neutraliser la singularité à $\tau = t$. Ceci est nécessaire pour assurer la convergence de l'intégrale.

Propriétés du Gramien d'atteignabilité

1-La matrice $_{\alpha}W_r(0,t)$ est symétrique pour tout $t > 0$.
en effet

$$\begin{aligned}
_{\alpha}W_r^T(0,t) &= \left[\int_0^t \Phi(t-\tau) BB^T \Phi^T (t-\tau)(t-\tau)^{2(1-\alpha)} d\tau\right]^T && (7.12)\\
&= \left[\int_0^t \left(\Phi(t-\tau) B (t-\tau)^{(1-\alpha)}\right)\left(B^T \Phi^T (t-\tau)(t-\tau)^{(1-\alpha)}\right) d\tau\right]^T && (7.13)\\
&= \left[\begin{array}{c} \int_0^t \left[\left(\Phi(t-\tau) B (t-\tau)^{(1-\alpha)}\right)^T\right]^T \\ \left[\Phi(t-\tau) B (t-\tau)^{(1-\alpha)}\right]^T d\tau \end{array}\right]^T && (7.14)\\
&= \int_0^t \left(\Phi(t-\tau) B (t-\tau)^{(1-\alpha)}\right)\left(B^T \Phi^T (t-\tau)(t-\tau)^{(1-\alpha)}\right) d\tau && (7.15)\\
&= {}_{\alpha}W_r(0,t) && (7.16)
\end{aligned}$$

2-La matrice $_{\alpha}W_r(0,t)$ est semi définie-positive pour tout $t > 0$
en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n, (x \neq 0)$

$$\begin{aligned}
x_{\alpha}^T W_r(0,t)\, x &= \int_0^t x^T \left(\Phi(t-\tau) B\right) B^T \Phi^T (t-\tau)(t-\tau)^{2(1-\alpha)} x d\tau && (7.17)\\
&= \int_0^t \left[B^T \Phi^T (t-\tau)(t-\tau)^{(1-\alpha)} x\right]^T && (7.18)\\
&\quad \left[B^T \Phi^T (t-\tau)(t-\tau)^{(1-\alpha)} x\right] d\tau \\
&= \int_0^t \left\| B^T \Phi^T (t-\tau)(t-\tau)^{(1-\alpha)} x \right\|^2 d\tau \geq 0 && (7.19)
\end{aligned}$$

on déduit alors

$$x_{\alpha}^T W_r(0,t)\, x \geq 0, \ \forall t > 0 \tag{7.20}$$

Remarque 7.3 *Pour $\alpha = 1$*

$$_{\alpha}W_r(0,t) = \int_0^t e^{(T-\tau)A} BB^T e^{(T-\tau)A^T} d\tau$$

c-à-d, on retrouve le gramian d'atteignabilité d'un système linéaire standard.

Exemple 7.1 *Considérons le système de l'exemple* (6.1)

$$\Phi(t)\,B = \begin{bmatrix} \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \\ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

et

$$\Phi(t)\,BB^T\Phi(t)\,(t-\tau)^{2(1-\alpha)} = \begin{bmatrix} \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \\ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix} \left[\frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}, \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](t-\tau)^{2(1-\alpha)} \tag{7.22}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\alpha)} & \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha)} \\ \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha)} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

ensuite

$${}_{\alpha}W_r(0,t) = \int_0^t (\Phi(t-\tau)\,B)\,B^T\Phi^T(t-\tau)\,(t-\tau)^{2(1-\alpha)}\,d\tau \tag{7.24}$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{(t-\tau)^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\alpha)} & \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha)} \\ \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha)} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix} d\tau \tag{7.25}$$

de simples calculs donnent

$${}_{\alpha}W_r(0,t) = \begin{bmatrix} \frac{t^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\alpha)} & \frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha)} \\ \frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha)} & \frac{t}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

Définition 7.8 *(*Matrice de Contrôlabilité)
La matrice de contrôlabilité du système (7.1) *est la matrice notée* ${}_{\alpha}C$ *définie par*

$${}_{\alpha}C = \left[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B\right] \tag{7.27}$$

Les colonnes de ${}_{\alpha}C$ *sont les colonnes de* $B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B$

$$\dim_{\alpha} C = n \times (m.n) \tag{7.28}$$

Dans tout ce qui va suivre, les mêmes techniques vues pour le cas de système **LTI,** sont adaptées pour le système fractionnaire avec bien sûr des définitions adéquates.

Théorème 7.1 *le sous-éspace d'atteignabilité du système* (7.1) *est exactement l'image de* ${}_{\alpha}C$
i.e.

$${}_{\alpha}\Re = \Im m\,({}_{\alpha}C) \tag{7.29}$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 7.1 *Pour tout* $t > 0$

$$\Im m\,({}_{\alpha}C) = \Im m\,({}_{\alpha}W_r\,(0,t)) \tag{7.30}$$

Preuve. remarquons que

$$\Im m\left({}_{\alpha}C\right)=\Im m\left({}_{\alpha}W_{r}\left(0,t\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\Im m\left({}_{\alpha}C\right)\right)^{\perp}=\left(\Im m\left({}_{\alpha}W_{r}\left(0,t\right)\right)\right)^{\perp} \tag{7.31}$$

or en dimension finie

$$\left(\Im m\left({}_{\alpha}W_{r}\left(0,t\right)\right)\right)^{\perp}=Ker\left({}_{\alpha}W_{r}^{T}\left(0,t\right)\right) \tag{7.32}$$

vue que $W_r(0,t)$ est réelle et symetrique alors

$$Ker\left({}_{\alpha}W_{r}^{T}\left(0,t\right)\right)=Ker\left({}_{\alpha}W_{r}\left(0,t\right)\right) \tag{7.33}$$

donc

$$\Im m\left({}_{\alpha}C\right)=\Im m\left({}_{\alpha}W_{r}\left(0,t\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\Im m\left({}_{\alpha}C\right)\right)^{\perp}=Ker\left({}_{\alpha}W_{r}\left(0,t\right)\right) \tag{7.34}$$

Tout revient à prouver

$$\left(\Im m\left({}_{\alpha}C\right)\right)^{\perp}=Ker\left({}_{\alpha}W_{r}\left(0,t\right)\right) \tag{7.35}$$

1-Soit pour $t>0$

$$x\in Ker\left({}_{\alpha}W_{r}\left(0,t\right)\right)$$

alors

$$\left({}_{\alpha}W_{r}\left(0,t\right)\right)x=0$$

et donc

$$x_{\alpha}^{T}W_{r}\left(0,t\right)x=0$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{t}x^{T}\left(\Phi\left(t-\tau\right)B\right)\left(\Phi\left(t-\tau\right)B\right)^{T}\left(t-\tau\right)^{2(1-\alpha)}xd\tau &= 0,\forall\tau\in[0,t]\\
\int_{0}^{t}\left[\left(\Phi\left(t-\tau\right)B\right)^{T}\left(t-\tau\right)^{(1-\alpha)}x\right]^{T}\left[\left(\Phi\left(t-\tau\right)B\right)^{T}\left(t-\tau\right)^{(1-\alpha)}x\right]d\tau &= 0,\tau\in[0,t]\\
\int_{0}^{t}\left\|\left(\Phi\left(t-\tau\right)B\right)^{T}\left(t-\tau\right)^{(1-\alpha)}x\right\|^{2}d\tau &= 0,\forall\tau\in[0,t]
\end{aligned}$$

on déduit alors

$$\left\|\left(\Phi\left(t-\tau\right)B\right)^{T}\left(t-\tau\right)^{(1-\alpha)}x\right\|=0,\forall\tau\in[0,t]$$

i.e., pour tout $\tau\in[0,t]$

$$B^{T}\Phi^{T}\left(t-\tau\right)\left(t-\tau\right)^{(1-\alpha)}x=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^{T}\left(A^{T}\right)^{k}\left(t-\tau\right)^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma\left[(k+1)\alpha\right]}\left(t-\tau\right)^{(1-\alpha)}x=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^{T}\left(A^{T}\right)^{k}\left(t-\tau\right)^{k\alpha}}{\Gamma\left[(k+1)\alpha\right]}x=0$$

$$\frac{B^{T}}{\Gamma[\alpha]}x+\frac{B^{T}\left(A^{T}\right)\left(t-\tau\right)^{\alpha}}{\Gamma[2\alpha]}x+\frac{B^{T}\left(A^{T}\right)^{2}\left(t-\tau\right)^{2\alpha}}{\Gamma[3\alpha]}x+\cdots=0 \tag{7.36}$$

d'où en substituant $\tau=t$ dans (7.36) on aura

$$B^{T}x=0$$

l'expression (7.36) devient,

$$\frac{B^T\left(A^T\right)(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma[2\alpha]}x+\frac{B^T\left(A^T\right)^2(t-\tau)^{2\alpha}}{\Gamma[3\alpha]}x+\cdots=0 \tag{7.37}$$

$$(t-\tau)^{\alpha}\left[\frac{B^TA^T}{\Gamma[2\alpha]}x+2\frac{B^T\left(A^T\right)^2(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma[3\alpha]}x+3\frac{B^T\left(A^T\right)^3(t-\tau)^{2\alpha}}{\Gamma[4\alpha]}x+\cdots\right]=0 \tag{7.38}$$

donc

$$\frac{B^TA^T}{\Gamma[2\alpha]}x+2\frac{B^T\left(A^T\right)^2(T-\tau)^{\alpha}}{\Gamma[3\alpha]}x+3\frac{B^T\left(A^T\right)^3(T-\tau)^{2\alpha}}{\Gamma[4\alpha]}x+\cdots=0$$

pour $\tau=T$

$$B^TA^Tx=0 \tag{7.39}$$

en repétant cette procédure $(n-1)$ fois,on arrive à

$$B^T\left(A^T\right)^{n-1}x=0 \tag{7.40}$$

récapitulons

$$\begin{cases} B^Tx=0 \\ B^TA^Tx=0 \\ \vdots \\ B^T\left(A^T\right)^{n-1}x=0 \end{cases}$$

ce dernier résultat peut être déduit directement du lemme (6.2) . Il s'ensuit alors,

$$x\in\bigcap_{i=0}^{n-1}Ker\left[B^T\left(A^T\right)^i\right]=\bigcap_{i=0}^{n-1}\left[\Im m\left(\left(B^T\left(A^T\right)^i\right)^T\right)\right]^{\perp}$$

i.e.,

$$x\in\bigcap_{i=0}^{n-1}\left[\Im m\left(A^iB\right)\right]^{\perp}$$

i.e.

$$x\in\left[\sum_{i=0}^{n-1}\Im m\left(A^iB\right)\right]^{\perp}$$

d'où

$$x\in\left[\Im m\left(C\right)\right]^{\perp}$$

enfin

$$\boxed{Ker\left(W_r\left(0,T\right)\right)\subset\left[\Im m\left(C\right)\right]^{\perp}} \tag{7.41}$$

2-Inversement, soit

$$x\in\left[\Im m\left({}_{\alpha}C\right)\right]^{\perp}$$

or

$$\left[\Im m\left({}_{\alpha}C\right)\right]^{\perp}=Ker\left({}_{\alpha}C^T\right)=Ker\begin{bmatrix} B^T \\ B^TA^T \\ \vdots \\ B^T\left(A^T\right)^{n-1}\end{bmatrix}$$

alors

$$\begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T \left(A^T\right)^{n-1} \end{bmatrix} x = 0$$

i.e.,

$$\begin{cases} B^T x = 0 \\ B^T A^T x = 0 \\ \vdots \\ B^T \left(A^T\right)^{n-1} x = 0 \end{cases}$$

Or d'après le théorème de *Cayley-Hamilton :*

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n = 0$$

Donc pour tout entier naturel $k \geq n$, A^k peut s'écrire comme combinaison linéaire de $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$il s'ensuit alors

$$B^T \left(A^T\right)^k x = 0, \forall k \geq n$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^T \left(A^T\right)^k}{\Gamma\left[(k+1)\alpha\right]} (t-\tau)^{(k+1)\alpha - 1} x = 0$$

i.e.

$$B^T \Phi^T (t-\tau) x = 0$$

de même

$$\left[B^T \Phi^T (t-\tau) x\right]^T = 0$$

par suite

$$\int_0^t x^T \Phi (t-\tau) B B^T \Phi^T (t-\tau) (t-\tau)^{2(1-\alpha)} x d\tau = 0$$

i.e.,

$$x_\alpha^T W_r (0,t) x = 0 \tag{7.42}$$

Comme $W_r(0,t)$ est symétrique et semi-définie positive , il existe une matrice inversible H telle que

$$_\alpha W_r (0,t) = H^T H \tag{7.43}$$

des égalités (7.42) et (7.43) on a

$$x^T H^T H x = 0$$

i.e.

$$\|Hx\|^2 = 0$$

i.e.

$$Hx = 0$$

par suite,

$$_{\alpha}W_r\left(0,t\right)x = H^T Hx = 0$$

i.e.

$$x \in Ker\left(_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right)$$

d'où

$$\boxed{\left[\Im m\left(_{\alpha}C\right)\right]^{\perp} \subset Ker\left(_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right)} \tag{7.44}$$

de (7.41) et (7.44) on a

$$\left[\Im m\left(_{\alpha}C\right)\right]^{\perp} = Ker\left(_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right) = \left[\Im m\left(_{\alpha}W_r^T\left(0,t\right)\right)\right]^{\perp} = \left[\Im m\left(_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right)\right]^{\perp} \tag{7.45}$$

En conséquence,

$$\boxed{\Im m\left(_{\alpha}C\right) = \Im m\left(_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right)} \tag{7.46}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Revenons à la démonstration du théorème (7.1)

Preuve. 1-Soit $x \in_{\alpha} \Re$ alors il va exister un temps $t > 0$, un contrôle $u\left(t\right), t \in [0,t]$ tels que

$$x = \int_0^t \Phi\left(t-\tau\right) Bu\left(\tau\right) d\tau \tag{7.47}$$

$$= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma\left[\left(k+1\right)\alpha\right]} \left(t-\tau\right)^{(k+1)\alpha-1} Bu\left(\tau\right) d\tau \tag{7.48}$$

or d'après le théorème de *Cayley-Hamilton*

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n = 0 \tag{7.49}$$

pour tout entier naturel $k \geq n,\ A^k$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$. Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} A^k a_k\left(t-\tau\right) Bu\left(\tau\right) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^t a_k\left(t-\tau\right) u\left(\tau\right) d\tau \end{aligned}$$

En posant

$$x_k = \int_0^T a_k\left(t-\tau\right) u\left(\tau\right) d\tau$$

alors

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B x_k$$

donc

$$x \in \Im m\left(_{\alpha}C\right)$$

on déduit que

$$\boxed{_{\alpha}\Re \subset \Im m\left(_{\alpha}C\right) = \Im m\left(_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right)} \tag{7.50}$$

2-Soit $x \in \Im m\left({}_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right)$
alors il va exister $\eta \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{aligned} x &= W_r\left(0,t\right)\eta & (7.51)\\ &= \int_0^t \Phi\left(t-\tau\right)BB^T\Phi^T\left(t-\tau\right)\left(t-\tau\right)^{2(1-\alpha)}\eta d\tau & (7.52)\end{aligned}$$

Il suffit de prendre pour contrôle

$$u\left(\tau\right) = B^T\Phi^T\left(t-\tau\right)\left(t-\tau\right)^{2(1-\alpha)}\eta \tag{7.53}$$

donc

$$x = \int_0^t \Phi\left(t-\tau\right)Bu\left(\tau\right)d\tau \tag{7.54}$$

i.e.

$$x \in_{\alpha} \Re \tag{7.55}$$

d'où

$$\boxed{\Im m\left({}_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right) \subset_{\alpha} \Re} \tag{7.56}$$

de (7.50) et (7.56)

$$\boxed{\Im m\left({}_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right) =_{\alpha} \Re} \tag{7.57}$$

■

On arrive au résultat important suivant qui n'est autre qu'une extension du résultat vu pour le système **LTI.**

Théorème 7.2 ***(C.N.S d'Atteignabilité)***
Les assertions suivantes sont équivalentes :
1-*Le système* (7.1) *est complètement* atteignable.
2-*Le Gramien d'atteignabilité est inversible.*
3-*La matrice de contrôlabilité est de rang plein.*
i.e.

$$\left(\Re = \mathbb{R}^n\right) \Leftrightarrow \left(rg\left(W_r\left(0,t\right)\right) = n, \forall t > 0\right) \Leftrightarrow \left(rg\left(C\right) = n\right) \tag{7.58}$$

Preuve. D'après le théorème précédent les deux dernières équivalences sont évidentes.
A voir la première équivalence. On a

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{c} {}_{\alpha}\Re = \mathbb{R}^n \\ {}_{\alpha}\Re = \Im m\left({}_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right)\end{array}\right\} &\Leftrightarrow \left(\Im m\left({}_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right) = \mathbb{R}^n\right) & (7.59)\\ &\Leftrightarrow \left(rg\left({}_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right) = n, \forall t > 0\right) & (7.60)\end{aligned}$$

on obtient alors les équivalences. ■

Remarque 7.4 *Si le système* (7.1) *est complètement atteignable, pour tout état x_f, et tout $t > 0$ fixé, on prend pour contrôle*

$$u\left(\tau\right) = B^T\Phi^T\left(t-\tau\right)\left[{}_{\alpha}W_r^{-1}\left(0,t\right)\right]x_f, \tau \in [0,t] \tag{7.61}$$

Exemple 7.2 *On reprend l'exemple* (7.1) , *d'après la formule* (7.26)

$$\begin{aligned}\det\left({}_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right) &= \frac{t^{2\alpha+2}}{\left(2\alpha+1\right)\left[\Gamma\left(2\alpha\right)\right]^2\left[\Gamma\left(\alpha\right)\right]^2}-\frac{t^{2\alpha+2}}{\left(\alpha+1\right)^2\left[\Gamma\left(2\alpha\right)\right]^2\left[\Gamma\left(\alpha\right)\right]^2} &(7.62)\\ &\neq 0 &(7.63)\end{aligned}$$

donc

$$rg\left[{}_{\alpha}W_r\left(0,t\right)\right]=2 \quad (7.64)$$

Le système est donc atteignable.

Chapitre 8

Contrôlabilité d'un système linéaire fractionnaire

8.1 Notions de Contrôlabilité

La contrôlabilité a pour objet de caractériser la capacité d'un système à voir ses caractéristiques dynamiques modifiées par les entrées. Les concepts de contrôlabilité et d'observabilité des systèmes fractionnaires ont été introduites de manière tant analytique qu'algébrique. Elles étendent naturellement celles du cas entier dues à *Kalman.*

Considérons le système (7.1) . Dans ce cadre, notre objectif est d'adapter les techniques utilisées pour le cas entier au cas non-entier.

Définition 8.1 *Un état initial x_0 $(x_0 \neq 0)$ est dit contrôlable s'il existe un temps fini t et un contrôle $u(\tau), \tau \in [0,t]$ qui transfère l'état du système de x_0 à l'origine $x=0$ en temps t.*

i.e.,

$$0 = \Phi_0(t)\,x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau \tag{8.1}$$

Définition 8.2 *Si toute condition initiale x_0 est contrôlable en temps t, le système est dit contrôllable en temps t.*

Définition 8.3 *Si pour toute condition initiale x_0, il existe un temps t tel que x_0 soit contrôlable en t alors le système est dit contrôlable ou encore la paire (A,B) est contrôlable.*

Notons que pour la contrôlabilité, on a besoin de résoudre l'équation (8.1).

En appliquant la transformée de *Laplace* à la première équation du système (7.1) [32] , on a

$$\begin{aligned} X(s) &= [s^\alpha I_n - A]^{-1}\left[s^{\alpha-1}x(0) + BU(s)\right] \\ &= [s^\alpha I_n - A]^{-1} s^{\alpha-1}x_0 + [s^\alpha I_n - A]^{-1} s^{\alpha-1} BU(s)\, s^{1-\alpha} \end{aligned} \tag{8.2}$$

d'où

$$x(t) = \Phi_0(t)\,x_0 + \Phi_0(t) * B\hat{u}(t)\,, t \geq 0 \tag{8.3}$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \pounds^{-1}\left[\left[s^\alpha I_n - A\right]^{-1} s^{\alpha-1}\right] = E_\alpha(At^\alpha) && (8.4)\\ \hat{u}(t) &= \pounds^{-1}\left[U(s)\, s^{1-\alpha}\right] && (8.5)\end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = \Phi_0(t)\, x_0 + \int_0^t \Phi_0(t-\tau)\, B\hat{u}(\tau)\, d\tau \tag{8.6}$$

par suite l'équation (8.1) peut être réecrite comme suit

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_0(t)\, x_0 + \int_0^t \Phi_0(t-\tau)\, B\hat{u}(\tau)\, d\tau && (8.7)\\ \Phi_0(t)\, x_0 &= -\int_0^t \Phi_0(t-\tau)\, B\hat{u}(\tau)\, d\tau && (8.8)\end{aligned}$$

or

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha)$$

comme la matrice de transition $\Phi_0(t)$ est inversible et vérifie la propriété de semi-groupe (voir propriétés de la matrice de transition dans la section (6.1)), alors

$$\Phi_0^{-1}(t) = \Phi_0(-t) \tag{8.9}$$

en prémultipliant la formule (8.8) par $\Phi_0(-t)$, on a,

$$\Phi_0(-t)\, \Phi_0(t)\, x_0 = -\int_0^t \Phi_0(-t)\, \Phi_0(t-\tau)\, B\hat{u}(\tau)\, d\tau \tag{8.10}$$

or

$$\Phi_0(-t)\, \Phi_0(t-\tau) = \Phi_0(-\tau)$$

et

$$\Phi_0(-t)\, \Phi_0(t) = I_n$$

d'où

$$x_0 = -\int_0^t \Phi_0(-\tau)\, B\hat{u}(\tau)\, d\tau \tag{8.11}$$

Tout revient alors à résoudre l'équation obtenue (8.11) qui n' est pas tout le temps pratiquable. En s'inspirant des résultats vus pour le cas de système **LTI,** on introduit la notion de *Gramian de contrôlabilité* et *Matrice de contrôlabilité.*

8.2 Gramian de contrôlabilité - Matrice de contrôlabilité

Définition 8.4 *Le gramian de contrôlabilité du système* (7.1) *est la matrice, de dimension* $n \times n$, *notée* ${}_\alpha W_c(t)$ *et définie par*

$${}_\alpha W_c(t) = \int_0^t \Phi_0(-\tau)\, BB^T \Phi_0^T(-\tau)\, d\tau \tag{8.12}$$

Théorème 8.1 [29] *Le système* (7.1) *est contrôlable si et seulement si la matrice* ${}_{\alpha}W_c(t)$ *est inversible.*

Preuve. **Suffisance :** Si le gramian est inversible alors pour une condition initiale x_0 on définit la pseudo-commande par

$$\hat{u}(\tau) = -B^T \Phi_0^T(-\tau) W_c^{-1}(t) x_0, \tau \in [0,t] \tag{8.13}$$

alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(t) x_0 + \int_0^t \Phi_0(t-\tau) B\hat{u}(\tau) d\tau \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \int_0^t \Phi_0(t-\tau) BB^T \Phi_0^T(-\tau) W_c^{-1}(t) x_0 d\tau \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \int_0^t \Phi_0(t) \Phi_0(-\tau) BB^T \Phi_0^T(-\tau) W_c^{-1}(t) x_0 d\tau \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \Phi_0(t) \left[\int_0^t \Phi_0(-\tau) BB^T \Phi_0^T(-\tau) d\tau\right] W_c^{-1}(t) x_0 \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \Phi_0(t) W_c(t) W_c^{-1}(t) x_0 \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \Phi_0(t) x_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $\hat{u}(\tau), \tau \in [0,t]$ ainsi définie transfère l'état du système de x_0 à l'origine ; pour trouver $u(\tau), \tau \in [0,t]$, de (8.1) on a pour commande

$$u(\tau) = \hat{u}(\tau) * \pounds^{-1}\left(s^{\alpha-1}\right) \tag{8.14}$$

avec

$$\pounds^{-1}\left(s^{\alpha-1}\right) = \begin{cases} \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} & 0 < \alpha < 1 \\ \delta(\tau) & \alpha = 1 \end{cases} \tag{8.15}$$

donc le système est contrôllable.

Nécessité

Supposons maintenant que le système est contrôlable et la matrice ${}_{\alpha}W_c(t)$ est non inversible donc

$$Ker\left({}_{\alpha}W_c(t)\right) \neq \{0\}$$

i.e., $\exists z \in \mathbb{R}_*^n$ *tel que*

$$\begin{aligned} W_c(t) z = 0 &\Longrightarrow & z^T W_c(t) z = 0 \\ &\Longleftrightarrow & \int_0^t z^T \Phi_0(-\tau) BB^T \Phi_0^T(-\tau) z d\tau = 0 \\ &\Longleftrightarrow & \int_0^t \left(B^T \Phi_0^T(-\tau) z\right)^T \left(B^T \Phi_0^T(-\tau) z\right) d\tau = 0 \\ &\Longleftrightarrow & \int_0^t \left\|B^T \Phi_0^T(-\tau) z\right\|^2 d\tau = 0 \\ &\Longleftrightarrow & \left\|B^T \Phi_0^T(-\tau) z\right\| = 0 \\ &\Longleftrightarrow & B^T \Phi_0^T(-\tau) z = 0 \\ &\Longleftrightarrow & z^T \Phi_0(-\tau) B = 0 \end{aligned}$$

comme le système est supposé contrôlable pour toute condition initiale, il s'ensuit que l'équation (8.11) est solvable pour toute valeur initiale x_0, en particulier pour $x_0 = z$. En substituant z dans (8.11) , on a

$$z = -\int_0^t \Phi_0\left(-\tau\right) B\hat{u}\left(\tau\right) d\tau$$

alors

$$z^T z = -\int_0^t z^T \Phi_0\left(-\tau\right) B\hat{u}\left(\tau\right) d\tau = 0$$

i.e.,

$$\left\|z\right\|^2 = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \ \ (contradiction)$$

on déduit que ${}_{\alpha}W_c\left(t\right)$ est inversible. ■

Remarque 8.1 *Pour $\alpha = 1$,*

$$W_c\left(t\right) = \int_0^t e^{-\tau A} B B^T e^{-\tau A^T} d\tau$$

Voici un deuxième résultat important

Théorème 8.2 (Critère de contrôlabilité) [29]

Le système (7.1) est contrôlable si et seulement si la matrice ${}_{\alpha}C = \left[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right]$ est de rang plein.

i.e.,

$$rang\left({}_{\alpha}C\right) = n \tag{8.16}$$

La matrice ${}_{\alpha}C$ est dite matrice de contrôlabilté.

Preuve. *Le système (7.1) est contrôlable si et seulement si pour toute condition initiale x_0, il existe un temps fini t et un contrôle $\hat{u}\left(\tau\right), \tau \in \left[0, t\right]$ tel que*

$$\Phi_0\left(t\right) x_0 = -\int_0^t \Phi_0\left(t-\tau\right) B\hat{u}\left(\tau\right) d\tau$$

or d'après le théorème de Cayley-Hamilton

$$\begin{aligned}\Phi_0\left(t-\tau\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \left(t-\tau\right)^{k\alpha}}{\Gamma\left(k\alpha+1\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k a_k\left(t-\tau\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Phi_0(t)\,x_0 &= -\int_0^t \left[\sum_{k=0}^{n-1} A^k a_k(t-\tau)\,B\hat{u}(\tau)\right] d\tau \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B\left[\int_0^t a_k(t-\tau)\,\hat{u}(\tau)\,d\tau\right] \\ &= -\left[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right]\begin{bmatrix}\Psi_0\\ \Psi_1\\ \vdots\\ \Psi_{n-1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

où

$$\Psi_k = \int_0^t a_k(t-\tau)\,\hat{u}(\tau)\,d\tau,\ \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{8.17}$$

alors

$$\Phi_0(t)\,x_0 = -_{\alpha}C\Psi \tag{8.18}$$

avec

$$\Psi = \begin{bmatrix}\Psi_0\\ \Psi_1\\ \vdots\\ \Psi_{n-1}\end{bmatrix}$$

L'équation (8.18) *admet une unique solution* Ψ *si et seulement si* $rg\left(_{\alpha}C\right) = n$. ■

Dans le cas où ceci est réalisé, il sera aussi possible de déterminer au moins une fonction $\hat{u}(\tau), \tau \in [0, t]$ telle que les conditions données par la formule (8.17) soient vérifiées.
Cette dernière affirmation est prouvée par le lemme suivant :

Lemme 8.1 *Un contrôle de la forme*

$$\hat{u}(\tau) = \xi(t-\tau)\,\Xi^{-1}(t)\,\Psi, \tau \in [0, t] \tag{8.19}$$

où

$$\Xi(t) = \int_0^t \xi^T(t-\tau)\,\xi(t-\tau)\,d\tau \tag{8.20}$$

et

$$\xi(\tau) = \left[a_0(\tau), a_1(\tau), \cdots, a_{n-1}(\tau)\right], \tau \in [0, t] \tag{8.21}$$

satisfait aux conditions (8.17).

Preuve. Remarquons que les conditions exprimées par la formule (8.17) peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit

$$\Psi = \int_0^t \xi^T(t-\tau)\,\hat{u}(\tau)\,d\tau \tag{8.22}$$

Le contrôle donné par la formule (8.19) existe si et seulement si la matrice $\Xi(t)$ est inversible, ceci est prouvé par contradiction. Supposons que cette matrice n'est pas inversible, alors il va exister un vecteur non nul v tel que $\Xi(t)v = 0$. En prémultipliant par v^T, on a

$$v^T \Xi(t) v = 0$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^t v^T \xi^T (t-\tau) \xi (t-\tau) v d\tau &= 0 \\
\int_0^t (\xi (t-\tau) v)^T \xi (t-\tau) v d\tau &= 0 \\
\int_0^t (\xi (t-\tau) v)^2 d\tau &= 0
\end{aligned}$$

cette dernière formule ne peut être vraie que si

$$\xi (t-\tau) v = 0, \forall \tau \in [0,t]$$

Ceci veut dire que les fonctions $a_k(t-\tau), k = 0, \cdots, n-1$ sont linéairement dépendantes ce qui est en contradiction avec l'énoncé du lemme (6.3), ceci dit la matrice $\Xi(t)$ est donc invesible et le contrôle $\hat{u}(\tau), \tau \in [0,t]$ donné par la formule (8.19) existe. Finalement, en substituant $\hat{u}(\tau)$ dans (8.22) le lemme découle facilement. Une fois le contrôle fictif $\hat{u}(\tau)$ déterminé, le vrai contrôle $u(\tau), \tau \in [0,t]$ est obtenu à partir de

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= \hat{u}(\tau) * \pounds^{-1}\left(s^{\alpha-1}\right) \\
\pounds^{-1}\left(s^{\alpha-1}\right) &= \begin{cases} \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} & 0 < \alpha < 1 \\ \delta(\tau) & \alpha = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

■

8.3 Relation entre atteignabilité et contrôlabilité

On a vu préalablement que

$$(le\ système\ \ (7.1)\ \ est\ atteignable) \Longleftrightarrow (rg\,({}_\alpha C) = n)$$

et

$$(le\ système\ \ (7.1)\ \ est\ contrôlable) \Longleftrightarrow (rg\,({}_\alpha C) = n)$$

d'où le résultat suivant

$$(le\ système\ \ (7.1)\ \ est\ contrôlable) \Longleftrightarrow (le\ système\ \ (7.1)\ \ est\ atteignable) \qquad (8.23)$$

Remarque 8.2 *Ce dernier résultat est vérifié pour les systèmes linéaires standards* [33].

Chapitre 9

Observabilité d'un système linéaire fractionnaire

Une caractéristique structurelle complémentaire de la contrôlabilité peut être définie. Elle correspond à la capacité pour un système de connaître l'historique d'un état interne à partir de la seule connaissance de variables de sorties mesurées.

9.1 Notions d'observabilité

Considérons le système (7.1). Nous allons dans ce qui suit caractériser des tests d'observabilité pour un système linéaire fractionnaire.

Définition 9.1 *On dit que l'état* x_0 $(x_0 \in \mathbb{R}^n)$ *est* observable *sur l'intervalle* $[t_0, t_1]$ *si et seulement si la connaissance du contrôle* $u(t), t \in [t_0, t_1]$ *et de la sortie* $y(t), t \in [t_0, t_1]$ *permet de déterminer de manière unique l'état initial* $x_0 = x(t_0)$.

-Si tout état initial est observable sur tout intervalle $[t_0, t_1]$, *on dit que le sytstème (ou encore la paire* (A, C)*) est* observable.

Remarque 9.1 *Il est clair que la notion d'observabilité est cruciale pour les systèmes où le vecteur d'état complet n'est pas accessible à la mesure mais doit être reconstruit ,éstimé ou filtré à partir de données formées par la sortie. Notons qu'une fois* x_0 *déterminé et le contrôle* $u(t)$ *connu, on peut alors reconstruire l'état du système* (7.1) *par la formule*

$$x(t) = \Phi_0(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau) Bu(\tau) d\tau$$

Dans la suite, sans nuire à la généralité on va assumer que $t_0 = 0$, *l'état est*

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \int_{0}^{t} \Phi(t - \tau) Bu(\tau) d\tau$$

La sortie est

$$y(t) = C\Phi_0(t)x_0 + C\int_{0}^{t} \Phi(t - \tau) Bu(\tau) d\tau + Du(t) \tag{9.1}$$

La formule (9.1) peut être réécrite comme suit

$$\tilde{y}(t) = C\Phi_0(t)\,x_0 \tag{9.2}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= y(t) - \left[\int_0^t C\Phi(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)\right] \\ x_0 &= x(0) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Définition 9.2 *Un état* $x_{0,}\,(x_0 \in \mathbb{R}^n)$ *est dit* non-observable *si la réponse du système pour une entrée nulle est nulle pour tout* $t \geq 0$.

i.e.,

$$C\Phi_0(t)\,x_0 = 0, \forall t \geq 0 \tag{9.4}$$

Remarque 9.2 *-Il est clair que* $x_0 = 0$ *est non-observable.*

-Si (9.4) *est vérifiée pour* $x_0 \neq 0$, *ceci veut dire qu'on a pour une seule sortie, deux conditions initiales distinctes.*

Ceci contredit la définition de l'observabilité.

-L'ensemble de tous les états non-observables, noté $\Re_{\overline{o}}$, *est appellé :* sous-espace non-observable *du système* (7.1).

Il vient alors le théorème suivant :

Théorème 9.1 *Le système* (7.1) *est* complètement observable (*ou bien la paire (A,C) est observable) si et seulement si l'unique état non-observable est* $x_0 = 0$, *i.e.*,

$$\Re_{\overline{o}} = \{0\} \tag{9.5}$$

Preuve. *Par définition de l'observabilité* ■

L'utilisation de la définition pour démontrer l'observabilité d'un système n'est pas tout le temps pratique, c'est pour cela qu'on doit trouver d'autres critères d'observabilité plus pratiques à manipuler. On définit alors l'application qui représente la *carte d'observabilité.*

Définition 9.3 *On définit l'application linéaire,*

$$\begin{array}{cccc} L_o: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & C([0,t], \mathbb{R}^m) \\ & x_0 & \longrightarrow & L_o(x_0) = C\Phi_0(\tau)\,x_0, \tau \in [0,t] \end{array} \tag{9.6}$$

Il est clair que

$$Ker(L_o) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n / x_0 \; non - observable\} = \Re_{\overline{o}} \tag{9.7}$$

On introduit alors le théorème suivant :

Théorème 9.2 *La paire (A,C) est observable si et seulement si* $Ker(L_o) = \{0\}$

9.2 Gramian d'observabilité - Matrice d'observabilité

Définition 9.4 (Gramian d'observabilité)
La matrice ${}_{\alpha}W_o(0,t)$ *définie par*

$$ {}_{\alpha}W_o(0,t) = \int_0^t \Phi_0^T(\tau)\, C^T C \Phi_0(\tau)\, d\tau \tag{9.8}$$

est appelée Gramian d'observabilité *de la paire* (A,C).
On vérifie facilement que c'est une matrice de dimension $n \times n$*, symétrique et semi-définie positive.*

Remarque 9.3 *Pour* $\alpha = 1$

$$ W_o(0,t) = \int_0^t e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \tag{9.9}$$

Théorème 9.3 *(* C.N.S d'observabilité)
Les assertions suivantes sont équivalentes :
1)*-La paire* (A,C) *est observable sur* $[0,t]$.
2)*-*$Ker(L_o) = \{0\}$.
3)*-*$\det({}_{\alpha}W_o(0,t)) \neq 0$.
Preuve. $(1) \Leftrightarrow (2)$ *d'aprés le théorème*(9.2).
Montrons que $(2) \Leftrightarrow (3)$
<u>Nécessité</u> : *Supposons que* $Ker(L_o) = \{0\}$ *,et démontrons que det* $({}_{\alpha}W_o(0,t)) \neq 0$?
Comme en dimension finie on a :

$$ injection \Leftrightarrow surjection \Leftrightarrow bijection $$

Il suffit alors de voir que ${}_{\alpha}W_o(0,t)$ *est injective, i.e.* $Ker(W_o(0,t)) = \{0\}$?
soit

$$\begin{array}{rcc}
x \in Ker({}_{\alpha}W_o(0,t)) & \Longleftrightarrow & {}_{\alpha}W_o(0,t)\, x = 0 \\
& \Longrightarrow & x^T_{\alpha} W_o(0,t)\, x = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \int_0^t x^T \Phi_0^T(\tau)\, C^T C \Phi_0(\tau)\, x d\tau = 0, \forall \tau \in [0,t] \\
& \Longleftrightarrow & \int_0^t [C\Phi_0(\tau)\, x]^T [C\Phi_0(\tau)\, x]\, d\tau = 0, \forall \tau \in [0,t] \\
& \Longleftrightarrow & \int_0^t \|C\Phi_0(\tau)\, x\|^2 d\tau = 0, \forall \tau \in [0,t] \\
& \Longleftrightarrow & \|C\Phi_0(\tau)\, x\|^2 = 0, \forall \tau \in [0,t] \\
& \Longleftrightarrow & C\Phi_0(\tau)\, x = 0, \forall \tau \in [0,t] \\
& \Longleftrightarrow & L_o(x) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & x \in Ker(L_o) = \{0\} \\
& \Longleftrightarrow & x = 0
\end{array}$$

d'où

$$ Ker({}_{\alpha}W_o(0,t)) = \{0\}, \forall t > 0 $$

et donc

$$ \det({}_{\alpha}W_o(0,t)) \neq 0, \forall t > 0 $$

<u>Suffisance</u> : *Supposons que* $\det(W_o(0,t)) \neq 0, \forall t > 0,$ *et démontrons* $Ker(L_o) = \{0\}$?

Soit

$$\begin{array}{rcl} x \in Ker\left(L_o\right) & \Longleftrightarrow & C\Phi_0\left(\tau\right)x = 0, \forall\tau \in [0,t] \\ & \Longrightarrow & \Phi_0^T\left(\tau\right)C^TC\Phi_0\left(\tau\right)x = 0, \forall\tau \in [0,t] \\ & \Longleftrightarrow & \int_0^t \Phi_0^T\left(\tau\right)C^TC\Phi_0\left(\tau\right)xd\tau = 0, \forall\tau \in [0,t] \\ & \Longleftrightarrow & \left(\int_0^t \Phi_0^T\left(\tau\right)C^TC\Phi_0\left(\tau\right)d\tau\right)x = 0, \forall\tau \in [0,t] \\ & \Longleftrightarrow & W_o\left(0,t\right)x = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = 0 \text{ (par hypothèse)} \end{array}$$

On déduit alors que $Ker\left(L_o\right) = \{0\}$ ■

On définit maintenant la *matrice d'observabilité* de la paire (A,C)

$$_{\alpha}O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np\times n} \tag{9.10}$$

Théorème 9.4 *Pour tout intervalle* $[0,t]$, *on a :*

1)-$Ker\left(_{\alpha}O\right) = Ker\left(L_o\right)$.

2)-$Ker\left(_{\alpha}O\right)$ *est un* A-invariant sous-espace,.*i.e.*

$$x \in Ker\left(_{\alpha}O\right) \Rightarrow Ax \in Ker\left(_{\alpha}O\right) \tag{9.11}$$

3)-*La paire* (A,C) *est observable si et seulement si* $rang\left(_{\alpha}O\right) = n$.

Ce théorème est trés intéressant dans la mesure où il fait le lien entre une notion analytique difficile à appréhender à priori (l'observabilité), une caractérisation géométrique (le sous-espace vectoriel $\Re_{\bar{o}}$) et une caractérisation purement algébrique simple (le rang de la matrice $_{\alpha}O$) !

Preuve. **1èrepartie** : Pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{array}{rcl} x_0 \in Ker\left(L_o\right) & \Longleftrightarrow & x_0 \ non-observable \\ & \Longleftrightarrow & C\Phi_0\left(\tau\right)x_0 = 0, \forall\tau \in [0,t] \\ & \Longleftrightarrow & C\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\tau^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\right]x_0 = 0, \forall\tau \in [0,t] \\ & \Longleftrightarrow & \sum\limits_{k=0}^{\infty}C\frac{A^k(\tau^{\alpha})^k}{\Gamma(k\alpha+1)}x_0 = 0, \forall\tau \in [0,t] \\ & \Longleftrightarrow & CA^kx_0 = 0, \forall k \in \mathbb{N} \text{ (voir lemme (6.2))} \\ & \Longleftrightarrow & CA^kx_0 = 0, k = 0,\cdots,n-1 \text{ (Cayley-Hamilton)} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x_0 \in Ker\left(_{\alpha}O\right) \end{array}$$

d'où

$$Ker\left(L_o\right) = Ker\left(_{\alpha}O\right) \tag{9.12}$$

2èmepartie : A voir que $Ker\,(O)$ est un *A-invariant ?*
Soit $x_0 \in Ker\,(O)$, i.e.$CA^k x_0 = 0, k = 0, \cdots, n-1$.
On veut montrer que $x = Ax_0 \in Ker\,({}_\alpha O)$?
-On pose $x = Ax_0$
alors
$$Cx = CAx_0 = 0 \text{ (par hypothèse)} \tag{(1)}$$
-On a $x = Ax_0$
alors
$$Ax = A^2 x_0$$
donc
$$CAx = CA^2 x_0 = 0 \text{ (par hypothèse)} \tag{(2)}$$
$\cdots\cdots\cdots$
-On procède de la même manière jusqu'à avoir
$$A^{n-1}x = A^n x_0$$
et donc
$$CA^{n-1}x = CA^n x_0$$
or d'après le théorème de *Cayley-Hamilton*
$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0$$
donc
$$A^n = -\left(a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}\right)$$
par suite
$$CA^{n-1}x = -C\left(a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}\right)x_0$$
on arrive finalement à
$$CA^{n-1}x = 0 \tag{(3)}$$
récapitulons, de $(1), (2)$ et (3)
$$\left\{\begin{array}{c} Cx = 0 \\ CAx = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x = 0$$
on obtient alors
$$x \in Ker({}_\alpha O), \text{ i.e. } .Ax_0 \in Ker\,({}_\alpha O)$$
i.e.
$$Ker\,({}_\alpha O) \text{ est } A - invariant$$
3èmepartie : On sait que La paire (A, C) est observable si et seulement si
$$Ker\,(L_o) = \{0\}$$

or

$$Ker\left(L_o\right) = Ker\left({}_\alpha O\right)$$

donc

$$Ker\left({}_\alpha O\right) = \{0\}$$

ce qui équivaut à

$$\dim\left(Ker\left({}_\alpha O\right)\right) = 0 \Leftrightarrow rang\left({}_\alpha O\right) = n \tag{9.13}$$

Il résulte que pour que le système soit observable, il est nécessaire et suffisant que la matrice d'observabilité soit de rang plein. ■

Remarque 9.4 *Notons que les conditions des théorèmes* (9.3) *et* (9.4) *sont indépendantes du choix de l'intervalle* $[0,t]$, *par conséquent, la paire de matrices* (A,C) *est observable sur un certain intervalle* $[0,t]$ *si et seulement si la paire de matrices* (A,C) *est observable sur tout intervalle* $[0,t], t > 0$. *Dans ce cas, l'état initial se calcule de la façon suivante :*

on a

$$\tilde{y}\left(\tau\right) = C\Phi_0\left(\tau\right)x_0 \tag{9.14}$$

en prémultipliant (9.14) *par* $\Phi_0^T\left(\tau\right)C^T$ *on obtient*

$$\Phi_0^T\left(\tau\right)C^T\tilde{y}\left(\tau\right) = \Phi_0^T\left(\tau\right)C^TC\Phi_0\left(\tau\right)x_0$$

et si on intègre sur $[0,t]$, *nous obtenons,*

$$\int_0^t \Phi_0^T\left(\tau\right)C^T\tilde{y}\left(\tau\right)d\tau = \int_0^t \Phi_0^T\left(\tau\right)C^TC\Phi_0\left(\tau\right)x_0 d\tau$$

i.e.,

$$\int_0^t \Phi_0^T\left(\tau\right)C^T\tilde{y}\left(\tau\right)d\tau = W_o\left(0,t\right)x_0$$

par conséquent,

$$x_0 = W_o^{-1}\left(0,t\right)\left(\int_0^t \Phi_0^T\left(\tau\right)C^T\tilde{y}\left(\tau\right)d\tau\right) \tag{9.15}$$

Remarque 9.5 *Les mêmes résultats sont adaptés pour le cas* $\alpha = 1$

Exemple 9.1 *On considère le système* (7.1) *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1,0]$$

$$\Phi_0\left(t\right) = I_2 + A\frac{t^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, k = 2,3,\cdots$$

et

$$C\Phi_0\left(t\right) = \left[1, \frac{t^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\right]$$

1)- *Voyons l'observabilité de ce système en calculant* $Ker\left(L_o\right)$:
on pose $x\left(t\right)=\binom{x_1}{x_2}$

$$\begin{aligned} x &\in Ker\left(L_o\right)\Leftrightarrow C\Phi_0\left(t\right)x=0 \\ x &\in Ker\left(L_o\right)\Leftrightarrow x_1+x_2\frac{t^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}=0,\forall t>0 \\ x &\in Ker\left(L_o\right)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x_1=0 \\ x_2=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

alors

$$Ker\left(L_o\right)=\{0\}$$

on déduit que le système est observable.
2)-*Déterminons le Gramian d'observabilité*

$$_{\alpha}W_o\left(0,t\right)=\left(\begin{array}{cc} t & \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \\ \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} & \frac{t^{2\alpha+1}}{\left[\Gamma(\alpha+1)\right]^2(2\alpha+1)} \end{array}\right)$$

alors

$$\det\left(_{\alpha}W_o\left(0,t\right)\right)=\frac{t^{2\alpha+2}}{\left[\Gamma\left(\alpha+1\right)\right]^2\left(2\alpha+1\right)}-\frac{t^{2\alpha+2}}{\left[\Gamma\left(\alpha+2\right)\right]^2}\neq 0,\forall t>0$$

le système est donc observable.
3)_ *La matrice d'observabilité est*

$$_{\alpha}O=\binom{C}{CA}=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$rang\left(_{\alpha}O\right)=2$$

Le système est donc observable.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons abordé et illustré de manière simple certains aspects d'une nouvelle théorie nommée *Contrôle des systèmes linéaires fractionnaires à temps continu.*

L'étude que nous avons mené dans ce travail est organisée en deux parties, nous avons commencé par rappeller la solution d'un système linéaire standard à temps continu ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes d'atteignabilité ; pour ensuite entamer l'objet de notre travail qu'est *la théorie des systèmes linéaires fractionnaires à temps continu* qui s'avère nouvelle et qui attire l'attention d'un grand nombre de chercheurs.

Lors de cette étude, nous avons débuté par dresser la solution du système suivie de l'étude du problème d'atteignabilité et de contrôlabilité où des conditions nécessaires et suffisantes sont établies ainsi qu'une comparaison entre ces deux notions est mise en évidence.

Cette étude nous a aussi permis de dégager une analyse sur le problème d'observabilité. On est parvenu à élaborer des conditions necessaires et suffisantes garantissant ce critère.

Tout au long de ce mémoire, une analogie entre un système linéaire standard et un système linéaire fractionnaire tous deux à temps continu a été faite, pour déduire que tous les résultats sur le contrôle des systèmes linéaires standards sont étendus aux systèmes linéaires fractionnaires. Malgré les developpements, certains axes méritent des réflexions plus approfondies et les perspectives demeurent nombreuses.

Bibliographie

[1] Y . Achdou Algèbre linéaire et analyse numérique matricielle (2005) .

[2] D . Andrei Polyanin and A. V. Manzhirov. Handbook of Intégral Equations (1998).

[3] P . Arena, R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto, Chaos in a Fractional Order.Duffing System, in : Proceedings ECCTD, Budapest, 1997,pp. 1259—1262

[4] R . L. Bagley, R.A. Calico, Fractional order state equations for the Control of Visco-Elastically Damped Structures, J. Guidance Control Dyn. 14 (1991) 304-311.

[5] M . Bettayeb and S. Djennoune. A note on the Controllability and the Observability of Fractional Dynamical Systems. Porto. Portugal. July 19.21 - 2006.

[6] B . Bonilla, M.Rivero and J.J.Trujilo. On systems of Linear Fractional Differential Equations with Constant Coefficients (2007) .

[7] D . Bouagada. Thèse de Doctorat. Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs (2007).

[8] F . M . Callier- C. A . Deoer. Linear System theory.

[9] K . S. Cole, Electric Conductance of Biological Systems, in Proc. Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol., Cold Spring Harbor, New York, 1993, pp. 107—116.

[10] C. Li, G. Chen, Chaos and Hyperchaos in the Fractional-order Rosslër Equations, Phys. A : Stat. Mech. Appl. 341 (2004) 55—61.

[11] D . W. Davidson, and R . H Cole, Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol and n-propanol, Journal of Chemical Physics 19(12), pp. 1484-1490, 1951

[12] V . Ditkine et A.Proundnikov. Transformations Intégrales et Calcul Opérationne

[13] N . Engheta, On Fractional Calculus and Fractional Multipoles in Electromagnetism, IEEE Trans. Antennas Propag. 44 (4) (1996) 554—566.

[14] L . Farina- S. Rinaldi. Positive Linear Systems Theory and Applications.

[15] F . R.Gantmacher.3. Théory of Matrix. Tomes 1 et 2 Dunod 1965.

[16] J . C. Gilles et M. Clique. La Représentation d'Etat pour l'Étude des Systèmes Dynamiques. Variables et équations d'états.Tome 1.

[17] R . Gorenflo and F.Mainardi. Fractional Calculus Integral and Differential Equations of fractional order (200) 223-276.

[18] S . Guermah, S. Djennoune , M. Bettayeb. Controllability and Observability of Linear Discrete-time Fractional-Order Systems.

[19] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, H.K. Qammer, Chaos in a Fractional Order Chua's System, IEEE Trans. CAS-I 42 (1995) 485—490.

[20] O. Heaviside, Electromagnetic Theory, Chelsea, New York, 1971.

[21] T. Kackzorek. FractionalL Positive Continuous-time Linear Systems and their Reachability. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,2008,Vol.18., No. 2, 223-228.

[22] T . Kaczorek and M. Bustowicz. Pointwise Completeness and Pointwise Dégeneracy of Linear Continuous-Time Fractrional Order Systems. (*Nov* 2008)

[23] T. Kaczorek. Vectors and Matrix in Automatics and Electrotechnics, WNT, Warszawa 1998.

[24] T . Kaplan, L.J. Gray, S.H. Liu, Self-affine Fractal Model for a Metal-electrolyte Interface, Phys. Rev. B 35 (10) (1987) 5379—5381.

[25] J . Lygeros. Lectures Notes on Linear System Theory.John Lygeros Automatic Control Laboratory ETH Zurich CH-8092, Zurich, Switzerland, November 2009.

[26] D . Matignon and B.d'Andréa- Novel, some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional différential systems (1996) .

[27] D . Matignon , N. B. d'Andrèa, P. Depalle and A. Oustaloup (1994). Viscothermal Losses in Wind Instruments : A Non-Integer Model, Academic Verlag, Berlin.

[28] D . Matignon, Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing, Computational Engineering in Systems and Application multiconference, vol. 2, IMACS, in : IEEE-SMC Proceedings, Lille, France, July 1996.

[29] C . A. Monje. Y. Chen. B. M. Vinagre. D. V. Fliu. Fractional-Order Systems and Controls. Fundamentals and Applications.

[30] D . Mozyrska and D.F.M.Torres. Minimal Modified Energy Control for Fractional Linear Control Systems with the Caputo Derivative (2010) .

[31] J . Munkhammar. Riemann-Liouville Fractional Derivatives and the Taylor-Riemann Series (2004).

[32] W . Murray Wonham . Linear multivariables control : A Geometric Approch (1978).

[33] J . Panos. Antsklis-Anthony N.Michel. A linear systems primer (2007).

[34] Y . Peng ., Guangming X. and Long W. (2003). Controllability of Linear Discrete-time Systems with Time-Delay in State, available at dean.pku.edu.cn/bksky/1999tzlwj/4.

[35] I . Podlubny. Fractional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering (1-82).

[36] Y . A. Rossikhin, M.V. Shitikova, Application of Fractional Derivatives to the Analysis of Damped Vibrations of Viscoelastic single mass system, Acta Mech. (1997).

[37] H . H Rosenbrock. State space and Multivariable Theory (1970) 1-34.

[38] J . Sabatier - O.P.Agrawal - J.A Tenreiro Macchado. Advaces in fractional calculus - theoritical developpements and applications in physics and engineering.

[39] J . Tenreiro Macchado - Applications of fractional calculus in engineering sciences. Benelux meeting (2011) 258-266.

[40] E . Trélat et T.Haberskorn. Cours de l'automatique - Master de Mathématiques, Université d'Orléans.

[41] A . Van Der Ziel, On the Noise Spectra of Semiconductor Noise and of Flicker Effects, Physica, 16 :359-372, 1950.

[42] B . M . Vinagre , Monje C. A. and Caldero A. J. (2002). Fractional order systems and fractional order actions, TutorialWorkshop 2 : Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 41st IEEE CDC, Las Vegas, USA.