UNIVERSTÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Thèse de Doctorat

Inégalités de Hardy et applications

Présentée par :
AZZOUZ Noureddine

Jury :

Professeur Senouci Abdelkader (U. de Tiaret)	Encadreur
Professeur Bendoukha Berrabah (U. de Mostaganem)	Co-Encadreur
Professeur Belaidi Benharrat (U. de Mostaganem)	Président
Professeur Dahmani Zoubir (U. de Mostaganem)	Examinateur
Professeur Mechab Mustapha (U. de Sidi Belabes)	Examinateur
Professeur Hakem Ali (U. de Sidi Belabes)	Examinateur

2016

UNIVERSTÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Thèse de Doctorat

Inégalités de Hardy et applications

Présentée par :

AZZOUZ Noureddine

Faculté de Tehnologie - Université Djillali Liabes de Sidi Belabbes

Laboratoire Informatique Mathématiques - Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon cher professeur Monsieur A. Senouci pour sa patience avec moi durant toutes ces années et pour tout ce qu'il a fait pour l'aboutissement de cette thèse.

Je remercie également mon co-encadreur Monsieur B. Bendoukha de m'avoir supporté malgré sa surcharge pédagogique et administrative.

Je remercie vivement Monsieur B. Belaidi de m'honorer en présidant le jury ainsi que Messieurs Z. Dahmani, M. Mechab et A. Hakem pour avoir accepté d'être membres du jury; sans oublier Messieurs A. Medeghri, O. Belhamiti et H. Belhakem qui m'ont été d'une aide précieuse.

Je voudrai aussi présenter ma gratitude à tous les professeurs qui ont contribué de près ou de loin à ma formation; je cite en particulier Messieurs A. Bensedik et M. Bouchekif à qui je souhaite bon rétablissement.

Je remercie mon ami et frère B. Halim pour son soutien.

DÉDICACE

Je dédie cette thèse à ma mère, mon père, mon épouse et mes enfants, mes frères et sœurs et leurs enfants … à toute la famille et amis proches et lointains.

Résumé : Dans les années trente fut établie une inégalité dite inégalité de Hardy [voir *{45}, {48}*] : pour $p > 1$ et $f \geq 0$ mesurable (arbitraire) on a

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}\right)^p x^{\alpha}\,dx \leq C \int_0^{\infty} f^p(x)\,x^{\alpha}\,dx\,, \quad (\mathcal{IH})$$

sous la condition $\alpha < p-1$. La constante $\left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$ est optimale (i.e. la plus petite possible).

On s'interesse à l'inégalité *(IH)* dans le cas $0 < p < 1$.qui n'est pas vérifiée pour f arbitraire positive et mesurable. Néanmoins elle l'est avec la condition supplémentaire de monotonie [pour $\alpha < p-1$]. La constante $\frac{p}{p-1-\alpha}$ est optimale.[Voir*{23}*].

On se basant sur le travail de *{87}* où *(IH)* est établie dans une classe de fonctions positives où la condition de monotonie a été remplacée par une autre plus faible :.

1) On reprend le travail de *{87}* en abordant le problème avec un changement relatif aux hypothèses qui permet de trouver une nouvelle constante et on montre qu'elle est optimale.

2) On établit un résutat analogue au précédent pour un opérateur de Hardy généralisé. Une constante optimale est précisée ainsi que la fonction qui permet d'aboutir à une égalité dans *(IH)* .

3) On étend le résultat à une inégalité de type *(IH)* où les poids x^{α} sont remplacés par des fonctions poids qui vérifient certaines conditions. La constante optimale est précisée ainsi que la fonction qui transforme l'inégalité en une égalité.

Dans une deuxième partie on considère deux exemples d'applicatons des inégalités de Hardy. Ensuite on établit deux inégalités-type de Hardy qu'on applique pour montrer l'équivalence des normes ($1 \leq \theta \leq \infty$) et quasi-normes ($0 < \theta < 1$) des espaces de Besov , $B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ défini via le module de continuité et $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ défini via les différences, avec $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$, $\sigma \in \mathbb{N}^*$ et deux paramètres de régularité [le paramètre classique l et une fonction v à variation lente].

Abstract : About the year thirty, an inequality called Hardy's inequality was proved [See *{45}, {48}*] : for $p > 1$ and an arbitrary measurable positive function f we have

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}\right)^p x^{\alpha}\,dx \leq C \int_0^{\infty} f^p(x)\,x^{\alpha}\,dx. \quad (\mathcal{IH})$$

with condition $\alpha < p-1$. $\left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$ is an optimal constant (the less possible).

If $0 < p < 1$ then *(IH)* is not true for arbitrary measurable positives functions f , but it is for non-negative non-increasing functions f with optimal constant $\frac{p}{p-1-\alpha}$ [See*{23}*].

In *{87}* inequality of type *(IH)* was proved under weaker assumptions on f but still of monotonicity type. The aim of this thesis is :

1) To establish the result of *{87}* differently which enable us to get a new constant which is optimal.

2) We prove an analogue result for a generalized Hardy operator. An optimal constant is obtained and we specify the function for which we get equality in *(IH)*.

3) We obtain conditions ensuring the validity of an analogue of inequality *(IH)* for the weighted Lebesgue spaces $L^p_u(\mathbb{R}^n)$ and $L^p_v(0,\infty)$.

In a second part of this thesis we give some examples of applications of Hardy's type inequalities. Then we establish two Hardy's type inequalities which we use to prove the equivalence of norms ($1 \leq \theta \leq \infty$) and quasi-norms ($0 < \theta < 1$) of Besov spaces $B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ defined via modulus of continuity and $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ defined via differences, with $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$, $\sigma \in \mathbb{N}^*$ and two parameters of regularities [the classical parameter l and a slowly varying function v].

Sommaire

Introduction

L'inégalité suivante :

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi\Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

où $a_m, b_n \in \mathbb{R}_+$ est connue sous le nom de « inégalité de Hilbert ». C'est elle qui fut à l'origine de la découverte par Godfrey-Harold Hardy de l'inégalité (I) ci-dessous qui porte son nom. Dans [***{49}*** **(G. Hardy 1915)**] a remarqué que la convergence de chacune des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\, A_n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{A_n}{n}\Big)^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{m+n}\ ;$$

implique celles des deux autres ; puis il montre dans [***{46} (G. H. Hardy 1919)***] pour $p=2$ et dans [***{44} (G. H. Hardy 1920)***] pour $p>1$ que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{A_n}{n}\Big)^p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \qquad \textit{(I)}$$

où $A_n := a_1 + \dots + a_n$. La constante $\big(\frac{p}{p-1}\big)^p$ est optimale *i.e.* la plus petite possible vérifiant l'inégalité.

La version continue (intégrale) apparait pour la première fois dans [***{45} (G. H. Hardy 1925)***] sous la forme :

$$\int_0^{\infty} \Big(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}\Big)^p\, dx \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^{\infty} f^p(x)\,dx \qquad \textit{(II)}$$

pour $p>1$ et $f \geq 0$ mesurable sur $(0,\infty)$ arbitraire. La constante $\big(\frac{p}{p-1}\big)^p$ est optimale.

La première inégalité type de Hardy avec poids pour $p>1$ apparait dans [***{48} (G. Hardy 1927)***] sous la forme :

$$\int_0^{\infty} \Big(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}\Big)^p x^{\alpha}\, dx \leq C \int_0^{\infty} f^p(x)\, x^{\alpha}\, dx. \qquad \textit{(III)}$$

Sous la condition $\alpha < p-1$, il existe $C>0$ telle que l'inégalité (III) soit vérifiée pour toute fonction $f \geq 0$ mesurable sur $(0,\infty)$, où $C = \big(\frac{p}{p-1-\alpha}\big)^p$ est une constante optimale (la plus petite possible).

Pour $0 < p < 1$ l'inégalité ***(III)*** n'est pas vérifiée pour f arbitraire positive mesurable sur $(0, \infty)$. Néanmoins elle l'est avec la condition supplémentaire de monotonie. Ceci a été montré dans [***{22} (Burenkov 1989)***]. Plus précisément pour $0 < p < 1$ et $\alpha < p-1$ il existe $C > 0$ telle que l'inégalité (III) soit valable dans la classe des fonctions positives décroissantes sur $(0, \infty)$ et si de plus $-1 < \alpha < p-1$ alors la constante optimale est égale à $\frac{p}{p-1-\alpha}$ [voir ***{23} (V. Burenkov 1992)***] .

Cette condition de monotonie a été remplacée par une autre plus faible [voir ***{89}*** **(Senouci et Tararykova 2008)**] , à savoir

$$f(x) \le \frac{M}{x}\left(\int_0^x f^p(t)\,t^{p-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad p.p.\, x \in (0, \infty)\,.$$

Ceci a été établi dans $\mathbb{R}^n$ pour l'opérateur de Hardy $\widetilde{H}_n$ suivant, défini sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ par

$$(\widetilde{H}_n f)(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\,. \qquad \textbf{\textit{(IV)}}$$

Dans la présente thèse d'abord on présente certaines notions et notations nécessaires pour ce travail.

Dans le chapitre-I sont signalés certains faits historiques liés à l'inégalité de Hardy ; puis on présente avec preuves quelques résultats principaux relatifs à cette inégalité dans l'espace de Lebesgue L^p , $p \ge 1$.

Le chapitre-II constitue le travail essentiel de cette thèse où l'on établit différents prolongement de l'inégalité ***(III)*** dans L^p , $0 < p < 1$:

Au §1 on trouve un préliminaire montrant la non validité de l'inégalité de Hardy pour $0 < p < 1$.

Dans le §2 on présente avec preuve l'inégalité de Hardy, avec le poids x^α , $\alpha \in \mathbb{R}$, établie pour la classe des fonctions décroissantes [dans ***{23}***].

Le §3 est consacré à l'inégalité-type de Hardy ***(III)*** où la condition de monotonie est remplacée par une autre plus faible [voir ***{86}***] qu'on abordera avec un changement relatif aux hypothèses, ce qui nous permettra de préciser la constante optimale. On donnera en outre des exemples de classes de fonctions qui vérifient cette condition de monotonie affaiblie.

Dans le §4 on étend le résultat précédent à un opérateur de Hardy généralisé H_w, où w est une fonction poids, définie sur $L_w^p(0,\infty)$ (espace de Lebesgue pondéré) par :

$$\big(H_w f\big)(r) := \frac{1}{W(r)} \int_0^r f(x)\ w(x)\ dx$$

avec $0 < W(r) := \int_0^r w(t)\,dt\ < \infty$ pour tout $r > 0$. Pour $w(x) \equiv 1$ on retrouvera l'opérateur usuel de Hardy. Ce travail a fait l'objet d'une publication [voir ***{4}***].

Dans le §5 on étend le résultat du §3 à une inégalité type de Hardy avec poids, où l'opérateur de Hardy $\widetilde{H}_n$ défini dans ***(IV)*** agit de $L_u^p(\mathbb{R}^n)$ vers $L_v^p(0,\infty)$, u et v étant des fonctions poids sur $\mathbb{R}^n$ et $(0,\infty)$ respectivement, soumises à certaines conditions. On montrera que la constante est optimale. Ce travail a fait l'objet d'une publication [voir ***{6}***].

Dans le 3ème chapitre on s'intéresse à certaines applications des inégalités-types de Hardy qui sont présentées :

a) Trace d'un espace de Sobolev ,
b) résolution d'une équation aux dérivées partielles ,
c) équivalence des normes (quasi-norme) pour les fonctions à variation lente dans les espaces de Nikolsky-Besov.

On commence par définir les espaces de Besov avec deux paramètres de régularité [*un paramètre de régularité classique $l > 0$ et une fonction à variation lente v comme deuxième paramètre de régularité*] :
$B_{p,\theta}^{l,v}(\mathbb{R}^n)$ via le module of continuité et $\widetilde{B}_{p,\theta}^{l,v}(\mathbb{R}^n)$ via les différences, où $1 \le p < \infty$, $0 < \theta \le \infty$ et $\sigma \in \mathbb{N}^*$.

On établira ensuite deux inégalités-type de Hardy (pour respectivement $0 < \theta < 1$ et $1 \le \theta < \infty$).

On montrera finalement l'équivalence des normes ($1 \le \theta \le \infty$) et quasi-normes ($0 < \theta < 1$) établissant ainsi l'identification $B_{p,\theta}^{l,v}(\mathbb{R}^n) = \widetilde{B}_{p,\theta}^{l,v}(\mathbb{R}^n)$ [travail en voie de finalisation pour publication ***{5}***].

A la fin on trouve un appendice où l'on reprend les résultats de la thèse en reécrivant les différentes inégalités de Hardy (ou type de Hardy) avec les normes (quasi-normes) au lieu des intégrales suivi d'une bibliographie assez détaillée.

Préliminaires et notations

1. ESPACES DE LEBESGUE

Soit w une fonction poids (une fonction positive mesurable) sur E ($E=\mathbb{R}^n$ou $E=(0,\infty)$). Pour $0<p\leq\infty$, l'espace de Lebesgue pondéré $L^p_w(E)$ est l'espace des fonctions mesurables sur E telles que

$$\|f\|_{L^p_w(E)} := \left(\int_E |f^p(x)|\, w(x)\ dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (0<p<\infty)$$

$$\|f\|_{L^\infty_w(E)} := \sup_{x\in E} |f(x)|\, w(x) \ < \infty \ .$$

$\mathcal{L}\left(L^p_u(E), L^p_v(F)\right)$ désignera l'espace des opérateurs linéaires continus de $L^p_u(E)$ vers $L^p_v(F)$, E et F étant $\mathbb{R}^n$ ou $(0,\infty)$.

$L\in\mathcal{L}\left(L^p_u(E), L^p_v(F)\right)$ est borné si et seulement si, il existe $C>0$ telle que $\forall\, f\in L^p_u(E)$

$$\int_F (Lf)^p(x)\ v(x)\ dx \leq C \ \int_E f^p(x)\ u(x)\ dx,$$

et dans ce cas la valeur optimale (la plus petite possible) de $C>0$ est la norme de L dans $\mathcal{L}\left(L^p_u(E), L^p_v(F)\right)$ *i.e.*

$$\|L\|_{L^p_u(E)\to L^p_v(F)} = \inf\left\{C>0 \ : \ \|Lf\|_{L^p_v(F)} \leq C\ \|f\|_{L^p_u(E)} \quad ,\ \forall\, f\in L^p_u(E)\right\}.$$

En particulier dans cette thèse on s'intéressera à :

1) L'opérateur usuel de Hardy H défini sur $L^p(0,\infty)$ par

$$(Hf)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt\ .$$

2) L'opérateur de Hardy généralisé noté H_w défini sur l'espace de Lebesgue pondéré $L^p_w(0,\infty)$ par

$$\left(H_w f\right)(r) := \frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)\ w(x)\ dx$$

où $0<W(r):=\int_0^r w(t)dt<\infty$ pour tout $r>0$. Notons que $H_1=H$.

3) L'opérateur de Hardy dans $\mathbb{R}^n$, noté $\widetilde{H}_n$, défini sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ par

$$(\widetilde{H}_n f)(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy$$

où B_r désigne la boule de centre zéro et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^n$ et $|B_r|$ sa mesure.

Rappelons que $|B_r| = r^n\, v_n$ où $v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ est le volume de la boule unité ; Γ étant la fonction d'Euler définie pour $x > 0$ par

$\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-x}\,dt$; on a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

En introduisant les coordonnées sphériques (ρ, ξ) dans $\mathbb{R}^n$, où $\rho = |x|$ et $\xi = \frac{x}{|x|} \in S_{n-1}$ (S_{n-1} désignant la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$), on a $\displaystyle\int_{S_{n-1}} d\xi = n\,v_n$ et pour $0 < r \leq +\infty$

$$\int_{B_r} f(x)\;dx = \int_0^r \int_{S_{n-1}} f(\rho\,\xi)\;\rho^{n-1}\;d\xi\,d\rho\;.$$

On note par $l^p := l^p(0, +\infty)$ l'espace des suites de nombres complexes telles que :

$$\|f\|_{l^p} := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (0 < p < \infty)$$

$$\|f\|_{l^\infty} := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \; < \infty\;.$$

On a les inégalités suivantes :

<u>Inégalité de Hölder :</u> si $1 \leq p \leq \infty$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

<u>a) cas discret :</u> si $a := (a_k)_{k\geq 0} \in l^p$ et $b := (b_k)_{k\geq 0} \in l^q$ alors $(a_k\,.\,b_k)_{k\geq 0} \in l^1$ et on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k\,.\,b_k| \;\leq \|a\|_{l^p}\,.\,\|b\|_{l^q}$$

<u>b) cas continu :</u> si $f \in L^p(E)$ et $g \in L^q(E)$ alors $f\,.\,g \in L^1(E)$ et on a

$$\int_E |f(x)\,.\,g(x)|\;dx \leq \|f\|_{L^p(E)}\,.\,\|g\|_{L^q(E)}.$$

Inégalité de Minkowski : $p \geq 1, a_k, b_k \in \mathbb{C}$

a) cas discrèt : si $a := (a_k)_{k\geq 0} \in l^p$ et $b := (b_k)_{k\geq 0} \in l^p$ alors $(a_k + b_k)_{k\geq 0} \in l^p$ et on a

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|a\|_{l^p} + \|b\|_{l^p}.$$

b) si $f, g \in L^p(\Omega)$ alors $f + g \in L^p(\Omega)$ et on a

$$\|f + g\|_{L^p(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)} \qquad (*)$$

c) inégalité intégrale :

Plus généralement si pour $A \subset F$ $f(.,.)$ mesurable sur $E \times A$ et $p.p.\ y \in A\ :\ f(.,y) \in L^p(E)$ alors $\left(\int_A f(.,y)\, dy \right) \in L^p(E)$ et on a

$$\left\| \int_A f(.,y)\, dy \right\|_{L^p(E)} \leq \int_A \|f(.,y)\|_{L^p(E)}\, dy \qquad (**)$$

2. ESPACES DE SOBOLEV

Définition 1** (cas l=1):* Etant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq \infty$ réel, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ [voir ***[20]] est constitué des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles qu'ils existent $g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega)$ (uniques) vérifiant

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \phi \quad , \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega) \quad i = 1, ..., n\ ;$$

où g_i désignent les dérivées faibles (au sens de Sobolev) et $C_0^{\infty}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. On note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \qquad et \qquad \nabla u = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, .., \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right) = grad\, u\ .$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)} ,$$

ou parfois de la norme équivalente (lorsque $1 \leq p < \infty$)

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} .$$

L'espace $H^1 := W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$(u,v)_{H^1} = (u,v) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \int_\Omega u\, v\, dx + \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right] dx \,,$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ alors $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2 : Pour tout entier $l \in \mathbb{N}^*$ on

$$W^{l,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall \alpha \text{ , il existe } g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi \;,\; \forall \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right| \right\}$$

où $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$ est un multi indice avec $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \, .. \, \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On posera alors $D^\alpha u = g_\alpha$. Sa norme est définie par

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

3. ESPACES DE BESOV

On aura besoin des notions suivantes

Définitions : *Soient $x\,; h \in \mathbb{R}^n$, f définie sur $\mathbb{R}^n$.*

1. *On appelle différence de pas h ; la fonction notée $\Delta_h f$ définie par*

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \;, \quad x \in \mathbb{R}^n \,.$$

2. *La différence d'ordre supérieur $\sigma \in \mathbb{N}^*$ est :*

$$\Delta_h^\sigma f = \Delta_h \Delta_h^{\sigma-1} f \;,$$

on a

$$(\Delta_h^\sigma f)(x) = \sum_{k=0}^{\sigma} (-1)^{\sigma-k} \binom{\sigma}{k} f(x + k\, h)$$

3. *on appelle p-module de continuité d'odre $\sigma \in \mathbb{N}^*$*

$$\omega_\sigma(f,t)_p = \sup_{h \in \mathbb{R}^n, |h| \leq t} \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \;, \quad t > 0.$$

Les espaces de Besov avec un paramètre de régularité classique $l>0$, sont définis à l'aide de différentes normes [voir *{ 102}*] dont :

Définitions : *soient* $1 \le p < \infty$, $0 < \theta \le \infty$, $\sigma \in \mathbb{N}^*$ *et* $0 < l < \sigma$ *:*

1) Espace de Besov $B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ ***via le p-module de continuité :***

$$B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|^{(1)(\sigma)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \right\}$$

où $0 < \theta < \infty$,

et $$B^l_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \ : \|f\|^{(1)(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} \frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l} < \infty \right\}$$

avec la norme $$\|f\|^{(1,\sigma)}_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|^{(1)(\sigma)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

2) Espace de Besov $\widetilde{B}^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ ***via les différences :***

$$\widetilde{B}^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|^{(2)(\sigma)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \right)^\theta \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \right\}$$

où $0 < \theta < \infty$,

et $$\widetilde{B}^l_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|^{(2)(\sigma)}_{b^l_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0} \frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} < \infty \right\}$$

avec la norme $$\|f\|^{(2,\sigma)}_{\widetilde{B}^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|^{(2)(\sigma)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

NB : les normes $\|f\|^{(2,\sigma)}_{\widetilde{B}^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ sont indépendantes de $\sigma \in \mathbb{N}^*$. Dans [*{24}*] on a montré que les quasi-nomes $\|f\|^{(1,\sigma)}_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ et $\|f\|^{(2,\sigma)}_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ sont équivalentes.

4. FONCTIONS À VARIATION LENTE

Nous aurons besoin ultérieurement de cette classe de fonctions qui contient les fonctions puissances, $\prod_{k=1}^n \left(\ln_k t\right)^{\alpha_k}$ où $\ln_k t = \ln\left(\ln_{k-1} t\right)$ et $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\exp\left(|\ln t|^\alpha\right)$ avec $\alpha \in (0,1)$, etc ...[voir par exemples *{13}*, *{83}* et *{88}*].

Une fonction positive mesurable b est dite à variation lente (à l'infini) si elle est définie sur un certain intervalle $[A,\infty)$ et pour tout $k>0$ [voir *{61}*] :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{b(k\,t)}{b(t)} = 1\ .$$

Cette limite est uniforme pour $k \in [a,b] \subset (0,\infty)$ et pour $A > 0$ assez grand b est localement bornée.

Cette notion de fonction b à variation lente peut être définie au voisinage d'un point quelconque $t_0 \in \mathbb{R}$ en exigeant à $b(t_0 - \frac{1}{t})$ d'être à variation lente à l'infini.

Comme exemple typique de telles fonctions on a les fonctions logarithmes et leurs itérations qui sont souvent utilisées comme poids dans les espaces de Lorentz et ceux de Besov.

Notation : Pour $F, G > 0$ on note $F \gtrsim G$ (resp. $F \lesssim G$) s'il existe $k > 0$ telle que $F \geq k\,G$ (resp. $F \leq k\,G$). On note $F \approx G$ si $G \lesssim F \lesssim G$.

Cette classe de fonctions possède un grand nombre de propriétés intéressantes dont :

Pour toute fonction b à variation lente on a $\forall\,\varepsilon > 0$ il existe $A > 0$ tel que :

i) $\forall k > 0 \quad : \quad (1-\varepsilon) \leq \frac{b(k\,t)}{b(t)} \leq (1+\varepsilon)$ *sur* $[B,\infty)$ *pour* $B > A$,

ii) $\forall\, x \in (A, +\infty) \qquad \displaystyle\int_0^x t^{\varepsilon-1}\, b(t)\ dt \approx x^{\varepsilon}\, b(x)$,

iii) $\forall\, x \in (A, +\infty) \qquad \displaystyle\int_x^\infty t^{-\varepsilon-1}\, b(t)\ dt \approx x^{-\varepsilon}\, b(x)$;

Notons que la propriété *i)* justifie l'appelation "variation lente à l'infini". Plus particulièrement une propriété caractéristique qui est souvent utilisée comme définition des fonctions à variation lente est la suivante [voir ***{27}*** et ***{34}***].

iv) *$\forall\,\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions monotones $g_\varepsilon(t)$ croissante et $g_{-\varepsilon}(t)$ décroissante telles que sur $[A,\infty)$ on a :*

$$t^{\varepsilon} b(t) \ \approx\ g_\varepsilon(t) \qquad \textit{et} \qquad t^{-\varepsilon}\ v(t) \ \approx\ g_{-\varepsilon}(t)\,.$$

Alors en s'inspirant du travail de (Neves 2002) [voir ***{75}***] sur les espaces Lorentz-Karamata avec poids (fonctions à variation lente) ainsi que celui de (Eryilmaz 2012) [voir ***{32}***] sur la composition pondérée d'opérateurs sur les espaces Lorentz-Karamata avec poids (fonctions à variation lente), considérons $A > 0$ assez grand et posons pour $t > 0$:

$$v(t) := v_b(t) := b\big(\max(A\,t\ ,\ \frac{A}{t})\big) = \begin{cases} b(\frac{A}{t}) & \text{si } t \le 1 \\ b(A\,t) & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$$

Propriétés : *si b est à variation lente , alors $v(t) := v_b(t)$ est à variation lente et*

1) $\forall k > 0$ *on a sur* $(0,\infty)$ *:* $\quad v(k\,t) \ \approx\ v(t)$,

2) $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\quad v_{b^\theta}(t) = v_b^\theta(t)$,

3) $\forall \varepsilon > 0$ *on a sur* $(0,\infty)$ *:*

$$t^\varepsilon v(t) \ \approx\ G_\varepsilon(t) \qquad \textit{et} \qquad t^{-\varepsilon}\, v(t) \ \approx\ G_{-\varepsilon}(t)$$

où G_ε et $G_{-\varepsilon}$ sont deux fonctions respectivement croissante (on notera $G_\varepsilon(t)\ \nearrow$) et décroissante ($G_{-\varepsilon}(t) \searrow$).

4) *pour tout $\varepsilon > 0$ on a :*

a) $\forall\, x > 0\ :\ \displaystyle\int_0^x t^{\varepsilon-1}\, v(t)\, dt \ \approx\ \sup_{0<t<x} t^\varepsilon\, v(t) \approx\ x^\varepsilon\, v(x)$

b) $\forall\, x > 0\ :\ \displaystyle\int_x^\infty t^{-\varepsilon-1}\, v(t)\, dt \ \approx\ \sup_{t>x} t^{-\varepsilon}\, v(t) \approx\ x^{-\varepsilon}\, v(x)$

voir ***Appendice 2*** pour la preuve.

chap. I : Inégalités classiques et « modernes » de Hardy dans l'espace Lp (p ≥ 1)

Le développement de l'inégalité de Hardy s'est fait en deux périodes :

1) La période (1906-1928) où l'on constate la contribution de plusieurs mathématiciens dont G.H.Hardy, E.Landau ,G.Polya , I.Schur et M. Ries. [voir ***[68]***] , ce qui a donné naissance aux inégalités de Hardy discrètes (voir §1.1), continues (voir §1.2), et avec poids x^{α} , $\alpha \in \mathbb{R}$ (voir §2).

2) À partir des années soixante grâce aux travaux de (P. Beesack 1961) [voir ***[8]***], qui a fait le lien entre la validité de l'inégalité de Hardy avec des fonctions de poids plus générales u, v et l'existence de solutions (positives) de l'équation ordinaire

$$\frac{d}{dx}\left(v(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-1}\right) + u(x)\, y^{p-1} = 0\,.$$

D'autres approches ont été développées pendant cette même période, dont celles de (Portnov 1964) [voir ***[81]***] et (Sysoeva 1965) [voir ***[98]***] qui consiste à déterminer le poids u connaissant v, ou inversement, de sorte à ce que l'inégalité de Hardy soit vérifiée ; et l'approche de (Kufner et Triebel 1978) [voir ***[63]***] qui expriment les poids u, v en fonction d'une fonction auxiliaire λ.

Mais la caractérisation des poids telle qu'elle est connue actuellement apparait avec (Talenti 1969) [voir ***[99]***] et (Tomaselli 1969)[voir ***[101]***] (voir §4 pour plus de détails).

1. INÉGALITÉ CLASSIQUE DE HARDY

1.1. INÉGALITÉ DE HARDY : CAS DISCRET

__Théorème I.1.1 :__ soient $p > 1$, $a_k \geq 0$ *et* $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p\ ; \qquad \textbf{(I)}$$

de plus la constante $B_{1.1} := \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ *est optimale.*

Preuve **[{47} (Hardy, Littlewood et Polya, INEQUALITIES 1934) p 240]** :

Soit $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et posons $\phi_n = \frac{A_n}{n}$ et $A_0 = \phi_0 = 0$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a pour $0 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned}\phi_n^p - \frac{p}{p-1}\phi_n^{p-1} a_n &= \phi_n^p - \frac{p}{p-1}\phi_n^{p-1}(A_n - A_{n-1}) \\ &= \phi_n^p - \frac{p}{p-1}\phi_n^{p-1}\left(n\,\phi_n - (n-1)\,\phi_{n-1}\right) \\ &= \phi_n^p\left(1 - \frac{n\,p}{p-1}\right) + \frac{(n-1)\,p}{p-1}\ \phi_n^{p-1}\phi_{n-1} \\ &= \phi_n^p\left(1 - \frac{n\,p}{p-1}\right) + \frac{(n-1)\,p}{p-1}\ \left(\phi_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\phi_{n-1}^p\right)^{\frac{1}{p}}\ ;\end{aligned}$$

or la moyenne (pondérée) géométrique étant inférieur à celle arithmétique i.e. $\left(a_1^{p_1}\,a_2^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2}} \leq \frac{p_1\,a_1 + p_2\,a_2}{p_1+p_2}$ on obtient (pour $p_1 = \frac{p-1}{p}$ et $p_2 = \frac{1}{p}$ alors $p_1 + p_2 = 1$)

$$\phi_n^p - \frac{p}{p-1}\phi_n^{p-1} a_n \leq \phi_n^p\left(1 - \frac{n\,p}{p-1}\right) + \frac{(n-1)\,p}{p-1}\left(\frac{\frac{p-1}{p}\phi_n^p + \frac{1}{p}\phi_{n-1}^p}{\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p}}\right).$$

On déduit

$$\begin{aligned}\phi_n^p - \frac{p}{p-1}\phi_n^{p-1} a_n &\leq \phi_n^p\left(1 - \frac{n\,p}{p-1}\right) + \frac{(n-1)}{p-1}\left((p-1)\,\phi_n^p + \phi_{n-1}^p\right) \\ &= \phi_n^p - \phi_n^p\,\frac{n\,p}{p-1} + (n-1)\,\phi_n^p + \frac{(n-1)}{p-1}\,\phi_{n-1}^p \\ &= \phi_n^p\,\frac{-np + np - n}{p-1} + \frac{(n-1)}{p-1}\,\phi_{n-1}^p\ ,\end{aligned}$$

d'où

$$\phi_n^p - \frac{p}{p-1}\phi_n^{p-1} a_n \leq \frac{1}{p-1}\left((n-1)\,\phi_{n-1}^p - n\,\phi_n^p\right).$$

En sommant (et en remarquant que les termes successifs à droite s'éliminent deux à deux) on déduit

$$\sum_{n=1}^{N}\phi_n^p - \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\phi_n^{p-1} a_n \leq -\frac{1}{p-1}\,N\,\phi_N^p \leq 0\ ,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{N}\phi_n^p\ \leq\ \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\phi_n^{p-1} a_n\ .$$

On déduit de l'inégalité de Holder que

$$\sum_{n=1}^{N}\phi_n^p \;\le\; \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\phi_n^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\phi_n^{p}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

d'où

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\phi_n^p\right)^{1-\frac{1}{p'}} \;\le\; \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n\right)^{\frac{1}{p}},$$

et par suite

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \;\le\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{N}a_n\,,$$

le résultat s'obtient par passage à la limite ($N \to \infty$) .

$\boxdot$

<u>Constante optimale</u> **[*{64}* (*Kufner, Maligranda et Persson 2006*)]**

Notons $B_{1.1} > 0$ la constante optimale. On a déjà d'après l'inégalité ***(I)*** $B_{1.1} \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$. Montrons que $B_{1.1} \ge \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ ce qui entrainera $B_{1.1} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$.

<u>Remarque :</u> $B_{1.1} = \sup\limits_{(a_n)} \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p}{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p}$ la suite étant prise sur l'ensemble des suites numériques à termes positives.

Considérons la suite numérique à terme général $b_n = n^{-\frac{1}{p}}$, $n \ge 1$.

La fonction $x \to x^{-\frac{1}{p}}$ est décroissante dans $(0,\infty)$ et par suite pour tout $x \in (k, k+1)$, $k = 1, ..., n$ on a $k^{-\frac{1}{p}} \ge x^{-\frac{1}{p}}$; on déduit

$$B_n := \sum_{k=1}^{n-1}k^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}k^{-\frac{1}{p}}\,dx$$
$$\ge \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}x^{-\frac{1}{p}}\,dx = \int_1^n x^{-\frac{1}{p}}\,dx$$
$$= \frac{1}{-\frac{1}{p}+1}\left(n^{-\frac{1}{p}+1}-1\right)$$

$$B_n \geq \frac{p}{p-1} n^{-\frac{1}{p}+1} \left(1 - \frac{1}{n^{-\frac{1}{p}+1}}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p &\geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1} \left(1 - \frac{1}{n^{-\frac{1}{p}+1}}\right)^p \\ &\geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1} \left(1 - \frac{p}{n^{-\frac{1}{p}+1}}\right) , \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(n^{-1} - p\, n^{\frac{1}{p}-2}\right) ;\end{aligned}$$

on déduit

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{B_n}{n}\right)^p \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{N} b_n^p - p \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{(-\frac{1}{p}+2)}}\right),$$

d'où

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{B_n}{n}\right)^p}{\sum_{n=1}^{N} b_n^p} \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(1 - \frac{p \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{(-\frac{1}{p}+2)}}}{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}\right) .$$

et par suite

$$B_{1.1} = \sup_{(a_n)} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p} \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(1 - \frac{p \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{(-\frac{1}{p}+2)}}}{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}\right) .$$

Lorsque $N \to +\infty$, la série $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{(-\frac{1}{p}+2)}}$ converge et $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to +\infty$ d'où :

$$B_{1.1} \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p ;$$

ce qui confirme que la constante $B_{1.1} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale.

$\boxdot$

1.2. INÉGALITÉ DE HARDY : CAS CONTINU (INTÉGRAL)

Théorème I.1.2 : *soient $p > 1$ et soit $f(x) \geq 0$ mesurable sur $(0, \infty)$; alors on a*

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p\,dx .$$

La constante $B_{1.2} := \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale.

***<u>Preuve</u>* [{68} (Kufner, Maligranda et Persson 2006)]** : Posons pour tout $x > 0$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,,$$

et notons que pour presque tout $x \in (0,\infty)$

$$\frac{dF^p(x)}{dx} = p\,F^{p-1}(x)\,f(x)\,.$$

Pour $0 < a, A < \infty$ arbitraires on a

$$\int_a^A \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^p\,dx = -\frac{1}{p-1}\int_a^A F^p(x)\,\frac{d(x^{-p+1})}{dx}\,dx\,,$$

alors en intégrant par partie on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^A \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^p\,dx &= -\frac{A^{1-p}\,F^p(A)}{p-1} + \frac{a^{1-p}\,F^p(a)}{p-1} + \frac{1}{1-p}\int_a^A x^{1-p}\,\frac{d\,F^p(x)}{dx}\,dx \\ &\le \frac{a^{1-p}\,F^p(a)}{p-1} + \frac{p}{p-1}\int_a^A \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^{p-1} f(x)\,dx\,. \end{aligned} \qquad \textit{(I,1)}$$

D'autre part en vertu de l'inégalité de Hölder on a

$$\int_a^A \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^{p-1} f(x)\,dx \le \Big(\int_a^A f^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^A \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^p\,dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \qquad \textit{(I,2)}$$

Considérons maintenant β telque $0 < a < \beta < A$ et appliquons les inégalités ***(I,1)*** et ***(I,2)*** à $F(x) - F(a)$ au lieu de $F(x)$:

$$\int_a^A \Big(\frac{F(x)-F(a)}{x}\Big)^p\,dx \le \frac{p}{p-1}\Big(\int_a^A f^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^A \Big(\frac{F(x)-F(a)}{x}\Big)^p\,dx\Big)^{1-\frac{1}{p}}$$

d'où

$$\Big(\int_a^A \Big(\frac{F(x)-F(a)}{x}\Big)^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{p-1}\Big(\int_a^A f^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}};$$

et à par suite

$$\Big(\int_\beta^A \Big(\frac{F(x)-F(a)}{x}\Big)^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{p-1}\Big(\int_0^\infty f^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans cette dernière inégalité faisons d'abord tendre a vers zero ($a \to 0$) et remarquons que $F(a) \to 0$; ensuite on fait tendre A vers l'infini ($A \to +\infty$) et $\beta \to 0^+$.

$\boxdot$

***Constante optimale* : [{47} (Hardy, Littlewood et Polya, INEQUALITIES 1934)**

Soit une constante arbitraire $C > 0$ telle que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \le C \int_0^\infty f^p(x)\,dx.$$

Pour que $B_{1.2} := \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ soit optimale (*la plus petite possible*) montrons que $C \ge \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$. Si f est non identiquement nulle on a

$$C \ge \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx}{\int_0^\infty f^p(x)\ dx} := \frac{N}{D}.$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ telle que $\varepsilon < p-1$ (alors $-\frac{1+\varepsilon}{p}+1>0$) et considérons dans l'inégalité précédente la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} & \text{si } x \in [1,\infty) \end{cases}$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} N &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x 1\,dt\right)^p dx + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x t^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\,dt\right)^p dx \\ &= 1 + \frac{1}{\left(-\frac{1+\varepsilon}{p}+1\right)^p}\int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}dx \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon\left(-\frac{1+\varepsilon}{p}+1\right)^p}\ ; \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} D &= \int_0^1 1\ dx + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\right)^p dx \\ &= 1 + \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\ dx \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon}\ ; \end{aligned}$$

d'où

$$C \geq \frac{1+\frac{1}{\varepsilon\,\left(-\frac{1+\varepsilon}{p}+1\right)^p}}{1+\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon+\frac{1}{\left(-\frac{1+\varepsilon}{p}+1\right)^p}}{\varepsilon+1},$$

en faisant $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$C \geq \frac{1}{\left(-\frac{1}{p}+1\right)^p} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \;;$$

ce qui implique que $B_{1.2} := \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est la plus petite possible (optimale) vérifiant l'inégalité.

$\boxdot$

Remarque :

on ne peut passer sans présenter une élégante preuve du théorème précédent due à Ingham [voir ***{47}*** p243].

Preuve 2 [Ingham] : On a pour $x > 0$ par un simple changement de variable

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = \int_0^1 f(t\,x)\,dt.$$

d'où en utilisant l'inégalité intégrale de Minkowski ***(**)*** en notant $f(t\,x) = \tilde{f}(t,x)$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^x f(s)\,ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(t\,x)\,dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\| \int_0^1 \tilde{f}(t,.)\,dt \right\|_{L^p(0,\infty)} \\ &\leq \int_0^1 \left\| \tilde{f}(t,.) \right\|_{L^p(0,\infty)} dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(t\,x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dt\;;\end{aligned}$$

par un changement de variable « inverse » on aura

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^x f(s)\,ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(s)^p \frac{ds}{t}\right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&= \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}}\,dt \times \left(\int_0^\infty f(s)^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{-\frac{1}{p}+1} \times \left(\int_0^\infty f(s)^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{p}{p-1} \times \left(\int_0^\infty f(s)^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \quad .
\end{aligned}
$$

$\boxdot$

2. INÉGALITÉ DE HARDY AVEC POIDS (FONCTION PUISSANCE)

On a le résultat suivant de (G. Hardy 1927) [voir ***{43}***]

> ***<u>Théorème I.2 :</u>*** *Soient $p \geq 1$ et $\alpha < p-1$. Pour toute fonction f positive et mesurable sur $(0,\infty)$ on a :*
> $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)\;x^\alpha\,dx$$
> *et si $-1 < \alpha < p-1$ alors la constante $B_2 := \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$ est optimale.*

<u>Preuve</u> **: [*{67} (Kufner, Maligranda et Persson 2007) p 24*]**

Dans le même esprit de la preuve de Ingham, procédons au changement de variable $t = x\,s$ ($dt = x\,ds$) puis utilisons l'inégalité intégrale de Minkowski en notant $f(x\,s) = \tilde{f}(x,s)$:

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left\| \int_0^1 \tilde{f}(x,s)\,ds \right\|_{L^p_{x^\alpha}(0,\infty)} \\
&\leq \int_0^1 \left\|\tilde{f}(x,s)\right\|_{L^p_{x^\alpha}(0,\infty)} ds \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\infty \tilde{f}^p(x,s)\;x^\alpha\,dx\right)^{\frac{1}{p}} ds \;;
\end{aligned}
$$

encore une fois le changement de variable $t = x\,s$ $\left(x = \frac{t}{s}\right.$ et $\left.dx = \frac{dt}{s}\right)$ en tenant compte du fait que $-\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{p} + 1 > 0$ (car $\alpha < p-1$) :

$$\begin{aligned}
\Big(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx\Big)^{\frac{1}{p}} &\le \int_0^1 \Big(\int_0^\infty f^p(t)\ t^\alpha s^{-\alpha}\ \frac{dt}{s}\Big)^{\frac{1}{p}} ds \\
&\le \int_0^1 \Big(\int_0^\infty f^p(t)\ t^\alpha\ dt\Big)^{\frac{1}{p}}\ s^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{1}{p}}\,ds \\
&= \Big(\int_0^1 s^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{1}{p}}\,ds\Big)\Big(\int_0^\infty f^p(t)\ t^\alpha\ dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{-\frac{\alpha}{p}-\frac{1}{p}+1}\ s^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{1}{p}+1}\Big|_0^1 \Big(\int_0^\infty f^p(t)\ t^\alpha\ dt\Big)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\Big(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1-\alpha}\Big(\int_0^\infty f^p(t)\ t^\alpha\ dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Constante optimale **: [*{67} (Kufner, Maligranda et Persson 2007) p 24*]**

Soit $C>0$ telle que

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx \le C\ \int_0^\infty f^p(x)\ x^\alpha\ dx\ ,$$

montrons que $C \ge B_2 := \big(\frac{p}{p-1-\alpha}\big)^p$. Notons que si $f \neq 0$ on a

$$C \ge \frac{\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx}{\int_0^\infty f^p(x)\ x^\alpha\ dx} := \frac{N}{D}\,.$$

Rappelons que $-1<\alpha<p-1$ donc $\alpha+1>0$ et $-\alpha+p-1>0$; on choisi alors $\varepsilon>0$ telle que $-\alpha+p-1>\varepsilon>0$ (alors $-\frac{\alpha}{p}-\frac{1+\varepsilon}{p}+1>0$) et considérons la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in(0,1) \\ x^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{1+\varepsilon}{p}} & \text{si } x\in[1,\infty)\ . \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^x 1\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx + \int_1^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x t^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{1+\varepsilon}{p}}\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx \\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{\big(-\frac{\alpha}{p}-\frac{1+\varepsilon}{p}+1\big)^p}\int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}dx \\
&= \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\varepsilon\ \big(-\frac{\alpha}{p}-\frac{1+\varepsilon}{p}+1\big)^p}\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \int_0^1 1 \times x^\alpha \, dx + \int_1^\infty (x^{-\frac{\alpha}{p} - \frac{1+\varepsilon}{p}})^p \, x^\alpha \, dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 + \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon} \, dx \\ &= \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\varepsilon} \, ; \end{aligned}$$

d'où

$$C \geq \frac{\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\varepsilon\left(-\frac{\alpha}{p} - \frac{1+\varepsilon}{p} + 1\right)^p}}{\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha+1} + \frac{1}{\left(-\frac{\alpha}{p} - \frac{1+\varepsilon}{p} + 1\right)^p}}{\frac{\varepsilon}{\alpha+1} + 1},$$

en faisant $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$C \geq \frac{1}{\left(-\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{p} + 1\right)^p} = \left(\frac{p}{-\alpha - 1 + p}\right)^p \, ;$$

ce qui implique que $B_2 := \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$ est la plus petite possible (optimale) vérifiant l'inégalité.

$\boxdot$

Corollaire I.2.1 ($\alpha = 0$) : *Soit $p > 1$, alors pour toute fonction f positive mesurable sur $(0, \infty)$ on a :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt\right)^p \, dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x) \, dx$$

et la constante $B_{2.1} := \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale.

NB : on retrouve ainsi l'inégalité classique de Hardy (***théorème*** *I.1.2*). avec la constante optimale $B_{2.1} = B_{1.2} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$.

3. UNE INÉGALITÉ DE HARDY DANS $\mathbb{R}^n$

On s'interesse à l'opérateur de Hardy $\widetilde{H}_n$ défini pour toute fonction $f \geq 0$ mesurable sur $\mathbb{R}^n$ par

$$(\widetilde{H}_n f)(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\, dy.$$

Théorème I.3 : *Soient $p \geq 1$ et $\alpha < n\,p - 1$; alors pour toute fonction f positive mesurable sur $\mathbb{R}^n$ on a :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\, dy\right)^p r^\alpha \, dr \leq \left(\frac{n\,p}{n\,p - 1 - \alpha}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x) \, |x|^{\alpha - n + 1} \, dx$$

et si $-1<\alpha<np-1$ *alors la constante* $B_3=\left(\frac{np}{np-1-\alpha}\right)^p$ *est optimale.*

Preuve :

En introduisant les coordonnées sphériques (ρ,ξ) dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$$(\widetilde{H}_n f)(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy = \frac{1}{v_n\, r^n}\int_0^r \int_{S_{n-1}} f(\rho\,\xi)\,\rho^{n-1}\,d\xi\,d\rho\,.$$

En posant $g(\rho) := \int_{S_{n-1}} f(\rho\,\xi)\,d\xi$ on aura

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\Big)^p r^\alpha\,dr &= \int_0^\infty \Big(\frac{1}{v_n\,r^n}\int_0^r g(\rho)\,\rho^{n-1}\,d\rho\Big)^p r^\alpha\,dr\\ &= \frac{1}{v_n^p}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{r}\int_0^r g(\rho)\,\rho^{n-1}\,d\rho\Big)^p r^{\alpha-np+p}\,dr\,.\end{aligned}$$

Rappelons l'inégalité de Hardy du ***théorème*** *I.2* :

Si $\beta<p-1$ *; pour tout* $h\geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *:*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{r}\int_0^r h(\rho)\,d\rho\Big)^p r^\beta\,dr \leq \Big(\frac{p}{p-\beta-1}\Big)^p \int_0^\infty h^p(r)\,r^\beta\,dr\,.$$

Pour $\beta=\alpha-np+p$, ayant $\alpha<n\,p-1$, on déduit que $\beta<p-1$ et par suite pour $h(\rho)=g(\rho)\,\rho^{n-1}$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{r}\int_0^r g(\rho)\,\rho^{n-1}d\rho\Big)^p r^{\alpha-np+p}\,dr &\leq \Big(\frac{p}{-\alpha+np-1}\Big)^p \int_0^\infty g^p(r)\,r^{(n-1)p}\,r^{\alpha-np+p}\,dr\\ &= \Big(\frac{p}{-\alpha+np-1}\Big)^p \int_0^\infty g^p(r)\,r^\alpha\,dr\,;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\Big)^p r^\alpha\,dr &\leq \frac{1}{v_n^p}\Big(\frac{p}{-\alpha+np-1}\Big)^p \int_0^\infty g^p(r)\,r^\alpha\,dr\\ &= \frac{1}{v_n^p}\Big(\frac{p}{-\alpha+np-1}\Big)^p \int_0^\infty \Big(\int_{S_{n-1}} f(\rho\,\xi)\,d\xi\Big)^p r^\alpha\,dr\end{aligned}$$

D'autre part, si $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ alors on a en vertu de l'inégalité de Holder

$$\begin{aligned}\Big(\int_{S_{n-1}} f(\rho\,\xi)\,d\xi\Big) &\leq \Big(\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\,\xi)\,d\xi\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{S_{n-1}} 1^{p'}\,d\xi\Big)^{\frac{1}{p'}}\\ &= (n\,v_n)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\,\xi)\,d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}\quad,\end{aligned}$$

et on déduit

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\right)^p r^\alpha\,dx \le \frac{1}{v_n^p}(n\,v_n)^{p-1}\left(\frac{p}{-\alpha+np-1}\right)^p \int_0^\infty \left(\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\xi)\,d\xi\right) r^\alpha\,dr$$

$$= \frac{n^{p-1}}{v_n}\left(\frac{p}{-\alpha+np-1}\right)^p \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} f^p(\rho\xi)\,r^{\alpha-n+1}\,r^{n-1}d\xi\,dr$$

$$= \frac{1}{n\,v_n}\left(\frac{n\,p}{-\alpha+np-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\,|x|^{\alpha-n+1}\,dx \qquad .$$

$\boxdot$

<u>Constante optimale :</u>

Soit $C > 0$ telle que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\right)^p r^\alpha\ dr \le C\ \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\ |x|^{\alpha-n+1}\ dx\ ,$$

montrons que $C \ge B_3 := \frac{1}{n\,v_n}\left(\frac{n\,p}{n\,p-1-\alpha}\right)^p$. Si $f \neq 0$ on a

$$C \ge \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\right)^p r^\alpha\ dr}{\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\ |x|^{\alpha-n+1}\ dx} := \frac{N}{D}\,.$$

Etant donné que $-\alpha+n\,p-1>0$, choisissons $\frac{-\alpha+n\,p-1}{n} > \varepsilon > 0$ et considérons dans l'inégalité précédente la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_1 \\ |x|^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{n\,\varepsilon+1}{p}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1 \end{cases} \quad .$$

On a

$$N = \int_0^\infty \left(\frac{1}{v_n\,r^n}\int_{B_r} 1\,dy\right)^p r^\alpha\,dr \qquad + \int_1^\infty \left(\frac{1}{v_n\,r^n}\int_{B_r} |y|^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{n\varepsilon+1}{p}}\,dy\right)^p r^\alpha\,dr$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$N = \int_0^1 \left(\frac{1}{v_n r^n}\int_0^r \int_{S_{n-1}} 1\, \rho^{n-1}\, d\xi\, d\rho\right)^p r^\alpha\, dr$$

$$+ \int_1^\infty \left(\frac{1}{v_n r^n}\int_0^r \int_{S_{n-1}} \rho^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{n\varepsilon+1}{p}}\, \rho^{n-1} d\xi\, d\rho\right)^p r^\alpha\, dr$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{n\, v_n}{v_n r^n} \times \int_0^r \rho^{n-1} d\rho\right)^p r^\alpha\, dr + \int_1^\infty \left(\frac{n\, v_n}{v_n r^n} \times \int_0^r \rho^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{n\varepsilon+1}{p}+n-1}\, d\rho\right)^p r^\alpha\, dr \quad ;$$

or $\frac{-\alpha+np-1}{n} > \varepsilon > 0$ on déduit $-\frac{\alpha}{p} - \frac{n\varepsilon+1}{p} + n > 0$ et par suite

$$N = \int_0^1 \left(\frac{n}{r^n} \times \frac{r^n}{n}\right)^p r^\alpha\, dr + \int_1^\infty \left(\frac{n}{r^n} \times \frac{r^{-\frac{\alpha}{p}-\frac{n\varepsilon+1}{p}+n}}{-\frac{\alpha}{p} - \frac{n\varepsilon+1}{p} + n}\right)^p r^\alpha\, dr$$

$$= \int_0^1 r^\alpha\, dr \quad + \quad \left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p} - \frac{n\varepsilon+1}{p} + n}\right)^p \int_1^\infty r^{-\alpha-n\varepsilon-1}\, r^\alpha\, dr \quad .$$

Pour $\alpha > -1$ on aura

$$N = \frac{1}{\alpha+1} \quad + \quad \frac{1}{n\varepsilon}\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p} - \frac{n\varepsilon+1}{p} + n}\right)^p .$$

D'autre part

$$D = \int_{B_1} |x|^{\alpha-n+1}\, dx \quad + \quad \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |x|^{-\alpha-n\varepsilon-1}\, |x|^{\alpha-n+1}\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{S_{n-1}} r^{\alpha-n+1}\, r^{n-1} d\chi\, dr \quad + \quad \int_1^\infty \int_{S_{n-1}} r^{-n\varepsilon-1-n+1}\, r^{n-1} d\chi\, dr$$

$$= n\, v_n \int_0^1 r^\alpha\, dr \quad + \quad n\, v_n \int_1^\infty r^{-n\varepsilon-1}\, dr$$

$$= \frac{n\, v_n}{\alpha+n} \quad + \quad \frac{v_n}{\varepsilon}\, ;$$

d'où

$$C \geq \frac{\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{n\,\varepsilon}\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p}-\frac{n\,\varepsilon+1}{p}+n}\right)^p}{\frac{n\,v_n}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon}} = \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha+n} + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p}-\frac{n\,\varepsilon+1}{p}+n}\right)^p}{\varepsilon\,\frac{n\,v_n}{\alpha+n} + v_n} \quad ,$$

en faisant $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$C \geq \frac{1}{n\,v_n}\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p}-\frac{1}{p}+n}\right)^p = \frac{1}{n\,v_n}\left(\frac{n\,p}{-\alpha-1+n\,p}\right)^p ;$$

ce qui implique que $B_3 := \frac{1}{n\,v_n}\left(\frac{n\,p}{-\alpha-1+n\,p}\right)^p$ est optimale.

$\boxdot$

Remarquons que pour $n=1$ et f définie sur $(0,\infty)$ on obtient l'opérateur usuel de Hardy i.e.

$$(\widetilde{H}_1 f)(r) = (Hf)(r) := \frac{1}{r}\int_0^r f(y)\,dy.$$

Corollaire <u>I.3.1 (n=1) :</u> *Soient $p > 1$ et $\alpha < p-1$; alors pour toute fonction f positive mesurable sur $(0,\infty)$ on a :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{r}\int_0^r f(y)\,dy\right)^p r^\alpha\,dr \leq B_{3.1}\int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx$$

et si $-1 < \alpha < p-1$ alors la constante $B_{3.1} := \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$ est optimale.

<u>NB :</u> on retrouve ainsi l'inégalité de Hardy pondérée (***théorème** I.2*). avec la constante optimale $B_{3.1} = B_2 = \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$.

4. INÉGALITÉ « MODERNE » DE HARDY

Une nouvelle approche est abordée dans les années soixante dix ; celle d'une inégalité plus générale dite « type de Hardy » où l'on se pose la question suivante :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur $(p\ ;\ u, v)$ où $p > 0$, u *et* v désignent respectivement un paramètre et des fonctions poids sur $(0,+\infty)$ tels que :

Il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \geq 0$ mesurable on ait

$$\boxed{\Big(\int_0^{\infty}\Big(\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \;\le\; C\,\Big(\int_0^{\infty} f^p(x)\,v(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}}$$

La réponse pour $p > 1$ apparait dans les travaux distincts de (Talenti 1969), (Tomaselli 1969) et (B. Muckenhoupt 1972) [voir ***{99} , {101}*** et ***{74}*** respectivement] :

> ***Théorème I.4*** *: Soit $p > 1$. Il existe $B_4 > 0$ telle que l'inégalité*
>
> $$\int_0^{\infty}\Big(\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p u(x)\,dx \;\le\; B_4\int_0^{\infty} f^p(x)\,v(x)\,dx \qquad \textbf{(I,3)}$$
>
> *ait lieu $\forall\, f \ge 0$ mesurable , si et seulement si :*
>
> $$A := \sup_{r>0}\Big(\int_r^{\infty} u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^r v^{1-p'}(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}} < \infty\ ;$$
>
> *si B_4 est optimale alors $B_4 \le p\,(p')^{p-1}A^p$.*

Preuve **: [*{67} (Kufner, Maligranda et Persson 2007) p 39*]**

1) ***Nécessité :*** supposons l'inégalité ***(I,3)*** vraie, pour tout $f \ge 0$ mesurable non identiquement nulle et pour tout $r > 0$ posons $f_r = f\,\chi_{(0,r)}$:

$$\begin{aligned}\Big(\int_r^{\infty} u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^r f(t)\,dt\Big) &= \Big(\int_r^{\infty}\Big(\int_0^r f_r(t)\,dt\Big)^p u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \Big(\int_0^{\infty}\Big(\int_0^x f_r(t)\,dt\Big)^p u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\ ;\end{aligned}$$

on déduit d'après ***(I,3)***

$$\begin{aligned}\Big(\int_r^{\infty} u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^r f(t)\,dt\Big) &\le\; C\,\Big(\int_0^{\infty} f_r^p(x)\,v(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &=\; C\,\Big(\int_0^{r} f^p(x)\,v(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le\; C\,\Big(\int_0^{\infty} f^p(x)\,v(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

On a donc pour tout $f \ge 0$ mesurable

$$\Big(\int_r^{\infty} u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\frac{\big(\int_0^r f(t)\,dt\big)}{\|f\|_{L_v^p(0,\infty)}} \le\; C$$

d'où

$$C \geq \Big(\int_r^\infty u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \sup_{\|f\|_{L^p_v(0,\infty)}} \frac{\big(\int_0^r f(t)\,dt\big)}{\|f\|_{L^p_v(0,\infty)}}$$

$$= \Big(\int_r^\infty u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \sup_{\|f\|_{L^p_v(0,\infty)}} \frac{\int_0^\infty f(t)\,\chi_{(0,r)}\,dt\big)}{\|f\|_{L^p_v(0,\infty)}} \ .$$

Sachant que le dual de $L^p_v(0,\infty)$ est $L^{p'}_{v^{1-p'}}(0,\infty)$ on obtient

$$C \geq \Big(\int_r^\infty u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \ \|\chi_{(0,r)}\|_{L^{p'}_{v^{1-p'}(0,\infty)}}$$

$$= \Big(\int_r^\infty u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \ \big(\int_0^\infty \chi^{p'}_{(0,r)}(x)\,v^{1-p'}\,dx\big)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \Big(\int_r^\infty u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \ \big(\int_0^r v^{1-p'}\,dx\big)^{\frac{1}{p'}} \ .$$

et cela $\forall\, r > 0$; on déduit alors

$$\sup_{r>0}\Big(\int_r^\infty u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \ \big(\int_0^r v^{1-p'}\,dx\big)^{\frac{1}{p'}} \ \leq \ C \ < \ \infty.$$

2) ***<u>Suffisance :</u>*** supposons

$$A := \sup_{r>0}\Big(\int_r^\infty u(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^r v^{1-p'}(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \ < \infty \ .$$

Posons

$$h(x) := \Big(\int_0^x v^{1-p'}(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{pp'}}$$

et notons que

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_0^x v^{1-p'}(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{p'}} = \frac{1}{p'}\ v^{1-p'}(x)\Big(\int_0^x v^{1-p'}(t)\,dt\Big)^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p'}\ v^{-\frac{p'}{p}}(x)\ h^{-p'}(x),$$

alors en intégrant on aura

$$\int_0^x v^{-\frac{p'}{p}}(s)\,h^{-p'}(s)\ ds = p'\ \Big(\int_0^x v^{1-p'}(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{p'}}. \qquad \textit{(I,4)}$$

Par application de l'inégalité de Hôlder on a :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x f(t)v^{\frac{1}{p}}(t)h^1(t)\ .\ v^{-\frac{1}{p}}(t)h^{-1}(t)\ dt$$

$$\leq \big[\int_0^x f^p(t)v(t)h^p(t)\ dt\big]^{\frac{1}{p}}.\ \big[\int_0^x v^{-\frac{p'}{p}}(t)h^{-p'}(t)\ dt\big]^{\frac{1}{p'}}\ ,$$

d'où

$$\int_0^\infty \left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^p u(x)\,dx \leq \int_0^\infty \int_0^x f^p(t)v(t)h^p(t)\,dt \,.\left[\int_0^x v^{-\frac{p'}{p}}(s)h^{-p'}(s)\,ds\right]^{\frac{p}{p'}} u(x)\,dx$$
$$= \int_0^\infty \int_0^x f^p(t)v(t)h^p(t)\left[\int_0^x v^{-\frac{p'}{p}}(s)h^{-p'}(s)\,ds\right]^{p-1} u(x)\,dt\,dx\,.$$

En appliquant le théorème de Fubini :

$$\int_0^\infty \left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^p u(x)\,dx \leq \int_0^\infty \int_t^\infty f^p(t)v(t)h^p(t) \quad \left[\int_0^x v^{-\frac{p'}{p}}(s)h^{-p'}(s)\,ds\right]^{p-1} u(x)\,dx \quad dt$$
$$= \int_0^\infty f^p(t)v(t)h^p(t) \quad \int_t^\infty \left[\int_0^x v^{-\frac{p'}{p}}(s)h^{-p'}(s)\,ds\right]^{p-1} u(x)\,dx \quad dt\,.$$

On utilise *(I,4)*

$$\int_0^\infty \left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^p u(x)\,dx \leq (p')^{p-1} \int_0^\infty f^p(t)v(t)h^p(t) \quad \int_t^\infty \left(\int_0^x v^{1-p'}(t)\,dt\right)^{\frac{p-1}{p'}} u(x)\,dx \quad dt\,. \qquad \textit{(I,5)}$$

D'autre part on a

$$A := \sup_{r>0}\left(\int_r^\infty u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

d'où

$$\left(\int_r^\infty u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq A\,, \quad \forall r > 0\,.$$

Ceci donne $\forall r > 0$

$$\left(\int_0^r v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{\frac{p-1}{p'}} \leq \frac{A^{p-1}}{\left(\int_r^\infty u(x)\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}}\,; \qquad \textit{(I,6)}$$

et $\forall r > 0$

$$\left(\int_r^\infty u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{A}{\left(\int_0^r v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}}\,; \qquad \textit{(I,7)}$$

alors *(I,6)* appliquée dans *(I,5)* donne

$$\int_0^\infty \left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^p u(x)\,dx \leq A^{p-1}\,(p')^{p-1} \int_0^\infty f^p(t)v(t)h^p(t) \int_t^\infty \left(\int_x^\infty u(s)\,ds\right)^{\frac{1-p}{p}} u(x)\,dx \quad dt. \qquad \textit{(I,8)}$$

En Notant que

$$\Big(\int_x^\infty u(s)\,ds\Big)^{\frac{1-p}{p}} u(x) = \Big(\int_x^\infty u(s)\,ds\Big)^{\frac{1}{p}-1} u(x) = -p\,\frac{d}{dx}\Big(\int_x^\infty u(s)\,ds\Big)^{\frac{1}{p}}$$

(I,8) devient

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big[\int_0^x f(t)\,dt\Big]^p u(x)\;dx &\le A^{p-1}\;(p')^{p-1}\;\int_0^\infty f^p(t)v(t)h^p(t)\;\int_t^\infty -p\,\frac{d}{dx}\Big(\int_x^\infty u(s)\,ds\Big)^{\frac{1}{p}}\,dx\quad dt \\ &= p\;A^{p-1}\;(p')^{p-1}\;\int_0^\infty f^p(t)v(t)h^p(t)\;\Big(\int_t^\infty u(s)\,ds\Big)^{\frac{1}{p}}\quad dt\;;\end{aligned}$$

et en appliquant ***(I,7)*** on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big[\int_0^x f(t)\,dt\Big]^p u(x)\;dx &\le p\;A^p\;(p')^{p-1}\;\int_0^\infty f^p(t)v(t)h^p(t)\;\;\Big(\int_0^t v^{1-p'}(x)\,dx\Big)^{\frac{-1}{p'}}\;dt \\ &= p\;A^p\;(p')^{p-1}\;\int_0^\infty f^p(t)v(t)h^p(t)\;\;h^{-p}(t)\;dt \\ &= p\;A^p\;(p')^{p-1}\;\int_0^\infty f^p(t)\,v(t)\;dt \qquad .\end{aligned}$$

$\boxdot$

chap. II : Inégalité de Hardy dans l'espace Lp (0<p<1)

1. PRÉLIMINAIRE

Théorème II.1 : *Considérons l'inégalité de Hardy :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \le C\int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx \qquad \textbf{(III)}[1]$$

1) *Si* $p > 1$ *et* $\alpha < p-1$ *alors il existe* $C > 0$ *telle que l'inégalité* ***(III)*** *soit vérifiée* $\forall f \geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *où la constante optimale est* $C_1 := \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$.

2) *Si* $p > 1$ *et* $\alpha \geq p-1$ *alors* $\forall\, C > 0$ *l'inégalité* ***(III)*** *ne peut avoir lieu.*

3) *Si* $0 < p < 1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(arbitraire) alors* $\forall\, C > 0$ *l'inégalité* ***(III)*** *ne peut avoir lieu.*

NB : la partie 1) n'est autre que l'inégalité de Hardy pondérée avec la constante optimale $C_1 = B_2 = \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$ (***chp I*** §2).

Preuve : **[*{67} (Kufner, Maligranda et Persson 2007) p 23*]**

1) Pour $p > 1$ et $\alpha < p-1$ voir (***théorème*** *I.2*).

[1] Il s'agit de l'inégalité ***(III)*** dans l'introduction.

2) Si $p > 1$ et $\alpha \geq p-1$, considérons $a > 0$ et posons

$$f(x) = \chi_{(a,a+1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (a, a+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx &\geq \int_{a+1}^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x \chi_{(a,a+1)}(x)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \\ &= \int_{a+1}^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^{a+1} 1\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \\ &= \int_{a+1}^\infty x^{\alpha-p}\,dx \\ &= \infty\,. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx = \int_0^\infty \chi^p_{(a,a+1)}(x)\,x^\alpha\,dx &= \int_a^{a+1} x^\alpha\,dx \\ &= (a+1)^{\alpha+1} - a^{\alpha+1} < \infty\,. \end{aligned}$$

L'inégalité ***(III)*** ne peut donc avoir lieu pour tout $f \geq 0$ mesurable.

3) Si $0 < p < 1$. Fixons $a > 0$ et posons $f(x) = \chi_{(a,a+1)}(x)$; on a :

a) Si $\alpha \geq p-1$ on a pour le premier membre de l'inégalité ***(III)***

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx &\geq \int_{a+1}^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^{a+1} dt\right)^p x^\alpha\,dx \\ &= \int_{a+1}^\infty x^{\alpha-p}\,dx \\ &= \infty\,, \end{aligned}$$

alors que pour le second

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx = \int_0^\infty \chi^p_{(a,a+1)}(x)\,x^\alpha\,dx &= \int_a^{a+1} x^\alpha\,dx \;; \\ &= (a+1)^{\alpha+1} - a^{\alpha+1} < \infty\,; \end{aligned}$$

on déduit que l'inégalité ***(III)*** ne peut avoir lieu pour tout $f \geq 0$ mesurable.

b) Si $\alpha < p-1$, supposons qu'il existe $C > 0$ pour laquelle l'inégalité ***(III)*** est vraie $\forall\, f \geq 0$ mesurable.

Alors on a pour $f(x)=\chi_{(a,a+1)}(x)$ ($a>0$ arbitraire)

$$C \geq \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx}{\int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx} \geq \frac{\int_{a+1}^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^{a+1} dt\right)^p x^\alpha\,dx}{\int_a^{a+1} x^\alpha\,dx}$$

$$\geq \frac{\int_{a+1}^\infty x^{\alpha-p}\,dx}{a^\alpha \int_a^{a+1} dx}$$

$$\geq \frac{1}{-\alpha+p-1}\,\frac{(a+1)^{\alpha-p+1}}{a^\alpha} \to \infty$$

lorsque $a \to 0$ et par suite l'inégalité ***(III)*** ne peut avoir lieu pour tout $f \geq 0$ mesurable.

$\boxdot$

2. INÉGALITÉ DE HARDY POUR LES FONCTIONS DÉCROISSANTES

On a vu au paragraphe précédent que pour $0<p<1$ l'inégalité de Hardy avec poids x^α , $\alpha \in \mathbb{R}$ n'a pas lieu pour toute fonction mesurable sur $(0,\infty)$.

Par contre elle est vérifiée avec l'hypothèse supplémentaire de monotonie. Ce résultat a été démontré par *(V. Burenkov 1989)* [voir ***[22]***] utilisant une technique de discrétisation basée sur le lemme suivant

Lemme: *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existent $k_1, k_2 > 0$ telles que pour toute fonction f positive monotone on a*

$$k_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(\alpha+1)}\, f(2^k) \leq \int_0^\infty x^\alpha\, f(x)\,dx \leq k_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(\alpha+1)}\, f(2^k)$$

mais pas *avec une constante optimale*. Plus tard il a donné une autre preuve où il précise la constante optimale [voir ***[23]*** *(V. Burenkov 1992)*].

Théorème II.2 : *Soient $0<p<1$ et $\alpha<p-1$, alors pour toute fonction f positive décroissante sur $(0,\infty)$ on a :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \leq C_2 \int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx.$$

Si $-1<\alpha<p-1$ alors la constante $C_2 := \frac{p}{p-1-\alpha}$ est optimale.

Si $\alpha \geq p-1$ l'inégalité n'est pas vérifiée.

Pour la preuve on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 1. *Soit* $0 < p < 1$, *si* $\forall k \geq 1 : a_k \geq 0$ *et* $a_{k+1} \leq a_k$ *alors*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \left(k^p - (k-1)^p\right).$$

Preuve [{23} (Burenkov 1992)] :

Soit $A > 0$, considérons sur $(0, A]$ la fonction

$$h : t \to h(t) := t^{-p}\left((1+t)^p - 1\right), \quad 0 < p < 1\,;$$

alors

$$\begin{aligned} h'(t) &= -pt^{-p-1}\left((1+t)^p - 1\right) + t^{-p}\, p(1+t)^{p-1} \\ &= pt^{-p-1}\left[-(1+t)^p + 1 + t(1+t)^{p-1}\right] \\ &= pt^{-p-1}\left[1 + (-1-t+t)(1+t)^{p-1}\right] \\ &= pt^{-p-1}\left[1 - (1+t)^{p-1}\right] \geq 0\,; \end{aligned}$$

donc pour $t \in (0, A)$ on a $h(t) \leq h(A)$ *i.e.*

$$t^{-p}\left((1+t)^p - 1\right) \leq A^{-p}\left((1+A)^p - 1\right) = \left((A^{-1}+1)^p - A^{-p}\right)$$

d'où

$$(1+t)^p \leq 1 + t^p\left((A^{-1}+1)^p - A^{-p}\right).$$

On déduit que si $0 \leq y \leq Ax$

$$(x+y)^p \leq x^p + y^p\left((A^{-1}+1)^p - A^{-p}\right). \qquad \textbf{\textit{(II,1)}}$$

Maintenant on montre par récurrence que $\forall m \in \mathbb{N}^*$ on a:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^p \leq \sum_{k=1}^{m} a_k^p \left(k^p - (k-1)^p\right).$$

L'inégalité est évidente pour $m = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour un certains $m \in \mathbb{N}^*$, alors étant donné que $\{a_k\}_{k\geq 1}$ est décroissante on a $\forall\ 1 \leq k \leq m\ :\ a_k \geq a_{m+1}$ d'où pour $A = \frac{1}{m}$

$$A \sum_{k=1}^{m} a_k \geq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} a_{m+1} = a_{m+1}\,,$$

et d'après ***(II,1)*** puis l'hypothèse de récurrence :

$$\Big(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\Big)^p = \Big((\sum_{k=1}^{m} a_k) + a_{m+1}\Big)^p$$
$$\leq (\sum_{k=1}^{m} a_k)^p + a_{m+1}^p\Big((A^{-1}+1)^p - A^{-p}\Big)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{m} a_k^p\Big(k^p-(k-1)^p\Big) + a_{m+1}^p\Big((m+1)^p - m^p\Big)$$

donc

$$\Big(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\Big)^p \leq \sum_{k=1}^{m+1} a_k^p\Big(k^p-(k-1)^p\Big)\ ;$$

en passant à la limite ($m \to +\infty$) on obtient

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big)^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p\Big(k^p-(k-1)^p\Big)$$

$\boxdot$

Lemme 2*. Soient* $0 < p < 1,\ 0 < a < b \leq \infty$. *Si la fonction* $f \geq 0$ *est décroissante sur (a, b), alors*

$$\Big(\int_a^b f(x)\,dx\Big)^p \leq p\int_a^b (x-a)^{p-1} f^p(x)\ dx$$

Preuve [{23} (Burenkov 1992)] : Nous supposerons que $b < \infty$ (le cas $b = \infty$ est obtenu par un passage à la limite).

Etant donnée une fonction f et décroissante sur (a, b) ; fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et **[**en divisant (a, b) en sous intervalle de longueur $\Delta = \frac{b-a}{m}$**]** on pose pour tout $x \in \big(a+(k-1)\Delta, a+k\Delta\big)$ avec $k = \in \{1, ..., m\}$:

$$f_m(x) := f(a + k\,\Delta)$$

(*pour* $k = m$ *on pose* $f_m(x) := f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x)$).

Pour tout $x \in \big(a,\ b-\Delta\big)$ on a

$$f(x+\Delta) \leq f_m(x) \leq f(x) \quad \textbf{(II,2)},$$

et, sauf peut être sur un ensemble dénombrable dans (a, b), on a :

$$\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = f(x).$$

D'après le ***lemme 1*** on a

$$\Big(\int_a^b f_m(x)\,dx\Big)^p = \Big(\sum_{k=1}^m \int_{a+(k-1)\,\Delta}^{a+k\,\Delta} f(a+k\,\Delta)\ dx\Big)^p$$

$$= \Delta^p \Big(\sum_{k=1}^m f(a+k\,\Delta)\Big)^p$$

$$\leq \Delta^p \ \sum_{k=1}^\infty f(a+k\,\Delta)^p \Big(k^p-(k-1)^p\Big)$$

$$= p\ \sum_{k=1}^m f(a+k\,\Delta)^p \ \ \frac{1}{p}\Big(k^p-(k-1)^p\Big)\Delta^p$$

$$= p\ \sum_{k=1}^m f(a+k\,\Delta)^p \ \int_{a+(k-1)\,\Delta}^{a+k\,\Delta}(t-a)^{p-1}dt\ ;$$

or pour tout $x\in\big(a+(k-1)\,\Delta, a+k\,\Delta\big)$, $f_m(x) := f(a+k\,\Delta)$ d'où

$$\Big(\int_a^b f_m(x)\,dx\Big)^p \leq p\ \sum_{k=1}^m \int_{a+(k-1)\,\Delta}^{a+k\,\Delta} f_m(t)^p\ (t-a)^{p-1}dt$$

$$= p\ \int_a^b f_m(t)^p\ (t-a)^{p-1}dt\ ,$$

et d'après ***(II,2)***

$$\Big(\int_a^b f_m(x)\,dx\Big)^p \leq p\ \int_a^b f(t)^p\ (t-a)^{p-1}dt\ .$$

En passant à la limite ($m\to+\infty$) nous obtenons le résultat

$$\Big(\int_a^b f(x)\,dx\Big)^p \leq p\ \int_a^b \big(x-a\big)^{p-1} f^p(x)\ dx\ \cdot$$

$\boxdot$

Preuve. du théorème : **[*{23} (Burenkov 1992)*]**

Soit $f\geq 0$ une fonction décroissante sur $(0,\infty)$, alors d'après le ***lemme 2*** puis le théorème de Fubini on aura

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx = \int_0^\infty x^{\alpha-p}\ \Big(\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p\ dx$$

$$\leq \int_0^\infty x^{\alpha-p}\ p\ \int_0^x t^{p-1}\, f^p(t)dt\ dx$$

$$= p\ \int_0^\infty t^{p-1}\, f^p(t)\Big(\int_t^\infty x^{\alpha-p}dx\Big)\ dt\ ;$$

et comme $\alpha < p-1$ on obtient

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \leq \frac{p}{-\alpha+p-1}\int_0^\infty t^{p-1}\,f^p(t)\,t^{\alpha-p+1}\,dt$$
$$= \frac{p}{-\alpha+p-1}\int_0^\infty f^p(t)\,t^\alpha\,dt \qquad .$$

$\boxdot$

<u>Constante optimale</u> : **[*{23} (Burenkov 1992)*]**
Soit $-1 < \alpha < p-1$, pour $\xi > 0$ on pose

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (0,\xi) \\ 0 & \text{si } t \in (\xi,\infty) \end{cases}$$

alors d'une part on a

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx = \int_0^\xi \left(\frac{1}{x}\int_0^x 1\,dt\right)^p x^\alpha\,dx + \int_\xi^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^\xi 1\,dt\right)^p x^\alpha\,dx$$
$$= \int_0^\xi x^\alpha\,dx + \xi^p\int_\xi^\infty x^{\alpha-p}\,dx$$
$$= \frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \xi^p\,\frac{\xi^{\alpha-p+1}}{-\alpha+p-1}$$
$$= \frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\xi^{\alpha+1}}{-\alpha+p-1}$$
$$= \frac{p\,\xi^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(-\alpha+p-1)}\ ,$$

et d'autre part on a

$$\frac{p}{-\alpha+p-1}\int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx = \frac{p}{-\alpha+p-1}\int_0^\xi x^\alpha\,dt = \frac{p\,\xi^{\alpha+1}}{(-\alpha+p-1)(\alpha+1)}\ ;$$

ce qui confirme l'optimalité de la constante $C_2 := \frac{p}{-\alpha+p-1}$.

$\boxdot$

<u>Remarques</u> : (à propos de la condition on a $-1 < \alpha < p-1$)

<u>1)</u> si $\alpha \leq -1$ alors le second membre de l'inégalité est toujours infini. En effet f étant positive et décroissante, considérons $\xi > 0$ tel que $f(\xi) \neq 0$, on a alors :

$$\int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx \geq \int_0^\xi f(x)\,x^\alpha\,dt \geq f(\xi)\int_0^\xi x^\alpha\,dt = +\infty\ ;$$

L'inégalité est donc triviale.

2) si $\alpha \geq p-1$ alors

$$f : t \to f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est positive décroissante sur $(0,\infty)$ et on a :

a) $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \geq \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt\right)^p x^\alpha\,dx = +\infty\ ,$$

b) $$\frac{p}{p-1-\alpha}\int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx = \frac{p}{p-1-\alpha}\int_0^1 x^{\alpha-p}\,dx = \frac{p}{p-1-\alpha}\,\frac{1}{\alpha-p+1} < \infty$$

et donc l'inégalité n'est pas vérifiée pour $\alpha \geq p-1$.

3. INÉGALITÉ DE HARDY AVEC UNE CONDITION PLUS FAIBLE QUE LA MONOTONIE

Dans leur article (Burenkov, Senouci et Tararykova 2010) [voir ***[25]***] avaient besoin d'une inégalité type de Hardy avec $0 < p < 1$ pour une fonction $f \geq 0$ définie pour $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ par :

$$f : \phi \to f(\phi)(h) = \|\Delta_h \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ ,\ \forall h \in \mathbb{R}^n$$

où Δ_h désigne la différence d'ordre 1 avec le pas h.

Or f n'est pas une fonction radialement décroissante, c'est-à-dire qu'elle n'est pas de la forme $f(h) = g(|h|)$ avec g décroissante, ce qui ne permet pas d'utiliser l'inégalité de Hardy pour les fonctions décroissante du **§2** (précédent) .

Par contre cette fonction vérifie l'inégalité suivante [voir ***[25]*** *p10*]

$$\|\Delta_h \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\frac{1}{|h|^n}\left(\int_{B(0,|h|)} \|\Delta_y \phi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit une fonction f radialement décroissante, alors on a

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(0,|h|)} f(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} &\geq f(h)\left(\int_{B(0,|h|)} |y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= f(h)\left(\int_0^{|h|}\int_{S_{n-1}} \rho^{n(p-1)}\,\rho^{n-1}\,d\xi d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= f(h)\left(n\,v_n \int_0^{|h|} \rho^{np-1} d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq f(h)\,|h|^n \left(\frac{v_n}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\ ;\end{aligned}$$

donc l'inégalité du genre

$$f(h) \leq M\ \frac{1}{|h|^n}\Big(\int_{B(0,|h|)} f(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}$$

est une condition <u>plus faible que la monotonie</u>.

On présente ci-dessous les résultats de ***[89]*** mais d'une autre manière qui permet une amélioration de la constante :

> ***<u>Théorème II.3 :</u>*** *Soient* $M_3 > 0$, $0 < p < 1$ *et* $\alpha < np - 1$.
> *Si une fonction* $f \geq 0$ *mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *vérifie* $\forall\, r > 0$,
> $\Big(\int_{B_r} f^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}dy\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$ ($\frac{p}{p'} = p - 1$) *et pour presque tout* $h \in \mathbb{R}^n$:
>
> $$f(h) \leq \frac{M_3}{|h|^n}\Big(\int_{B_{|h|}} f^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \textbf{\textit{(II,3)}}$$
>
> *alors il existe* $C_3 > 0$ *telle que :*
>
> $$\int_0^{\infty}\Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\Big)^p r^{\alpha}\,dr \leq C_3\ \int_{\mathbb{R}^n} f^p(y)\,|y|^{\alpha-n+1}\,dy$$
>
> *où* $C_3 := \frac{1}{v_n^p}\ \frac{p^p\,M_3^{p(1-p)}}{np-\alpha-1}$ *est une constante optimale.*

Pour la preuve on a besoin du lemme suivant :

> ***<u>Lemme</u>*** *: Soit* $r > 0$ *, sous les hypothèses du théorème,*
> *si* $f \geq 0$ *vérifie pour presque tout* $h \in \mathbb{R}^n$:
>
> $$f(h) \leq \frac{M_3}{|h|^n}\Big(\int_{B(0,|h|)} f^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{\textit{(II,3)}}$$
>
> *alors on a :*
>
> $$\Big(\int_{B(0,r)} f(h)\,dh\Big)^p \leq p^p\,M_3^{p(1-p)}\ \int_{B(0,r)} f^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}\,dy \qquad \textbf{\textit{(II,4)}}.$$

<u>Preuve du lemme :</u> Soient $r > 0$ et f vérifiant presque partout dans $B_r = B(0,r)$ l'inégalité ***(II,3)*** , alors on a l'identité

$$f(h) = \big(f(h)\,|h|^n\big)^{1-p}\,\big(f^p(h)\,|h|^{n(p-1)}\big);$$

on applique ***(II,3)*** (en notant que $\frac{p}{p'} = p - 1$)

$$f(h) \leq \Big(M_3\Big(\int_{B_{|h|}} f^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)^{1-p}\,\big(f^p(h)\,|h|^{\frac{n}{p'}\,p}\big)\ ,$$

et en intégrant sur B_r on obtient

$$\Big(\int_{B_r} f(h)\,dh\Big) \le M_3^{1-p} \int_{B_r} \Big(\int_{B_{|h|}} f^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}-1} f^p(h)\,|h|^{\frac{n}{p'}p}\,dh\,.$$

On passe aux coordonnées sphériques dans le second membre

$$\Big(\int_{B_r} f(h)\,dh\Big) = M_3^{1-p} \int_0^r \Big(\int_0^\rho \int_{S_{n-1}} f^p(t\xi)\,t^{\frac{n}{p'}p}\,t^{n-1}\,d\xi\,dt\Big)^{\frac{1}{p}-1} \Big(\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\sigma)\,\rho^{\frac{n}{p'}p}\,\rho^{n-1}\,d\sigma\Big)\quad d\rho\,.$$

On pose

$$\phi(\rho) := \int_0^\rho \Big(\int_{S_{n-1}} f^p(t\,\xi)\,t^{\frac{n}{p'}p}\,t^{n-1}\,d\xi\Big)\,dt$$

alors

$$\phi'(\rho) := \Big(\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\,\xi)\,\rho^{\frac{n}{p'}p}\,\rho^{n-1}\,d\xi\Big)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{B_r} f(h)\,dh\Big) &\le M_3^{1-p} \int_0^r \Big(\phi(\rho)\Big)^{\frac{1}{p}-1} \phi'(\rho)\quad d\rho\\
&= M_3^{1-p} \int_0^r p\,\frac{d}{d\rho}\Big(\phi(\rho)\Big)^{\frac{1}{p}}\quad d\rho\\
&= p\,M_3^{1-p}\Big(\phi(r)\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&= p\,M_3^{1-p}\Big(\int_0^r \int_{S_{n-1}} f^p(t,\xi)\,t^{\frac{n}{p'}p}\,t^{n-1}\,d\xi\Big)\,dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&= p\,M_3^{1-p}\Big(\int_{B(0,r)} f^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}\,.
\end{aligned}$$

On déduit alors l'inégalité ***(II,4)***

$$\Big(\int_{B_r} f(h)\,dh\Big)^p \le p^p\,M_3^{p(1-p)} \int_{B_r} f^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\,.$$

$\boxdot$

<u>Preuve du théorème :</u> $f \ge 0$ étant une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'inégalité ***(II,3)*** presque partout dans B_r , alors d'après l'inégalité ***(II,4)*** du ***<u>lemme</u>*** précédent on a (rappelons que $\alpha - np + 1 < 0$)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\Big)^p r^\alpha\,dr &= \frac{1}{v_n^p}\int_0^\infty \Big(\int_{B_r} f(y)\,dy\Big)^p r^{\alpha-np}\,dr\\
&\le \frac{1}{v_n^p}\int_0^\infty p^p\,M_3^{p(1-p)}\Big(\int_{B_r} f^p(y)\,|y|^{n(p-1)}\,dy\Big)\,r^{\alpha-np}\,dr\,,
\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Fubini on a

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\Big)^p r^\alpha\,dr \le \frac{p^p}{v_n^p}\,M_3^{p(1-p)}\,\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{|y|}^\infty r^{\alpha-np}\,dr\Big) f^p(y)\,|y|^{n(p-1)}\,dy$$

$$= \frac{p^p}{v_n^p}\,M_3^{p(1-p)}\,\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{-\alpha+np-1}\,|y|^{\alpha-np+1} f^p(y)\,|y|^{np-n}\,dy \quad ,$$

d'où le résultat désiré

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\Big)^p r^\alpha\,dr \le \frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_3^{p(1-p)}}{-\alpha+np-1}\,\int_{\mathbb{R}^n} f^p(y)\,|y|^{\alpha-n+1}\,dy\,.$$

<u>Constante optimale</u> : considérons pour $x\in\mathbb{R}^n$

$$g(x) = |x|^{(\frac{v_n\,M_3^p}{p}-1)\,n} \quad ,$$

On a

$$\Big(\int_{B_{|h|}} g^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_{B_{|h|}} |y|^{(\frac{v_n\,M_3^p}{p}-1)\,n\,p}\,|y|^{n\,(p-1)}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big(\int_{B_{|h|}} |y|^{n\,v_n\,M_3^p-n\,p}\,|y|^{np-n}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big(\int_{B_{|h|}} |y|^{n\,v_n\,M_3^p-n}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Passons aux coordonnées sphériques dans le second membre

$$\Big(\int_{B_{|h|}} g^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_0^{|h|}\int_{S_{n-1}} \rho^{n\,v_n\,M_3^p-n}\,\rho^{n-1}\,d\sigma\,d\rho\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big(n\,v_n\int_0^{|h|} \rho^{n\,v_n\,M_3^p-1}\,d\rho\Big)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$\Big(\int_{B_{|h|}} g^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}} = \frac{|h|^{\frac{n\,v_n\,M_3^p}{p}}}{M_3}$$

$$= \frac{|h|^n}{M_3}\,g(h)$$

et donc

$$g(h) = \frac{M_3}{|h|^n}\Big(\int_{B_{|h|}} g^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}\,p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}\,. \qquad \textit{(II,3 bis)}$$

En reprenant les calculs de la preuve du ***lemme*** on a

$$g(h) = \left(g(h)\,|h|^n\right)^{1-p}\left(g^p(h)\,|h|^{n(p-1)}\right);$$

en appliquant ***(II,3 bis)*** on obtient

$$\begin{aligned} g(h) &= \Big(\frac{M_3}{|h|^n}\Big(\int_{B_{|h|}} g^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}|h|^n\Big)^{1-p}\left(g^p(h)\,|h|^{n(p-1)}\right) \\ &= M_3^{1-p}\Big(\int_{B_{|h|}} g^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\Big)^{\frac{1-p}{p}}\left(g^p(h)\,|h|^{\frac{n}{p'}p}\right) \quad . \end{aligned}$$

On intégre sur B_r et on passe aux coordonnées sphériques dans le second membre

$$\begin{aligned} \Big(\int_{B_r} g(h)\,dh\Big) &= M_3^{1-p}\ \Big(\int_{B_{|h|}} g^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}-1}\int_{B_r} g^p(x)\,|h|^{\frac{n}{p'}p}\,dh \\ &= M_3^{1-p}\int_0^r\Big(\int_0^\rho\int_{S_{n-1}} g^p(t\xi)\,t^{\frac{n}{p'}p}\,t^{n-1}\,d\xi\,dt\Big)^{\frac{1}{p}-1}\ \Big(\int_{S_{n-1}} g^p(\rho\sigma)\,\rho^{\frac{n}{p'}p}\,\rho^{n-1}\,d\sigma\Big)\quad d\rho \\ &= M_3^{1-p}\int_0^r p\,\frac{d}{d\rho}\Big(\int_0^\rho\Big(\int_{S_{n-1}} g^p(t\xi)\,t^{\frac{n}{p'}p}\,t^{n-1}\,d\xi\Big)\ dt\Big)^{\frac{1}{p}}\ d\rho \\ &= p\,M_3^{1-p}\Big(\int_0^r\Big(\int_{S_{n-1}} g^p(t\xi)\,t^{\frac{n}{p'}p}\,d\xi\Big)\,t^{n-1}\,dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= p\,M_3^{1-p}\Big(\int_{B_r} g^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

On déduit

$$\Big(\int_{B_r} g(y)\,dy\Big)^p = p^p\,M_3^{p(1-p)}\Big(\int_{B_r} g^p(y)\,|y|^{\frac{n}{p'}p}\,dy\Big). \qquad \textit{(II,4 bis)}$$

On reprend les calculs de la preuve du ***théorème*** on trouve en appliquant ***(II,4 bis)***

$$\begin{aligned} \int_0^\infty\Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} g(y)\,dy\Big)^p r^\alpha\,dr &= \frac{1}{v_n^p}\int_0^\infty\Big(\int_{B_r} g(y)\,dy\Big)^p r^{\alpha-np}\,dr \\ &= \frac{1}{v_n^p}\int_0^\infty p^p\,M_3^{p(1-p)}\Big(\int_{B_r} g^p(y)\,|y|^{n(p-1)}\,dy\Big)\,r^{\alpha-np}\,dr \\ &= \frac{p^p}{v_n^p}\,M_3^{p(1-p)}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{|y|}^\infty r^{\alpha-np}\,dr\Big)\,g^p(y)\,|y|^{n(p-1)}\,dy \quad , \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} g(y)\,dy\Big)^p r^\alpha\,dr = \frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_3^{p(1-p)}}{-\alpha+np-1}\,\int_{\mathbb{R}^n} g^p(y)\,|y|^{\alpha-n+1}\,dy\ ,$$

ce qui confirme l'optimalité de la constante $C_3 := \frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_3^{p(1-p)}}{np-\alpha-1}$. En outre l'égalité est atteinte par $g(x) = |x|^{(\frac{v_n\,M_3^p}{p}-1)\,n}$.

$\boxdot$

__**Remarque :**__

Les arguments de la remarque du paragraphe précédent restent valables pour la dimension $n > 1$. La condition $\alpha < np - 1$ dans le théorème est nécessaire.

Si $\alpha \geq n\,p - 1$ alors:

$$f : t \to f(h) = \begin{cases} \frac{1}{|h|} & \text{si } 0 \leq |h| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est positive radialement décroissante sur $(0, \infty)$, donc vérifie l'hypothèse du *théorème II.3* .

D'un coté on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(h)\,dh\Big)^p r^\alpha\,dr &\geq \frac{1}{v_n^p}\,\int_1^\infty \Big(\int_{B_1}\frac{1}{|h|}\,dy\Big)^p r^{\alpha-np}\,dr \\ &= \frac{1}{v_n^p}\,\int_1^\infty \Big(\int_0^1\int_{S_{n-1}}\frac{1}{\rho}\,\rho^{n-1}\,d\sigma\,d\rho\Big)^p r^{\alpha-np}\,dr \\ &= \frac{1}{v_n^p}\,\int_1^\infty \Big(n\,v_n\int_0^1 \rho^{n-2}\,d\rho\Big)^p r^{\alpha-np}\,dr \\ &= \frac{n^p}{(n-1)^p}\,\int_1^\infty r^{\alpha-np}\,dr \\ &= +\infty\end{aligned}$$

De l'autre coté on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_3^{p(1-p)}}{-\alpha+np-1}\,\int_{\mathbb{R}^n} f^p(y)\,|y|^{\alpha-n+1}\,dy &= \frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_3^{p(1-p)}}{-\alpha+np-1}\,\int_{B_1}\frac{1}{|y|^p}\,|y|^{\alpha-n+1}\,dy \\ &= \frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_3^{p(1-p)}}{-\alpha+np-1}\,\int_0^1\int_{S_{n-1}}\frac{1}{\rho^p}\,\rho^{\alpha-n+1}\,\rho^{n-1}\ d\sigma\,d\rho\end{aligned}$$

or pour $n > 1$ on aura $\alpha > p-1$ d'où

$$\frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_3^{p(1-p)}}{-\alpha+np-1}\int_{\mathbb{R}^n} f^p(y)\,|y|^{\alpha-n+1}\,dy = \frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_3^{p(1-p)}}{-\alpha+np-1}\,n\,v_n\int_0^1 \rho^{\alpha-p}\,d\rho \;<\;\infty \quad ;$$

donc le théorème n'est pas valide pour $\alpha \geq n\,p-1$.

3.1. CAS n=1

En prenant dans le théorème précédent $n=1$ on aura :

> ***Corollaire II.3.1 ($n=1$)** : Soient $M_{3.1} > 0$, $0 < p < 1$ et $\alpha < p-1$.*
> *Si une fonction $f \geq 0$ mesurable sur $(0,+\infty)$ vérifie pour tout $r > 0$, $\left(\int_0^r f^p(t)\,|t|^{p-1}dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ et pour presque tout $x > 0$::*
>
> $$f(x) \leq \frac{M_{3.1}}{x}\left(\int_0^x f^p(t)\,t^{p-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
>
> *alors on a :*
>
> $$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \leq C_{3.1}\int_0^{+\infty} f^p(x)\,x^\alpha\,dx$$
>
> *et la constante $C_{3.1} := \frac{p^p\,M_{3.1}^{p(1-p)}}{p-\alpha-1}$ est optimale.*

3.2. CAS DE FONCTION À VARIATION LENTE (n=1) :

Si une fonction f est à variation lente alors f^p est aussi à variation lente et on a [*voir **Préliminaires et notations** § 2*]

$$\forall\, x > 0 \;:\; \int_0^x t^{p-1}\,f^p(t)\,dt \;\approx\; x^p\,f^p(x),$$

et donc il existe $M > 0$ telle que

$$\forall\, x > 0 \;:\; f(x) \;\leq\; \frac{M}{x}\left(\int_0^x t^{p-1}\,f^p(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'inégalité (hypothèse) du ***corollaire** II.3.1* (précédent) est vérifiée, d'où

> ***Corollaire II.3.2 :** Soient $0 < p < 1$ et $\alpha < p-1$.*
> *Si une fonction $f \geq 0$ définie sur $(0,+\infty)$ est à variation lente ,*
> *alors il existe $C_{3.2} > 0$ telle que :*
>
> $$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \leq C_{3.2}\int_0^{+\infty} f^p(x)\,x^\alpha\,dx\,.$$
>
> *et la constante $C_{3.2} := \frac{p^p\,M^{p(1-p)}}{p-\alpha-1}$ est optimale.*

NB : ceci montre que la classe des fonctions vérifiant la condition de « monotonie affaiblie » contient , en plus de l'opérateur de différence Δ_h de pas $h > 0$, la classe des fonctions à variations lentes (dont , $\prod_{k=1}^{n}\left(\ln_k t\right)^{\alpha_k}$ où $\ln_k t = \ln\left(\ln_{k-1} t\right)$ et $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\exp\left(|\ln t|^{\alpha}\right)$ avec $\alpha \in (0,1)$, etc … [voir par exemple ***{13}*** , ***{83}*** et ***{88}***]) .

3.3. CAS DE FONCTION DÉCROISSANTE (n=1) :

Si une fonction f est décroissante alors

$$\left(\int_0^x f^p(t)\, t^{p-1}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \geq f(x)\left(\int_0^x t^{p-1}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = f(x)\,\frac{x}{p^{\frac{1}{p}}}.$$

et donc l'hypothèse du ***corollaire*** *II.3.1* est vérifiée avec $M = p^{\frac{1}{p}}$ d'où :

> ***Corollaire II.3.3 :*** *Soient* $0 < p < 1$ *et* $\alpha < p - 1$.
>
> *Si une fonction* $f \geq 0$ *est décroissante sur* $(0, +\infty)$ *alors on a :*
>
> $$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt\right)^p x^{\alpha}\, dx \leq C_{3.3}\int_0^{+\infty} f^p(x)\, x^{\alpha}\, dx$$
>
> *et la constante* $C_{3.3} := \frac{p}{p-\alpha-1}$ *est optimale.*

NB : on retrouve ainsi l'inégalité de Hardy pour les fonctions monotones (***théorème*** *II.2*) .

4. UNE INÉGALITÉ POUR L'OPÉRATEUR DE HARDY GÉNÉRALISÉ

Le but de ce paragraphe est d'étendre l'inégalité de Hardy dans le ***théorème*** *II.3* à l'opérateur de Hardy généralisé. Ce travail a fait l'objet d'une publication [voir ***{4}***].

Soit w une fonction poids définie sur $(0,\infty)$. L'opérateur de Hardy généralisé est défini comme suit :

$$(H_w f)(r) := \frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)\ w(x)\ dx$$

où $0 < W(r) := \int_0^r w(t)\, dt \ < \infty$ pour tout $r > 0$.

Notons que si $w(x) \equiv 1$ alors l'opérateur précédent n'est autre que l'opérateur usuel de Hardy

$$(Hf)(r) = \frac{1}{r}\int_0^r f(x)\ dx\ .$$

Théorème II.4 : *Soient* $0 < p < 1,\ c > 0,\ A > 0,\ \alpha < p-1$ *et* w *une fonction poids sur* $(0,\infty)$ *telle que :*

$$0 < a < b < \infty \implies w(b) \leq c\, w(a).$$

Si une fonction $f \geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *vérifie pour presque tout* $x > 0$

$$f(x) \leq A \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x f^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,6)},$$

alors $\forall r > 0$ *on a :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{W(r)} \int_0^r f(x)\, w(x)\, dx \right)^p w(r)\, r^\alpha\, dr \leq C_4 \int_0^\infty f^p(x)\, w(x)\, x^\alpha\, dx$$

où $C_4 = A^{p(1-p)}\, c^{2-p}\, p\, \frac{1}{p-\alpha-1}$.

Pour la preuve nous aurons besoin de quelques propositions auxiliaires.

Lemme 1 *: Soient* $0 < p < 1,\ c > 0$ *et* w *une fonction poids sur* $(0,\infty)$ *telle que :*

$$0 < y < x < \infty \implies w(x) \leq c\, w(y)\ ,$$

alors pour tout $0 < x < r < \infty$ *on a :*

$$\left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq A'\, x^{p-1} \frac{1}{r\, w^{\frac{1}{p}}(r)} \int_0^r w(t)\, dt \qquad \textbf{(II,5)}$$

où $A' = c^{\frac{2}{p}-1}\, p^{\frac{1}{p}-1}$.

Preuve : par hypothèse on a pour $0 < y < x < r$

$$c\ w(y)\ y^{p-1} \geq w(x)\ y^{p-1}\ ;$$

En intégrant par rapport à $y \in (0,x)$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x w(y)\ y^{p-1}\, dy &\geq c^{-1} \int_0^x w(x)\ y^{p-1}\, dy \\ &= c^{-1}\ w(x) \int_0^x y^{p-1}\, dy = c^{-1}\ w(x)\ \frac{1}{p} x^p \\ &\geq c^{-2}\ w(r)\ \frac{1}{p} x^p\ ,\end{aligned}$$

et comme $1-\frac{1}{p}<0$ on déduit que

$$\Big(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\Big)^{1-\frac{1}{p}} \leq c^{\frac{2}{p}-2}\ \frac{w(r)}{w^{\frac{1}{p}}(r)}\ \big(\frac{x^p}{p}\big)^{1-\frac{1}{p}}$$
$$= c^{\frac{2}{p}-2}\ p^{\frac{1}{p}-1}\ x^{p-1}\ \frac{1}{w^{\frac{1}{p}}(r)}\ w(r)\ .$$

D'autre part pour $0<t<r$ on a $w(r)\leq c\ w(t)$ et par intégration par rapport à $t\in(0,r)$, on a

$$w(r)\leq \frac{c}{r}\ \int_0^r w(t)\ dt\ ,$$

d'où

$$\Big(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\Big)^{1-\frac{1}{p}} \leq c^{\frac{2}{p}-1}\ p^{\frac{1}{p}-1}\ x^{p-1}\ \frac{1}{r\, w^{\frac{1}{p}}(r)}\ \int_0^r w(t)\ dt \qquad .$$

$\boxdot$

***<u>Lemme 2</u>** : Soient* $0<p<1,\ \ c>0,\ \ A>0$ *et* w *une fonction poids sur* $(0,\infty)$ *telle que :*

$$0<a<b<\infty \implies w(b)\leq c\, w(a).$$

Si une fonction $f\geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *vérifie pour presque tout* $x>0$ *on a*

$$f(x)\leq A\,\Big(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\Big)^{-\frac{1}{p}}\,\Big(\int_0^x f^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,6)},$$

alors $\forall r>0$ *on a :*

$$(H_w f)(r)\leq\ \frac{A''}{r\, w^{\frac{1}{p}}(r)}\ \Big(\int_0^r f^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\Big)^{\frac{1}{p}}$$

où $\ A''=A^{1-p}\, c^{\frac{2}{p}-1}\, p^{\frac{1}{p}}$.

<u>Preuve</u> : Soit $f\geq 0$ mesurable sur $(0,\infty)$ vérifiant $p.p.\, x>0$ l'inégalité ***(II,6)***, alors

$$\big(f(x)\big)^{1-p}\leq A^{1-p}\,\Big(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\Big)^{\frac{p-1}{p}}\,\Big(\int_0^x f^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\Big)^{\frac{1-p}{p}},$$

d'où

$$f(x)\,w(x) \leq A^{1-p}\left(\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\ \left[f^p(x)\,w(x)\Big(\int_0^x f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}-1}\right]$$

$$= A^{1-p}\left(\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\ \frac{p}{x^{p-1}}\frac{d}{dx}\Big[\Big(\int_0^x f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]\ ;$$

en appliquant le ***Lemme 1*** on obtient $\forall x \in (0,r)$

$$f(x)\,w(x) \leq p\ A^{1-p}\ A'\ \frac{1}{r\,w^{\frac{1}{p}}(r)}\left(\int_0^r w(t)\,dt\right)\ \frac{d}{dx}\Big[\Big(\int_0^x f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]\,.$$

On déduit par intégration par rapport à $x \in (0,r)$

$$\int_0^r f(x)\,w(x)\,dx \leq p\ A^{1-p}\ A'\ \frac{1}{r\ w^{\frac{1}{p}}(r)}\,W(r)\ \int_0^r \frac{d}{dx}\Big[\Big(\int_0^x f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]\,dx$$

$$= p\ A^{1-p}\ A'\ \frac{1}{r\ w^{\frac{1}{p}}(r)}\,W(r)\ \left(\int_0^r f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

d'où (sachant que $A' = c^{\frac{2}{p}-1}\,p^{\frac{1}{p}-1}$)

$$(H_w f)(r) = \frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)\,w(x)\,dx \leq A^{1-p}\ c^{\frac{2}{p}-1}p^{\frac{1}{p}}\ \frac{1}{r\ w^{\frac{1}{p}}(r)}\ \left(\int_0^r f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\quad .$$

$\boxdot$

<u>Preuve du théorème</u>: Soit $f \geq 0$ mesurable sur $(0,\infty)$ vérifiant $p.p.\,x>0$ l'hypothèse ***(II,6)*** , alors en appliquant le ***lemme 2*** :

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)\,w(x)\,dx\Big)^p w(r)\,r^\alpha\,dr = \int_0^\infty \Big((H_w f)(x)\Big)^p r^\alpha\,dr$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{(A'')^p}{r^p\,w(r)}\left(\int_0^r f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\right) w(r)\,r^\alpha\,dr$$

$$= (A'')^p\int_0^\infty r^{\alpha-p}\left(\int_0^r f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)dr$$

et en vertu du théorème de Fubini on aura

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)\,w(x)\,dx\Big)^p r^\alpha\,dr \leq (A'')^p\int_0^\infty f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\left(\int_y^\infty r^{\alpha-p}\,dr\right)dy\,.$$

Comme $\alpha - p + 1 < 0$ on obtient

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)\,w(x)\,dx\right)^p r^\alpha\,dr \le (A'')^p \int_0^\infty f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,\frac{y^{\alpha-p+1}}{-\alpha+p-1}\,dy$$
$$= (A'')^p\,\frac{1}{-\alpha+p-1}\int_0^\infty f^p(y)\,w(y)\,y^\alpha\,dy\,.$$

Rappelons que $(A'') = A^{1-p}\,c^{\frac{2}{p}-1}\,p^{\frac{1}{p}}$ d'où

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)\,w(x)\,dx\right)^p r^\alpha\,dr \le A^{p(1-p)}\,c^{2-p}\,p\,\frac{1}{-\alpha+p-1}\int_0^\infty f^p(y)\,w(y)\,y^\alpha\,dy \quad .$$

$\boxdot$

<u>Constante optimale</u>: Soient $0 < p < 1$ et w une fonction poids sur $(0,\infty)$ telle que :

$$0 < y < x < \infty \implies w(x) \le c\,w(y)$$

et supposons que pour $c = c_{min} > 0$ on a

$$0 < y < x < \infty \implies w(x) = c_{min}\,w(y)$$

alors (en suivant les mêmes étapes que celle de la preuve du lemme 1) on aura pour tout $0 < x < r < \infty$

$$\left(\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{1-\frac{1}{p}} = A'\,x^{p-1}\,\frac{1}{r\,w^{\frac{1}{p}}(r)}\int_0^r w(t)\,dt \qquad \textit{(II,5 bis)}$$

où $A' = c^{\frac{2}{p}-1}\,p^{\frac{1}{p}-1}$.

Fixons $A > 0$ et $K > 0$ et considérons pour $x > 0$

$$g(x) = K\left(\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{A^p-1}{p}} \iff (*)\ .$$

Alors on a

$$(*) \iff \ln\frac{g(x)}{K} = \frac{A^p-1}{p}\,\ln\left(\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)$$
$$\implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{A^p-1}{p}\,\frac{w(x)\,x^{p-1}}{\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy}$$
$$\iff p\,g'(x)\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy = (A^p-1)\,g(x)\,w(x)\,x^{p-1}\,.$$

On multiplie par $g^{p-1}(x)$

$$
\begin{aligned}
(*) \implies & p\, g'(x)\, g^{p-1}(x) \int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy = (A^p - 1)\, g^p(x)\, w(x)\, x^{p-1} \\
\iff & \left(g^p(x)\right)' \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\right) + g^p(x) \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)' = A^p\, g^p(x)\, w(x)\, x^{p-1} \\
\iff & \left[\, g^p(x) \int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy \,\right]' = A^p\, g^p(x)\, w(x)\, x^{p-1} ,
\end{aligned}
$$

et en intégrant

$$
\begin{aligned}
(*) \implies & g^p(x) \int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy = A^p \int_0^x g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy \\
\iff & g(x) = A \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{\frac{1}{p}} ;
\end{aligned}
$$

donc l'hypothèse ***(II,6)*** du ***théorème*** *II.4* est vérifiée et on a en fait égalité. On déduit

$$
\left(g(x)\right)^{1-p} = A^{1-p} \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^x g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{\frac{1-p}{p}}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
g(x)\, w(x) &= A^{1-p} \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \left[g^p(x)\, w(x) \left(\int_0^x g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{\frac{1}{p}-1} \right] \\
&= A^{1-p} \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{p}{x^{p-1}} \frac{d}{dx} \left[\left(\int_0^x g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \right] .
\end{aligned}
$$

et d'après ***(II,5 bis)*** on obtient $\forall x \in (0, r)$

$$
g(x)\, w(x) = p\, A^{1-p}\, A' \frac{1}{r\, w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\int_0^r w(t)\, dt\right) \frac{d}{dx} \left[\left(\int_0^x g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \right] .
$$

On déduit par intégration par rapport à $x \in (0, r)$

$$
\begin{aligned}
\int_0^r g(x)\, w(x)\, dx &= p\, A^{1-p}\, A' \frac{1}{w^{\frac{1}{p}}(r)} W(r) \int_0^r \frac{d}{dx} \left[\left(\int_0^x g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \right] dx \\
&= p\, A^{1-p}\, A' \frac{1}{w^{\frac{1}{p}}(r)} W(r) \left(\int_0^r g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy\right)^{\frac{1}{p}} ,
\end{aligned}
$$

d'où (sachant que $A' = c^{\frac{2}{p}-1}\, p^{\frac{1}{p}-1}$)

$$(H_w g)(r) = \frac{1}{W(r)} \int_0^r g(x)\, w(x)\, dx = A^{1-p}\, c^{\frac{2}{p}-1} p^{\frac{1}{p}}\, \frac{1}{w^{\frac{1}{p}}(r)} \left(\int_0^r g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} .$$

On pose $(A'') = A^{1-p}\, c^{\frac{2}{p}-1}\, p^{\frac{1}{p}}$, alors en intégrant on aura :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{1}{W(r)} \int_0^r g(x)\, w(x)\, dx \right)^p w(r)\, r^\alpha\, dr &= \int_0^\infty \Big((H_w g)(x) \Big)^p r^\alpha\, dr \\
&= \int_0^\infty \frac{(A'')^p}{r^p\, w(r)} \left(\int_0^r g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy \right) w(r)\, r^\alpha\, dr \\
&= (A'')^p \int_0^\infty r^{\alpha-p} \left(\int_0^r g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy \right) dr\ .
\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini donne

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{W(r)} \int_0^r g(x)\, w(x)\, dx \right)^p r^\alpha\, dr = (A'')^p \int_0^\infty g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1} \left(\int_y^\infty r^{\alpha-p}\, dr \right) dy\ .$$

Comme $\alpha - p + 1 < 0$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{1}{W(r)} \int_0^r g(x)\, w(x)\, dx \right)^p r^\alpha\, dr &= (A'')^p \int_0^\infty g^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, \frac{y^{\alpha-p+1}}{-\alpha+p-1}\, dy \\
&= (A'')^p\, \frac{1}{-\alpha+p-1} \int_0^\infty g^p(y)\, w(y)\, y^\alpha\, dy\ ,
\end{aligned}$$

d'où on conclu que si $c > 0$ est optimale dans l'inégalité

$$0 < y < x < \infty \implies w(x) \le c\, w(y)$$

alors $C_4 = A^{p(1-p)}\, c^{2-p}\, \frac{p}{p-\alpha-1}$ est optimale dans l'inégalité

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{W(r)} \int_0^r f(x)\, w(x)\, dx \right)^p w(r)\, r^\alpha\, dr \le C_4 \int_0^\infty f^p(x)\, w(x)\, x^\alpha\, dx$$

où f est arbitraire positive et mesurable sur $(0, \infty)$ vérifie ***(II,6)*** .

$\boxdot$

4.1. CAS SANS POIDS I.E. $w(x) \equiv 1$

Si $w(x) \equiv 1$ alors $c = 1$ et ***(II,6)*** devient

$$f(x) \le A \left(\int_0^x y^{p-1}\, dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x f^p(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} = A \left(\frac{x^p}{p} \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x f^p(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

donc

$$f(x) \leq A\, p^{\frac{1}{p}}\, \frac{1}{x} \left(\int_0^x f^p(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} .$$

On pose $M_{4.1} = A\, p^{\frac{1}{p}}$ alors $M_{4.1}^{p(1-p)} = A^{p(1-p)}\, p^{\frac{p(1-p)}{p}} = A^{p(1-p)}\, p^{(1-p)}$ d'où $p\, A^{p(1-p)} = p^p\, M_{4.1}^{p(1-p)}$

.

> ***Corollaire II.4.1 :*** *Soient* $0 < p < 1$, $M > 0$, $\alpha < p-1$.
> *Si une fonction* $f \geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *est telle que pour presque tout* $x > 0$ *on a :*
>
> $$f(x) \leq \frac{M_{4.1}}{x} \left(\int_0^x f^p(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}},$$
>
> *alors on a :*
>
> $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^r f(t)\, dt \right)^p x^\alpha\, dx \leq C_{4.1} \int_0^\infty f^p(x)\, x^\alpha\, dx$$
>
> *où* $C_{4.1} = M_{4.1}^{p(1-p)}\, p^p\, \frac{1}{p-\alpha-1}$.

NB : on retrouve le résultat du ***corollaire*** *II.3.1* au §3 avec la constante optimale $C_{4.1} = C_{3.1} = M_{4.1}^{p(1-p)}\, p^p\, \frac{1}{p-\alpha-1}$ où $M_{4.1} = M_{3.1}$.

4.2. CAS DE FONCTION MONOTONE ET $w(x) \equiv 1$

Si $w(x) \equiv 1$. alors $c = 1$. Si $f \geq 0$ est décroissante sur $(0,\infty)$ alors $f(y) \leq f(0)$ pour tout $y > 0$ et ***(II,6)*** avec $A = 1$ devient

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x f^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x f^p(0)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= f(0) \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= f(0) \quad ;
\end{aligned}$$

donc ***(II,6)*** est vérifié pour $A = 1$.

De même l'hypothèse du ***Corollaire*** *II.4.1* est vérifiée avec $M_{4.2} = A\, p^{\frac{1}{p}} = p^{\frac{1}{p}}$ et dans ce cas on a $c = 1$ car $w(x) \equiv 1$ d'où

Corollaire II.4.2 : *Soient* $0 < p < 1$, $\alpha < p-1$, $w(x) \equiv 1$. *Si une fonction* $f \geq 0$ *sur* $(0,\infty)$ *est décroissante alors on a :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \leq C_{4.2}\int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\,dx$$

où $C_{4.2} := \frac{p}{p-\alpha-1}$.

NB : on obtient le ***Théorème*** *II.2* du § 2 ainsi que le ***Corollaire*** *II.3.3* du § 3 avec constante optimale $C_{4.2} = C_2 = C_{3.3} = \frac{p}{p-\alpha-1}$.

5. UNE INÉGALITÉ TYPE DE HARDY AVEC POIDS

Rappelons que dans le ***théorème*** *II.3* l'inégalité type de Hardy concernait l'opérateur $\widetilde{H}_n$ entre les espaces $L^p_{|x|^{\alpha-n+1}}(\mathbb{R}^n)$ et $L^p_{r^\alpha}(0,\infty)$ avec $\alpha < np-1$, à savoir :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\,dy\right)^p r^\alpha\,dr \leq C\int_{\mathbb{R}^n} f^p(y)\,|y|^{\alpha-n+1}\,dy$$

Le but de ce paragraphe est d'étendre le résultat aux espaces de Lebesgue avec poids plus généraux $L^p_u(\mathbb{R}^n)$ et $L^p_v(0,\infty)$. Ce travail a fait l'objet d'une publication [voir ***[6]***].

On adoptera les notations suivantes : pour une fonctions $g \geq 0$ mesurable sur $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\int^*_{B_{r_1}\Delta B_{r_2}} g(x)\,dx = sgn(r_1 - r_2)\int_{B_{r_1}\Delta B_{r_2}} g(x)\,dx$$
$$= \begin{cases} \int_{B_{r_1}\setminus B_{r_2}} g(x)\,dx & \text{si } 0 < r_2 \leq r_1 \leq \infty \\ -\int_{B_{r_2}\setminus B_{r_1}} g(x)\,dx & \text{si } 0 < r_1 \leq r_2 \leq \infty \end{cases};$$

En coordonnées sphériques on a (pour $0 < r_2 \leq r_1 \leq \infty$ par exemple)

$$\int^*_{B_{r_1}\Delta B_{r_2}} g(x)\,dx = \int_{r_2}^{r_1}\int_{S_{n-1}} g(\rho,\sigma)\,\rho^{n-1}\,d\sigma\,d\rho\;;$$

notons que si g est radiale i.e. $g(x) = \overline{g}(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\int^*_{B_{r_1}\Delta B_{r_2}} g(x)\,dx = n\,v_n\int_{r_2}^{r_1} \overline{g}(\rho)\,\rho^{n-1}\,d\rho\,.$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème II.5 : *Soient* $0 < p < 1$, $M_5 > 0$ *et des fonctions poids* u *et* v *définis respectivement sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $(0, \infty)$.

Supposons que

a) Il existe $l > 0$ *tel que* $$\int_{B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \infty \;, \qquad \textbf{(II,7)}$$

et

b) $\forall\, r > 0$ $$V(r) := \int_r^{\infty} v(\rho)\, \rho^{-np}\, d\rho < \infty\,. \qquad \textbf{(II,8)}$$

Si une fonction $f \geq 0$ *mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *vérifie pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \leq M_5\, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, u(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,9)}$$

alors on a :

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x)\, dx \right)^p v(r)\, dr \leq C_5 \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\, w(x)\, dx \qquad \textbf{(II,10)}$$

où $w(x) = u(x)\, V(|x|)$ *et* $C_5 := \frac{1}{v_n^p}\, p^p\, M_5^{p(1-p)}$

Si de plus on a

$$\int_{B_{r2} \setminus B_{r1}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx < \infty \qquad \text{pour tout } 0 < r_1 < r_2 < \infty \qquad \textbf{(II,11)}$$

alors C_5 *est une constante optimale. et il existe* $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *non nulle vérifiant la condition* ***(II,9)*** *pour laquelle* ***(II,10)*** *devient une égalité.*

La preuve du théorème est basée sur plusieurs résultats préliminaires.

Notons Σ l'ensemble des fonctions positives mesurables pour lesquelles il existe $M_5 > 0$ tel que ***(II,9)*** soit vérifiée.

Lemme 1 *: Soient* $0 < p < 1$ *et* u *une fonction poids sur* $\mathbb{R}^n$. *Supposons en outre la condition* ***(II,9)*** *vérifiée avec* $M_5 > 0$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

1) Si $\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx < \infty \quad \forall r > 0$ *alors alors l'ensemble* Σ *est réduit à un seul élément (la fonction nulle).*

2) Si $\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \infty$ *pour un certain* $r > 0$ *et*

$$\rho = \inf\{\ r > 0\ :\ \int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \infty\ \}\ > 0\ ;$$

alors $\forall\, f \in \Sigma$ *on a* $f = 0$ *pour presque tout* $x \in B_\rho$ *.*

Preuve :

1) cas 1 : Soit $f \in \Sigma$ alors pour $r > 0$ fixé, en appliquant l'inégalité de Holder (notons que le conjugué de $\frac{1}{p}$ est $\frac{1}{1-p}$) puis ***(II,9)*** on a :

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} f^p(y)\, u(y)\, dy &\le \Big(\int_{B_r} \big(f^p(y)\big)^{\frac{1}{p}}\, dy\Big)^p \Big(\int_{B_r} \big(u(y)\big)^{\frac{1}{1-p}}\, dy\Big)^{1-p} \\
&= \Big(\int_{B_r} f(x)\, dx\Big)^p \Big(\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\Big)^{1-p} \\
&\le \Big(\int_{B_r} M_5\, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \Big(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, u(y)\, dy\Big)^{\frac{1}{p}} dx\Big)^p \Big(\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\Big)^{1-p} \\
&\le M_5^p \Big(\int_{B_r} f^p(y)\, u(y)\, dy\Big) \Big(\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx\Big)^p \Big(\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\Big)^{1-p} ;
\end{aligned}$$

d'où pour tout $r > 0$ on a

$$\int_{B_r} f^p(y)\, u(y)\, dy \le M_5^p \Big(\int_{B_r} f^p(y)\, u(y)\, dy\Big) \Big(\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx\Big) .$$

Soit pour $0 < \gamma \le 1$ arbitraire

$$r_0(\gamma) = \sup\{\ r > 0\ :\ \int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx\ \le\ \gamma^p\, M_5^{-p}\} ;$$

alors on a pour tout $r < r_0(\gamma)$

$$\int_{B_r} f^p(y)\, u(y)\, dy \le \gamma^p \Big(\int_{B_{r_0(\gamma)}} f^p(y)\, u(y)\, dy\Big) ;$$

et en notant que

$$\int_{B_{r_0(\gamma)}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx\ =\ \lim_{r \to r_0^-(\gamma)} \int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx\ \le\ \gamma^p\, M_5^{-p} ;$$

on déduit par passage à la limite

$$\int_{B_{r_0(\gamma)}} f^p(y)\, u(y)\, dy \leq \gamma^p \left(\int_{B_{r_0(\gamma)}} f^p(y)\, u(y)\, dy \right)$$

i.e. que pour tout $0 < \gamma \leq 1$ on a

$$\|f\|_{L^p_{B_{r_0(\gamma)}}} \leq \gamma \, \|f\|_{L^p_{B_{r_0(\gamma)}}} .$$

Ceci n'est possible que si $f = 0 \quad p.p.\, x \in B_{r_0(\gamma)}$ pour tout $0 < \gamma \leq 1$, en particulier

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in B_{r_0} \qquad \textbf{\textit{(II,12)}}$$

où $r_0 = r_0(1)$.

Si $r_0 = +\infty$ le résultat est établi sinon on montre que

$$\int_{B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx \ = \ M_5^{-p} .$$

On a par définition de $r_0(\gamma)$

$$\int_{B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\ dx \ \leq \ M_5^{-p} .$$

Supposons que

$$\int_{B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\ dx \ < \ M_5^{-p} ,$$

alors la fonction $g : r \to g(r) := \int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx$ est continue et par suite il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_{B_{r_0+\delta}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\ dx \ < \ M_5^{-p} ;$$

et d'après la définition de $r_0 = r_0(1)$ on doit avoir $r_0 \geq r_0 + \delta$ ce qui est impossible. Donc

$$\int_{B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx \ = \ M_5^{-p} .$$

De ***(II,12)*** et ***(II,9)*** on déduit que pour presque tout $|x| > r_0$:

$$f(x) \leq M_5 \ u^{\frac{1}{1-p}}(x) \left(\int_{B_{|x|} \setminus B_{r_0}} f^p(y)\, u(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{\textit{(II,9 bis)}}$$

En reprenant les arguments établis précédemment on a pour $r > r_0$ [inégalité de Holder puis ***(II,9 bis)***] :

$$\int_{B_r} f^p(y)\,u(y)\,dy \le M_5^p \left(\int_{B_r} f^p(y)\,u(y)\,dy\right)\left(\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx\right).$$

On pose

$$r_1 = \sup\{\, r > r_0 \;:\; \int_{B_r\setminus B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx \;\le\; M_5^{-p}\}\;;$$

et on montre que

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in B_{r_1} \setminus B_{r_0}$$

et par suite

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in B_{r_1}\,.$$

Si $r_1 = +\infty$ le résultat est établi sinon on montre que

$$\int_{B_{r_1}\setminus B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx \;=\; M_5^{-p}\,.$$

On répète ainsi la procédure … à un certains moment $r_k = \infty$ et donc $f = 0 \quad p.p.\, x \in \mathbb{R}^n$, sinon on aura une suite de boules

$$B_{r_0} \subset B_{r_1} \subset \ldots \subset B_{r_k} \subset \ldots B_\sigma = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{r_k} \text{ où } 0 < r_0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots < \infty$$

avec $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{B_{r_k}\setminus B_{r_{k-1}}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx \;=\; M_5^{-p}\,.$$

et

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in B_{r_\sigma}\,.$$

Montrons que $B_{r_\sigma} = \mathbb{R}^n$. Si ce n'est pas le cas on doit avoir d'après l'hypothèse

$$\int_{B_{r_\sigma}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx < \infty.$$

On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{B_{r_k}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx \;=\; \int_{B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx + \int_{B_{r_1}\setminus B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx + \ldots + \int_{B_{r_k}\setminus B_{r_{k-1}}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx \;=\; (k+1)\,M_5^{-p}\,,$$

et par suite

$$\int_{B_{r_\sigma}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{B_{r_k}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx = +\infty\,,$$

contradiction, donc $B_{r_\sigma} = \mathbb{R}^n$ et

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in \mathbb{R}^n\,.$$

2) cas 2 : On Suppose $\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx = \infty$ pour un certain $r > 0$ et $\rho = \inf\{\ r > 0\ :\ \int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx = \infty\ \}\ > 0$. Alors en remarquant que la fonction $r \to g(r) := \int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx$ est croissante on a

$$\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx < \infty \quad \forall r \in (0,\rho).$$

On obtient ainsi une condition similaire au ***cas 1*** sur l'intervalle $(0,\rho)$ au lieu de $(0,+\infty)$ et avec la même procédure, mais avec la restriction $r < \rho$, on montrera que

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in B_\rho\ .$$

En effet, étant donnée $f \in \Sigma$, on montre [en vertu de l'inégalité de Holder puis ***(II,9)***] que pour tout $0 < r < \rho$:

$$\int_{B_r} f^p(y)\,u(y)\,dy \leq M_5^p \left(\int_{B_r} f^p(y)\,u(y)\,dy\right)\left(\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx\right).$$

On définit pour $0 < \gamma \leq 1$

$$r_0(\gamma) = \sup\{\ r \in (0,\rho)\ :\ \int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx\ \leq\ \gamma^p\ M_5^{-p}\}\ ;$$

alors pour tout $0 < \gamma \leq 1$ on a

$$\|f\|_{L^p_{B_{r_0(\gamma)}}} \leq \gamma\ \|f\|_{L^p_{B_{r_0(\gamma)}}}\ ;$$

ce qui n'est possible que si $f = 0 \quad p.p.\, x \in B_{r_0(\gamma)}$ pour tout $0 < \gamma \leq 1$, en particulier pour $r_0 = r_0(1)$. Donc

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in B_{r_0}\ .$$

Si $r_0 = \rho$ le résultat est établi. Sinon on montre, grâce à la continuité de la fonction $g : r \to g(r) := \int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx$, que

$$\int_{B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx\ =\ M_5^{-p}\ ,$$

et pour presque tout $\rho > |x| > r_0$:

$$f(x) \leq M_5\ u^{\frac{1}{1-p}}(x)\left(\int_{B_{|x|}\setminus B_{r_0}} f^p(y)\,u(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On reprend ainsi la procédure pour montrer que en posant

$$r_k = \sup\{ r_{k-1} < r < \rho \ : \ \int_{B_r \setminus B_{r_{k-1}}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx \ \leq \ M_5^{-p} \} \quad , \quad k \in \mathbb{N}^*$$

On a

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in B_{r_k} .$$

Forcément il existe $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on a $r_k = \rho$ et

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in B_\rho \,;$$

sinon on aura une suite de boules

$$B_{r_0} \subset B_{r_1} \subset \dots \subset B_{r_k} \subset \dots B_\sigma = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{r_k} \ \text{ où } \ 0 < r_0 < r_1 < \dots < r_k < \dots < \rho$$

avec $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{B_{r_k} \setminus B_{r_{k-1}}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx \ = \ M_5^{-p}$$

et

$$f = 0 \quad p.p.\, x \in B_{r_\sigma} .$$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{B_{r_k}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx \ = \ \int_{B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx + \int_{B_{r_1} \setminus B_{r_0}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx + \dots + \int_{B_{r_k} \setminus B_{r_{k-1}}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx \ = \ (k+1)\, M_5^{-p} ,$$

et par suite

$$\int_{B_{r_\sigma}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_{B_{r_k}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = +\infty .$$

Donc $B_{r_\sigma} = B_\rho$ et $f = 0 \quad p.p.\, x \in B_\rho$.

<u>Remarques :</u>

<u>1)</u> Ce lemme met en évidence la nécessité de la condition ***(II,7)*** sur le poids u dans le théorème. Sans cette condition la classe des fonctions vérifiant l'inégalité ***(II,9)*** se réduit à un seul élément : la fonction nulle presque partout.

<u>2)</u> Dans le ***Théorème** II.3* qui correspond à un cas particulier du ***Théorème** II.5* (précédent) on a $u(x) = |x|^{-n\,(1-p)}$, et dans ce cas $\forall\, l > 0$ on a

$$\int_{B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \int_{B_l} |x|^{-n(1-p)\,\frac{1}{1-p}}\, dx = \int_{B_l} |x|^{-n}\, dx = \infty.$$

__Lemme 2__ : Soient $0 < p < 1$, $M_5 > 0$, u une fonction poids sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant.

a) Il existe $l > 0$ tel que $$\int_{B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = +\infty \qquad \textbf{(II,7)}$$

b) Pour tout $0 < r_1 < r_2 < \infty$ $$\int_{B_{r2}\setminus B_{r1}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx < \infty \qquad \textbf{(II,11)}$$

1) *S'il existe $k \geq 0$ telle que*

$$f(x) = K\, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \exp\left(\frac{M_5^p}{p} \int_{B_{|x|}\Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\right) \quad , \ (x \in \mathbb{R}^n) \qquad \textbf{(II,13)}$$

*alors $\forall r > 0$: $f \in L_u^p(B_r)$ et on a égalité dans **(II,9)** i.e. :*

$$f(x) = M_5\, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, u(y)\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \cdot, \ (x \in \mathbb{R}^n) \qquad \textbf{(II,14)}$$

2) *Si de plus $u > 0$ est radiale alors :*
*si on a égalité dans **(II,9)** (i.e. **(II,14)** est vérifiée) pour $f \in L_u^p(B_r)$ et radiale $\forall r > 0$ alors inversement f est de la forme **(II,13)** .*

__Preuve :__ étant donné un poids u sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant ***(II,7)*** et ***(II,11)***

__1)__ supposons qu'il existe $K \geq 0$ telle que [voir notations dans introduction]

$$f(x) = K\, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \exp\left(\frac{M_5^p}{p} \int_{B_{|x|}\Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\right). \qquad \textbf{(II,13)}$$

Soit $r > 0$, intégrons sur $L_u^p(B_r)$

$$\left(\int_{B_r} f^p(x)\, u(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = K\left(\int_0^r \int_{S_{n-1}} u^{\frac{1}{1-p}}(\rho\sigma)\, d\sigma \quad \exp\left[M_5^p \int_{B_\rho\Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\right] \quad \rho^{n-1}\, d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \text{, } \textbf{(II,13 bis)}$$

on pose

$$\phi(\rho) := \left[M_5^p \int_{B_\rho\Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\right]$$

alors $\phi'(\rho) := M_5^p \int_{S_{n-1}} u^{\frac{1}{1-p}}(\rho\,\xi)\ \rho^{n-1}\, d\xi$ et ***(II,13 bis)*** peut écrire

$$\left(\int_{B_r} f^p(x)\, u(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = K\left(\int_0^r \left(M_5^{-p}\, \phi'(\rho)\right) \quad \exp\left[\phi(\rho)\right] \quad d\rho\right)^{\frac{1}{p}};$$

d'où

$$\left(\int_{B_r} f^p(x)\,u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = K\,M_5^{-1}\left(\int_0^r \frac{d}{d\rho}\exp\Big[\phi(\rho)\Big]\quad d\rho\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= K\,M_5^{-1}\left(\ \exp\Big[\phi(r)\Big] - \lim_{s\to 0^+}\exp\Big[\phi(s)\Big]\ \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= K\,M_5^{-1}\left(\ \exp\left[M_5^p \int^{*}_{B_r\Delta B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\,dy\right] - \lim_{s\to 0^+}\exp\left[C_1^p\int^{*}_{B_s\Delta B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\,dy\ \right]\ \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= K\,M_5^{-1}\left(\ \exp\left[M_5^p \int^{*}_{B_r\Delta B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\,dy\right] - \lim_{s\to 0^+}\exp\left[\,-C_1^p\int_{B_l\setminus B_s} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\,dy\ \right]\ \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= K\,M_5^{-1}\left(\ \exp\left[M_5^p \int^{*}_{B_r\Delta B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\,dy\right]\ \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad ;$$

d'où

$$K\,\exp\left[\frac{M_5^p}{p}\int^{*}_{B_r\Delta B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\,dy\right] = M_5\left(\int_{B_r} f^p(x)\,u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

et en vertu de ***(II,13)*** on obtient ***(II,14)*** à savoir

$$f(x) = M_5\,u^{\frac{1}{1-p}}(x)\left(\int_{B_r} f^p(x)\,u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2) On suppose $u > 0$ et radiale et soit $f \in L_u^p(B_r)$, $\forall r > 0$ et radiale vérifiant l'égalité dans ***(II,9)***, i.e.

$$f(x) = M_5\,u^{\frac{1}{1-p}}(x)\left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\,u(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\cdot,\ (x\in\mathbb{R}^n) \qquad \textbf{\textit{(II,14)}}$$

Si $f = 0 \quad p.p.\,x \in B_{r_k} = \mathbb{R}^n$ alors f est trivialement de la forme ***(II,13)***. On supposera désormais f non équivalente à la fonction nulle sur $\mathbb{R}^n$.

En passant aux coordonnées sphériques dans ***(II,14)*** on obtient

$$f^p(r\sigma) = M_5^p\ u^{\frac{p}{1-p}}(r\,\sigma)\left(\int_0^r\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\,\xi)\,u(\rho\,\xi)\,\rho^{n-1}\ d\xi d\rho\ \right),$$

et on déduit que

$$\int_{S_{n-1}} f^p(r\,\sigma)\,u(r\,\sigma)\,d\sigma = M_5^p\left(\int_{S_{n-1}} u^{\frac{1}{1-p}}(r\,\sigma)\,d\sigma\right)\left(\int_0^r\left(\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\,\xi)\,u(\rho\,\xi)\,d\xi\right)\rho^{n-1}\,d\rho\right) \textbf{\textit{(II,15)}}$$

On pose

$$U(r) := \left(\int_{S_{n-1}} u^{\frac{1}{1-p}}(r\,\sigma)\ d\sigma\right),$$

alors ***(II,15)*** s'écrit

$$\int_{S_{n-1}} f^p(r\,\sigma)\,u(r\,\sigma)\,d\sigma = M_5^p\; U(r)\;\left(\int_0^r \left(\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\,\xi)\,u(\rho\,\xi)\,d\xi\right)\rho^{n-1}\,d\rho\right) \quad ;\ \textbf{\textit{(II,15 bis)}}$$

on pose aussi

$$\varphi(r) := \int_0^r \left(\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\,\xi)\,u(\rho\,\xi)\,d\xi\right)\rho^{n-1}\,d\rho$$

alors

$$\varphi'(r) = r^{n-1} \int_{S_{n-1}} f^p(r\,\sigma)\,u(r\,\sigma)\,d\sigma \quad .$$

et en multipliant ***(II,15 bis)*** par r^{n-1} on obtient

$$\varphi'(r) = M_5^p\, r^{n-1}\, U(r)\, \varphi(r)\,. \qquad \textbf{\textit{(II,16)}}$$

Soit

$$r_0 = \inf\{\, r > 0 : \varphi(r) > 0 \,\}\,;$$

on a $0 \leq r_0 < \infty$ (f est non équivalente à la fonction nulle sur $\mathbb{R}^n$) et la fonction φ étant croissante

$$\forall\, r > r_0 \ :\ \varphi(r) > 0\ .$$

On note que $\varphi(0) = 0$; on montre que $r_0 = 0$. En effet si $r_0 > 0$, alors :

1) D'une part on a $\varphi(r_0) = 0$, à cause de la continuité de la fonction φ. En effet si $\varphi(r_0) > 0$ alors, par continuité de φ par rapport à r, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(r) > 0$ sur $(r_0 - \varepsilon, r_0)$ ce qui contredirait la définition de r_0.

2) D'autre part de ***(II,16)*** on déduit que pour tout $r > r_0$

$$\frac{d}{dr}\ln\big(\varphi(r)\big) = \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = M_5^p\, r^{n-1}\, U(r)\ ;$$

en intégrant sur $(r_0 + l, r)$

$$\ln\left(\frac{\varphi(r)}{\varphi(r_0 + l)}\right) = M_5^p \int_{r_0+l}^r \rho^{n-1}\, U(\rho)\, d\rho\ ,$$

et de là $\forall\, r > r_0$

$$\varphi(r) = \varphi(r_0 + l)\ \exp\left(M_5^p \int_{r_0+l}^r \rho^{n-1}\, U(\rho)\, d\rho\right) > 0 \qquad \textbf{\textit{(II,17)}}$$

On passe à la limite

$$\varphi(r_0) = \lim_{r \to r_0^+} \varphi(r) = \varphi(r_0 + l)\ \exp\left(M_5^p \int_{r_0+l}^{r_0} \rho^{n-1}\, U(\rho)\, d\rho\right) > 0\ ;$$

d'où la contradiction. Donc forcément $r_0 = 0$ et ***(II,17)*** devient

$$\forall\, r > 0\ ,\ \varphi(r) = \varphi(l)\ \exp\left(M_5^p \int_l^r \rho^{n-1} U(\rho)\, d\rho\right)\ . \qquad \textbf{\textit{(II,17 bís)}}$$

De ***(II,15)*** et ***(II,16)*** et ***(II,17 bís)*** on obtient $\forall\, r > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{S_{n-1}} f^p(r\,\sigma)\, u(r\,\sigma)\, d\sigma = \frac{\varphi'(r)}{r^{n-1}} &= M_5^p\, U(r)\, \varphi(r) \\
&= M_5^p \left(\int_{S_{n-1}} u^{\frac{1}{1-p}}(r\,\sigma)\, d\sigma\right) \varphi(l)\ \exp\left(M_5^p \int_l^r \rho^{n-1} U(\rho)\, d\rho\right) \\
&= M_5^p\, \varphi(l) \left(\int_{S_{n-1}} u^{\frac{1}{1-p}}(r\,\sigma)\, d\sigma\right) \exp\left(M_5^p \int_l^r \rho^{n-1} \left(\int_{S_{n-1}} u^{\frac{1}{1-p}}(r\,\sigma)\, d\sigma\right) d\rho\right)
\end{aligned}$$

donc $\forall\, r > 0$

$$\int_{S_{n-1}} f^p(r\,\sigma)\, u(r\,\sigma)\, d\sigma = M_5^p\, \varphi(l) \left(\int_{S_{n-1}} u^{\frac{1}{1-p}}(r\,\sigma)\, d\sigma\right) \exp\left(M_5^p \int_{B_r \Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx\right);$$

Puisque u et f sont des fonctions radiales on a $u(r\,\sigma) = \overline{u}(r)$ et $f(r\,\sigma) = \overline{f}(r)$ doù

$$\overline{f}^p(r)\ \ \overline{u}(r)\ \ n\,v_n = M_5^p\, \varphi(l)\ \ \overline{u}^{\frac{1}{1-p}}(r)\ \ n\,v_n\ \exp\left(M_5^p \int_{B_r \Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx\right)$$

Comme $u > 0$ on obtient

$$\overline{f}(r) = K\ \ \overline{u}^{\frac{1}{1-p}}(r)\ \ \exp\left(M_5^p \int_{B_r \Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

avec $\quad K = M_5\ \varphi^{\frac{1}{p}}(l) = M_5\ \ \left(\int_{B_l} f^p(y)\, u(y)\, dy\ \right)^{\frac{1}{p}} = M_5\ \ \|f\|_{L_u^p(B_l)}$

$\boxdot$

<u>Exemples :</u>

<u>1)</u> si $u(x) = |x|^\alpha$ avec $\alpha > n\,p - 1$ alors l'égalité dans ***(II,9)*** est atteinte pour

$$f(x) = K\, |x|^{\frac{\alpha}{1-p}}\ \exp\left[\ \frac{n\, v_n\, M_5^p}{p} \left(n + \frac{\alpha}{1-p}\right)^{-1} |x|^{n+\frac{\alpha}{1-p}}\ \right],$$

<u>2)</u> si $u(x) = |x|^{n(p-1)}$ alors l'égalité dans ***(II,9)*** est atteinte pour

$$f(x) = K\, |x|^{(\frac{v_n\, M_5^p}{p} - 1)\, n}.$$

3) si f est radialement décroissante alors l'égalité dans ***(II,9)*** est réalisée avec $M_5 = \left(\frac{p}{v_n}\right)^{\frac{1}{p}}$ et est atteinte pour $f(x) = K$.

Lemme 3 *: Soient $0 < p < 1$, u une fonction poids sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant.*

Il existe $l > 0$ tel que $$\int_{B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \infty\,. \qquad \textbf{(II,7)}$$

1) *Si une fonction$f \geq 0$ mesurable sur $\mathbb{R}^n$ vérifie pour $M_5 > 0$*

$$f(x) \leq M_5\, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, u(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^n \qquad \textbf{(II,9)}$$

alors on a $\forall r > 0$:

$$\left(\int_{B_r} f(x)\, dx \right) \leq p\, M_5^{1-p} \left(\int_{B_r} f^p(x)\, u(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textbf{(II,18)}$$

2) *Si en plus on a*

$$\int_{B_{r2} \setminus B_{r1}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx < \infty \qquad \text{pour tout } 0 < r_1 < r_2 < \infty \qquad \textbf{(II,11)}$$

*alors la constante $p\, M_5^{1-p}$ est optimale dans **(II,18)** où l'on obtient égalité pour toute fonction définie par*

$$f(x) = K\, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \exp\left(\frac{M_5^p}{p} \int_{B_{|x|} \Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy \right) \;,\; (x \in \mathbb{R}^n) \qquad \textbf{(II,13)}$$

3) *D'autre part Si $u > 0$ est radiale et vérifiant **(II,7)** et **(II,11)** alors si on a égalité dans **(II,18)** pour $f \in L_u^p(B_r)$ et radiale $\forall r > 0$ alors inversement f est de la forme **(II,13)** .*

Preuve :

1) Soit une fonction $f \geq 0$ mesurable sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour $C_1 > 0$ l'inégalité ***(II,9)*** ; en notant que $1 - p > 0$ on a

$$f^{1-p}(x) \leq M_5^{1-p}\, u(x) \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, u(y)\, dy \right)^{\frac{1-p}{p}}$$

d'où $p.p.\ x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \leq M_5^{1-p} \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, u(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}-1} f^p(x)\, u(x)\,.$$

On intègre sur B_r , $(r>0)$ en utilisant les coordonnées sphériques

$$\left(\int_{Br} f(x)\,dx\right) \leq M_5^{1-p} \int_0^r \int_{Sn-1} \left(\int_0^\rho \int_{S_{n-1}} f^p(t\xi)\,u(t\xi)\,t^{n-1}\,d\xi\,dt\right)^{\frac{1}{p}-1} f^p(\rho\sigma)\,u(\rho\sigma)\,\rho^{n-1}\,d\sigma\,d\rho$$

$$= M_5^{1-p} \int_0^r \left(\int_0^\rho \int_{S_{n-1}} f^p(t\xi)\,u(t\xi)\,t^{n-1}\,d\xi\,dt\right)^{\frac{1}{p}-1} \left(\int_{S_{n-1}} f^p(\rho\sigma)\,u(\rho\sigma)\,\rho^{n-1}d\sigma\right)\,d\rho\,.$$

On pose

$$\phi(\rho) := \left(\int_0^\rho \int_{S_{n-1}} f^p(t\,\xi)\;u(t\,\xi)\;t^{n-1}\;d\xi\;dt\right)\,;$$

alors

$$\left(\int_{Br} f(x)\,dx\right) \leq M_5^{1-p} \int_0^r \left(\phi(\rho)\right)^{\frac{1}{p}-1}\,\phi'(\rho)\,d\rho$$

$$= M_5^{1-p} \int_0^r p\,\frac{d}{d\rho}\left(\phi(\rho)\right)^{\frac{1}{p}}\,d\rho$$

$$= p\,M_5^{1-p}\left(\int_0^r \int_{S_{n-1}} f^p(t\xi)\;u(t\xi)\;t^{n-1}\,d\xi\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

d'où

$$\left(\int_{Br} f(x)\,dx\right) \leq p\,M_5^{1-p}\left(\int_{B_r} f^p(x)\,u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2) On suppose en plus que u vérifie la condition ***(II,11)*** et considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = K\,u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,\exp\left(\frac{M_5^p}{p}\int^*_{B_{|x|}\Delta B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\,dy\right)\;\;;\;(K\geq 0)$$

d'après le ***lemme*** *2* on a $\forall r>0\;:\;f\in L^p_u(B_r)$ et vérifie ***(II,14)*** *i.e.* $p.p.\;x\in\mathbb{R}^n$

$$f(x) = M_5\;u^{\frac{1}{1-p}}(x)\left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\,u(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En reprenant les calculs précédents (partie ***1)***) on obtient

$$f^{1-p}(x)\;=\;M_5^{1-p}\;u(x)\left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\,u(y)\,dy\right)^{\frac{1-p}{p}}$$

d'où $p.p.\;x\in\mathbb{R}^n$

$$f(x)\;=\;M_5^{1-p}\left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\,u(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}-1} f^p(x)\,u(x).,$$

et par intégration sur B_r , $(r > 0)$ en utilisant les coordonnées sphériques on obtient

$$\left(\int_{Br} f(x)\,dx\right) = ... = p\,M_5^{1-p}\left(\int_{B_r} f^p(x)\,u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \,.$$

3) On suppose que $u > 0$ est radiale vérifiant ***(II,7)*** et ***(II,11)***. Considérons $f \in L_u^p(B_r)$, $\forall r > 0$ et radiale vérifiant l'égalité dans ***(II,18)*** *i.e.*

$$\left(\int_{B_r} f(x)\,dx\right) = p\,M_5^{1-p}\,\left(\int_{B_r} f^p(x)\;u(x)\;dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad ;$$

en utilisant les coordonnées sphériques on a :

$$\left(\int_0^r \int_{S_{n-1}} \overline{f}(\rho)\,d\xi\;\;\rho^{n-1}\,d\rho\right) = p\,M_5^{1-p}\,\left(\int_0^r \int_{S_{n-1}} \overline{f}^p(\rho)\;\overline{u}(\rho)\;d\xi\;\rho^{n-1}\;d\rho\right)^{\frac{1}{p}},$$

d'où

$$n\,v_n\,\left(\int_0^r \overline{f}(\rho)\;\rho^{n-1}\;d\rho\right) = p\,M_5^{1-p}\,\left(n\,v_n\;\int_0^r \overline{f}^p(\rho)\;\overline{u}(\rho)\;\rho^{n-1}\;d\rho\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On dérive par rapport à r

$$n\,v_n\;\overline{f}(r)\;r^{n-1}\;=M_5^{1-p}\;(n\,v_n)^{\frac{1}{p}}\;\overline{f}^p(r)\;\overline{u}(r)\;r^{n-1}\;\left(\int_0^r \overline{f}^p(\rho)\;\overline{u}(\rho)\;\rho^{n-1}\;d\rho\right)^{\frac{1}{p}-1},$$

d'où

$$\left(\overline{f}(r)\right)^{1-p}\;r^{\frac{(n-1)(1-p)}{p}}\;=M_5^{1-p}\;(n\,v_n)^{\frac{1-p}{p}}\;\;\overline{u}^{\frac{1-p}{1-p}}(r)\;r^{\frac{(n-1)(1-p)}{p}}\;\left(\int_0^r \overline{f}^p(\rho)\;\overline{u}(\rho)\;\rho^{n-1}\;d\rho\right)^{\frac{1-p}{p}}.$$

En élevant à la puissance $\frac{p}{1-p}$ et multipliant par $\overline{u}(r)$

$$\overline{f}^p(r)\;\overline{u}(r)\;r^{(n-1)}\;\;=\;\;M_5^p\;(n\,v_n)\;\overline{u}^{\frac{p}{1-p}}(r)\;\overline{u}(r)\;r^{(n-1)}\;\left(\int_0^r \overline{f}^p(\rho)\;\overline{u}(\rho)\;\rho^{n-1}\;d\rho\right);$$

en posant $\psi(r) := \int_0^r \overline{f}^p(\rho)\;\overline{u}(\rho)\;\rho^{n-1}\;d\rho$ on obtient

$$\psi'(r)\;=n\,v_n\,M_5^p\quad r^{(n-1)}\;\overline{u}^{\frac{1}{1-p}}(r)\quad\psi(r)\,. \qquad \textbf{\textit{(II,19)}}$$

On suit la même procédure que dans la preuve du ***lemme 2*** pour déduire que pour presque tout $r > 0$:

$$\psi(r) = \psi(l)\,\exp\left(M_5^p\;n\,v_n\int_l^r \overline{u}^{\frac{1}{1-p}}(r)\,\rho^{n-1}\;d\rho\right) = \psi(l)\,\exp\left(M_5^p\int_{B_r\Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\;dx\right)$$

De là ***(II,19)*** devient

$$\overline{f}^p(r)\;\overline{u}(r)\;r^{(n-1)}\;=(n\,v_n)\,M_5^p\quad r^{(n-1)}\;\overline{u}^{\frac{1}{1-p}}(r)\quad\psi(l)\;\exp\left(M_5^p\;\int_l^r \rho^{n-1}\;\overline{u}^{\frac{1}{1-p}}(r)\;\;d\rho\right)$$

et comme $\overline{u} > 0$ et $r > 0$

$$\overline{f}^p(r) = (n\, v_n)\; M_5^p\; \psi(l) \quad \overline{u}^{\frac{p}{1-p}}(r) \quad \exp\left(M_5^p \int_l^r \rho^{n-1}\, \overline{u}^{\frac{1}{1-p}}(r)\;\; d\rho\right),$$

d'où

$$\overline{f}(r) = K \quad \overline{u}^{\frac{1}{1-p}}(r) \quad \exp\left(\frac{M_5^p}{p} \int_l^r \rho^{n-1}\, \overline{u}^{\frac{1}{1-p}}(r)\;\; d\rho\right)$$

avec

$$\begin{aligned} K &:= (n\, v_n)^{\frac{1}{p}}\; M_5\; \psi^{\frac{1}{p}}(l) = M_5 \;\left(n\, v_n \int_0^l \overline{f}^p(\rho)\; \overline{u}(\rho)\; \rho^{n-1}\; d\rho \;\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= M_5 \;\left(\int_0^l \int_{S_{n-1}} f^p(\rho\,\sigma)\; u(\rho\,\sigma)\; \rho^{n-1}\; d\sigma \;\; d\rho\;\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= M_5 \;\; \|f\|_{L_u^p(B_l)} \qquad . \end{aligned}$$

$\boxdot$

<u>Preuve du théorème</u> *<u>II.5</u>* ***<u>:</u>*** sous les hypothèses du théorème, en utilisant le ***lemme 3*** [partie n° ***1)***] on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x)\, dx\right)^p v(r)\; dr &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{v_n\, r^n} \int_{B_r} f(x)\, dx\right)^p v(r)\; dr \\ &\leq \frac{1}{v_n^p} \int_0^\infty \frac{v(r)}{r^{np}} \left(p\, M_5^{(1-p)}\right)^p \left(\int_{B_r} f^p(x)\, u(x)\; dx\right) dr\;, \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\, dy\right)^p r^\alpha\; dr &\leq \left(\frac{p\, M_5^{(1-p)}}{v_n}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\, u(x) \left(\int_{|x|}^\infty \frac{v(r)}{r^{n\,p}}\, dr\right) dx \\ &= \left(\frac{p\, M_5^{(1-p)}}{v_n}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\, u(x)\; V(|x|)\; dx\;, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité ***(II,10)***

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)\, dy\right)^p r^\alpha\; dr \leq C_5 \int_{\mathbb{R}^n} f^p(y)\, w(x)\; dx$$

avec $w(x) := u(x)\, V(|x|)$, et $C_5 := \frac{1}{v_n^p}\; p^p\; M_5^{p(1-p)}$.

$\boxdot$

Constante optimale : on suppose en plus que ***(II,11)*** est vérifiée et on considère pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$g(x) = u^{\frac{1}{1-p}}(x) \exp\left(\frac{M_5^p}{p} \int^*_{B_{|x|}\Delta B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\right),$$

alors d'après le ***lemme 2*** [partie n° ***1)***] on a

$$g(x) = M_5\; u^{\frac{1}{1-p}}(x) \left(\int_{B_{|x|}} g^p(y)\, u(y)\, dy\right)^{\frac{1}{p}} .$$

et donc l'hypothèse ***(II,9)*** du théorème est vérifiée, alors d'après le ***lemme 3*** [partie n° ***2)***] on a pour $(x \in \mathbb{R}^n)$

$$\left(\int_{Br} g(x)\, dx\right)^p = \left(p\, M_5^{1-p}\right)^p \left(\int_{B_r} g^p(x)\, u(x)\, dx\right) . \qquad \textbf{(II,20)}$$

En reprenant le calcul dans la preuve du ***théorème*** *II.5* pour la fonction g en tenant compte de ***(II,20)*** on aura

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} g(x)\, dx\right)^p v(r)\, dr &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{v_n\, r^n}\int_{B_r} g(x)\, dx\right)^p v(r)\, dr \\ &= \frac{1}{v_n^p}\int_0^\infty \frac{v(r)}{r^{np}}\left(\int_{B_r} g(x)\, dx\right)^p dr \\ &= \frac{1}{v_n^p}\int_0^\infty \frac{v(r)}{r^{np}}\left(p\, M_5^{(1-p)}\right)^p \left(\int_{B_r} g^p(x)\, u(x)\, dx\right) dr\,,\end{aligned}$$

le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} g(y)\, dy\right)^p r^\alpha\, dr &= \left(\frac{p\, M_5^{(1-p)}}{v_n}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} g^p(x)\, u(x) \left(\int_{|x|}^\infty \frac{v(r)}{r^{n\,p}}\, dr\right) dx \\ &= \left(\frac{p\, M_5^{(1-p)}}{v_n}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} g^p(x)\, u(x)\, V(|x|)\, dx\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} g(y)\, dy\right)^p r^\alpha\, dr \;=\; \frac{p^p\, M_5^{p(1-p)}}{v_n^p} \int_{\mathbb{R}^n} g^p(y)\, w(x)\, dx\,.$$

avec $w(x) := u(x)\, V(|x|)$, la constante $C_2 = \frac{p^p\, M_5^{p(1-p)}}{v_n^p}$ est donc optimale dans ***(II,10)*** .

$\boxdot$

5.1. CAS DE POIDS SPÉCIAUX

En posant dans le ***Théorème II.5*** précédent

$$u(x) = |x|^{-n(1-p)} \qquad \text{et} \qquad v(r) = r^{\alpha}$$

on a :

a) Pour $l = 1$ $\displaystyle\int_{B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \int_{B_1} |x|^{-n}\, dx = +\infty$,

b) $\forall\, r > 0$, $\displaystyle V(r) := \int_r^{\infty} v(\rho)\, \rho^{-np}\, d\rho = \int_r^{\infty} \rho^{\alpha - np}\, d\rho = \frac{r^{\alpha-np+1}}{-\alpha+np-1} < \infty$ pour $\alpha - np + 1 < 0$.

Dans ce cas

$$w(x) = u(x)\, V(|x|) = \frac{|x|^{-n(1-p)} \times |x|^{\alpha-np+1}}{-\alpha+np-1} = \frac{|x|^{\alpha-n+1}}{-\alpha+np-1} ,$$

c) $\displaystyle f(x) \le M_5\, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, u(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}} = M_5 \frac{1}{|x|^n} \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, u(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}}$,

d) pour tout $0 < r_1 < r_2 < \infty$ on a

$$\int_{B_{r2} \setminus B_{r1}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \int_{r2}^{r1} \int_{S_{n-1}} u^{\frac{1}{1-p}}(r\,\xi)\, r^{n-1}\, d\xi\, dr = n\, v_n \int_{r1}^{r1} r^{-n}\, r^{n-1}\, dr = n\, v_n \ln \frac{r2}{r1} < \infty ,$$

e) on a

$$g(x) := u^{\frac{1}{1-p}}(x) \exp\left(\frac{M_5^p}{p} \int_{B_{|x|} \Delta B_l}^{*} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy \right) = \frac{1}{|x|^n} \exp\left(\frac{M_5^p}{p}\, n\, v_n \int_1^{|x|} \rho^{-n}\, \rho^{n-1}\, d\rho \right)$$

$$= \frac{1}{|x|^n} \exp\left(\ln(|x|)^{\frac{n\, v_n\, M_5^p}{p}} \right) = |x|^{n\,\left(\frac{v_n\, M_5^p}{p} - 1\right)} ;$$

d'où l'on déduit

> ***Corollaire II.5.1 :*** *Soient* $0 < p < 1$, $M_{5.1} > 0$ *et* $\alpha < np - 1$.
>
> *Si une fonction* $f \ge 0$ *mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *vérifie pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^n$
>
> $$f(x) \le M_{5.1} \frac{1}{|x|^n} \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, |x|^{-n(1-p)}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{\textit{(II,9)'}}\ [2]$$

[2] l'inégalité ***(II,9)'*** est l'inégalité ***(II,9)*** dans le ***Théorème II.5*** pour $u(x) = |x|^{-n(1-p)}$ et $v(r) = r^{\alpha}$

alors on a :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x)\,dx\right)^p r^\alpha\,dr \le C_{5.1}\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\,|x|^{\alpha-n+1}\,dx \qquad \textbf{(II,10)'}$$ [3]

où $C_{5.1} := \frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_{5.1}^{p(1-p)}}{np-\alpha-1}$ *est une constante optimale. De plus pour* $f(x) = |x|^{n\,\left(\frac{v_n\,M_{5.1}^p}{p}-1\right)}$ *qui vérifie la condition* ***(II,9)'*** *, l'inégalité* ***(II,10)'*** *devient une égalité.*

NB : on retrouve le résultat du ***théorème*** *II.3* avec la constante optimale $C_{5.1} = C_3 = \frac{1}{v_n^p}\,\frac{p^p\,M_{5.1}^{p(1-p)}}{np-\alpha-1}$

5.2. CAS n=1

Corollaire II.5.2 : *Soient* $0<p<1$, $M_{5.2}>0$, *des fonctions poids* u *et* v *sur* $(0,\infty)$. *Supposons que*

a) Il existe $l>0$ *tel que* $\int_0^l u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx = \infty$ ***,(II,7)***

et

b) $\forall\, r>0$ $\qquad V(r) := \int_r^\infty \frac{v(\rho)}{\rho^p}\,d\rho < \infty\,.$ ***(II,8)***

Si une fonction $f \ge 0$ *mesurable vérifie pour presque tout* $x>0$

$$f(x) \le M_{5.2}\,u^{\frac{1}{1-p}}(x)\left(\int_0^x f^p(y)\,u(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,9)}$$

alors on a :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{r}\int_0^r f(x)\,dx\right)^p v(r)\,dr \le C_{5.2}\int_0^\infty f^p(x)\,w(x)\,dx \qquad \textbf{(II,10)}$$

où $w(x) = u(x)\,V(|x|)$ *et* $C_{5.2} := p^p\,M_{5.2}^{p(1-p)}$

Si de plus on a

$$\int_{r_1}^{r_2} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx < \infty \qquad \textit{pour tout } 0<r_1<r_2<\infty \qquad \textbf{(II,11)}$$

alors $C_{5.2}$ *est une constante optimale.*

---

[3] l'inégalité ***(II,10)'*** est l'inégalité ***(II,10)*** dans le ***Théorème*** *II.5* pour $u(x) = |x|^{-n(1-p)}$ et $v(r) = r^\alpha$.

5.3. CAS DE POIDS SPÉCIAUX AVEC n=1

Si on prend $u(x) = x^{p-1}$ et $v(r) = r^{\alpha}$ sur $(0,\infty)$ alors on obtient :

Corollaire II.5.3 : *Soient* $0 < p < 1$, $M_{5.3} > 0$ *et* $\alpha < p-1$.

Si une fonction $f \geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *vérifie pour presque tout* $x > 0$

$$f(x) \leq M_{5.3}\,\frac{1}{x}\left(\int_0^x f^p(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,9)''}$$ [4]

alors on a :

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{r}\int_0^r f(x)\,dx\right)^p r^{\alpha}\,dr \leq C_{5.3}\int_0^{\infty} f^p(x)\,x^{\alpha}\,dx \qquad \textbf{(II,10)''}$$ [5]

où $C_{5.3} := \frac{p^p\,C_1^{p(1-p)}}{p-\alpha-1}$ *est une constante optimale.*

NB : on retrouve le résultat. du ***Corollaire*** *II.3.1 avec la* constante optimale $C_{5.3} = C_{3.1} = \frac{p^p\,C_1^{p(1-p)}}{p-\alpha-1}$.

5.4. CAS DE FONCTION DÉCROISSANTE AVEC POIDS SPÉCIAUX ET n=1 :

Si en plus de $u(x) = x^{p-1}$ et $v(r) = r^{\alpha}$ définis sur $(0,\infty)$, on a f qui est une fonction décroissante alors ***(II,9)''*** est vérifiée avec $M_{5.3} = p^{\frac{1}{p}}$ d'où :

Corollaire II.5.4 : *Soient* $0 < p < 1$ *et* $\alpha < p-1$.

Si une fonction $f \geq 0$ *est décroissante alors on a :*

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{r}\int_0^r f(x)\,dx\right)^p r^{\alpha}\,dr \leq C_{5.4}\int_0^{\infty} f^p(x)\,x^{\alpha}\,dx \qquad \textbf{(II,10)''}$$

où $C_{5.4} := \frac{p^p\,C_1^{p(1-p)}}{p-\alpha-1}$ *est une constante optimale.*

NB : on retrouve ainsi l'inégalité de Hardy pour les fonctions monotones (***théorème*** *II.2*) et celui du ***Corollaire*** *II.3.3 avec* constante optimale $C_{5.4} = C_2 = C_{3.3} = \frac{p^p\,C_1^{p(1-p)}}{p-\alpha-1}$.

---

[4] l'inégalité ***(II,9)''*** est l'inégalité ***(II,9)*** dans le ***Théorème*** *II.5* pour $u(x) = |x|^{p-1}$ et $v(r) = r^{\alpha}$.

[5] l'inégalité ***(II,10)''*** est l'inégalité ***(II,10)*** dans le ***Théorème*** *II.5* pour $u(x) = |x|^{p-1}$ et $v(r) = r^{\alpha}$.

chap. III : **Applications**

La forme différentielle de l'inégalité type de Hardy est mieux adaptée pour les applications, plus particulièrement pour les équations différentielles.

Rappelons l'inégalité « moderne » de Hardy ***(I,4)*** [voir ***chp I §4***]

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p u(x)\,dx \ \le\ B_4 \int_0^\infty f^p(x)\,v(x)\,dx\ ;$$

en posant $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ celle-ci s'écrit

$$\int_0^\infty \big(g(x)\big)^p u(x)\,dx \ \le\ B_4 \int_0^\infty \big(g'(x)\big)^p v(x)\,dx\ ; \qquad \textbf{(III,1)}$$

Le cas multidimensionnel sans poids de l'inégalité ***(III,1)*** s'écrit

$$\int_\Omega |g(x)|^p\ dx \le C \int_\Omega |\bigtriangledown g(x)|^p\ dx \quad \textbf{(III,2)}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $C > 0$.

<u>Remarque :</u>

L'inégalité de Hardy dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \ge 3$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 \frac{1}{|x|^2}\ dx \le \Big(\frac{2}{n-2}\Big)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\bigtriangledown g(x)|^2\ dx$$

est l'équivalent du ***<u>principe d'incertitude de Heisenberg de la physique moderne</u>*** qui énonce que : ***«Il est impossible de connaître à la fois la position et la quantité de mouvement d'un objet de manière précise»*** et qui s'écrit

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\,|g(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g(x)|^2\,dx\Big) \ge \Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2 \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\,dx\Big)^2 > 0$$

En effet, en utilisant l'inégalite de Cauchy_Schwartz on a

$$\begin{aligned}\Big(\frac{n-2}{2}\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\ dx\Big) &= \Big(\frac{n-2}{2}\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|\,|g(x)|\ \frac{|g(x)|}{|x|}\ dx\Big)\\ &\le \Big(\frac{n-2}{2}\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\,|g(x)|^2\ dx\Big)^{\frac12}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{|g(x)|}{|x|}\Big)^2\ dx\Big)^{\frac12},\end{aligned}$$

et de l'inégalite de Hardy (précédente) on déduit

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^2\,dx\right)\leq\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2\,|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. TRACE D'UN ESPACE DE SOBOLEV PARTICULIER

Définition : *soient* $f\in W^{l,p}(\mathbb{R}^n)$, $1\leq p<\infty$, $l\in\mathbb{N}$ *et* $\varphi\in L^{loc}(\mathbb{R}^m)$, $m<n$. *On dit que la fonction* φ *est une trace de la fonction* f *sur* $\mathbb{R}^m$ *si pour toute suite* $f_k\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap W^{l,p}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $f_k\to f$ *dans* $W^{l,p}(\mathbb{R}^n)$ *on a*

$$f_k(x_1,..,x_m,0,..,0)\to\varphi(x_1,..,x_m)\qquad \text{dans } L^{loc}(\mathbb{R}^m).$$

On note $\varphi=f|_{\mathbb{R}^m}=Sf.$

Théorème 1 : *soient* $1\leq p<\infty$ *et* $l\in\mathbb{N}$. $\forall f\in W^{l,p}(\mathbb{R}^n)$ *il existe une suite* $(f_k)_k\subset C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap W^{l,p}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $f_k\to f$ *dans* $W_p^l(\mathbb{R}^n)$;

i.e. $C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap W^{l,p}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{l,p}(\mathbb{R}^n)$.

On se pose la question : est ce que $\forall m,p,l$ et $\forall f\in W^{l,p}(\mathbb{R}^n)$ il existe une trace φ de f ?

La réponse est fournie par le théorème suivant.

Théorème 2 : *(existence de trace) soient* $1\leq p<\infty$, $l\in\mathbb{N}$ *et* $m,n\in\mathbb{N}$, $m<n$.

Pour que tout $f\in W^{l,p}(\mathbb{R}^n)$ *admet une trace sur* $\mathbb{R}^m$ *il faut et il suffit que :*

$$l>\frac{n-m}{p}\qquad si\ 1<p<\infty$$

$$et\qquad l\geq n-m\quad si\ p=1.$$

Théorème 3 : *soit* $1<p<\infty$ *et* $l>\frac{n-m}{p}$. *On a*

$$tr|_{\mathbb{R}^m} W^{l,p}(\mathbb{R}^n) = B_p^{l-\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^m)$$

NB : si $p=1$ et $l \geq n-m$ alors $tr|_{\mathbb{R}^m} W^{l,1}(\mathbb{R}^n) = W^{l-(n-m),1}(\mathbb{R}^m)$ et en particulier si $l=n-m$ alors $tr|_{\mathbb{R}^m} W^{n-m,1}(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^m)$.

On s'intéresse en particulier à la partie

$$tr|_{\mathbb{R}^m} W^{l,p}(\mathbb{R}^n) \subset B_p^{l-\frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^m)$$

pour $m=n-1$ et $l=1$. Dans ce cas on a

$$B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}) \;:\; \|f\|^j_{b_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{\|\Delta_{h,j} f\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}}{h^{1-\frac{1}{p}}}\right)^p \frac{dh}{h}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad j=1,\dots,n-1\right\}$$

où $\Delta_{h,j} f(x) = f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1}) - f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1})$ est l'espace de Besov muni de la norme :

$$\|f\|_{B_p^1(\mathbb{R}^{n-1})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} \|f\|^j_{b_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

Théorème 4 : *soit* $1<p<\infty$. *On a*

$$tr|_{\mathbb{R}^{n-1}} W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

Preuve : on montre que

$$\|S\,f\|_{B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\;\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\,.$$

où $C>0$ est une constante indépendante de f.

***a)* supposons** $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ **:** alors

$$\|S\,f\|_{B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} = \|S\,f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} \|S\,f\|^j_{b_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}. \qquad \textbf{(1)}$$

D'une part du théorème 2 *on a*

$$\|S\,f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\;\|f\|_{W^{1,p}(R^n)}\,; \qquad (2)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\Delta_{h,j} S\,f(x) &= f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},0) - f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},0)\\ &= f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},0) - f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},h)\\ &\quad + f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},h) - f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},h)\\ &\quad + f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},h) - f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},0)\end{aligned}$$

d'où

$$\|\Delta_{h,j}f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},0)-f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},h)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}$$
$$+\|f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},h)-f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},h)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}$$
$$+\|f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},h)-f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},0)_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}\|$$

En notant $I^j := \|S\,f\|^j_{b_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}$ on déduit

$$I^j = \Big(\int_0^\infty \Big(\frac{\|\Delta_{h,j}f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}}{h^{1-\frac{1}{p}}}\Big)^p\frac{dh}{h}\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \Big(\int_0^\infty \Big(\frac{\|f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},0)-f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},h)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}}{h^{1-\frac{1}{p}}}\Big)^p\frac{dh}{h}\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\Big(\int_0^\infty \Big(\frac{\|f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},h)-f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},h)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}}{h^{1-\frac{1}{p}}}\Big)^p\frac{dh}{h}\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\Big(\int_0^\infty \Big(\frac{\|f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},h)-f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},0)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}}{h^{1-\frac{1}{p}}}\Big)^p\frac{dh}{h}\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$:= J_1^j + J_2^j + J_3^j \quad .$$

où J_1^j, J_2^j, J_3^j sont respectivement la première , deuxième et troisième intégrale dans le dernier membre de l'inégalité ci-dessus. On a

$$I^j \leq J_1^j + J_2^j + J_3^j \quad . \qquad \textit{(3)}$$

On va estimer les valeurs J_1^j, J_3^j . En vertu de l'invariance par rapport à la translation de la norme L^p puis du théorème de Fubini on a

$$(J_1^j)^p = (J_3^j)^p = \int_0^\infty \frac{1}{h^p}\,\|\,f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},0)-f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},h)\,\|^p_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}\,dh$$
$$= \int_0^\infty \|\,\frac{1}{|h|}\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,..,x_j,..,x_n)\,dx_n\,\|^p_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}\,dh$$
$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big|\,\frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',x_n)\,dx_n\,\Big|^p\,dx'\,dh$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big[\int_0^\infty \Big|\,\frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',x_n)\,dx_n\,\Big|^p\,dh\Big]\,dx'$$

où $x' = (x_1,..,x_{n-1})$.

On applique maintenant <u>l'inégalité de Hardy</u> à l'intérieur des crochets

$$(J_1^j)^p = (J_3^j)^p \leq (p')^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big[\int_0^\infty \Big|\,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x',x_n)\,\Big|^p\,dx_n\,\Big]\,dx'\ ;$$

On évalue J_2^j :

$$(J_2^j)^p = \int_0^\infty \frac{1}{h^p}\,\|\,f(x_1,..,x_j+h,..,x_{n-1},h)-f(x_1,..,x_j,..,x_{n-1},h)\,\|^p_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}\,dh$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{h^p}\,\|\,\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_j,..,h)\,d\eta\,\|^p_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}\,dh$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{h^p}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big|\,\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_j,..,h)\,d\eta\,\Big|^p\,dx'\,dh$$

D'après l'inégalité de Holder puis le théorème de Fubini puis l'invariance de la norme L^p on a

$$\begin{aligned}
(J_2^j)^p &= \int_0^\infty \frac{1}{h^p} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_j,..,h)\, dx_j \Big|^p dx'\, dh \\
&\leq \int_0^\infty \frac{1}{h^p} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_0^h \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_j,..,h)\Big|^p dx_j \Big) \times \Big(\int_0^h \Big| 1 \Big|^{p'} d\eta \Big)^{\frac{p}{p'}} dx'\, dh \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{h^p} \Big(\int_0^h \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_j,..,h)\Big|^p dx_j \Big) \times h^{p-1}\, dx'\, dh \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^h \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_j,..,h)\Big|^p dx_j\, dx'\, dh \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_j,..,h)\Big|^p dx'\, dx_j\, dh \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_j,..,h)\Big|^p dx'\, dx_j\, dh \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{h} \Big(\int_0^h dx_j\Big) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_j,..,h)\Big|^p dx'\, dh \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x',h)\Big|^p dx'\, dh
\end{aligned}$$

donc

$$J_2^j \leq \big\| f \big\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} . \qquad \textit{(5)}$$

De ***(1)-(5)*** on déduit que $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\|S\,f\|_{B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} &= \|S\,f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} \|S\,f\|^j_{b_p^1(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&\leq C\, \|f\|_{W^{1,p}(R^n)} + \sum_{j=1}^{n-1} \big(\, J_1^j + J_2^j + J_3^j \,\big) \\
&\leq C\, \|f\|_{W^{1,p}(R^n)} + \sum_{j=1}^{n-1} \Big(\, p' \big\|f\big\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n+)} + \big\|f\big\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n+)} + p' \big\|f\big\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n+)} \Big) \\
&\leq C\, \|f\|_{W^{1,p}(R^n)} + \sum_{j=1}^{n-1} \Big(\, p' + 1 + p' \,\Big) \big\|f\big\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n+)} \\
&\leq \big(C + (n-1)(2p'+1)\big)\, \|f\|_{W^{1,p}(R^n)} .
\end{aligned}$$

i.e. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\|S\,f\|_{B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \big(C + (n-1)(2p'+1)\big)\, \|f\|_{W^{1,p}(R^n)} . \qquad \textit{(**)}$$

b) **si** $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ **:** en vertu du théorème1 considérons une suite $(f_k)_k \subset C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_k \to f$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

On montre que (f_k) est une suite de Cauchy dans $B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

En remarquant que $f_k(x',0)|_{\mathbb{R}^m} = Sf_k(x',0) = f_k(x',0)$, On a d'après *(**)*, il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\|f_k(x',0) - f_m(x',0)\|_{B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C' \, \|f_k(x) - f_m(x)\|_{W^{1,p}(R^n)} \xrightarrow[p,m\to+\infty]{} 0$$

On en déduit qu'il existe une fonction φ telle que

$$f_k(x',0) \to \varphi(x',0) \qquad \text{dans} \quad B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

donc dans $L_p(\mathbb{R}^{n-1})$ et par suite dans $L^{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ car $B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}) \subset L_p(\mathbb{R}^{n-1}) \subset L^{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$. Alors d'après la définition $\varphi = f|_{\mathbb{R}^m} = Sf$, et d'après *(**)* on a pour tout $K \in \mathbb{N}$ fixé

$$\begin{aligned} \|Sf_k(x)\|_{B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} &= \|f_k(x',0)\|_{B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leq C' \, \|f_k(x)\|_{W^{1,p}(R^n)} \ , \end{aligned}$$

et par continuité de la norme, en faisant $k \to +\infty$ on obtient $\forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\|Sf\|_{B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C' \, \|f\|_{W^{1,p}(R^n)};$$

donc

$$tr|_{\mathbb{R}^{n-1}} W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

2. EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Les inégalités de type Hardy sont importantes en analyse fonctionnelle et dans la théorie des EDP. Elles sont très utilisées pour l'étude de l'existence, l'estimation et la régularité des solutions ainsi que leurs comportements asymptotiques [voir par exemples : ***[7]*** , ***[19]*** , ***[41]*** , ***[103]***].

Dans ce qui suit, on va présenter un exemple d'équations aux dérivées partielles où on utilise une inégalité de Hardy pour établir l'existence de solutions .

Le théorème suivant est un des outils importants dans la résolution des équations aux dérivées partielles, qui permet dans des espaces de Hilbert de représenter certaines formes bilinéaires à l'aide du produit scalaire (une extension du théorème de représentation de Riesz) [voir. ***[20]*** p140] .

Théorème de Lax-Milgram : *Soient* H *un espace de Hilbert de produit scalaire* $< .,. >_H$ *et de norme* $\|.\|_H$ *;* $B : H \times H \to \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire continue et coécrive i.e. qu'ils existent deux constantes* $\alpha_0 > 0$ *et* $\alpha_1 > 0$ *telles que* $\forall\, u, v \in H$

$$|B(u,v)| \leq \alpha_0\ \|u\|_H\ \|v\|_H$$

$$|B(v,v)| \geq \alpha_1\ \|v\|_H^2$$

alors $\forall\, f \in H$ *il existe* $u \in H$ *unique tel que*

$$B(u,v) = < f, v >_H \quad , \quad \forall v \in H.$$

Un autre outil utilisé est une inégalité de type Hardy, dite aussi de Poincaré. Rappelons que pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on a

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}\big|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Lemme (inégalité de Poincaré) : *soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert et borné dans une direction. il existe* $C_\Omega > 0$ *telle que*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\ \|\bigtriangledown v\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Preuve [{55} (Hunter 2014) p 98] :

$C_0^\infty(\Omega)$ étant dense dans $H_0^1(\Omega)$, il suffit alors de montrer que l'inégalité est vérifiée $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$. Supposons que le domaine Ω est borné suivant la direction x_n ($0 < x_n < a$) et posons $x = (x', x_n)$ avec $x' := (x_1, ..., x_{n-1})$.
On a : $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$|v(x', x_n)| = \Big| \int_0^{x_n} \frac{\partial v(x',t)}{\partial t}\, dt \Big| \leq \int_0^a \Big| \frac{\partial v(x', x_n)}{\partial x_n} \Big|\, dx_n\ .$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\int_0^a 1 . \Big| \frac{\partial v(x',t)}{\partial t} \Big|\, dt \leq a^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^a \Big| \frac{\partial v(x', x_n)}{\partial x_n} \Big|^2 dx_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$|v(x', x_n)|^2 \leq\ a\ \int_0^a \Big| \frac{\partial v(x', x_n)}{\partial x_n} \Big|^2 dx_n\ ,$$

en intégrant par rapport à x_n puis par rapport à x' on obtient :

$$\int_\Omega |v(x)|^2\, dx \leq\ a^2\ \int_\Omega \Big| \frac{\partial v(x', x_n)}{\partial x_n} \Big|^2 dx$$

Comme $\left|\frac{\partial v}{\partial x_n}\right| \leq \left|\nabla v\right|$, en prenant $C_\Omega = a^2$ on déduit le résultat du lemme.

$\boxdot$

Considérons maintenant l'équation différentielle suivante [***{20}*** p295] :

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\,u = f\ , \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 \qquad x \in \partial\Omega. \end{cases} \qquad \textit{(III,4)}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné, $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a = (a_{i,j}) : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et strictement elliptique, ***i.e.*** il existe $a_0 > 0$ telle que :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq a_0\,|\xi|^2\ ,\quad \forall\, x \in \Omega\ , \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ .$$

En multipliant l'équation ***(III,4)*** par $v \in C_c^\infty(\Omega)$ et en intégrant sur le domaine Ω on obtient :

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\,dx + \int_\Omega c(x)\,u\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx$$

<u>Définition :</u> *u est dite solution faible de **(III,4)** si :*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\,dx + \int_\Omega c(x)\,u\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx \quad , \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Par densité on aura :

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\,dx + \int_\Omega c(x)\,u\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Supposons que le domaine Ω est assez régulier (au moins de classe C^1 par morceaux [voir ***{20}*** p272]), $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = 1,..,n$, $b_i \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ $i = 1,..,n$ et $c \in L^\infty(\Omega)$ tels que :

$$c(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} \geq 0 \quad p.p.x \in \Omega.$$

<u>Théorème :</u> *pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème **(III,4)** admet une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Preuve du théorème.

En définissant la forme bilinéaire $B(.,.)$ sur $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ par :

$$B(u,v):=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx+\int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\,dx+\int_\Omega c(x)\,u\,v\,dx\ , \qquad \textbf{\textit{(III,5)}}$$

On voit que $u\in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de ***(III,4)*** si :

$$B(u,v)=\int_\Omega f\,v\,dx \quad , \quad \forall v\in H_0^1(\Omega) \qquad \textbf{\textit{(III,6)}}$$

et pour résoudre ***(III,6)*** , on va appliquer le ***Théorème de Lax-Milgram*** .
Pour cela on va montrer le lemme suivant :

> ***Lemme :*** *La forme bilinéaire $B(.,.)$ est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.*

Preuve du lemme.

i) ***Continuité :*** Pour tout $u,v\in H_0^1(\Omega)$, de l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$\begin{aligned}|B(u,v)|\le &\sup_{1\le i,j\le n}\|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}+\sup_{1\le i\le n}\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\|c\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)}\ ,\end{aligned}$$

Comme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ on obtient :

$$|B(u,v)|\le \left[\sup_{1\le i,j\le n}\|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}+\sup_{1\le i\le n}\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}+\|c\|_{L^2(\Omega)}\right]\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où la continuité de $B(.,.)$ sur $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.

ii) ***Coercivité :*** pour tout $u,v\in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}B(u,v)&=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx+\int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\,dx+\int_\Omega c(x)\,u\,v\,dx\\ &=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx-\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i}\,u\,v\,dx+\int_\Omega c(x)\,u\,v\,dx\\ &=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx+\int_\Omega \left[c(x)-\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i}\right]\,u\,v\,dx\end{aligned}$$

et d'après l'ellipticité de $a = (a_{i,j})$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq a_0\,|\xi|^2$, et la condition $c - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0$ presque partout, on obtient

$$|B(u,u)| \geq a_0 \int_\Omega |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}\,dx + \int_\Omega \left[c(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i}\right] |u|^2\,dx \geq a_0\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,;$$

et de l'***inégalité de Poincaré***, on déduit :

$$|B(u,u)| \geq a_0\,(C_\Omega + 1)^{-1}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,;$$

d'où la coercivité de $B(.,.)$.
Ce qui termine la preuve du lemme.

$\boxdot$

Fin de la preuve du théorème :

En appliquant le ***Théorème de Lax-Milgram,*** pour tout $f \in L^2(\Omega)$ le problème admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du prolème ***(III,6)*** , qui elle-même est l'unique solution faible de ***(III,3)*** dans $H_0^1(\Omega)$.

3. EQUIVALENCE DE QUASI-NORMES (NORMES) DANS LES ESPACES DE BESOV LIÉES À UNE FONCTION À VARIATION LENTE

(Gurka et Opic 2005) [voir ***[43]***] dans leur article ont considéré des espaces de Besov avec le paramètre de régularité classique $l > 0$ et un deuxième paramètre de régularité (itération logarithmique)

$$B^{l,\alpha}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = \left\{\, f \in L^p(\mathbb{R}^n)\ :\ \left(\int_0^\infty (\ln_k t)^\alpha \left(\frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \,\right\}$$

où $\ln_k t$ est une itération de la fonction logarithme qui est une fonction à variation lente.

(Caetano, Gogatishvili et Opic 2011) [voir ***[27]***] ont traité des espaces de Besov avec le paramètre de régularité classique $l = 0$ et une fonction à variation lente comme deuxième paramètre de régularité.

On va d'abord définir les espaces de bessov (à deux paramètres de régularité) via les différences qu'on notera $B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ et via le module de continuité qu'on notera $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

On établira ensuite deux inégalités-type de Hardy pour $\theta \geq 1$ et pour $0 < \theta < 1$ qu'on utilisera par la suite pour montrer l'équivalence de normes (quasi-normes) de ces deux espaces et par conséquent $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

On donne ici la définition de l'espace de Besov ***via le module de continuité***, avec deux paramètres de régularité : le paramètre classique $l > 0$ et une fonction à variation lente v comme deuxième paramètre de régularité :

Définition III.3.(a) : *Soient* $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$, $\sigma \in \mathbb{N}^*$, $0 < l < \sigma$ *et une fonction à variation lente* v *sur* $(0, +\infty)$.
L'espace de Besov $B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ *est constitué des fonctions* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *telles que :*

$$\|f\|^{(1,\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|^{(1)(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

avec $$\|f\|^{(1)(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_0^\infty v^\theta(t)\,\Big(\frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l}\Big)^\theta \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}}, \qquad \textit{(III,7)}$$

où $0 < \theta < \infty$,

et $$\|f\|^{(1)(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} v(t)\,\frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l} \qquad \textit{(III,8)}$$

On donne maintenant la définition de l'espace de $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ ***via les différences***, avec toujours les deux paramètres de régularité :

Définition III.3.(b) : *Soient* $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$, $\sigma \in \mathbb{N}^*$, $0 < l < \sigma$ *et* v *une fonction à variation lente sur* $(0, +\infty)$. *On dit que* $f \in \widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ *si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et :*

$$\|f\|^{(2,\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|^{(2)(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

avec $$\|f\|^{(2),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} v^\theta(|h|)\Big(\frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\Big)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\Big)^{\frac{1}{\theta}}, \qquad \textit{(III,9)}$$

où $0 < \theta < \infty$,

et $$\|f\|^{(2),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h\in\mathbb{R}^n, h\neq 0} v(|h|)\,\frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \qquad \textit{(III,10)}$$

Remarque : En fait on a aussi montré l'équivalence, indépendemment de l'ordre $\sigma \in \mathbb{N}^*$, entre les normes (quasi-normes) dans $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ [voir ***[5]***]. Comme conséquence on obtiendra l'équivalence entre les normes (quasi-normes) dans l'espace de Besov $B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ indépendemment de l'ordre $\sigma \in \mathbb{N}^*$.

3.1. INÉGALITÉS TYPE DE HARDY

Nous aurons besoin des ***inégalités-type de Hardy*** suivantes :

> ***Lemme III.3.1.(a) :*** *Soient $1 \le p < \infty$ et $\theta \ge 1$ et v une fonction à variation lente alors pour toute fonction $G \ge 0$ mesurable il existe $D_1 > 0$ telle que :*
>
> $$\left(\int_0^\infty \left(\int_{|h|\le r} G(h)\,dh\right)^\theta \frac{v^\theta(r)}{r^{l\theta+1}}\,dt\right)^{\frac{1}{\theta}} \le D_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} G^\theta(h)\,\frac{v^\theta(|h|)}{|h|^{n+l\theta-n\theta}}\,dh\right)^{\frac{1}{\theta}}. \qquad \textbf{(III,11)}$$

Preuve : en utilisant les coordonnées sphériques ***(III,11)*** s'écrit :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^r \rho^{n-1}\Big[\int_{S_{n-1}} G(\rho\, s)\,ds\Big]\,d\rho\right)^\theta \frac{v^\theta(r)}{r^{l\theta+1}}\,dr\right)^{\frac{1}{\theta}} \le D_1 \left(\int_0^\infty \frac{v^\theta(\rho)}{\rho^{n+l\theta-n\theta}}\,\rho^{n-1}\Big[\int_{S_{n-1}} G^\theta(\rho\, s)\,ds\Big]\,d\rho\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Posons $F(\rho) := \big[\int_{S_{n-1}} G(\rho\, s)\,ds\big]$ alors

$$\Big[\int_{S_{n-1}} G^\theta(\rho\, s)\,ds\Big] \lesssim \Big[\int_{S_{n-1}} G(\rho\, s)\,ds\Big]^\theta = F^\theta(\rho)$$

et on obtient l'inégalité suivante :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^r \rho^{n-1} F(\rho)\,d\rho\right)^\theta r^{-l\theta-1} v^\theta(r)\,dr\right)^{\frac{1}{\theta}} \le D_1 \left(\int_0^\infty \rho^{-l\theta+n\theta-1} v^\theta(\rho)\,F^\theta(\rho)\,d\rho\right)^{\frac{1}{\theta}} \qquad \textbf{(III.12)}$$

D'après un résultat de **[** (Okpoti, Persson et Sinnamon 2008), voir ***{76} ,*** *Théorème 2.1***]** ***(III.12)*** est équivalente à

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^r F(\rho)\,\rho^{l\theta'-1} v^{-\theta'}(\rho)\,d\rho\right)^\theta r^{-l\theta-1} v^\theta(r)\,dr\right)^{\frac{1}{\theta}} \le D_1 \left(\int_0^\infty F^\theta(\rho)\,\rho^{l\theta'-1} v^{-\theta'}(\rho)\,d\rho\right)^{\frac{1}{\theta}} \qquad \textbf{(III.13)}$$

où θ' est le conjugué de θ $(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1)$.

Une caractérisation (condition nécessaire et suffisante) due à **[** (Okpoti, Persson et Sinnamon 2007)**,** voir ***{77} ,*** *Proposition 1***]** affirme que la validité de ***(III.13)*** $\forall\, F \ge 0$ mesurable est équivalente à :

$$\forall x > 0 \;:\; A(x) := \left(\int_x^\infty r^{-l\theta-1} v^\theta(r)\,dr\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_0^x \rho^{l\theta'-1} v^{-\theta'}(\rho)\,d\rho\right)^{\frac{1}{\theta'}} < \infty.$$

D'aprés la ***propriété 2*** [voir ***Préliminaires et notations*** §2] v^θ et $v^{\theta'}$ sont à variations lentes, puis en vertu de la ***propriété 4*** *a)* $$\int_0^x r^{l\theta'-1}\ v^{-\theta'}(r)\,dr \approx\ x^{l\theta'}\ v^{-\theta'}(x)$$

b) $$\int_x^\infty r^{-l\theta-1}\ v^{\theta}(r)\,dr \approx\ x^{-l\theta}\,v^{\theta}(x)\ \ ;$$

d'où l'existence de $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\begin{aligned} A(x) =&\ \left(\int_x^\infty r^{-l\theta-1}\,v^\theta(r)\ dr\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_0^x \rho^{l\theta'-1}\,v^{-\theta'}(\rho)\ d\rho\right)^{\frac{1}{\theta'}} \\ \leq&\ \left(c_1\,x^{-l\theta}\ v^\theta(x)\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(c_2\,x^{l\theta'}\ v^{-\theta'}(x)\right)^{\frac{1}{\theta'}} \end{aligned}$$

et par consequent

$$\begin{aligned} A(x) &\leq c_1^{\frac{1}{\theta}}\,c_2^{\frac{1}{\theta'}}\ x^{-l}\,v(x)\,x^l\,v^{-1}(x) \\ &= c_1^{\frac{1}{\theta}}\,c_2^{\frac{1}{\theta'}}\ <\infty \qquad . \end{aligned}$$

$\boxdot$

<u>Lemme III.3.1.(b) :</u> *soient* $1 \leq p < \infty$ *et* $0 < \theta < 1$ *et* v *une fonction à variation lente. Si une fonction mesurable* $G \geq 0$ *vérife* $p.p.\ h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *:*

$$G(h)\ \leq M\ \frac{1}{|h|^{\frac{n}{\theta}}}\left(\int_{B_{|h|}} G^\theta(\eta)\ d\eta\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

alors il existe $D_2 > 0$ *telle que*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{|h|\leq t} G(h)\ dh\right)^\theta\ \frac{v^\theta(t)}{t^{l\theta+1}}\ dt\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq\ D_2\,\left(\int_{\mathbb{R}^n} G^\theta(h)\ \frac{v^\theta(|h|)}{|h|^{n+l\theta-n\theta}}\ dh\right)^{\frac{1}{\theta}} \textbf{\textit{(III,14)}}$$

<u>Preuve :</u> pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a l'identité suivante :

$$\begin{aligned} G(h)\ |h|^n &= \left(|h|^{\frac{n}{\theta}}\ G(h)\,\frac{1}{|h|^{\frac{n}{\theta}-n}}\right)^{1-\theta}\ \left(G(h)\,|h|^n\right)^\theta \\ G(h) &= \left(|h|^{\frac{n}{\theta}}\ G(h)\,\frac{1}{|h|^{\frac{n-n\theta}{\theta}}}\right)^{1-\theta}\ G^\theta(h)\ |h|^{n\theta-n} \end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse on obtient :

$$\begin{aligned} G(h) &\leq \left(M\ \left(\int_{|\eta|\leq|h|} G^\theta(\eta)\ d\eta\right)^{\frac{1}{\theta}}\ \left(\frac{1}{|h|^{n-n\theta}}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{1-\theta}\ G^\theta(h)\ |h|^{n\theta-n} \\ &= M^{1-\theta}\ \left(\int_{|\eta|\leq|h|} G^\theta(\eta)\,\frac{1}{|h|^{n-n\theta}}\ d\eta\ \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\ G^\theta(h)\ |h|^{n\theta-n} \quad ; \end{aligned}$$

en intégrant par rapport à $h \in B_t$ ($t > 0$ arbitraire)

$$\int_{|h|<t} G(h)\; dh \leq M^{1-\theta} \int_{|h|<t} \Big[\Big(\int_{|\eta|<|h|} G^{\theta}(\eta)\; \frac{1}{|\eta|^{n-n\theta}}\; d\eta \Big)^{\frac{1}{\theta}-1} G^{\theta}(h)\; \frac{1}{|h|^{n-n\theta}} \Big]\; dh \;.$$

On utilise les coordonnées sphériques à droite

$$\begin{aligned}
\int_{|h|<t} G(h)\; dh &\leq M^{1-\theta} \int_0^t \int_{S_{n-1}} \Big[\Big(\int_{|\eta|<r} G^{\theta}(\eta)\; \frac{1}{|\eta|^{n-n\theta}}\; d\eta \Big)^{\frac{1}{\theta}-1} G^{\theta}(rs)\; \frac{1}{r^{n-n\theta}}\; r^{n-1}\; ds \Big]\; dr \\
&= M^{1-\theta} \int_0^t \Big[\Big(\int_0^r \Big[\int_{S_{n-1}} G^{\theta}(\rho s)\; \frac{1}{\rho^{n-n\theta}}\; \rho^{n-1}\; ds \Big]\; d\rho \Big)^{\frac{1}{\theta}-1} \Big[\int_{S^{n-1}} G^{\theta}(rs)\; \frac{1}{r^{n-n\theta}}\; r^{n-1}\; ds \Big] \Big]\; dr \;.
\end{aligned}$$

On pose $\quad \phi(\rho) := \big[\int_{S_{n-1}} G^{\theta}(\rho s)\; \frac{1}{\rho^{n-n\theta}}\; \rho^{n-1}\; ds \big]$ alors

$$\begin{aligned}
\int_{|h|<t} G(h)\; dh &\leq M^{1-\theta} \int_0^t \Big[\Big(\int_0^r \phi(\rho)\; d\rho \Big)^{\frac{1}{\theta}-1} \phi(r) \Big]\; dr \\
&= M^{1-\theta} \int_0^t \frac{d}{dr} \Big(\int_0^r \phi(\rho)\; d\rho \Big)^{\frac{1}{\theta}}\; dr \\
&= M^{1-\theta} \Big(\int_0^t \phi(\rho)\; d\rho \Big)^{\frac{1}{\theta}} \\
&= M^{1-\theta} \Big(\int_0^t \int_{S^{n-1}} G^{p}(\rho s)\; \frac{1}{\rho^{n-n\theta}}\; \rho^{n-1}\; ds\, d\rho \Big)^{\frac{1}{\theta}} \\
&= M^{1-\theta} \Big(\int_{B_t} G^{\theta}(h)\; \frac{1}{|h|^{n-n\theta}}\; dh \Big)^{\frac{1}{\theta}} \;;
\end{aligned}$$

d'où $\forall t > 0$

$$\Big(\int_{|h|<t} G(h)\; dh \Big)^{\theta} \leq M^{\theta(1-\theta)} \int_{B_t} G^{\theta}(h)\; \frac{1}{|h|^{n-n\theta}}\; dh \;.$$

En appliquant cette dernière inégalité puis le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}
\Big(\int_0^{\infty} \Big(\int_{|h|\leq t} G(h)\; dh \Big)^{\theta} \frac{v^{\theta}(t)}{t^{l\theta+1}}\; dt \Big)^{\frac{1}{\theta}} &\leq \Big(\int_0^{\infty} M^{\theta(1-\theta)} \int_{|h|\leq t} \frac{1}{|h|^{n-n\theta}}\; G^{\theta}(h)\; dh \quad \frac{v^{\theta}(t)}{t^{l\theta+1}}\; dt \Big)^{\frac{1}{\theta}} \\
&= M^{1-\theta} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|h|^{n-n\theta}}\; G^{\theta}(h) \quad \int_{|h|}^{\infty} t^{-l\theta-1} v^{\theta}(t)\; dt \quad dh \Big)^{\frac{1}{\theta}} \;.
\end{aligned}$$

D'après la ***propriété 4*** [voir ***Préliminaires et notations*** §2] il existe $c > 0$ telle que

$$\int_x^\infty r^{-l\theta-1}\ v^\theta(r)\,dr \leq c\ x^{-l\theta}\,v^\theta(x)\,,$$

d'où

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{|h|\leq t} G(h)\ dh\right)^\theta \frac{v^\theta(t)}{t^{l\theta+1}}\ dt\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq M^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|h|^{n-n\theta}}\,G^\theta(h)\ \ c\,|h|^{-l\theta}\,v^\theta(|h|)\quad dh\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq M^{1-\theta}\ c^{\frac{1}{\theta}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} G^\theta(h)\,\frac{v^\theta(|h|)}{|h|^{l\theta+n-n\theta}}\ \ dh\right)^{\frac{1}{\theta}} \qquad .$$

$\boxdot$

3.2. EQUIVALENCE DES NORMES (QUASI-NORMES) LIÉES AUX DIFFÉRENCES ET AU MODULE DE CONTINUITÉ

Maintenant on montre pour $\sigma \in \mathbb{N}^*$ fixé l'équivalence entre les normes définies via les différences et celles qui sont définies à l'aide du module de continuité pour successivement $1 \leq \theta < \infty$, $0 < \theta < 1$ et $\theta = \infty$.

<u>Theoreme III.3.2 :</u> *Soient* $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$, $\sigma \in \mathbb{N}^*$,
$0 < l < \sigma$ *et une fonction à variation lente* v . *On a*
<u>si $0<\theta<\infty$:</u> *les normes* ***(III,7)*** ***et*** ***(III,9)*** *sont équivalentes*
<u>si $\theta=\infty$:</u> *les normes* ***(III,8)*** ***et*** ***(III,10)*** *sont équivalentes.*
On déduit que $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

3.2.1. CAS $1 \leq \theta < +\infty$

On a $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$v(|h|)\,\frac{\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \leq v(|h|)\,\frac{\omega_\sigma(f,|h|)_p}{|h|^l}\,,$$

on déduit

$$\begin{aligned}
\|f\|^{(2),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} v^\theta(|h|)\Big(\frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\Big)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} v^\theta(|h|)\Big(\frac{\omega_\sigma(f,|h|)_p}{|h|^l}\Big)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \\
&= \Big(\int_0^\infty \int_{S_{n-1}} v^\theta(t)\Big(\frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l}\Big)^\theta \frac{t^{n-1}\,d\xi\,dt}{t^n}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \\
&= (\int_{S_{n-1}} d\xi)^{\frac{1}{\theta}}\ \Big(\int_0^\infty v^\theta(t)\Big(\frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l}\Big)^\theta\ \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\|f\|^{(2),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq (n\,v_n)^{\frac{1}{\theta}}\ \|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \qquad \textit{(1)}$$

Dans l'autre sens on a besoin de l'inégalité suivante [voir ***[24]***] : $0 < p \leq \infty$, $\sigma \in \mathbb{N}$, alors $\forall\, t > 0$ il existe $C > 0$ telle que :

$$\omega_\sigma(f,t)_p \leq\ C\ \int_{|h|\leq t} \|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \frac{dh}{|h|^n} \qquad \textit{(E)}$$

d'où :

$$\frac{v(t)}{t^l}\ \omega_\sigma(f,t)_p \leq\ C\ \frac{v(t)}{t^l}\ \int_{|h|\leq t} \|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \frac{dh}{|h|^n}$$

et par suite

$$\Big(\int_0^\infty \Big(v(t)\ \frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l}\Big)^\theta\ \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}}\ \leq\ C\ \ \Big(\int_0^\infty \Big(\frac{v(t)}{t^l}\Big)^\theta \Big(\int_{|h|\leq t} \|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \frac{dh}{|h|^n}\Big)^\theta\ \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

donc

$$\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \Big(\int_0^\infty \Big(\int_{|h|\leq t} \frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^n}\ dh\Big)^\theta\ \frac{v^\theta(t)}{t^{l\theta}}\ \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

En posant $G(h) := \frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^n}$ on aura :

$$\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \Big(\int_0^\infty \Big(\int_{|h|\leq t} G(h)\ dh\Big)^\theta\ \frac{v^\theta(t)}{t^{l\theta+1}}\ dt\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Appliquons l'inégalité-type de Hardy ***(III,11)*** du ***Lemme III.3.1.(a)***

$$\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq \; C\, D_1 \,\Big(\int_{\mathbb{R}^n} G^{\theta}(h)\; \frac{v^{\theta}(|h|)}{|h|^{n+l\theta-n\theta}}\; dh\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= \; C\, D_1 \,\Big(\int_{\mathbb{R}^n} v^{\theta}(|h|)\; \frac{\big(|h|^n\, G(h)\big)^{\theta}}{|h|^{l\theta}}\; \frac{dh}{|h|^n}\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= C\, D_1 \,\Big(\int_{\mathbb{R}^n} v^{\theta}(|h|)\Big(\frac{\|\Delta^{\sigma}_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\Big)^{\theta}\frac{dh}{|h|^n}\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

d'où

$$\|f\|^{(1)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, D_1\; \|f\|^{(2),(\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} . \qquad \textit{(2)}$$

De *(1)* et *(2)* on déduit alors que pour $1 \leq \theta < +\infty$

$$\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) .$$

$\boxdot$

3.2.2. CAS $0 < \theta < 1$

D'une manière analogue au cas précédent ($1 \leq \theta < +\infty$) on montre que

$$\|f\|^{(2),(\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq (n\, v_n)^{\frac{1}{\theta}}\;\; \|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \qquad \textit{(3)}$$

Pour l'inégalité inverse on utilse ***(E)*** [voir ***{24}***] d'où :

$$\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\Big(\int_0^{\infty}\Big(\int_{|h|\leq t}\frac{\|\Delta^{\sigma}_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^n}\; dh\Big)^{\theta}\;\frac{v^{\theta}(t)}{t^{l\theta}}\;\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}} .$$

En posant $G(h) := \frac{\|\Delta^{\sigma}_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^n}$ on aura :

$$\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\Big(\int_0^{\infty}\Big(\int_{|h|\leq t} G(h)\; dh\Big)^{\theta}\;\frac{v^{\theta}(t)}{t^{l\theta+1}}\; dt\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

D'autre part d'après [***{25}*** *Corollary2 p9*] on a

$$\forall\, \mu \in \mathbb{R} \;\; : \quad \|\Delta^{\sigma}_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\Big(\frac{1}{|h|^{n+\mu}}\int_{B_{|h|}} \|\Delta_y f\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, |y|^{\mu}\, dy\Big)^{\frac{1}{\theta}} ,$$

alors pour $h \neq 0$:

$$\frac{\|\Delta^{\sigma}_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^n} \leq C\,\Big(\frac{1}{|h|^{n\,\theta+n+\mu}}\int_{B_{|h|}} \|\Delta_y f\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, |y|^{\mu}\, dy\Big)^{\frac{1}{\theta}} .$$

Si $\mu = -n\,\theta$ alors

$$\frac{\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^n} \leq C\,\Big(\frac{1}{|h|^n}\int_{B_{|h|}} \|\Delta_y f\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,\frac{1}{|y|^{n\,\theta}}\,dy\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

i.e.

$$G(h) \leq C\,\frac{1}{|h|^{\frac{n}{\theta}}}\,\Big(\int_{B_t} G^{\theta}(h)\,dy\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

L'hypothèse du ***Lemme III.3.1.(b)*** est donc vérifiée . On applique l'inégalité-type de Hardy ***(III,14)***

$$\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq\; C\,D_2\,\Big(\int_{\mathbb{R}^n} G^{\theta}(h)\,\frac{v^{\theta}(|h|)}{|h|^{n+l\theta-n\theta}}\,dh\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} &\leq\; C\,D_2\,\Big(\int_{\mathbb{R}^n} v^{\theta}(|h|)\,\frac{\big(|h|^n\,G(h)\big)^{\theta}}{|h|^{l\theta}}\,\frac{dh}{|h|^n}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \\
&= C\,D_2\,\Big(\int_{\mathbb{R}^n} v^{\theta}(|h|)\Big(\frac{\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\Big)^{\theta}\,\frac{dh}{|h|^n}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \\
&= C\,D_2\,\|f\|^{(2),(\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \quad ,
\end{aligned}$$

donc

$$\|f\|^{(1)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = C\,D_2\,\|f\|^{(2),(\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \quad , \qquad \textit{(3)}$$

de *(2)* et *(3)* on déduit que pour $0 < \theta < 1$ on a

$$\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)\,.$$

$\boxdot$

3.2.3. CAS $\theta = \infty$

Il est clair que $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$v(|h|)\,\frac{\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \leq v(|h|)\,\frac{\omega_{\sigma}(f,|h|)_p}{|h|^l}$$

d'où

$$\|f\|^{(2),(\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h\in\mathbb{R}^n, h\neq 0} v(|h|)\,\frac{\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \leq \sup_{h\in\mathbb{R}^n, h\neq 0} v(|h|)\,\frac{\omega_{\sigma}(f,|h|)_p}{|h|^l} = \|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}$$

donc

$$\|f\|^{(2),(\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \qquad \textit{(4)}$$

Inversement , on a

$$\begin{aligned}\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{t>0} v(t)\,\frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l}\\ &= \sup_{t>0}\ \sup_{h\in\mathbb{R}^n,|h|\le t} \frac{v(t)}{t^l}\ \|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\\ &= \sup_{h\in\mathbb{R}^n,|h|\neq 0} \|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\ \sup_{t>|h|} t^{-l}\,v(t)\ ,\end{aligned}$$

et en vertu de la ***propriété 4 ii)*** [voir ***Préliminaires et notations §2***] il existe $c>0$ telle que

$$\sup_{t>x} t^{-\varepsilon}\,v(t)\le c\ x^{-\varepsilon}\,v(x)\,;$$

d'où

$$\begin{aligned}\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} &\le c\sup_{h\in\mathbb{R}^n,|h|\neq 0} \|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\ \ |h|^{-l}\,v(|h|)\\ &= c\ \|f\|^{(2),(\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

i.e.

$$\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}\le c\ \|f\|^{(2),(\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}. \quad \textit{(5)}$$

On déduit de *(4)* et *(5)* que

$$\widetilde{B}^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)=B^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)\ .$$

Appendice 1 : Résumé « inégalités en normes (quasi-normes) »

On rappelle que pour une fonction mesurable donnée $f \geq 0$ définie sur E égal à $\mathbb{R}^n$ ou $(0, \infty)$ on a pour $\beta \in \mathbb{R}$

$$\|f\|_{L^p_{x^\beta}(E)} := \Big(\int_E f^p(x)\ x^\beta\ dx \Big)^{\frac{1}{p}} ;$$

mais dans beaucoup d'ouvrages (articles ou autres) on trouve la notation suivante $(\beta \in \mathbb{R})$:

$$\|x^\beta\, f(x)\|_{L^p(E)} := \Big(\int_E x^{\beta\, p}\ f^p(x)\ dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans cet appendice on va reformuler les résultats énoncés dans la thèse en utilisant ce mode de notation. Il suffit de poser $\alpha = \beta\, p$ dans les énoncés des théorèmes et corollaires. Rappelons que son conjugué p' est définie par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Dans tout ce qui suit on désigne par

1/ H l'opérateur usuel de Hardy défini sur $L^p(0, \infty)$ par

$$(Hf)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt\, .$$

2/ H_w l'opérateur de Hardy généralisé défini de l'espace de Lebesgue pondéré $L^p_w(0, \infty)$ vers $L^p(0, \infty)$ par

$$\big(H_w f\big)(r) := \frac{1}{W(r)} \int_0^r f(x)\ w(x)\ dx$$

où $0 < W(r) := \int_0^r w(t)dt < \infty$ pour tout $r > 0$. Notons que $H = H_1$.

3/ $\widetilde{H}_n$ l'opérateur de Hardy version dimension $n \in \mathbb{N}^*$ noté défini de $L^p(0, \infty)$ vers lui-même par

$$(\widetilde{H}_n f)(r) := \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(y)\, dy$$

où B_r désigne la boule de centre o et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^n$ et $|B_r|$ désigne sa mesure. Notons que $\widetilde{H}_1 = H$

chp I : Inégalités de Hardy dans l'espace Lp (p >= 1)

1. INÉGALITÉ DE HARDY CLASSIQUE

1.1. INÉGALITÉ DE HARDY : CAS DISCRET

Théorème I.1.1 **[{47} (Hardy, Littlewood et Polya, INEQUALITIES 1934) p 240] :**

soient $p > 1$, $a_n \geq 0$ *et* $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. *Notons* $(a) := (a_n)_{n\geq 1}$ *et* $(A) := (\frac{A_n}{n})_{n\geq 1}$ *alors*

$$\|(A)\|_{l^p} \;\leq\; p' \;\|(a)\|_{l^p}$$

de plus la constante $B_{1.1} := p'$ *est optimale.*

1.2. INÉGALITÉ DE HARDY : CAS CONTINU (INTÉGRAL)

Théorème I.1.2 **[{68} (Kufner, Maligranda et Persson 2006)]:**

soient $p > 1$ *et soit* $f(x) \geq 0$ *mesurable sur* $(0, \infty)$ *; on pose* $Hf(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, *alors on a*

$$\|Hf\|_{L^p(0,\infty)} \;\leq\; p' \;\|f\|_{L^p(0,\infty)}$$

La constante $B_{1.2} := p' = \frac{p}{p-1}$ *est optimale.*

NB : on déduit de cette inégalité que l'opérateur $H : L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)$ dit de Hardy est borné et que $\|H\|_{L^p(0,\infty)\to L^p(0,\infty)} = p'$.

2. INÉGALITÉ DE HARDY AVEC POIDS (FONCTION PUISSANCE)

Théorème I.2 **[{67} (Kufner, Maligranda et Persson 2007) p 24] :**

Soient $p > 1$ *et* $\beta < 1 - \frac{1}{p}$. *Pour toute fonction* f *positive mesurable sur* $(0, \infty)$ *on a :*

$$\|x^{\beta}\, Hf(x)\|_{L^p(0,\infty)} \;\leq\; \frac{p}{p - \beta\, p - 1}\; \|x^{\beta}\, f(x)\|_{L^p(0,\infty)} \;.$$

Si de plus on a $-\frac{1}{p} < \beta < 1 - \frac{1}{p}$ *alors la constante* $B_2 := \frac{p}{p-\beta\, p-1}$ *est optimale.*

NB : on déduit de cette inégalité que l'opérateur $H : L^p_{x^\beta}(0,\infty) \to L^p_{x^\beta}(0,\infty)$ est borné et que $\|H_n\|_{L^p_{x^\beta}(0,\infty)\to L^p_{x^\beta}(0,\infty)} = \frac{p}{p-\beta p-1}$.

> ***Corollaire I.2.1 ($\beta = 0$) :*** *Soit $p > 1$, alors pour toute fonction f positive mesurable sur $(0,\infty)$ on a :*
>
> $$\|Hf\|_{L^p(0,\infty)} \leq \frac{p}{p-1}\,\|f\|_{L^p(0,\infty)},$$
>
> *et la constante $B_{2.1} := \frac{p}{p-1}$ est optimale.*

NB : on retrouve ainsi l'inégalité classique de Hardy avec la constante optimale $B_{2.1} = B_{1.2} = \frac{p}{p-1}$ (***chp I §1.2***).

3. UNE INÉGALITÉ DE HARDY DANS $\mathbb{R}^n$

> ***Théorème I.3 :***
> *Soient $p \geq 1$ et $\beta < n - \frac{1}{p}$. Pour toute fonction f positive mesurable sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe $B_3 > 0$ telle que :*
>
> $$\| r^\beta\,(\widetilde{H}_n f)(r)\|_{L^p(0,\infty)} \leq B_3\,\|\,|x|^{\beta-\frac{n-1}{p}}\,f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$
>
> *et si $-\frac{1}{p} < \beta < n - \frac{1}{p}$ alors la constante $B_3 := \frac{n\,p}{n\,p-\beta\,p-1}$ est optimale.*

NB : on déduit de cette inégalité que l'opérateur $H_n : L^p_{x^\beta}(\mathbb{R}^n) \to L^p_{r^\beta}(0,\infty)$ est borné et que $\|H_n\|_{L^p_{x^\beta}(\mathbb{R}^n)\to L^p_{r^\beta}(0,\infty)} = \frac{n\,p}{n\,p-\beta\,p-1}$.

En remarquant que pour $n = 1$ et f définie sur $(0,\infty)$ on obtient l'opérateur usuel de Hardy H_1, alors on a le corollaire suivant

> ***Corollaire I.3.1 (n=1) :***
> *Soient $p \geq 1$ et $\beta < 1 - \frac{1}{p}$. Pour toute fonction f positive mesurable sur $(0,\infty)$, alors il existe $B_{3.1} > 0$ telle que :*
>
> $$\| r^\beta\,(Hf)(r)\|_{L^p(0,\infty)} \leq B_{3.1}\,\|\,x^\beta\,f(x)\|_{L^p(0,\infty)}$$
>
> *et si $-\frac{1}{p} < \beta < 1 - \frac{1}{p}$ alors la constante $B_{3.1} := \frac{p}{p-\beta\,p-1}$ est optimale.*

NB : on retrouve ainsi l'inégalité de Hardy pondérée (***théorème I.2***). avec la constante optimale $B_{3.1} = B_2 = \frac{p}{p-\beta\,p-1}$.

4. INÉGALITÉ « MODERNE » DE HARDY

Théorème I.4 **[{67} (Kufner, Maligranda et Persson 2007) p 39] :**
Soit $p > 1$ *, on pose* $\mathcal{H}f(x) := \int_0^x f(t)\, dt$ *. Il existe* $B_4 > 0$ *telle que l'inégalité*

$$\|\mathcal{H}f\|_{L_u^p(0,\infty)} \leq B_4 \|f\|_{L_v^p(0,\infty)}$$

ait lieu $\forall f \geq 0$ *mesurable , si et seulement si :*

$$A := \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty u(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r v^{1-p'}(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \,;$$

et si B_4 *est optimale alors* $.B_4 \leq A\, p^{\frac{1}{p}} (p')^{\frac{1}{p'}}$

NB : cela signifie que l'opérateur $\mathcal{H} : L_v^p(0,\infty) \to L_u^p(0,\infty)$ est borné et que $\|\mathcal{H}_n\|_{L_v^p(0,\infty)\to L_u^p(0,\infty)} \leq A\, p^{\frac{1}{p}} (p')^{\frac{1}{p'}}$.

chp II : Inégalité de Hardy pour les quasi-normes (0<p<1)

1. PRÉLIMINAIRE

Théorème II.1 **[{67} (Kufner, Maligranda et Persson 2007) p 23] :**
Considérons l'inégalité de Hardy :

$$\|x^\beta Hf(x)\|_{L^p(0,\infty)} \leq C \|x^\beta f(x)\|_{L^p(0,\infty)}$$ ***(III)***[6].

1) *Si* $p > 1$ et $\beta < 1 - \frac{1}{p}$ *alors il existe* $C > 0$ *telle que* $\forall f \geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *l'inégalité* ***(III)*** *est vérifiée , en outre la constante* $C_1 := \frac{p}{p-\beta\, p-1}$ *est optimale .*

2) *Si* $p > 1$ et $\beta \geq 1 - \frac{1}{p}$ *alors* $\forall C > 0$ *l'inégalité* ***(III)*** *ne peut avoir lieu.*

3) *Si* $0 < p < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ *alors* $\forall C > 0$ *l'inégalité* ***(III)*** *n'a jamais lieu.*

[6] Il s'agit de l'inégalité ***(III)*** dans l'introduction.

NB : la partie 1) n'est autre que l'inégalité de Hardy pondérée avec la constante optimale $C_1 = B_2 = \frac{p}{p-\beta\, p-1}$ (*chp I* §2).

2. INÉGALITÉS DE HARDY POUR LES FONCTIONS MONOTONES

Théorème II.2 [{21} ***(V. Burenkov 1992)***] **:**

Soient $0 < p < 1$ *et* $\beta < 1 - \frac{1}{p}$ *; alors pour toute fonction* f *positive décroissante sur* $(0, \infty)$ *on a :*

$$\|x^\beta\, Hf(x)\|_{L^p(0,\infty)} \ \leq\ C_2\, \|x^\beta\, f(x)\|_{L^p(0,\infty)}.$$

Si en plus $-\frac{1}{p} < \beta < 1 - \frac{1}{p}$ *alors la constante*

$C_2 := \left(\frac{p}{p-\beta\, p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ *est optimale.*

3. TYPE D'INÉGALITÉ DE HARDY AVEC UNE CONDITION PLUS FAIBLE QUE LA MONOTONIE

Si une fonction f est radialement décroissante, alors on a

$$f(h) \leq \frac{M}{|h|^n}\left(\int_{B(0,|h|)} f(y)\, |y|^{\frac{n}{p'}p}\, dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

qui est donc une ***condition plus faible que la monotonie***.

On présente ci-dessous les résultats de ***{89}*** abordés avec une nouvelle approche qui permet ***une amélioration de la constante*** :

Théorème II.3 **:** *Soient* $M_3 > 0$, $0 < p < 1$ *et* $\beta < n - \frac{1}{p}$. *Si une fonction* $f \geq 0$ *mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *vérifie* $\forall\, r > 0$,

$\left(\int_{B(0,r)} f^p(y)\, |y|^{\frac{n}{p'}p} dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ *et pour presque tout* $h \in \mathbb{R}^n$:

$$f(h) \leq \frac{M_3}{|h|^n}\left(\int_{B_{|h|}} f^p(y)\, |y|^{\frac{n}{p'}p}\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \quad \textbf{\textit{(II,3)}}$$

alors il existe $C_3 > 0$ *telle que :*

$$\|\, r^\beta\, \widetilde{H}_n f(r)\|_{L^p(0,\infty)} \ \leq\ C_3\, \|\, |x|^{\beta - \frac{n-1}{p}}\, f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

où $C_3 := \frac{1}{v_n}\left(\frac{p^p\, M_3^{p(1-p)}}{np-\beta\, p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ *est une constante optimale.*

3.1. CAS n=1

Corollaire II.3.1 ($n=1$) :

Soient $M_{3.1}>0$, $0<p<1$ et $\beta<1-\frac{1}{p}$. Si une fonction $f\geq 0$ mesurable sur $(0,+\infty)$ vérifie pour tout $r>0$, $\left(\int_0^r f^p(t)\,|t|^{p-1}dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$ et pour presque tout $h>0$::

$$f(h)\leq\frac{M_{3.1}}{h}\left(\int_0^h f^p(y)\,y^{p-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

alors il existe $C_{3.1}>0$ telle que :

$$\|\,r^{\beta}\,Hf(r)\|_{L^p(0,\infty)}\;\leq\;C_{3.1}\,\|\,x^{\beta}\,f(x)\|_{L^p(0,\infty)}$$

où $C_{3.1}:=\left(\frac{p^p\,M_{3.1}^{p(1-p)}}{p-\beta\,p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ est une constante optimale.

NB : ceci montre que la classe des fonctions vérifiant la condition de « monotonie affaibli » contient en plus de l'opérateur de différence Δ_h de pas $h>0$ la classe des fonctions à variations lentes (dont , $\prod_{k=1}^n\left(\ln_k t\right)^{\alpha_k}$ où $\ln_k t=\ln\left(\ln_{k-1}t\right)$ et $\alpha_k\in\mathbb{R}$, $\exp\left(|\ln t|^{\alpha}\right)$ avec $\alpha\in(0,1)$, etc … [voir par exemple ***{13}*** , ***{83}*** et ***{88}***]) .

3.2. CAS DE FONCTION À VARIATION LENTE (n=1) :

Si f est à variation lente alors

$$\forall\,h>0\;\;:\;\;\int_0^h y^{p-1}\,f^p(y)\,dy\;\;\approx\;\;h^p\,f^p(h),$$

et donc il existe $M_{3.2}>0$ telle que

$$\forall\,h>0\;:\;f(h)\;\leq\;\frac{M_{3.2}}{h}\left(\int_0^x y^{p-1}\,f^p(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Corollaire II.3.2 : *Soient $0<p<1$ et $\beta<1-\frac{1}{p}$.*

Si une fonction $f\geq 0$ définie sur $(0,+\infty)$ est à variation lente alors il existe $C_{3.2}>0$ telle que :

$$\|\,r^{\beta}\,Hf(r)\|_{L^p(0,\infty)}\;\leq\;C_{3.2}\,\|\,x^{\beta}\,f(x)\|_{L^p(0,\infty)}$$

où $C_{3.2}:=\left(\frac{p^p\,M_{3.2}^{p(1-p)}}{p-\beta\,p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$.

3.3. CAS DE FONCTION DÉCROISSANTE (n=1) :

Si une fonction f est décroissante alors elle vérifie pour tout $h > 0$:

$$f(h) \leq \frac{p^{\frac{1}{p}}}{h} \left(\int_0^h f^p(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}};$$

l'hypothèse du corollaire II.3.1 est donc vérifiée avec $M_{3.3} = p^{\frac{1}{p}}$ d'où :

> ***Corollaire II.3.3 :*** *Soient* $0 < p < 1$ *et* $\beta < 1 - \frac{1}{p}$.
>
> *Si une fonction* $f \geq 0$ *est décroissante sur* $(0, +\infty)$ *alors on a :*
>
> $$\| r^\beta\, Hf(r) \|_{L^p(0,\infty)} \;\leq\; C_{3.3}\, \| x^\beta\, f(x) \|_{L^p(0,\infty)}$$
>
> *où la constante* $C_{3.3} := \left(\frac{p}{p - \beta\, p - 1} \right)^{\frac{1}{p}}$ *est optimale.*

NB : on retrouve l'inégalité de Hardy pour fonctions décroissantes avec la constante optimale $C_{3.3} = B_2 = \left(\frac{p}{p-\beta\, p-1} \right)^{\frac{1}{p}}$ (***chp I §2***).

4. UNE INÉGALITÉ POUR L'OPÉRATEUR DE HARDY GÉNÉRALISÉ

On étend l'inégalité de Hardy dans le ***théorème*** *II.3* à l'opérateur généralisé H_w .

Ce travail a fait l'objet d'une publication [voir ***{4}***].

> ***Théorème II.4 :*** *Soient* $0 < p < 1$, $c > 0$, $A > 0$, $\beta < 1 - \frac{1}{p}$
>
> *et* w *une fonction poids sur* $(0, \infty)$ *telle que :*
>
> $$0 < a < b < \infty \implies w(b) \leq c\, w(a).$$
>
> *Si une fonction* $f \geq 0$ *mesurable sur* $(0, \infty)$ *est telle que :*
>
> *pour presque tout* $x > 0$ *on a*
>
> $$f(x) \leq A \left(\int_0^x w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x f^p(y)\, w(y)\, y^{p-1}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,4)},$$
>
> *alors*
>
> $$\| r^\beta\, (H_w f)(r) \|_{L^p_w(0,\infty)} \;\leq\; C_4\, \| x^\beta\, f(x) \|_{L^p_w(0,\infty)}$$
>
> *où* $C_4 = \left(\frac{p\, A^{p(1-p)}\, c^{2-p}}{p-\beta p-1} \right)^{\frac{1}{p}}$ *est optimale .* $C_{4.1} = \left(\frac{p^p\, M_{4.1}^{p(1-p)}}{p-\beta p-1} \right)^{\frac{1}{p}}$

4.1. Cas sans poids i.e. $w(x) \equiv 1$

Si $w(x) \equiv 1$ alors $c = 1$ et ***(II,4)*** devient

$$f(x) \leq A\,p^{\frac{1}{p}}\,\frac{1}{x}\left(\int_0^x f^p(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

en posant $M_{4.1} = A\,p^{\frac{1}{p}}$ on a $p\,A^{p(1-p)} = p^p\,M_{4.1}^{p(1-p)}$.

> ***Corollaire II.4.1 :*** *Soient* $0 < p < 1$*,* $M_{4.1} > 0$*,* $\beta < 1 - \frac{1}{p}$ *.*
> *Si une fonction* $f \geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *est telle que pour presque tout* $x > 0$ *on a :*
>
> $$f(x) \leq \frac{M_{4.1}}{x}\left(\int_0^x f^p(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{1}{p}},$$
>
> *alors on a :*
>
> $$\|\,r^{\beta}\,H_1 f(r)\|_{L^p(0,\infty)} \;\leq\; C_{4.1}\,\|\,x^{\beta}\,f(x)\|_{L^p(0,\infty)}$$
>
> *où* $C_{4.1} = \left(\frac{p^p\,M_{4.1}^{p(1-p)}}{p-\beta p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ *est optimale .*

NB : on retrouve ainsi le ***corollaire II.3.1*** avec la constante optimale $C_{4.1} = C_{3.1} = \left(\frac{p^p\,M_{3.1}^{p(1-p)}}{p-\beta\,p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ où $M_{3.1} = M_{4.1}$ (***chp II §3.1***).

4.2. Cas de fonction décroissante et $w(x) \equiv 1$

Si $w(x) \equiv 1.$ alors $c = 1$. Si $f \geq 0$ est décroissante sur $(0,\infty)$ alors $f(y) \leq f(0)$ pour tout $y > 0$ et avec $A = 1$ ***(II,4)*** devient

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq 1\left(\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^x f^p(y)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^x f^p(0)\,w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= f(0)\left(\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^x w(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= f(0)
\end{aligned}$$

d'où ***(II,4)*** est vérifiée pour $A = 1$.

De même l'hypothèse du ***Corollaire II.4.1*** est vérifiée avec $M_{4.2} = 1\,p^{\frac{1}{p}} = p^{\frac{1}{p}}$; on obtient alors le corollaire suivant

Corollaire II.4.2 : *Soient* $0 < p < 1$, $\beta < 1 - \frac{1}{p}$.

Si une fonction $f \geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *est décroissante alors on a :*

$$\| r^{\beta} H_1 f(r) \|_{L^p(0,\infty)} \leq C_{4.2} \, \| x^{\beta} f(x) \|_{L^p(0,\infty)}$$

où $C_{4.2} = \left(\frac{p}{p - \beta p - 1}\right)^{\frac{1}{p}}$ *est optimale .*

NB : on retrouve ainsi le ***Théorème** II.2* avec la constante optimale $C_{4.2} = C_2 = \left(\frac{p}{p-\beta p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ **(*chp II* §2)** ainsi que le ***Corollaire** II.3.3* avec la constante optimale $C_{4.2} = C_{3.3} = \left(\frac{p}{p-\beta\, p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ **(*chp II* §3.3).**

5. UNE INÉGALITÉ TYPE DE HARDY AVEC POIDS

Dans le ***théorème** II.3* l'inégalité type de Hardy est vérifiée pour $\widetilde{H}_n$ de $L^p_{|x|^{\alpha-n+1}}(\mathbb{R}^n)$ vers $L^p_{r^{\alpha}}(0,\infty)$ avec $\alpha < np - 1$.

On étend le résultat pour des espaces de Lebesgue pondérés $L^p_u(\mathbb{R}^n)$ et $L^p_v(0,\infty)$.

Le travail a fait l'objet d'une publication [voir ***{6}***].

***Théorème** II.5 :* *Soient* $0 < p < 1$, $M_5 > 0$, *des fonctions poids* u *et* v *sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $(0,\infty)$ *respectivement.*

Supposons que

a) Il existe $l > 0$ *tel que* $$\int_{B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \infty \ , \qquad \textbf{(II,7)}$$

et

b) $\forall\, r > 0$ $$V(r) := \int_r^{\infty} v(\rho)\, \rho^{-np}\, d\rho < \infty \, . \qquad \textbf{(II,8)}$$

Si une fonction $f \geq 0$ *mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *vérifie pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \leq M_5 \, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, u(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,9)}$$

alors on a :

$$\| \widetilde{H}_n f \|_{L^p_v(0,\infty)} \leq C_5 \, \| f \|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \qquad \textbf{(II,10)}$$

où $w(x) = u(x)\, V(|x|)$ *et* $C_5 := \left(\frac{1}{v_n^p} \, p^p \, M_5^{p(1-p)} \right)^{\frac{1}{p}}$

Si de plus on a

$$\int_{B_{r2}\setminus B_{r1}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx < \infty \qquad \text{pour tout } 0 < r_1 < r_2 < \infty \qquad \textbf{(II,11)}$$

*alors C_5 est une constante optimale et il existe $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$ non nulle vérifiant la condition **(II,9)** pour laquelle **(II,10)** devient une égalité.*

NB : dans le ***lemme 1*** est mise en évidence la nécessité de la condition **(II,7)** sur le poids u dans les hypothèses du théorème. En effet sans cette condition la classe des fonctions vérifiant l'inégalité (hypothèse) **(II,9)** se réduit à un seul élément : $f(x) = 0$ presque partout. Dans le ***Théorème*** *II.3* qui correspond à un cas particulier du théorème précédent on a $u(x) = |x|^{-n\,(1-p)}$, et dans ce cas pour $l = 1$ on a

$$\int_{B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \int_{B_1} |x|^{-n(1-p)\,\frac{1}{1-p}}\, dx = \int_{B_1} |x|^{-n}\, dx = +\infty.$$

NB : Le ***lemme 2*** montre que sous les condition **(II,7)** et **(II,11)** les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x) = K\, u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, \exp\left(\frac{M_5^p}{p} \int^{*}_{B_{|x|}\Delta B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\right), \qquad \textit{(II,13)}$$

sont extrémales pour la condition ***(II,9)*** *i.e.* qu'on a égalité dans ***(II,9)*** . En plus dans le cas où $u > 0$ est radiales alors toute fonction radiale extrémale f est de la forme ***(II,13)***.

Exemple : $K \in \mathbb{R}_+^*$, si $u(x) = |x|^{-n(1-p)}$ alors l'égalité dans ***(II,9)*** est atteinte pour

$$f(x) = K\,|x|^{(\frac{v_n\, C_1^p}{p} - 1)\, n}.$$

5.1. CAS DE POIDS SPÉCIAUX

Pour $u(x) = |x|^{-n(1-p)}$ et $v(r) = r^{\beta p}$ on va vérifier que les hypothèses du ***théorème*** *II.5* sont satisfaites :

a) Pour $\qquad l = 1 \qquad \displaystyle\int_{B_l} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \int_{B_1} |x|^{-n}\, dx = +\infty$

[la *condition (II,7) est vérifiée*] ,

b) $\forall\, r > 0$, $V(r) = \dfrac{r^{\beta p - np+1}}{-\beta p + np - 1} < \infty$

[la *condition **(II,8)** est vérifiée si* $\beta < n - \frac{1}{p}$] ; et dans ce cas

$$w(x) = u(x)\, V(|x|) = \frac{|x|^{-n(1-p)} \times |x|^{\beta p - np+1}}{-\beta p + np - 1} = \frac{|x|^{\beta p - n+1}}{-\beta p + np - 1},$$

c) $u^{\frac{1}{1-p}}(x) = \frac{1}{|x|^n}$ et l'inégalité (hypothèse) ***(II,9)*** s'écrit

$$f(x) \le M_{5.1}\, \frac{1}{|x|^n} \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, |y|^{n(p-1)}\, dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

d) pour tout $0 < r_1 < r_2 < \infty$ on a $\int_{B_{r2} \setminus B_{r1}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = n\, v_n \ln \frac{r2}{r1} < \infty$

[la *condition **(II,11)** est vérifiée*] .

D'où le corollaire suivant :

Corollaire II.5.1 : *Soient* $0 < p < 1$, $M_{5.1} > 0$ *et* $\beta < n - \frac{1}{p}$.

Si une fonction $f \ge 0$ *mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *vérifie pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \le M_{5.1}\, \frac{1}{|x|^n} \left(\int_{B_{|x|}} f^p(y)\, |y|^{n(p-1)}\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,9)'}^{\,7}$$

alors on a :

$$\left\| r^{\beta}\, \widetilde{H}_n f(r) \right\|_{L^p(0,\infty)} \le C_{5.1} \left\| \, |x|^{\beta - \frac{n-1}{p}} f(x) \right\|_{L^p(0,\infty)} \qquad \textbf{(II,10)'}^{\,8}$$

où $C_{5.1} := \frac{1}{v_n} \left(\frac{p^p\, M_{5.1}^{p(1-p)}}{np - \beta p - 1} \right)^{\frac{1}{p}}$ *est une constante optimale.*

NB : on retrouve le résultat du ***théorème*** *II.3* avec la constante optimale $C_{5.1} = C_3 := \frac{1}{v_n} \left(\frac{p^p\, M_3^{p(1-p)}}{np - \beta\, p - 1} \right)^{\frac{1}{p}}$ où $M_3 = M_{5.1}$ (***chp II §3***).

---

[7] l'inégalité ***(II,9)'*** est l'inégalité ***(II,9)*** dans le ***Théorème*** *II.5* pour $u(x) = |x|^{-n(1-p)}$ et $v(r) = r^{\alpha}$

[8] l'inégalité ***(II,10)'*** est l'inégalité ***(II,10)*** dans le ***Théorème*** *II.5* pour $u(x) = |x|^{-n(1-p)}$ et $v(r) = r^{\alpha}$.

5.2. CAS n=1

Corollaire II.5.2 : *Soient* $0 < p < 1$, $M_{5.2} > 0$, *des fonctions poids* u *et* v *sur* $(0,\infty)$.

Supposons que

a) Il existe $l > 0$ *tel que* $\displaystyle\int_0^l u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx = \infty$ ***,(II,7)"***

et

b) $\forall x > 0$ $\displaystyle V(x) := \int_x^\infty \frac{v(\rho)}{\rho^p}\,d\rho < \infty\,.$ ***(II,8)"***

Si une fonction $f \geq 0$ *mesurable vérifie pour presque tout* $x > 0$

$$f(x) \leq M_{5.2}\, u^{\frac{1}{1-p}}(x) \left(\int_0^x f^p(y)\,u(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,9)"}$$

alors on a :

$$\|Hf\|_{L_v^p(0,\infty)} \leq C_{5.2}\, \|f\|_{L_w^p(0,\infty)} \qquad \textbf{(II,10)"}$$

où $w(x) = u(x)\,V(x)$ *et* $C_{5.2} := \left(p^p\, M_{5.2}^{p(1-p)}\right)^{\frac{1}{p}}$

Si de plus on a

$$\int_{r_1}^{r_2} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\,dx < \infty \qquad \text{pour tout } 0 < r_1 < r_2 < \infty \qquad \textbf{(II,11)"}$$

alors $C_{5.2}$ *est une constante optimale.*

5.3. CAS DE POIDS SPÉCIAUX AVEC n=1

Si on prend $u(x) = x^{p-1}$ et $v(r) = r^{\beta p}$ sur $(0,\infty)$ alors on obtient :

Corollaire II.5.3 : *Soient* $0 < p < 1$, $C_{5.3} > 0$ *et* $\beta < 1 - \frac{1}{p}$.

Si une fonction $f \geq 0$ *mesurable sur* $(0,\infty)$ *vérifie pour presque tout* $x > 0$

$$f(x) \leq M_{5.3}\, \frac{1}{x} \left(\int_0^x f^p(y)\,y^{p-1}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(II,9)"'}$$

alors on a :

$$\|r^\beta\, Hf(r)\|_{L^p(0,\infty)} \leq C_{5.3}\, \|x^\beta\, f(x)\|_{L^p(0,\infty)} \qquad \textbf{(II,10)"'}$$

où $C_{5.3} := \left(\frac{p^p\, M_{5.3}^{p(1-p)}}{p - \beta p - 1}\right)^{\frac{1}{p}}$ *est une constante optimale.*

NB : on retrouve le résultat du ***Corollaire*** *II.3.1* avec la constante optimale $C_{5.3} = C_{3.1} := \left(\frac{p^p\, M_3^{p(1-p)}}{p - \beta p - 1}\right)^{\frac{1}{p}}$ **(*chp II* §3.1).**

5.4. CAS DE FONCTION DÉCROISSANTE AVEC POIDS SPÉCIAUX ET n=1 :

Si on a $u(x)=x^{p-1}$ et $v(r)=r^{\beta p}$ sur $(0,\infty)$ et si en plus f est une fonction décroissante alors ***(II,9)*** est vérifiée avec $M_5=p^{\frac{1}{p}}$ d'où :

> ***Corollaire II.5.4 :*** *Soient* $0<p<1$ *et* $\beta<1-\frac{1}{p}$.
>
> *Si une fonction* $f\geq 0$ *est décroissante alors on a :*
>
> $$\|r^{\beta}\, Hf(r)\|_{L^p(0,\infty)} \;\leq\; C_{5.4}\, \|x^{\beta}\, f(x)\|_{L^p(0,\infty)} \qquad \textbf{(II,10)''''}$$
>
> *où* $C_{5.4}:=\left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ *est une constante optimale.*

NB : on retrouve l'inégalité de Hardy pour les fonctions monotones du ***théorème*** *II.2* avec la constante optimale $C_{5.4}=C_2=\left(\frac{p}{p-\beta p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ (***chp II §2***).

chp III : Applications

...

3. EQUIVALENCE DE QUASI-NORMES (NORMES) DANS LES ESPACES DE BESOV LIÉES À UNE FONCTION À VARIATION LENTE

On donne la définition de l'espace de Besov avec deux paramètres de régularités (classique $l>0$ et une fonction à variation lente) :

> ***Définitions :*** *soient* $1\leq p<\infty$, $0<\theta\leq\infty$, $\sigma\in\mathbb{N}^*$, $0<l<\sigma$ *et* v *une fonction à variation lente sur* $(0,+\infty)$ *:*
>
> *1) Espace de Besov* $B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ *via le p-module de continuité :*
>
> ***si*** $0<\theta<\infty$ ***:*** $B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in L^p(\mathbb{R}^n)\ :\ \|f\|^{(1)(\sigma)}_{b^{l}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}=\left(\int_0^{\infty} v^{\theta}(t)\left(\frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}}<\infty\right\}$
>
> *et* $B^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in L^p(\mathbb{R}^n)\ :\|f\|^{(1)(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}=\sup_{t>0}\ v(t)\ \frac{\omega_\sigma(f,t)_p}{t^l}<\infty\right\}$
>
> *avec la norme* $\|f\|^{(1,\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|f\|^{(1)(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$.
>
> *2) Espace de Besov* $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ *via les différences :*
>
> **si** $0<\theta<\infty$ **:** $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in L^p(\mathbb{R}^n)\ :\ \|f\|^{(2)(\sigma)}_{b^{l}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n} v^{\theta}(t)\left(\frac{\|\Delta^{\sigma}_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^{\theta}\frac{dh}{|h|^n}\right)^{\frac{1}{\theta}}<\infty\right\}$
>
> *et* $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in L^p(\mathbb{R}^n)\ :\ \|f\|^{(2)(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}=\sup_{h\in\mathbb{R}^n,h\neq 0}\ v(t)\ \frac{\|\Delta^{\sigma}_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}<\infty\right\}$
>
> *avec la norme* $\|f\|^{(2,\sigma)}_{\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|f\|^{(2)(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$.

Notre travail consiste à :

1. établir des inégalités type de Hardy pour $\theta \geq 1$ et pour $0 < \theta < 1$,
2. pour un ordre fixé $\sigma \in \mathbb{N}^*$, on montrera que $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque : On a montré l'équivalence entre les normes (quasi-normes) dans $\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ indépendemment de l'ordre $\sigma \in \mathbb{N}^*$ [*[5]*]. Comme conséquence de la partie (2) on obtiendra l'équivalence entre les normes (quasi-normes) dans l'espace de Besov $B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ indépendemment de l'ordre $\sigma \in \mathbb{N}^*$

3.1. INÉGALITÉS TYPE DE HARDY

Lemme III.3.1.(a) : *soient $1 \leq p < \infty$, $\theta \geq 1$ et v une fonction à variation lente alors pour toute fonction $G \geq 0$ mesurable il existe $D_1 > 0$ telle que*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{|h|\leq r} G(h)\, dh\right)^\theta \frac{v^\theta(r)}{r^{l\theta+1}}\, dt\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq D_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} G^\theta(h)\, \frac{v^\theta(|h|)}{|h|^{n+l\theta-n\theta}}\, dh\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad \textit{(III,11)}$$

Lemme III.3.1.(b) : *soient $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta < 1$ et v une fonction à variation lente. Si une fonction mesurable $G \geq 0$ vérife p.p. $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pour $M > 0$:*

$$G(h) \leq M \frac{1}{|h|^{\frac{n}{\theta}}} \left(\int_{B_{|h|}} G^\theta(\eta)\, d\eta\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

alors il existe $D_2 > 0$ telle que

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{|h|\leq t} G(h)\, dh\right)^\theta \frac{v^\theta(t)}{t^{l\theta+1}}\, dt\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq D_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} G^\theta(h)\, \frac{v^\theta(|h|)}{|h|^{n+l\theta-n\theta}}\, dh\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad \textit{(III,14)}$$

3.2. EQUIVALENCE DES NORMES (QUASI-NORMES) LIÉES AUX DIFFÉRENCES ET AU MODULE DE CONTINUITÉ

Theorem III.3.2 : *Soient $1 < p \leq \infty$, $0 < \theta \leq \infty$, $\sigma \in \mathbb{N}^*$, $\sigma > l > 0$ et une fonction à variation lente v. On a*

$$\widetilde{B}^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$$

avec des normes équivalentes i.e. qu'il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|^{(2),(\sigma)}_{B^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^{l,v}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$$

Appendice 2 : fonctions à variation lente

Une fonction positive mesurable b est dite à variation lente (à l'infini) si elle est définie sur un certain intervalle $[A, \infty)$ et pour tout $k > 0$ [voir ***{61}***] :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{b(k\,t)}{b(t)} = 1 .$$

Exemple : les fonctions logarithmes et leurs itérations sont des fonctions à variation lente souvent utilisées comme poids dans les espaces de Lorentz et ceux de Besov.

Une propriété caractéristique de cette classe de fonctions qui est souvent utilisée comme définition des fonctions à variation lente est la suivante [voir ***{27}*** *et* ***{34}***] :

> $\forall \varepsilon > 0$, *il existe deux fonctions monotones* $g_\varepsilon(t)$ *croissante et* $g_{-\varepsilon}(t)$ *décroissante telles que sur* $[A, \infty)$ *on a :*
>
> $$t^\varepsilon b(t) \;\approx\; g_\varepsilon(t) \qquad \textit{et} \qquad t^{-\varepsilon}\, v(t) \;\approx\; g_{-\varepsilon}(t)\,.$$

Considérons $A > 0$ assez grand et posons pour $t > 0$:

$$v(t) := v_b(t) := b\big(\max(A\,t\ ,\ \frac{A}{t})\big) = \begin{cases} b(\frac{A}{t}) & \text{si } t \le 1 \\ b(A\,t) & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$$

> ***Propriétés :*** *si* b *est à variation lente , alors* $v(t) := v_b(t)$ *est à variation lente et*
>
> ***1)*** $\forall k > 0$ *on a sur* $(0, \infty)$ *:* $\qquad v(k\,t) \;\approx\; v(t)\,,$
>
> ***2)*** $\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad v_{b^\theta}(t) = v_b^\theta(t)\,,$
>
> ***3)*** $\forall \varepsilon > 0$ *on a sur* $(0, \infty)$ *:*
>
> $$t^\varepsilon v(t) \;\approx\; G_\varepsilon(t) \qquad \textit{et} \qquad t^{-\varepsilon}\, v(t) \;\approx\; G_{-\varepsilon}(t)$$
>
> *où* G_ε *et* $G_{-\varepsilon}$ *sont deux fonctions respectivement croissante (on notera* $G_\varepsilon(t)\ \nearrow$*) et décroissante* ($G_{-\varepsilon}(t)\ \searrow$*).*
>
> ***4)*** *pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a :*
>
> *a)* $\forall x > 0 \;:\; \displaystyle\int_0^x t^{\varepsilon-1} v(t)\, dt \;\approx\; \sup_{0<t<x} t^\varepsilon\, v(t) \approx\; x^\varepsilon\, v(x)$
>
> *b)* $\forall x > 0 \;:\; \displaystyle\int_x^\infty t^{-\varepsilon-1} v(t)\, dt \;\approx\; \sup_{t>x} t^{-\varepsilon}\, v(t) \approx\; x^{-\varepsilon}\, v(x)$

Preuve : soit b est à variation lente, alors v est à variation lente. En effet pour tout $k>0$ on a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v(k\,t)}{v(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{b(k\,At)}{b(At)}=1\,.$$

En particulier v vérifie les propriétés ***i)*** , ***ii)*** , ***iii)*** et ***iv)*** citées ci-dessus.

1) *Soit* $k>0$ *et* $t\in(0,\infty)$ *:* $\quad v(k\,t)=\begin{cases} b(\frac{1}{k}\frac{A}{t}) & \text{si } t\le 1\\ b(A\,k\,t) & \text{si } t\ge 1\end{cases}$

$$\begin{cases} t\le 1 \implies \frac{A}{t}\ge A \implies & (1-\varepsilon)b(\frac{A}{t})\le b(\frac{1}{k}\frac{A}{t})\le(1+\varepsilon)b(\frac{A}{t})\\ \\ t\ge 1 \implies A\,t\ge A \implies & (1-\varepsilon)b(A\,t)\le b(A\,k\,t)\le(1+\varepsilon)b(A\,t)\end{cases}$$

donc $(1-\varepsilon)v(t)\le v(k\,t)\le(1+\varepsilon)v(t)$ i.e. $v(k\,t)\ \approx\ v(t)$.

2) $\quad v_{b^\theta}(t):=\begin{cases} b^\theta(\frac{A}{t}) & \text{si } t\le 1\\ b^\theta(A\,t) & \text{si } t\ge 1\end{cases}\ =\ v_b^\theta(t)$

3) *Soit* $\varepsilon>0$, *il existe alors deux fonctions monotones telles que :*

$x^\varepsilon b(x)\ \approx\ g_\varepsilon(t)\ \nearrow$ et $x^{-\varepsilon}\,b(x)\ \approx\ g_{-\varepsilon}(t)\ \searrow$ sur $[A,\infty)$.

Posons:

$$G_\varepsilon(t):=\begin{cases}\frac{g_\varepsilon(A)}{g_{-\varepsilon}(A)}\,g_{-\varepsilon}(\frac{A}{t}) & \text{si } t\le 1\\ g_\varepsilon(A\,t) & \text{si } t\ge 1\end{cases}\quad \text{et} \quad G_{-\varepsilon}(t):=\begin{cases} g_\varepsilon(\frac{A}{t}) & \text{si } t\le 1\\ \frac{g_\varepsilon(A)}{g_{-\varepsilon}(A)}\,g_{-\varepsilon}(A\,t) & \text{si } t\ge 1\end{cases};$$

visiblement $G_\varepsilon(t)\ \nearrow$ et $G_{-\varepsilon}(t)\ \searrow$ sur $(0,+\infty)$ et on a :

$$t^\varepsilon\,v(t):=\begin{cases}\text{si } t\le 1: & t^\varepsilon\,b(\frac{A}{t})=A^\varepsilon\left(\frac{A}{t}\right)^{-\varepsilon}b(\frac{A}{t})\approx g_{-\varepsilon}(\frac{A}{t})\\ \\ \text{si } t\ge 1: & t^\varepsilon\,b(A\,t)\approx g_\varepsilon(A\,t)\end{cases}$$

d'où $\quad t^\varepsilon\,v(t)\approx G_\varepsilon(t)$.

De même

$$t^{-\varepsilon}\,v(t):=\begin{cases}\text{si } t\le 1: & t^{-\varepsilon}\,b(\frac{A}{t})=A^{-\varepsilon}\left(\frac{A}{t}\right)^{\varepsilon}b(\frac{A}{t})\approx g_\varepsilon(\frac{A}{t})\\ \\ \text{si } t\ge 1: & t^{-\varepsilon}\,b(A\,t)\approx g_{-\varepsilon}(A\,t)\end{cases}.$$

d'où $\quad t^{-\varepsilon}\,v(t)\approx G_{-\varepsilon}(t)$.

4) Soit $\varepsilon > 0$, alors pour $x > 0$, en utilisant les notations de la question ***3)*** précédente on a

a)

$$\int_0^x t^{\varepsilon-1}\, v(t)\, dt \gtrsim \int_0^x t^{\varepsilon}\, G_{-1}(t)\, dt \geq G_{-1}(x) \int_0^x t^{\varepsilon}\, dt \gtrsim x^{-1}\, v(x) \int_0^x t^{\varepsilon}\, dt = x^{\varepsilon}\, v(x)\,,$$

$$\int_0^x t^{\varepsilon-1}\, v(t)\, dt \lesssim \int_0^x t^{\frac{\varepsilon}{2}-1}\, G_{\frac{\varepsilon}{2}}(t)\, dt \leq G_{\frac{l}{2}}(x) \int_0^x t^{\frac{\varepsilon}{2}-1}\, dt \lesssim x^{\frac{\varepsilon}{2}}\, v(x) \int_0^x t^{\frac{\varepsilon}{2}-1}\, dt = x^{\varepsilon}\, v(x)\,,$$

donc $$\int_0^x t^{\varepsilon-1}\, v(t)\, dt \;\approx\; x^{\varepsilon}\, v(x).$$

D'autre part: $$\forall 0 < t < x \;:\; G_{\varepsilon}(t) \lesssim t^{\varepsilon}\, v(t) \lesssim G_{\varepsilon}(t)\,,$$

donc $$\sup_{0<t<x} t^{\varepsilon}\, v(t) \approx G_{\varepsilon}(x) \approx x^{\varepsilon}\, v(x)\,.$$

б)

$$\int_x^{\infty} t^{-\varepsilon-1}\, v(t)\, dt \gtrsim \int_x^{\infty} t^{-\varepsilon-2}\, G_1(t)\, dt \geq G_1(x) \int_x^{\infty} t^{-\varepsilon-2}\, dt \gtrsim x\, v(x) \int_x^{\infty} t^{-\varepsilon-2}\, dt \gtrsim x^{-\varepsilon}\, v(x)$$

$$\int_x^{\infty} t^{-\varepsilon-1}\, v(t)\, dt \lesssim \int_x^{\infty} t^{-\frac{\varepsilon}{2}-1}\, G_{-\frac{\varepsilon}{2}}(t)\, dt \leq G_{-\frac{\varepsilon}{2}}(x) \int_x^{\infty} t^{-\frac{\varepsilon}{2}-1}\, dt \lesssim x^{-\frac{\varepsilon}{2}}\, v(x) \int_x^{\infty} t^{-\frac{\varepsilon}{2}-1}\, dt \lesssim x^{-\varepsilon}\, v(x).$$

donc $$\int_x^{\infty} t^{-\varepsilon-1}\, v(t)\, dt \;\approx\; x^{-\varepsilon}\, v(x).$$

D'autre part: $$\forall t \in (x,\infty) \;:\; G_{-\varepsilon}(t) \lesssim t^{-\varepsilon}\, v(t) \lesssim G_{-\varepsilon}(t)$$

donc $$\sup_{x<t<\infty} t^{-\varepsilon}\, v(t) \approx G_{-\varepsilon}(x) \approx x^{-\varepsilon}\, v(x)$$

$\boxdot$

Bibliographie

{1} Adams, R.A. Sobolev spaces. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975.

{2} Anderson, K., et B. Muckenhoupt. «Weighted weak types Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions.» Studia Math., n° 72 (1982): 9-26.

{3} Ariño, M., et B. Muckenhoupt. «Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions.» Trans. Am. Math. Soc., n° 320 (1990): 727-735.

{4} Azzouz, N., B. Halim, et A. Senouci. «An inequality for the weighted Hardy operator for $0 < p < 1$.» Eurasian Math. J. 4, n° 3 (2013): 127–131.

{5} Azzouz, N., B. Halim, et A. Senouci. «Equivalent norms involving differences and moduli of continuity in weighted Nikolskii-Besov spaces.» (en cours de préparation pour une éventuelle soumission)

{6} Azzouz, N., V.I. Burenkov, et A. Senouci. «A Weighted Hardy–Type Inequality For $0 < p < 1$ With Sharp Constant.» Mathematical Inequalities & Applications 18, n° 2 (2015): 787–799.

{7} Baras, P., et J.A. Goldsteine. «The heat equation with a singular potential.» Trans. Amer. Math. Soc. 284, n° 1 (1984): 121-139.

{8} Barza, S., M. Johansson, et L.E. Persson. «A Sawyer duality principle for radially monotone functions in R^n.» Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics 6, n° 2 (2005): Article 44 (13 pages).

{9} Beesack, P. R., et H. Heinig. «Hardy's inequalities with indices less than 1.» Proc. Amer. Math. Soc., n° 83 (1981): 532-536.

{10} Beesack, P.R. «Hardy's inequality and its extensions.» Pacific J. Math., n° 11 (1961): 39-61.

{11} Bennett, G., et K.G. Erdmann. «Weighted Hardy inequality for decreasing sequences and functions.» Math. Ann., n° 334 (2006): 489-531.

{12} Besov, O.V., V.P. Ilyin, et S.M. Nikolsky. Integral representation of functions and imbeding theorems. Moscow: Nauka, 1975.

{13} Bingham, N.H., C.M. Goldie, et J.L. Teugels. Regular Variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

{14} Bliss, G.A. «An integral inequality.» J. London Math. Soc., n° 5 (1930): 10-46.

{15} Bloom, S., et R. Kerman. «Weighted norm inequality for operators of Hardy-type.» Proc. Amer. Math. Soc., n° 113 (1991): 135-141.

{16} Boyd, D.W. «The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces.» Canad. J. Math., n° 19 (1967): 599-616.

{17} Boyd, P. W., et J. A. Erdos. «Norm inequalities for a class of Voltera operators.» Unpublished manuscript, 1972: 1-3.

{18} Bradley, J. S. «Hardy inequalities with mixed norms.» Canad. Math. Bull., n° 21 (1978): 103-108.

{19} Brezis, H., et J.L. Vazquez. «Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems.» Rev. Mat. Complut. 10, n° 2 (1997): 443-469.

{20} Brezis, Haim. Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. Paris: Dunod, 1999.

{21} Brezis , H. , Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York Dordrecht Heidelberg London: C, 2011.

{22} Burenkov, V.I. «Functional spaces. Basic integral inequalities connected with Lp-spaces.» , Moscow University, 1989: 91-96.

{23} Burenkov, V.I. «On the exact constant in the Hardy inequality with 0<p<1 for monotone functions.» Trudy Mat. Inst. Steklov 194 (1992): 58-62.

{24} Burenkov, V.I., A. Senouci, et T.V. Tararykova. «Equivalent quasi-norm involving differences and moduli of continuity.» Complex Variables and Elliptic Equations 55 (2010): 759 – 769.

{25} Burenkov, V.I., A. Senouci, et T.V. Tararykova. «Hardy-type inequality for 0 < p < 1 and hypodecreasing functions;.» Eurasian Math. J. 1, n° 3 (2010): 27–42.

{26} Burenkov, V.I., et W. D. Evans. «Weighted Hardy type inequalities for differences and the extension probem for spaces with generalised smoothness.» J. London Math. Soc., n° 57 (1998): 209-230.

{27} Caetano, A.M., A. Gogatishvili, et B. Opic. «Embeddings and the growth envelope of Besov spaces involving only slowly varying smoothness.» Journal of Approximation Theory (ScieceDirect) 163 (2011): 1373–1399.

{28} Carro, M., et J. Soria. «Boundedness of some integral operators.» Canad. J. Math., n° 45 (1993): 1155-1166.

{29} Carro, M., et J. Soria. «Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator.» J. Funct. Analysis, n° 112 (1993): 480-494.

{30} Carro, M.J., L. Pick, J. Soria, et V.D. Stepanov. «On embeddings between classical Lorentz spaces.» Math. Inequal. Appl., n° 4 (2001): 397-428.

{31} Dupaigne, Louis. Equations elliptiques semilineaires avec potentiel singulier. Paris VI: [Thèse de Doctorat , math]. Universitée Pierre et Marie Curie, 2001.

{32} Eryilmaz, I. «Xeighted composition operators on weighted Lorentz-Karamata spaces.» Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 57, n° 1 (2012): 11-119.

{33} Flett, T. M. «A note on some inequalities.» Prc. Glasnow Math. Assoc., n° 4 (1958): 7-15.

{34} Friedrich-Schiller. Interpolation and Extrapolation. Universität Jena: Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Diplom-Mathematiker, 2009.

{35} Garcia Azorero, J. P., et I. Peral Alonso. «Hardy Inequalities and Some Critical Elliptic and Parabolic Problems.» journal of differential equations 144 (1998): 441-476.

{36} Germain, P. Solutions Fortes, Solutions Faibles d'EDP d'évolution. Paris: Ecole Polytechnique, 2005.

{37} Gogatishvili, A., A. Kufner, et L.E. Persson. «Some new scales of characterisation of Hardy's inequality.» Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, n° 59 (2010): 7-18.

{38} Gogatishvili, A., A. Kufner, L. E. Persson, et A. Wedestig. «An equivalence theorem for integral conditions related to Hardy's inequality.» Real Anal. Exchange 29, n° 2 (2003/04): 867-880.

{39} Goldman, M.L. «Sharp estimates for the norms of Hardy-type operators on cones of quasimonotone functions.» Proc. Steklov Inst. Math., n° 232 (2001): 109-137.

{40} Goldman, M.L., H.P. Heinig, et V.D. Stepanov. «On the principle of duality in Lorentz spaces.» Canad. J. Mayh., n° 48 (1996): 959-979.

{41} Goldstein, J.A., et Q.S. Zhang. «On a degenerate heat equation with a singular potential.» J. Funct. Anal. 186 (2001): 342-359.

{42} Grisvard, P. «Espaces intermédiaires entre espaces de sobolev avec poids.» Ann. Scuola Norm.Sup. Pisa, n° 17 (1963): 255-296.

{43} Gurka, P., et B. Opic. «Sharp Embeddings of Besov Spaces with Logarithmic Smoothness.» Revista Matematica Complutense 18, n° 1 (2005): 81–110.

{44} Hardy, G. H. «Notes on a theorem of Hilbert.» Math. Z 6 (1920): 314-317.

{45} Hardy, G. H. «Notes on some points in the integral calculus. I.X. An inequality between integrals.» Messenger of Math. 54 (1925): 150-156.

{46} Hardy, G. H. «Notes on some points in the integral calculus. LI. On Hilbert.'s doule-series theorem,. and some connected theorems concerning the convergence of infinite series and integrals.» Messenger of Math. 48 (1919): 107-112.

{47} Hardy, G. H., J. E. Littlewood, et G. Polya. INEQUALITIES. CAMBRIDGE: UNIVERSITY PRESS, 1934.

{48} Hardy, G.H. «Notes on somme points in the integral calculus. LXIV. Further inequalities between integrals.» Messenger of Math., n° 57 (1927): 12-16.

{49} Hardy, G.H. «Notes on somme points in the integral calculus. XLI. On the convergence of certain integrals and series.» Messenger of Math., n° 45 (1915): 163-166.

{50} Hardy, G.H., J.E. Littlewood, et G. Polya. Inequalities. Cambridge Univ. Press, (reprint) , 1962.

{51} Heinig, H. P., et I. Maligranda. «Weighted inequality for monotone and concave functions.» Studia Math., n° 116 (1995): 133-165.

{52} Heinig, H.P., A. Kufner, et L.E. Persson. «On Somme Fractional Order Hardy Inequalities.» J. of Inequal. & Appl., n° 1 (1997): 25-46.

{53} Heinig, H.P., et L. Maligranda. «Interpolation with weights in Orlicz spaces.» Boll. Un; Math. Ital. B7 8, n° 1 (1994): 37-55.

{54} Herz, C. «The Hardy-Littlewood maximal theorem.» Symposium on Harmonic Analysis (Univ. of Warwick), 1968: 1-27.

{55} Hunter, John K. Notes on Partial Differential Equations. California: University of California, 2014.

{56} Jakovlev, G.N. «Boudary properties of certain class of functions.» Trud Mat. Inst. Steklov, n° 60 (1961): 325-349 (Russe).

{57} Johansson, M., L. A. Persson, et A. Wedestig. «A new approach to the Sawyer and Sinnamon characterizations of Hardy's inequality for decreasing functions.» Georgian Mathematical Journal 15, n° 2 (2008): 295–306.

{58} Johansson, M., V.D. Stepanov, et E.P. Ushakova. «Hardy Inequality with three Measures on Monotone functions.» Mathematical Inequalities & Applications 11, n° 3 (2008): 393–413.

{59} Kac, J.S., et M.G. Krein. «Criteria for discretness of the spectrum of a singular string.» Izv. Vyss. Uchebn Zaved. Math., n° 2 (1958): 136-153.

{60} Kaminska, A., et L. Maligranda. «Order convexity and concavity of Lorentz spaces, p>0.» Studia Math., n° 160 (2004): 267-286.

{61} Karamata, J. «Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux.» Bull. Soc. Math., n° 61 (1933): 55-62.

{62} Kokilashvili, V. M. «On Hardy's inequality in weighted spaces.» Soobshch. Akad. Nauk. Gruzin. SSR 96, 1979: 37-40.

{63} Kufner, A., et H. Triebel. «Generalisation of Hardy's inequality.» Confer. Sem. Mat. Univ. Bari , n° 156 (1978): 1-21.

{64} Kufner, A., et L. E. Persson. Weighted Inequalities of Hardy Type. Singapore, New Jersey, London, Honk Kong: World Scientific Publishing Co, 2003.

{65} Kufner, A., et L.E. Persson. «Hardy inequalities of fractional order via interpolation.» WSSIAA, 1994: 417-430.

{66} Kufner, A., K. Kuliev, et G. Kulieva. «The Hardy inequality with one negative parameter.» Banach J. Math. Anal. 2, n° 2 (2008): 76-84.

{67} Kufner, A., L. Maligranda, et L.E. Persson. «The Hardy Inequality; About its History and Some Related Results.» Pilsen Edition, 2007: Chp10 p93.

{68} Kufner, A., L. Maligranda, et L.E. Persson. «The prehistory of the Hardy inequality.» Amer. Math. Monthly 113 (2006): 715-732.

{69} Kufner, K., et K. Kuliev. «The Hardy inequality with "negative powers".» Adv. Algebra Anal., n° 1 (2006): 219-228.

{70} Lorentz, L. L. «On the theory of spaces.» Pacific J. Math., n° 1 (1951): 411-429.

{71} Mazya, V.G. «Sobolev spaces.» Springer-Verlag, Berlin, 1985.

{72} Mazya, W. «Imbedding Theorems for Sobolev Spaces. Part1 .» Teubner-Texte zur Mathematik. Leipzig, 1979: 68-72.

{73} Muckenhoupt, B. «Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function.» Trans. Amer. Math. Soc., n° 165 (1972): 207-226.

{74} Muckenhoupt, B. «Hardy's inequality with weights.» Studia Math., n° 44 (1972): 31-38.

{75} Neves, J.S. «Lorentz-Karamata spaces, Bessel potentials and embeddings.» Dissertationnes Mathematicae, n° 405 (2002).

{76} Okpoti, C. A., L. E. Persson, et G. Sinnamon. «Equivalence theorem for some integral conditions related to Hardy's inequality II.» J. Math. Anal. Appl., n° 337 (2008): 219–230.

{77} Okpoti, C.A., L.E. Persson, et G. Sinnamon. «An equivalence theorem for some integral conditions with general measures related to Hardy's inequality.» J. Math. Anal. Appl. , n° 326 (2007): 398–413.

{78} Pecaric, J., I. Peric, et L.E. Persson. «Integral Inequalities for Monotone Functions.» Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 1997: 235-251.

{79} Persson, L. E., et V. D. Stepanov. «Weighted integral inequalities with the geometric mean operator.» J. Inequal. Appl., n° 5 (2002): 727-746.

{80} Persson, L. E., V. D. Stepanov, et P. Wall. «Some scales of equivalent weight characterizations of Hady's inequality: the case q<p.» J. Math. Inequal. Appl., n° 2 (2007): 267-279.

{81} Portnov, V. R. «Two imbeddings for the spaces Lp, and their applications (Russian).» Dokl. Akad. Nauk SSSR, n° 155 (1964): 761-764.

{82} Prokhorov, D. V. «Weighted Hardy inequalities for negative indices.» Publ. Math., n° 48 (2004): 423-443.

{83} Rehák, Pavel. «Nonlinear differential systems and regularly varying functions.» Workshop on BVP's, Brno, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2014.

{84} Resenick, S.I. Extreme Values, Regular Variation. Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer, 1987.

{85} Riesz, F. «Sur un théorème de maximum de MM. Hardy et Littlewood.» J. London Math. Soc., n° 7 (1932): 10-13.

{86} Sawyer, E. «Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces.» Studia Math., n° 96 (1990): 145-158.

{87} Sedaev, A. A. «The Hardy operator in Lp spaces with weight.» Coll. of Papers by Graduate Students, Math. Fac. Izdot. Voronez. Cos. Univ. Voronezh, 1972: 1-3.

{88} Seneta, E. Functions of Regular Variation. Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer, 1976.

{89} Senouci, A., et T.V. Tararykova. «Hardy-type inequality for 0 < p < 1.» Evraziiskii Matematicheskii Zhurnal 2 (2008): 111-115.

{90} Sinnamon, G. «Hardy's inequality and monotonicity.» Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Repiblic, Prague, 2005: 292-310.

{91} Sinnamon, G. «Operators on Lebesgue Spaces with General Measures.» PhD thesis, McMaster University, Hamilton, 1987.

{92} Sinnamon, G. «Transferring monotonicity in weighted norm inequality.» Collect. Math., n° 54 (2003): 181-216.

{93} Sinnamon, G., et V. D. Stepanov. «The weighted Hardy inequality: new proofs and the case p=1.» London Math. Soc., n° 54 (1996): 89-101.

{94} Skrzypczak, Iwona. Hardy–type inequalities and nonlinear eigenvalue problems. Warsaw: Institute of Mathematics-University of Warsaw, 2013.

{95} Soria, J. «Lorentz spaces of week-type.» Quart. J. Math., n° 49 (1998): 93-103.

{96} Stepanov, V.D. «The weighted Hardy's inequality for non-increasing functions.» Trans. Amer. Math. Soc., n° 338 (1993): 173-186.

{97} Stepanov, V.D. «Weighted norm inequalities for integral operators and related topics.» Proceedings of the Spring School; Prometheus Publishing House, Praha, n° 5 (1994): 139-175.

{98} Sysoeva, F. A. «Generalistions of a certain Hardy inequality.» Izv. Vyss. Uceb. Zaved. Mathematika 6, n° 49 (1965): 140-143.

{99} Talenti, G. «Asseroazioni sopra una classe di disuguaghanza.» Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, n° 39 (1969): 171-185.

{100} Talenti, G. «Una diseguaghanza integrale.» Ball. Un; Mat. Ital. 3, n° 21 (1966): 25-34.

{101} Tomaselli, G.N. «A class of inequalities.» Ball. Un. Mat. Ital., n° 2 (1969): 622-631.

{102} Triebel, H. Theory of Function Spaces. Birkäuser Verlag, 1992.

{103} Vazquez, J.L., et E. Zuazua. «The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential.» J. Funct. Anal. 103 (2000): 103-153.

{104} Walsh, T. «On weighted norm inequalities for fractionnal and singular integrals.» Canad. J. Math., n° 23 (1971): 907-928.