

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Croissance et points fixes des solutions de certaines
équations différentielles linéaires du second ordre à
coefficients méromorphes

Présenté par

M^{elle} DJALTI BEN ZIANE Soumia

Soutenu le /05/2015

Devant le jury

Mr BELAÏDI Benharrat	Président	Pr	U. MOSTAGANEM.
Mme BELARBI HAMANI S	Examinatrice	M.C.A	U. MOSTAGANEM.
Mme AZIZ HAMANI K	Encadreur	M.C.A	U. MOSTAGANEM.

Table des matières

Introduction	i
1 Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna	2
1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna	2
1.2 Ordre d'une fonction méromorphe	4
1.3 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe	5
1.4 Mesure linéaire et mesure logarithmique	5
1.5 L'indice central d'une fonction entière	6
2 Croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes	7
2.1 Introduction et résultats	7
2.2 Lemmes préliminaires	8
2.3 Preuve du Théorème 2.1.2	11
3 Point fixes des solutions de certaines équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes	16
3.1 Introduction et résultats	16
3.2 Lemmes préliminaires	17
3.3 Preuve de théorème 3.1.1	24
3.4	24

Conclusion	31
Bibliographie	32

INTRODUCTION

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolf Nevanlinna est très importante dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles complexes.

Il est connu que toute solution de l'équation différentielle du second ordre

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0, \tag{0.1}$$

où $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières, est une fonction entière et si la fonction entière $A(z)$ est transcendante, alors chacune des deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (0.1) est d'ordre infini [10], [24, p.p 167-168]. D'autre part, il existe des équations différentielles de la forme (0.1) possédant au moins une solution d'ordre fini. Par exemple, la fonction $f(z) = e^{-z}$ vérifie l'équation différentielle

$$f'' + e^z f' + (e^z - 1)f = 0. \tag{0.2}$$

Plusieurs mathématiciens ont étudié les solutions de l'équation (0.1). G. Gundersen [12] a introduit certaines conditions dans un secteur sur les coefficients $A(z)$ et $B(z)$ de telle façon que chaque solution de l'équation (0.1) soit d'ordre infini. Il s'est aussi intéressé dans le même article à l'étude des propriétés des solutions d'ordre fini de l'équation (0.1). Récemment, certains de ces résultats précédemment cités ont été généralisés pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières par B. Belaïdi et K. Hamani [3]. En complétant quelques résultats dus à G. Gundersen [12], S. Hellerstein, J. Miles et J. Rossi [17] pour les équations différentielles de la forme (0.1), les auteurs dans [21] ont pu démontrer d'autres résultats concernant le cas où chaque solution de l'équation (0.1) est d'ordre infini.

Ce mémoire consiste à étudier la croissance et les points fixes des solutions de certaines équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes.

Le premier chapitre comporte quelques définitions, notions et résultats de la théorie de R. Nevanlinna nécessaires par la suite dans notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes.

Dans le troisième chapitre, on s'intéressera à l'étude de l'exposant de convergence des points fixes des solutions des équations différentielles étudiées dans le deuxième chapitre.



Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a , on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $\bar{n}(t, a, f)$ le nombre des racines distinctes de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$. On désigne par $n(t, \infty, f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité et par $\bar{n}(t, \infty, f)$ le nombre des pôles distincts de f dans le disque $|z| \leq t$.

Notons

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{[n(t, a, f) - n(0, a, f)]}{t} dt + n(0, a, f) \log r \quad (a \neq \infty), \quad (1.1.1)$$

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{[n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)]}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r, \quad (1.1.2)$$

$$\bar{N}(r, a, f) = \int_0^r \frac{[\bar{n}(t, a, f) - \bar{n}(0, a, f)]}{t} dt + \bar{n}(0, a, f) \log r \quad (a \neq \infty), \quad (1.1.3)$$

$$\bar{N}(r, \infty, f) = \bar{N}(r, f) = \int_0^r \frac{[\bar{n}(t, \infty, f) - \bar{n}(0, \infty, f)]}{t} dt + \bar{n}(0, \infty, f) \log r, \quad (1.1.4)$$

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad (a \neq \infty) \quad (1.1.5)$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad (1.1.6)$$

où

$$\lg^+ x = \max(\lg x, 0)$$

$N(r, a, f)$ (respectivement $\overline{N}(r, a, f)$) est appelée fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$. Elle caractérise la densité des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq r$ et $m(r, a, f)$ est dite fonction de proximité de la fonction f au point a . Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction f au point a .

Définition 1.1.1 [14] *Soit f une fonction méromorphe. On définit la fonction caractéristique de Nevanlinna par*

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) \quad (1.1.7)$$

où $0 < r < +\infty$.

Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Exemple 1.1.1 *Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a $N(r, f) \equiv 0$.*

D'autre part,

$$\begin{aligned}
m(r, \infty, f) &= m(r, f) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |e^{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}| d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |e^{r \cos \varphi}| d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi d\varphi \\
&= \frac{r}{2\pi} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \\
&= \frac{r}{\pi} [\sin \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{\pi}.
\end{aligned}$$

D'où

$$T(r, f) = r/\pi.$$

1.2 Ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.2.1 [17] *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre de f par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} \quad (1.2.1)$$

Si

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty, \quad (1.2.2)$$

on dit que la fonction f est d'ordre infini.

Remarque 1.2.1 *Si f est une fonction entière, alors l'ordre de f est défini par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}, \quad (1.2.3)$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Lemme 1.2.1 [20, 25] *Soit une fonction méromorphe, alors*

$$\sigma(f') = \sigma(f). \quad (1.2.4)$$

Exemple 1.2.1 Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a $T(r, e^z) = r/\pi$. D'où $\sigma(f) = 1$.

Exemple 1.2.2 Pour la fonction $f(z) = e^{e^z}$, on a

$$T(r, e^z) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}, r \rightarrow +\infty.$$

D'où $\sigma(f) = \infty$.

1.3 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 [14] Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des zéros (respectivement des zéros distincts) de la fonction f noté $\lambda(f)$ (respectivement $\bar{\lambda}(f)$) est défini par

$$\lambda(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N(r, 1/f)}{\log r} \quad (1.3.1)$$

et

$$\bar{\lambda}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}(r, 1/f)}{\log r} \quad (1.3.2)$$

$\bar{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)$ est dit l'exposant de convergence des pôles distincts de la fonction f .

Exemple 1.3.1 Pour la fonction $f(z) = e^z - b$, où $b \in \mathbb{C}$ et $b \neq 0, \infty$, on a $\lambda(f) = 1$.

1.4 Mesure linéaire et mesure logarithmique

Définition 1.4.1 [17] On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt, \quad (1.4.1)$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E .

Définition 1.4.2 [17] La mesure logarithmique d'un ensemble $H \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$lm(H) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_H(t)}{t} dt, \quad (1.4.2)$$

où χ_H est la fonction caractéristique de l'ensemble H .

Exemple 1.4.1 La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, 5] \cup [6, 8] \subset [0, +\infty)$ est

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt = \int_1^5 dt + \int_6^8 dt = 6.$$

Exemple 1.4.2 La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1, e] \subset [1, +\infty)$ est

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \chi_F(t) \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

1.5 L'indice central d'une fonction entière

Définition 1.5.1 [18] Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière et soit $0 \leq r < +\infty$. Notons par $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n; n = 0, 1, \dots\}$ le terme maximal de f . L'indice central de la fonction f est défini par

$$\nu_f(r) = \max\{m; \mu(r) = |a_m| r^m \text{ et } m = m(r)\}. \quad (1.5.1)$$

Exemple 1.5.1 Pour le polynôme $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0 z^0, a_n \neq 0$, pour r suffisamment grand, on a

$$\mu(r) = |a_n| r^n \text{ et } \nu_p(r) = n.$$

Lemme 1.5.1 [19] Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre α et d'indice central $\nu_f(r)$, alors

$$\alpha = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu_f(r)}{\ln r}. \quad (1.5.2)$$

Croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes

2.1 Introduction et resultats

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0, \quad (2.1.1)$$

où $Q(z)$ est une fonction entière d'ordre fini. il est bien connu que toute solution f de l'équation (2.1.1) est une fonction entière. De plus, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (2.1.1), alors il y a au moins une solution f_1 ou f_2 d'ordre infini (voir [24,p.p.167-168]). Par conséquent, la plupart des solutions de (2.1.1) sont d'ordre infini. Mais l'équation (2.1.1) avec $Q(z) = -(1 + e^{-z})$ possède une solution $f = e^z$ avec un ordre fini.

Une question naturelle est : Quelle condition sur $Q(z)$ garantira que toute solution $f \neq 0$ de (2.1.1) soit d'ordre infini ? Plusieurs auteurs Frei [9], Ozawa [23], Gundersen[13], Langley [22], Amemiya et Ozawa [1] ont étudié ce problème. Ils ont prouvé que si $Q(z)$ est un polynôme non constant ou une fonction entière transcendante avec $\sigma(Q) \neq 1$, alors toute solution $f \neq 0$ de (2.1.1) est d'ordre infini.

Alors quelle condition sur $Q(z)$ quand $\sigma(Q) = 1$ garantira que chaque solution $f \neq 0$ de (2.1.1) soit d'ordre infini ? Chen a étudié le problème et a obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 [5] *Soit $A_j(z) (\neq 0)$, $D_j(z)$ ($j = 0, 1$) des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$ et $\sigma(D_j) < 1$, soient a et b des constantes complexes tels que $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$). Alors toute solution $f (\neq 0)$ de l'équation*

$$f'' + (A_1 e^{az} + D_1) f' + (A_0 e^{bz} + D_0) f = 0 \quad (2.1.2)$$

est d'ordre infini.

Dans ce mémoire, on va énoncer le Théorème de CHEN et de SHON [6] et le démontrer.

Théorème 2.1.2 [6] *Soient $A_j(z) (\neq 0)$ ($j = 0, 1$) des fonctions méromorphes avec $\sigma(A_j) < 1$, et soient a et b des constantes complexes tels que $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$). Alors toute solution méromorphe $f (\neq 0)$ de l'équation*

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = 0 \quad (2.1.3)$$

est d'ordre infini.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 [11] *Soit f une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$, soit $H = \{(K_1, j_1), (K_2, j_2), \dots, (K_q, j_q)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant $K_i > j_i \geq 0$, ($i = 1, \dots, q$), et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe une constante $R_1 = R_1(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| \geq R_1$ et pour tout $(k, j) \in H$, on ait*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \quad (2.2.1)$$

Lemme 2.2.2 [6] *Soit $g(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(g) = \sigma < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, telle que si $\psi \in [0, 2\pi) \setminus E_2$, alors il existe une constante $R_2 = R_2(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| = r \geq R_2$, on ait*

$$\exp\{-r^{\sigma+\varepsilon}\} \leq |g(z)| \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}. \quad (2.2.2)$$

Preuve. D'après le Lemme 2.2.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe une constante $R_1 = R_1(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| = r \geq R_1$, on ait

$$\left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \leq |z|^{\sigma-1+\varepsilon}. \quad (2.2.3)$$

En utilisant

$$\log g(re^{i\psi}) = \int_{R_1}^r \frac{g'(te^{i\psi})}{g(te^{i\psi})} e^{i\psi} dt + \log g(R_1 e^{i\psi}), \quad (2.2.4)$$

on a

$$|\log g(re^{i\psi})| \leq r^{\sigma+\varepsilon} + C, \quad (2.2.5)$$

où $C(> 0)$ est une constante. Donc il existe une constante $R_2(\psi) \geq R_2$, telle que pour $r \geq R_2(\psi)$ on ait de (2.2.5),

$$|\log |g(re^{i\psi})|| \leq |\log g(re^{i\psi})| \leq r^{\sigma+2\varepsilon}. \quad (2.2.6)$$

D'où

$$-r^{\sigma+2\varepsilon} \leq \log |g(re^{i\psi})| \leq r^{\sigma+2\varepsilon}. \quad (2.2.7)$$

i.e. (2.2.2) est vérifiée. \square

Lemme 2.2.3 [6] *Soit $g(z) = A(z) e^{az}$, où $A(z) (\neq 0)$ est une fonction méromorphe avec $\sigma(A) = \alpha < 1$, a est une constante complexe, $a = |a| e^{i\varphi}$ ($\varphi \in (0, 2\pi]$). Posons $E_3 = \{\theta \in (0, 2\pi] : \cos(\varphi + \theta) = 0\}$. Alors E_3 est un ensemble fini. Alors pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < 1 - \alpha$), il existe un ensemble $E_4 \subset (0, 2\pi]$ de mesure linéaire nulle tel que si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi] \setminus [E_3 \cup E_4]$, alors nous avons quand r est suffisamment grand*

i. Si $\cos(\varphi + \theta) > 0$, alors

$$\exp\{(1 - \varepsilon) r \delta(az, \theta)\} \leq |g(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon) r \delta(az, \theta)\}, \quad (2.2.8)$$

ii. Si $\cos(\varphi + \theta) < 0$, alors

$$\exp\{(1 + \varepsilon) r \delta(az, \theta)\} \leq |g(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon) r \delta(az, \theta)\}, \quad (2.2.9)$$

où $\delta(az, \theta) = |a| \cos(\varphi + \theta)$.

Preuve. D'après le Lemme 2.2.2, pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < 1 - \alpha$), il existe un ensemble $E_2 \subset (0, 2\pi]$ de mesure linéaire nulle tel que si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi] \setminus [E_2 \cup E_3]$, (E_3 est défini dans le Lemme 2.2.3) alors il existe une constante $R_2 = R_2(\theta) > 1$, telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $r > R_2$, on ait :

$$\exp\{-r^{\alpha+\varepsilon}\} \leq |A(re^{i\theta})| \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}. \quad (2.2.10)$$

Par

$$|e^{az}| = e^{|a|r \cos(\varphi+\theta)} = e^{r\delta(a,z,\theta)} \quad (2.2.11)$$

et (2.2.11), nous obtenons

$$\exp\{-r^{\alpha+\varepsilon} + r\delta(a,z,\theta)\} \leq |A(re^{i\theta}) e^{|a|e^{i\varphi}re^{i\theta}}| \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon} + r\delta(a,z,\theta)\}. \quad (2.2.12)$$

Par $\theta \notin E_3$, on a

- i) Si $\cos(\varphi + \theta) > 0$, alors par $0 < \varepsilon + \alpha < 1$ et (2.2.12), on sait que (2.2.8) est vérifiée pour r suffisamment grand.
- ii) Si $\cos(\varphi + \theta) < 0$, alors par $0 < \varepsilon + \alpha < 1$ et (2.2.12), on sait que (2.2.9) vérifiée pour r suffisamment grand. \square

Lemme 2.2.4 [2] *Soit $P(z)$ le polynôme suivant :*

$$P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (2.2.13)$$

avec $a_m \neq 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_3 > 0$ tel que pour tout $|z| = r > R_3$, on ait

$$(1 - \varepsilon) |a_m| r^m \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_m| r^m \quad (2.2.14)$$

2.3 Preuve du Théorème 2.1.2

Preuve. En premier lieu, on va démontrer que toute solution méromorphe $f (\neq 0)$ de l'équation (2.1.3) est transcendante. Si $f (\neq 0)$ est une solution rationnelle de (2.1.3), alors d'après les hypothèses du Théorème 2.1.2 et l'égalité

$$f = - \left(\frac{e^{-bz}}{A_0(z)} f'' + \frac{A_1(z)}{A_0(z)} e^{az-bz} f' \right), \quad (2.3.1)$$

on obtient une contradiction car le côté gauche de l'égalité (2.3.1) est une fonction rationnelle mais le côté droit est une fonction méromorphe transcendante.

Maintenant on va prouver que l'équation (2.3.1) ne peut pas avoir une solution polynômiale non nulle. Supposons en premier que $\arg a \neq \arg b$. Posons $\alpha = \max \{ \sigma(A_1), \sigma(A_0) \} < 1$. D'après le Lemme 2.2.3, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1 - \alpha$), il existe un ensemble E_4 de mesure linéaire nulle et un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_4 \cup E_0$ où $E_0 = \{ \theta \in [0, 2\pi) : \delta(az, \theta) = 0 \text{ ou } \delta(bz, \theta) = 0 \}$ tel que $\delta(bz, \theta) > 0$ et $\delta(az, \theta) < 0$ et pour $|z| = r$ suffisamment grand, on ait

$$|A_0(z) e^{bz}| \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(bz, \theta) r \} \quad (2.3.2)$$

et

$$|A_1(z) e^{az}| \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(az, \theta) r \} < 1. \quad (2.3.3)$$

On peut écrire l'équation (2.1.3) sous la forme

$$A_0(z) e^{bz} f = - (f'' + A_1(z) e^{az} f') \quad (2.3.4)$$

De (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) et le Lemme 2.2.4, pour $|z| = r$ suffisamment grand, on obtient

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) |c_m| r^m \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(bz, \theta) r \} &\leq |A_0(z) e^{bz}| \\ &= |f'' + A_1(z) e^{az} f'| \\ &\leq 2(1 + \varepsilon) m |c_m| r^{m-1}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

où

$$f(z) = c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0 \text{ avec } c_m \neq 0.$$

De (2.3.5), on obtient pour $|z| = r$ suffisamment grand

$$\exp \{(1 - \varepsilon) \delta(bz, \theta) r\} \leq 2 \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} m \frac{1}{r} \quad (2.3.6)$$

et c'est une contradiction car $0 < \varepsilon < 1 - \alpha < 1$.

En utilisant un raisonnement semblable au précédent cas, on peut prouver que si $a = cb$ ($0 < c < 1$), alors l'équation (2.1.3) ne peut pas avoir une solution polynômiale non nulle.

Ainsi toute solution méromorphe $f (\neq 0)$ de (2.1.3) est transcendante.

Maintenant prouvons que l'équation (2.1.3) ne peut pas avoir une solution méromorphe transcendante $f (\neq 0)$ avec $\sigma(f) < 1$. Supposons que $f \neq 0$ est une solution méromorphe transcendante de l'équation (2.1.3) avec $\sigma(f) = \sigma < 1$, en utilisant le Lemme 1.2.1 alors $\sigma(f') = \sigma(f'') = \sigma < 1$. D'après le Lemme 2.2.2 pour tout ε donné ($0 < 3\varepsilon < \min\{1 - \sigma, \frac{1-c}{2}\}$), il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2$, alors il existe une constante $R_2 > 1$, telle que, pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_2$, on ait

$$|f''(z)| \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}. \quad (2.3.7)$$

Si $\arg a \neq \arg b$, alors d'après le Lemme 2.2.3, $\sigma(A_0 f) < 1$ et $\sigma(A_0 f') < 1$, pour le ε ci-dessus, il y a un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_4 \cup E_0)$, où $E_4 \subset [0, 2\pi)$ est un ensemble de mesure linéaire nulle, $E_0 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(az, \theta) = 0 \text{ ou } \delta(bz, \theta) = 0\}$, tel que $\delta(az, \theta) = |a| \cos(\arg a + \theta)$, $\delta(bz, \theta) = |b| \cos(\arg b + \theta)$, $\operatorname{Re}\{az\} = \delta(az, \theta) r < 0$, $\operatorname{Re}\{bz\} = \delta(bz, \theta) r > 0$ et pour r suffisamment grand, on ait

$$|A_0(re^{i\theta}) e^{bre^{i\theta}} f(re^{i\theta})| \geq \exp\{(1 - \varepsilon) \delta(bz, \theta) r\}, \quad (2.3.8)$$

$$|A_1(re^{i\theta}) e^{are^{i\theta}} f'(re^{i\theta})| \leq \exp\{(1 - \varepsilon) \delta(az, \theta) r\}. \quad (2.3.9)$$

En utilisant (2.3.7), (2.3.9), on obtient

$$|f''(re^{i\theta}) + A_1(re^{i\theta}) e^{are^{i\theta}} f'(re^{i\theta})| \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\} + 1. \quad (2.3.10)$$

Ce qui est absurde car $\sigma + \varepsilon < 1$.

Si $a = cb$ ($0 < c < 1$), alors $\delta(az, \theta) = c\delta(bz, \theta)$ pour $z = re^{i\theta}$. En utilisant le même raisonnement ci-dessus, nous savons qu'il y a un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_4 \cup E_3)$ tel que $\delta(az, \theta) = c\delta(bz, \theta) > 0$, et pour le précédent ε et pour r suffisamment grand, on ait

$$\begin{aligned} \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(bz, \theta)r\} &\leq \left| A_0(re^{i\theta}) e^{bre^{i\theta}} f(re^{i\theta}) \right| \\ &\leq \left| f''(re^{i\theta}) \right| + \left| A_1(re^{i\theta}) e^{are^{i\theta}} f'(re^{i\theta}) \right| \\ &\leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\} + \exp\{(1 + \varepsilon)c\delta(bz, \theta)r\} \\ &\leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\} \exp\{(1 + \varepsilon)c\delta(bz, \theta)r\}. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

de (2.3.11) on obtient

$$\exp\left\{\frac{1-c}{2}\delta(bz, \theta)r\right\} \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}. \quad (2.3.12)$$

C'est une contradiction. D'où $\sigma(f) \geq 1$.

Maintenant soit $f (\neq 0)$ une solution méromorphe de l'équation (2.1.3) avec $1 \leq \sigma(f) = \sigma < \infty$. Remarquons que les pôles de $f(z)$ peuvent se produire seulement des pôles de A_j ($j = 0, 1$). Posons $f = \frac{g}{d}$, où d est le produit canonique (où le polynôme) formé par les pôles de $f(z)$ avec $\sigma(d) = \beta \leq \alpha = \max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2\} < 1$, et g est une fonction entière avec $1 \leq \sigma(g) = \sigma(f) = \sigma < \infty$. En substituant $f = \frac{g}{d}$ dans (2.1.3), on obtient

$$g'' + g' \left(A_1 e^{az} - 2 \frac{d'}{d} \right) + g \left[A_0 e^{bz} - A_1 e^{az} \frac{d'}{d} + 2 \left(\frac{d'}{d} \right)^2 - \frac{d''}{d} \right] = 0. \quad (2.3.13)$$

D'après le Lemme 2.2.1, pour tout ε donné ($0 < 3\varepsilon < \min\{1 - \alpha, \frac{1-c}{6}\}$), il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que, si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe une constante $R_1 = R_1(\theta) > 1$, telle que, pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| \geq R_1$, on ait

$$\left| \frac{g''(z)}{g(z)} \right| \leq |z|^{2(\sigma-1+\varepsilon)}, \quad \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \leq |z|^{\sigma-1+\varepsilon}, \quad (2.3.14)$$

et

$$\left| \frac{d''(z)}{d(z)} \right| \leq |z|^{2(\beta-1+\varepsilon)}, \quad \left| \frac{d'(z)}{d(z)} \right| \leq |z|^{\beta-1+\varepsilon}. \quad (2.3.15)$$

Posons $z = re^{i\theta}$, alors

$$\operatorname{Re}\{az\} = \delta(az, \theta)r, \quad \operatorname{Re}\{bz\} = \delta(bz, \theta)r. \quad (2.3.16)$$

Maintenant supposons que $\arg a \neq \arg b$. D'après le Lemme 2.2.3 et (2.3.16), pour le précédent ε il y a un rayon $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_4 \cup E_0)$ (où $E_0 = \{ \theta \in [0, 2\pi) : \delta(az, \theta) = 0 \text{ où } \delta(bz, \theta) = 0 \}$, E_4 un ensemble de mesure lineaire nulle, $\delta(az, \theta) < 0$, $\delta(bz, \theta) > 0$, et pour $|z| = r$ un suffisamment grand, on ait

$$\left| A_0 (re^{i\theta}) e^{bre^{i\theta}} \right| \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) r \delta (bz, \theta) \}. \quad (2.3.17)$$

$$\left| A_1 (re^{i\theta}) e^{are^{i\theta}} \right| \leq \exp \{ (1 - \varepsilon) r \delta (az, \theta) \}. \quad (2.3.18)$$

De (2.3.15), (2.3.17), (2.3.18), on a

$$\left| A_1 (z) e^{az} - 2 \frac{d'(z)}{d(z)} \right| \leq \exp \{ (1 - \varepsilon) r \delta (az, \theta) \} + 2r^{\beta-1+\varepsilon}, \quad (2.3.19)$$

et

$$\begin{aligned} & \left| A_0 (z) e^{bz} - A_1 (z) e^{az} \frac{d'(z)}{d(z)} + 2 \left(\frac{d'(z)}{d(z)} \right)^2 - \frac{d''(z)}{d(z)} \right| \\ & \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) r \delta (bz, \theta) \} (1 - o(1)). \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

De (2.3.13), (2.3.14), (2.3.19), (2.3.20), on obtient

$$\begin{aligned} & \exp \{ (1 - \varepsilon) r \delta (bz, \theta) \} (1 - o(1)) \\ & \leq \left| A_0 (z) e^{bz} - A_1 (z) e^{az} \frac{d'(z)}{d(z)} + 2 \left(\frac{d'(z)}{d(z)} \right)^2 - \frac{d''(z)}{d(z)} \right| \\ & \leq \left| \frac{g''(z)}{g(z)} \right| + \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \left(A_1 (z) e^{az} - 2 \frac{d'(z)}{d(z)} \right) \right| \\ & \leq r^{2(\sigma-1+\varepsilon)} + r^{\sigma-1+\varepsilon} \left[\exp \{ (1 - \varepsilon) r \delta (az, \theta) \} + 2r^{\beta-1+\varepsilon} \right] \\ & \leq r^M, \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

où $M (> 0)$ est une constante. (2.3.21) est absurde ce qui implique que $\sigma(g) = \infty$, i.e., $\sigma(f) = \infty$.

Maintenant supposons que $a = cb$ ($0 < c < 1$). Alors $\delta(az, \theta) = c\delta(bz, \theta)$, $\operatorname{Re}\{az\} = c\operatorname{Re}\{bz\}$. En utilisant le même raisonnement comme ci-dessus, nous savons que (2.3.14), (2.3.15) sont vérifiées et il existe un rayon $\arg z = \theta$ vérifiant $\delta(az, \theta) = c\delta(bz, \theta) > 0$ et pour r suffisamment grand, on a (2.3.17) et

$$\left| A_1 (re^{i\theta}) e^{are^{i\theta}} \right| \leq \exp \{ (1 + \varepsilon) cr \delta (bz, \theta) \}. \quad (2.3.22)$$

De (2.3.15), (2.3.17), (2.3.22), on obtient

$$\left| A_1(z) e^{az} - 2 \frac{d'(z)}{d(z)} \right| \leq \exp \{ (1 + \varepsilon) cr\delta(bz, \theta) \} (1 + o(1)), \quad (2.3.23)$$

et

$$\begin{aligned} & \left| A_0(z) e^{bz} - A_1(z) e^{az} \frac{d'(z)}{d(z)} + 2 \left(\frac{d'(z)}{d(z)} \right)^2 - \frac{d''(z)}{d(z)} \right| \\ & \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) r\delta(bz, \theta) \} - \exp \{ (1 + \varepsilon) rc\delta(bz, \theta) \} \\ & = \exp \{ (1 - \varepsilon) r\delta(bz, \theta) \} [1 - \exp \{ (1 + \varepsilon) rc\delta(bz, \theta) - (1 - \varepsilon) r\delta(bz, \theta) \}] \\ & \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) r\delta(bz, \theta) \} \left[1 - \exp \left\{ r\delta(bz, \theta) \left(-\frac{8(1-c)}{9} \right) \right\} \right] \\ & \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) r\delta(bz, \theta) \} (1 - o(1)). \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

De (2.3.13), (2.3.14), (2.3.23), (2.3.24), on obtient

$$\begin{aligned} & \exp \{ (1 - \varepsilon) r\delta(bz, \theta) \} (1 - o(1)) \\ & \leq \left| A_0(z) e^{bz} - A_1(z) e^{az} \frac{d'(z)}{d(z)} + 2 \left(\frac{d'(z)}{d(z)} \right)^2 - \frac{d''(z)}{d(z)} \right| \\ & \leq \left| \frac{g''(z)}{g(z)} \right| + \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \left(A_1(z) e^{az} - 2 \frac{d'(z)}{d(z)} \right) \right| \\ & \leq r^{2(\sigma-1+\varepsilon)} + r^{(\sigma-1+\varepsilon)} \exp \{ (1 + \varepsilon) cr\delta(bz, \theta) \} (1 + o(1)) \\ & \leq 2r^{2(\sigma-1+\varepsilon)} \exp \{ (1 + \varepsilon) cr\delta(bz, \theta) \} (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

De (2.3.25) et $\varepsilon < \frac{1-c}{6}$, nous obtenons

$$\exp \left\{ \frac{1-c}{2} r\delta(bz, \theta) \right\} \leq 2r^{2(\sigma-1+\varepsilon)}. \quad (2.3.26)$$

C'est une contradiction. Le Théorème 2.1.2 est ainsi démontré. \square

Point fixes des solution de certaines équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes

3.1 Introduction et resultats

Le but principal de ce chapitre est d'étudier l'exposant du convergence des points fixes des solutions et de leurs première et deuxième dérivées et les polynômes différentiels des équations différentielles du second ordre.

Une fonction méromorphe ne peut pas en avoir ou avoir quelques points fixes, par exemple, $f_d = de^z + z$ (d est une constante non nulle) n'a pas de points fixes. Dans [4], pour une équation différentielle $f'' + A(z)f = 0$, où A est une fonction entière transcendante d'ordre fini, chen a prouvé que l'exposant de convergence des points fixes des solutions de l'équation précédente est infini.

Dans ce chapitre, on va étudier les propriétés des points fixes des solutions, leurs première et deuxième dérivées et le polynôme différentiel pour une équation plus générale. Nous prouverons le Théorème de Chen et Shon [6] suivant :

Théorème 3.1.1 [6] *Soient $A_j(z) (\neq 0)$ ($j = 0, 1$) des fonctions méromorphes avec $\sigma(A_j) < 1$. et soit a, b des constants complexes tels que $ab \neq 0$, $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$). Soient d_0, d_1, d_2 des constantes complexes qui ne sont pas tous nuls. Si $f (\neq 0)$ est une solution méromorphe de l'équation*

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = 0, \quad (3.1.1)$$

alors

1. f, f', f'' tous ont les points fixes infinis et vérifient

$$\bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\lambda}f'' - z = \sigma(f) = \infty \quad (3.1.2)$$

2. Le polynôme différentiel

$$g(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f \quad (3.1.3)$$

a des points fixes infinis et vérifie $\bar{\lambda}(g - z) = \infty$.

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 [11] *Soit f une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$, soit $H = \{(K_1, j_1), (K_2, j_2), \dots, (K_q, j_q)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant $K_i > j_i \geq 0$, ($i = 1, \dots, q$), et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E_1 \cup [0, 1]$ et pour tout $(k, j) \in H$, on ait*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}, \quad (3.2.1)$$

Lemme 3.2.2 [6] *Soit $g(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(g) = \sigma < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, telle que si $\psi \in [0, 2\pi) \setminus E_2$, alors il existe une constante $R = R(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| = r \geq R$, on ait*

$$\exp\{-r^{\sigma+\varepsilon}\} \leq |g(z)| \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}. \quad (3.2.2)$$

Lemme 3.2.3 [6] *Soit $g(z) = A(z) e^{az}$, où $A(z) (\neq 0)$ est une fonction méromorphe avec $\sigma(A) = \alpha < 1$, a est une constante complexe, $a = |a| e^{i\varphi}$ ($\varphi \in (0, 2\pi]$). Posons $E_3 = \{\theta \in (0, 2\pi] : \cos(\varphi + \theta) = 0\}$, alors E_3 est un ensemble fini. Alors pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < 1 - \alpha$), il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi] \setminus [E_3 \cup E_4]$, alors nous avons quand r est suffisamment grand*

i. *Si $\cos(\varphi + \theta) > 0$, alors*

$$\exp\{(1 - \varepsilon)r\delta(az, \theta)\} \leq |g(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)r\delta(az, \theta)\}, \quad (3.2.3)$$

ii. *Si $\cos(\varphi + \theta) < 0$, alors*

$$\exp\{(1 + \varepsilon)r\delta(az, \theta)\} \leq |g(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)r\delta(az, \theta)\}, \quad (3.2.4)$$

où $\delta(az, \theta) = |a| \cos(\varphi + \theta)$.

Lemme 3.2.4 [7] *Soit $g(z)$ une fonction méromorphe, avec $\sigma(g) = \beta < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que*

$$|g(z)| \leq \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} \quad (3.2.5)$$

soit vérifiée pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5$, ($r \rightarrow +\infty$).

Lemme 3.2.5 (voir [15, p.344]) *Soit $g(z)$ une fonction entière, $v(r)$ l'indice central de g , $\mu(r)$ le terme maximal, $\mu(r) = |a_{v(r)}| r^{v(r)}$. Alors*

$$v(r) = r \frac{d}{dr} \log \mu(r) < [\log \mu(r)]^2 < [\log M(r, g)]^2 \quad (3.2.6)$$

est vérifiée à l'extérieur d'un l'ensemble $E_6 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie.

Lemme 3.2.6 [6] *Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini et d'exposant de convergence des pôles fini, $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \infty$. Soient d_j ($j = 0 \dots k$) des constantes complexes, $d_k \neq 0$. Alors*

$$g(z) = d_k f^{(k)} + d_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + d_0 f \quad (3.2.7)$$

est d'ordre infini.

Preuve. Supposons que $\sigma(g) = \sigma < \infty$. Posons $f(z) = \frac{H(z)}{h(z)}$, où $h(z)$ est le produit canonique (ou le polynôme) formé des pôles non nuls de $f(z)$, $\lambda(h) = \sigma(h) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \infty$, $H(z)$ est une fonction entière avec $\sigma(H) = \sigma(f) = \infty$. En utilisant une induction mathématique, on peut facilement montrer que

$$f^{(n)} = \frac{H^{(n)}}{h} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{H^{(j)}}{h} \sum_{(j_1 \dots j_n)} c_{jj_1 \dots j_n} \left(\frac{h'}{h}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{h^{(n)}}{h}\right)^{j_n}, \quad (j = 1 \dots k), \quad (3.2.8)$$

où $c_{jj_1 \dots j_n}$ sont des constantes, et $j + j_1 + 2j_2 + \dots + nj_n = n$. D'où

$$\frac{f^{(n)}}{f} = \frac{H^{(n)}}{H} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{H^{(j)}}{H} \sum_{(j_1 \dots j_n)} c_{jj_1 \dots j_n} \left(\frac{h'}{h}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{h^{(n)}}{h}\right)^{j_n} \quad (3.2.9)$$

D'après le Lemme 3.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que, pour tout z vérifiant $|z| \notin [0, 1] \cup E_1$, on ait

$$\left| \frac{h^{(j)}(z)}{h(z)} \right| \leq |z|^{j(\sigma_1 - 1 + \varepsilon)}, \quad (j = 1 \dots k), \quad (3.2.10)$$

où $\sigma_1 = \sigma(h) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \infty$. En substituant (3.2.10) dans (3.2.9), on a

$$\frac{f^{(n)}}{f} = \frac{H^{(n)}}{H} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{H^{(j)}}{H} O(|z|^m), \quad (3.2.11)$$

où m ($0 < m < \infty$) est une constante, $|z| \notin [0, 1] \cup E_1$. En substituant (3.2.11) dans (3.2.7) on a

$$d_k \frac{H^{(k)}(z)}{H(z)} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{H^{(j)}}{H} O(|z|^m) + O(|z|^m) = \frac{g(z)h(z)}{H(z)}, \quad (3.2.12)$$

pour $|z| \notin [0, 1] \cup E_1$.

De la théorie du Wiman-Valivon (voir [15], [16], [24]), on a

$$\frac{H^{(j)}(z)}{H(z)} = \left(\frac{\nu(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)), \quad (j = 1 \dots k), \quad (3.2.13)$$

où $|z| = r$, $|H(z)| = M(r, H)$, $r \notin [0, 1] \cup E_7$, $E_7 \subset (1, \infty)$ ayant une mesure logarithmique finie, $\nu(r)$ est l'indice central de $H(z)$.

Comme $\sigma(g) = \sigma < \infty$, $\sigma(h) = \sigma_1 < \infty$, d'après le Lemme 3.2.4, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin [0, 1] \cup E_5$, on ait

$$|g(z)| \leq \exp \{|z|^{\sigma+1}\}, \quad |h(z)| \leq \exp \{|z|^{\sigma_1+1}\}, \quad (3.2.14)$$

D'après le Lemme 3.2.5, il existe un ensemble $E_6 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6$, on a

$$v(r) < [\log M(r, H)]^2. \quad (3.2.15)$$

Comme $\sigma(H) = \infty$, alors en utilisant le Lemme 1.5.1, il existe une suite $\{r'_n\}$ ($r'_n \rightarrow \infty$) telle que

$$\lim_{r'_n \rightarrow \infty} \frac{\log v(r'_n)}{\log r'_n} = \infty. \quad (3.2.16)$$

En posant la mesure logarithmique de $E_1 \cup E_7 \cup E_6 \cup E_5$, $\text{lm}[E_1 \cup E_7 \cup E_6 \cup E_5] = \alpha < \infty$, il existe un point $r_n \in [r'_n, (\alpha + 1)r'_n] \setminus [E_1 \cup E_7 \cup E_6 \cup E_5]$. Comme

$$\frac{\log v(r_n)}{\log r_n} \geq \frac{\log v(r'_n)}{\log [(\alpha + 1)r'_n]} = \frac{\log v(r'_n)}{\log r'_n \left[1 + \frac{\log(\alpha+1)}{\log r'_n}\right]}, \quad (3.2.17)$$

on a

$$\lim_{r_n \rightarrow \infty} \frac{\log v(r_n)}{\log r_n} = \infty \quad (3.2.18)$$

Maintenant prenons le point z_n tel que $|z| = r_n$ et $H(z_n) = M(z_n, H)$, de (3.2.12) et (3.2.13), on obtient

$$|d_k| \left(\frac{v(r_n)}{r_n}\right)^k (1 + o(1)) \leq kDr_n^m \left(\frac{v(r_n)}{r_n}\right)^{k-1} + \left|\frac{g(z_n)h(z_n)}{H(z_n)}\right|, \quad (3.2.19)$$

où $D(> 0)$ est une constante. Pour tout $M(> 2(\sigma_1 + \sigma + m + 3))$ assez grand, et n suffisamment grand, on a de (3.2.18),

$$v(r_n) \geq r_n^M. \quad (3.2.20)$$

De (3.2.6) et le Lemme 3.2.5 et (3.2.20), nous obtenons

$$M(r_n, H) > \exp \left\{ r_n^{\frac{M}{2}} \right\}. \quad (3.2.21)$$

Ainsi de (3.2.14), (3.2.21), quand $r_n \rightarrow \infty$,

$$\frac{|g(z_n)h(z_n)|}{M(r_n, H)} \rightarrow 0. \quad (3.2.22)$$

De (3.2.19), (3.2.20), (3.2.22), on obtient

$$|d_k| r_n^M \leq |d_k| v(r_n) \leq 2kDr_n^{m+1}. \quad (3.2.23)$$

C'est une contradiction car $M(> 2(\sigma_1 + \sigma + m + 3))$. \square

Lemme 3.2.7 [6] *Soient a et b des constantes complexes tels que $ab \neq 0$. Supposons que $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$). Posons*

$$\Lambda_2 = \{0, a, b, a + b, 2a\},$$

$$\Lambda_4 = \{0, a, b, 2a, a + b, 2b, 3a, 2a + b, a + 2b, 3b, 4a, 3a + b, 2a + 2b, a + 3b\}. \quad (3.2.24)$$

- (i) *Si H_j ($j \in \Lambda_2$) et H_{2b} sont toutes des fonctions méromorphes d'ordre strictement inférieur à 1, $H_{2b}(z) \neq 0$. En posant $\psi_2(z) = \sum_{j \in \Lambda_2} H_j(z) e^{jz}$, alors $\psi_2(z) + H_{2b}e^{2bz} \neq 0$.*
- (ii) *Si H_j ($j \in \Lambda_4$) et H_{4b} sont toutes des fonctions méromorphes d'ordre strictement inférieur à 1, $H_{4b}(z) \neq 0$. En posant $\psi_4(z) = \sum_{j \in \Lambda_4} H_j(z) e^{jz}$, alors $\psi_4(z) + H_{4b}e^{4bz} \neq 0$.*
- (iii) *Une fonction dérivée de $\psi_2(z)$ vérifiant les propriétés ci-dessus de $\psi_2(z)$, et aussi exprimée par $\psi_2(z)$. $\psi_2(z)$ et $\psi_4(z)$ peuvent être différentes dans différentes places, mais conservent les propriétés ci-dessus. $\psi_2(z) \psi_2(z)$ (il désigne le produit de deux $\psi_2(z)$, et où deux $\psi_2(z)$ peuvent être différentes) a les propriétés de $\psi_4(z)$, on écrit $\psi_2(z) \psi_2(z) = \psi_4(z)$.*

Preuve. (i) Divisons ceci en deux cas pour le prouver :

Le cas (1) $\arg a \neq \arg b$. Alors $\arg(a + b)$, $\arg a$, $\arg b$ sont trois arguments distincts. Posons $\sigma(H_0) = \beta < 1$. D'après le Lemme 3.2.2, pour tout ε donné ($0 < 5\varepsilon < 1 - \beta$), il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2$, alors il existe une constante $R = R(\theta) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$, et $|z| = r > R$ on ait

$$|H_0(z)| \leq \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}. \quad (3.2.25)$$

D'après le Lemme 3.2.3, il existe un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_3 \cup E_4)$, $E_3, E_4 \subset [0, 2\pi)$ sont comme dans le Lemme 3.2.3, E_4 ayant une mesure linéaire nulle, tels que

$$\delta(2bz, \theta) = 2\delta(bz, \theta) > 0, \quad \delta((a+b)z, \theta) < 0, \quad (3.2.26)$$

$$\delta(2az, \theta) = 2\delta(az, \theta) < 0, \quad (3.2.27)$$

et pour le ε ci-dessus, on a quand r est suffisamment grand,

$$|H_{2b}e^{2bz}| \geq \exp\{(1-\varepsilon)2\delta(bz, \theta)r\}, \quad (3.2.28)$$

$$|H_b e^{bz}| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(bz, \theta)r\}, \quad (3.2.29)$$

$$|H_{a+b}e^{(a+b)z}| \leq \exp\{(1-\varepsilon)2\delta((a+b)z, \theta)r\} < 1 \quad (3.2.30)$$

$$|H_{2a}e^{2az}| \leq \exp\{(1-\varepsilon)2\delta(az, \theta)r\} < 1, \quad (3.2.31)$$

$$|H_a e^{az}| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(az, \theta)r\} < 1. \quad (3.2.32)$$

Si $\psi_2 + H_{2b}e^{2bz} \equiv 0$, alors de (3.2.25) – (3.2.32), on a

$$\begin{aligned} \exp\{(1-\varepsilon)2\delta(bz, \theta)r\} &\leq |H_{2b}(z)e^{2bz}| \\ &\leq \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} + \exp\{(1+\varepsilon)\delta(bz, \theta)r\} + 3 \\ &\leq 3 \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} \exp\{(1+\varepsilon)\delta(bz, \theta)r\}. \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Par $2(1-\varepsilon) - (1+\varepsilon) = 1 - 3\varepsilon > \frac{2}{5}$, on a

$$\exp\left\{\frac{2}{5}\delta(bz, \theta)r\right\} \leq 3 \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}. \quad (3.2.34)$$

C'est une contradiction car $\beta + \varepsilon < 1$. D'où $\psi_2 + H_{2b}e^{2bz} \not\equiv 0$.

Le cas (2): $a = cb$ ($0 < c < 1$). Alors pour tout rayon $\arg z = \theta$, on a

$$\begin{aligned} \delta(2bz, \theta) &= 2\delta(bz, \theta), \quad \delta(az, \theta) = c\delta(bz, \theta), \\ \delta((a+b)z, \theta) &= (1+c)\delta(bz, \theta), \quad \delta(2az, \theta) = 2c\delta(bz, \theta). \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

D'après le Lemme 3.2.2 et 3.2.3, pour tout ε donné ($0 < 5\varepsilon < \min\{1 - c, 1 - \beta\}$), il existe $E_j \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle $j = 2, 3, 4$, E_2, E_3, E_4 sont définis comme dans le cas (1), respectivement. Prenons le rayon $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_3 \cup E_4)$, tel que $\delta(bz, \theta) > 0$ et quand $|z| = r$ est suffisamment grand, on a (3.2.25) – (3.2.29) et

$$|H_a e^{az}| \leq \exp\{(1 + \varepsilon) c \delta(bz, \theta) r\}, \quad (3.2.36)$$

$$|H_{a+b} e^{(a+b)z}| \leq \exp\{(1 + \varepsilon) (1 + c) \delta(bz, \theta) r\}, \quad (3.2.37)$$

$$|H_{2a} e^{2az}| \leq \exp\{(1 + \varepsilon) 2c \delta(bz, \theta) r\}, \quad (3.2.38)$$

Si $\psi_2 + H_{2b} e^{2bz} \equiv 0$, alors (3.2.25) – (3.2.29) et (3.2.36) – (3.2.38), on a

$$\begin{aligned} \exp\{(1 - \varepsilon) 2\delta(bz, \theta) r\} &\leq |H_{2b} e^{2bz}| \\ &\leq \exp\{r^{\beta+\varepsilon}\} + 2 \exp\{(1 + \varepsilon) (1 + c) \\ &\quad \delta(bz, \theta) r\} + 2 \exp\{(1 + \varepsilon) 2c \delta(bz, \theta) r\} \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Par $\beta + \varepsilon < 1$ et $5\varepsilon < 1 - c$, on a quand $r \rightarrow \infty$,

$$\frac{\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}}{\exp\{(1 - \varepsilon) 2\delta(bz, \theta) r\}} \rightarrow 0, \quad (3.2.40)$$

$$\frac{\exp\{(1 + \varepsilon) (1 + c) \delta(bz, \theta) r\}}{\exp\{(1 - \varepsilon) 2\delta(bz, \theta) r\}} \rightarrow 0, \quad (3.2.41)$$

$$\frac{\exp\{(1 + \varepsilon) 2c \delta(bz, \theta) r\}}{\exp\{(1 - \varepsilon) 2\delta(bz, \theta) r\}} \rightarrow 0, \quad (3.2.42)$$

De (3.2.39) – (3.2.42), on obtient $1 \leq 0$. La contradiction donne $\psi_2 + H_{2b} e^{2bz} \not\equiv 0$.

(ii) En utilisant un raisonnement analogue à celui de la preuve (i), la preuve de (ii) peut être complétée.

(iii) Ces propriétés de $\psi_2(z)$, $\psi_4(z)$ sont claires. \square

Lemme 3.2.8 [8] *Supposons que $A_0, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si $f(z)$ est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_0 f = F, \quad (3.2.43)$$

alors f satisfait $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$.

3.3 Preuve de théorème 3.1.1

3.4

Preuve. Preuve de théorème 3.1.1(1) Supposons que $f (\neq 0)$ est une solution méromorphe de l'équation (3.1.1), alors d'après le Théorème 2.1.2 du chapitre 2 $\sigma(f) = \infty$. Posons $g_0(z) = f(z) - z$, alors z est un point fixe de $f(z)$ si et seulement si $g_0(z) = 0$. $g_0(z)$ est une fonction méromorphe et $\sigma(g_0) = \sigma(f) = \infty$. En substituant $f = g_0 + z$ dans (3.1.1), on a

$$g_0'' + A_1 e^{az} g_0' + A_0 e^{bz} g_0 = -A_1 e^{az} - z A_0 e^{bz}. \quad (3.3.1)$$

Clairement $-A_1 e^{az} - z A_0 e^{bz} \neq 0$.

L'équation (3.3.1) peut avoir une solution non-méromorphe et une solution méromorphe d'ordre fini. Mais là nous étudions seulement la solution méromorphe d'ordre infini vérifiant $g_0 = f - z$. D'où d'après le Lemme 3.2.8, $\bar{\lambda}(g_0) = \bar{\lambda}(f - z) = \infty$ est vérifiée.

Maintenant considérons les points fixes de $f'(z)$. Posons $g_1(z) = f'(z) - z$, alors z est un point fixe de $f'(z)$ si et seulement si $g_1(z) = 0$. $g_1(z)$ est une fonction méromorphe et d'après le Lemme 1.2.1 on a $\sigma(g_1) = \sigma(f') = \sigma(f) = \infty$. En dérivant les deux côtés de l'équation (3.1.1), on obtient

$$f''' + A_1 e^{az} f'' + [(A_1 e^{az})' + A_0 e^{bz}] f' + (A_0 e^{bz})' f = 0. \quad (3.3.2)$$

De (3.1.1), on a

$$f = -\frac{1}{A_0 e^{bz}} (f'' + A_1 e^{az} f'). \quad (3.3.3)$$

En substituant (3.3.3) dans (3.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} & f''' + \left(A_1 e^{az} - \frac{(A_0 e^{bz})'}{A_0 e^{bz}} \right) f'' \\ & + \left[(A_1 e^{az})' + A_0 e^{bz} - \frac{(A_0 e^{bz})'}{A_0 e^{bz}} A_1 e^{az} \right] f' \\ & = 0. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

En substituant $f' = g_1 + z$, $f'' = g_1' + 1$, $f''' = g_1''$ dans (3.3.4), on obtient

$$g_1'' + h_1 g_1' + h_0 g_1 = h, \quad (3.3.5)$$

où

$$\begin{aligned} h_1 &= A_1 e^{az} - \frac{(A_0 e^{bz})'}{A_0 e^{bz}}, \\ h_0 &= (A_1 e^{az})' + A_0 e^{bz} - \frac{(A_0 e^{bz})'}{A_0 e^{bz}} A_1 e^{az}, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} h &= -\left[A_1 e^{az} - \frac{(A_0 e^{bz})'}{A_0 e^{bz}} + z (A_1 e^{az})' \right. \\ &\quad \left. + z A_0 e^{bz} - z A_1 e^{az} \frac{(A_0 e^{bz})'}{A_0 e^{bz}} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

De (3.3.6), on obtient

$$\begin{aligned} h &= -\left[(A_1 + z A_1' + z a A_1 - z A_1 \frac{A_0'}{A_0} - z A_1 b) e^{az} \right. \\ &\quad \left. + z A_0 e^{bz} - \frac{A_0'}{A_0} - b \right], \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

et $a \neq b$, $A_0 \neq 0$, on sait que $h \neq 0$. En considérant l'équation (3.3.5), d'après le Lemme 3.2.8 et $h \neq 0$, on a $\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - z) = \sigma(g_1) = \sigma(f) = \infty$.

Maintenant prouvons que $\bar{\lambda}(f'' - z) = \infty$. Posons $g_2(z) = f'' - z$. En utilisant le même raisonnement ci-dessus, il ne reste seulement à prouver que $\bar{\lambda}(g_2) = \infty$.

En dérivant les deux côtés de (3.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} &f^{(4)} + A_1 e^{az} f''' + [2(A_1 e^{az})' + A_0 e^{bz}] f'' \\ &+ [(A_1 e^{az})'' + 2(A_0 e^{bz})'] f' + (A_0 e^{bz})'' f \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

En substituant (3.3.3) dans (3.3.9), on obtient

$$\begin{aligned} &f^{(4)} + A_1 e^{az} f''' + \left[2(A_1 e^{az})' + A_0 e^{bz} - \frac{(A_0 e^{bz})''}{A_0 e^{bz}} \right] f'' \\ &+ \left[(A_1 e^{az})'' + 2(A_0 e^{bz})' - A_1 e^{az} \frac{(A_0 e^{bz})''}{A_0 e^{bz}} \right] f' = 0. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

De (3.3.2) et (3.3.10), on ait

$$f^{(4)} + H_3 f''' + H_2 f'' = 0, \quad (3.3.11)$$

où

$$H_3 = A_1 e^{az} - \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}, \quad (3.3.12)$$

$$\begin{aligned} H_2 = & 2(A_1 e^{az})' + A_0 e^{bz} - \frac{(A_0 e^{bz})''}{A_0 e^{bz}} \\ & - \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \left[A_1 e^{az} - \frac{(A_0 e^{bz})'}{A_0 e^{bz}} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Ici

$$\varphi_1(z) = (A_1 e^{az})'' + 2(A_0 e^{bz})' - A_1 e^{az} \frac{(A_0 e^{bz})''}{A_0 e^{bz}}, \quad (3.3.14)$$

$$\varphi_2(z) = (A_1 e^{az})' + A_0 e^{bz} - A_1 e^{az} \frac{(A_0 e^{bz})'}{A_0 e^{bz}}. \quad (3.3.15)$$

Clairement, H_3, H_2 sont des fonctions méromorphes avec $\sigma(H_j) \leq 1$ ($j = 2, 3$).

En substituant $f'' = g_2 + z$, $f''' = g_2' + 1$, $f^{(4)} = g_2''$ dans (3.4.11), on obtient

$$g_2'' + H_3 g_2' + H_2 g_2 = -(H_3 + z H_2). \quad (3.3.16)$$

Si on peut prouver que $-(H_3 + z H_2) \not\equiv 0$, alors d'après le Lemme 3.2.8, on a $\bar{\lambda}(g_2) = \bar{\lambda}(f'' - z) = \infty$.

Maintenant prouvons que $-(H_3 + z H_2) \not\equiv 0$. Remarquons que

$$\frac{(A_0 e^{bz})'}{A_0 e^{bz}} = \frac{A_0'}{A_0} + b, \quad \frac{(A_0 e^{bz})''}{A_0 e^{bz}} = \frac{A_0''}{A_0} + 2 \frac{A_0'}{A_0} b + b^2, \quad (3.3.17)$$

$$\begin{aligned} (A_1 e^{az})' &= (A_1' + A_1 a) e^{az}, \\ (A_1 e^{az})'' &= \left(A_1'' + 2A_1' a + A_1 a^2 \right) e^{az}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

De (3.3.14), (3.3.15) et (3.3.16), (3.3.18), on ait

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) = & \left[A_1'' + 2aA_1' + a^2 A_1 - \frac{A_1}{A_0} \left(A_0'' + 2A_0' b + b^2 A_0 \right) \right] e^{az} \\ & + 2(A_0' + A_0 b) e^{bz}, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

$$\varphi_2(z) = \left[A'_1 + aA_1 - A_1 \left(\frac{A'_0}{A_0} + b \right) \right] e^{az} + A_0 e^{bz}. \quad (3.3.20)$$

De (3.3.12), (3.3.13) et (3.3.19), (3.3.20), on obtient

$$\begin{aligned} -(H_3 + zH_2) &= \frac{1}{\varphi_2(z)} (-zA_0^2 e^{2bz} + H_{a+b}(z) e^{(a+b)z} \\ &\quad + H_{2a}(z) e^{2az} + H_a(z) e^{az} + H_b(z) e^{az}) \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

où

$$\begin{aligned} H_{a+b}(z) &= 2(A'_0 + A_0b) \left[1 + z \left(\frac{A'_0}{A_0} + b \right) \right] \\ &\quad + A_0[-A_1 - 2z(A'_1 + A_1a)] \\ &\quad - zA_0 \left[A'_1 + aA_1 - A_1 \left(\frac{A'_0}{A_0} + b \right) \right], \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

$$\begin{aligned} H_{2a}(z) &= -zA_1[A''_1 + 2A'_1 + A_1a^2 - \frac{A_1}{A_0}(A''_0 + 2bA'_0 \\ &\quad + b^2A_0)] + [-A_1 - 2z(A'_1 + aA_1)] \\ &\quad [A'_1 + A_1a - A_1(\frac{A'_0}{A_0} + b)], \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

$$\begin{aligned} H_a(z) &= (1 + z(\frac{A'_0}{A_0} + b)) \\ &\quad [A''_1 + 2aA'_1 + a^2A_1 - \frac{A_1}{A_0}(A''_0 + 2bA'_0 + b^2A_0)] \\ &\quad + z(\frac{A''_0}{A_0} + 2b\frac{A'_0}{A_0} + b^2)[A'_1 + aA_1 - A_1(\frac{A'_0}{A_0} + b)], \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

$$\begin{aligned} H_b(z) &= 2(A'_0 + A_0b) [1 + z(\frac{A'_0}{A_0} + b)] \\ &\quad + zA_0(\frac{A''_0}{A_0} + 2b\frac{A'_0}{A_0} + b^2). \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Clairement, de (3.3.22) – (3.3.25), on voit que H_{a+b} , H_{2a} , H_a , H_b sont des fonctions méromorphes d'ordre < 1 . De (3.3.21) – (3.3.25), on voit que

$$-(H_3 + zH_2) = \frac{\psi_2(z) - zA_0^2 e^{2bz}}{\varphi_2(z)}, \quad (3.3.26)$$

où $\psi_2(z)$ est définie comme dans le Lemme 3.2.7. D'après le Lemme 3.2.7, on sait que $\psi_2(z) - zA_0^2 e^{2bz} \not\equiv 0$, $\varphi_2(z) \not\equiv 0$. D'où $(H_3 + zH_2) \not\equiv 0$. Le Théorème 3.1.1(1) est ainsi prouvé.

Preuve de Théorème 3.1.1(2). Supposons que parmi d_0, d_1, d_2 , il y a au moins deux nombres qui ne sont pas nuls. En fait, s'il existe seulement un nombre qui n'est pas nul, d'après le Théorème 3.1.1(1) on voit que le Théorème 3.1.1(2) est vérifié.

En premier lieu, supposons que $d_2 \neq 0$. Supposons que $f (\neq 0)$ est une solution méromorphe de l'équation (3.1.1), alors $\sigma(f) = \infty$ d'après le Théorème 2.1.2 du chapitre 2. Nous posons $w = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f - z$, alors $\sigma(w) = \sigma(g) = \sigma(f) = \infty$ d'après le Lemme 3.2.6.

Pour montrer que $\bar{\lambda}(g(z) - z) = \infty$, il suffit seulement de démontrer que $\bar{\lambda}(w) = \infty$. En substituant $f'' = -A_1 e^{az} f' - A_0 e^{bz} f$ dans $w(z)$, on obtient

$$w(z) = (d_1 - d_2 A_1 e^{az}) f' + (d_0 - d_2 A_0 e^{bz}) f - z. \quad (3.3.27)$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (3.3.27), et en remplaçant f'' avec $f'' = -A_1 e^{az} f' - A_0 e^{bz} f$, on obtient

$$\begin{aligned} w'(z) &= [d_0 - d_2 (A_1 e^{az})' - d_2 A_0 e^{bz} - d_1 A_1 e^{az} + d_2 (A_1 e^{az})^2] f' \\ &\quad + [-d_2 (A_0 e^{bz})' - d_1 A_0 e^{bz} + d_2 A_1 A_0 e^{(a+b)z}] f - 1. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Posons

$$\begin{aligned} h &= [d_1 - d_2 A_1 e^{az}] [-d_2 (A_0 e^{bz})' - d_1 A_0 e^{bz} + d_2 A_1 A_0 e^{(a+b)z}] \\ &\quad - [d_0 - d_2 A_0 e^{bz}] [d_0 - d_2 (A_1 e^{az})' \\ &\quad - d_2 A_0 e^{bz} - d_1 A_1 e^{az} + d_2 (A_1 e^{az})^2]. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Puisque le terme $d_2^2 A_1^2 A_0 e^{(2a+b)z}$ est éliminé, par (3.3.29), on peut écrire

$$h = \psi_2(z) - d_2^2 A_1^2 A_0 e^{2bz}, \quad (3.3.30)$$

où $\psi_2(z)$ est définie comme dans le Lemme 3.2.7. Par $d_2 \neq 0$ et le Lemme 3.2.7, on a $h \neq 0$. de (3.3.23) et (3.3.24), on obtient

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{h} \{ - (d_0 - d_2 A_0 e^{bz}) (w' + 1) \\ &\quad + (w + z) [-d_2 (A_0 e^{bz})' - d_1 A_0 e^{bz} + d_2 A_1 A_0 e^{(a+b)z}] \}, \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{h} \{ (d_1 - d_2 A_1 e^{az}) (w' + 1) - (w + z) [d_0 - d_2 (A_1 e^{az})' \\ &\quad - d_2 A_0 e^{bz} - d_1 A_1 e^{az} + d_2 (A_1 e^{az})^2] \}. \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

En dérivant les deux côtés de (3.3.31) et en substituant et (3.3.32) dans (3.1.1), on obtient

$$(d_2 A_0 e^{bz} - d_0) w'' + H_1 w' + H_0 w = H, \quad (3.4.33)$$

où

$$\begin{aligned} H_1(z) &= -d_1 A_0 e^{bz} + d_2 A_1 A_0 e^{(a+b)z} + (d_0 - d_2 A_0 e^{bz}) \\ &\quad - A_1 e^{az} (d_0 - d_2 A_0 e^{bz}) + A_0 e^{bz} (d_1 - d_2 A_1 e^{az}), \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \left[-d_2 (A_0 e^{bz})'' \right] - d_1 (A_0 e^{bz})' + d_2 (A_1 e^{az})' A_0 e^{bz} \\ &\quad + d_2 A_1 e^{az} (A_0 e^{bz})' - [-d_2 (A_0 e^{bz})' + d_2 A_1 A_0 e^{(a+b)z}] \\ &\quad \frac{h'}{h} + A_1 e^{az} [-d_2 (A_0 e^{bz})' - d_1 A_0 e^{bz} \\ &\quad + d_2 A_0 A_1 e^{(a+b)z}] - A_0 e^{bz} [d_0 - d_2 (A_1 e^{az})' \\ &\quad - d_2 A_0 e^{bz} - d_1 A_1 e^{az} + d_2 (A_1 e^{az})^2], \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

$$\begin{aligned} -H(z) &= [-d_1 A_0 e^{bz} + d_2 A_0 A_1 e^{(a+b)z} \\ &\quad + z(-d_2 (A_0 e^{bz})'' - d_1 (A_0 e^{bz})' + d_2 (A_1 e^{az})' \\ &\quad A_0 e^{bz} + d_2 A_1 e^{az} (A_0 e^{bz})') + [d_0 - d_2 A_0 e^{bz} \\ &\quad - z(-d_2 (A_0 e^{bz})' - d_1 A_0 e^{bz} + d_2 A_0 A_1 e^{(a+b)z})] \frac{h'}{h} \\ &\quad - A_1 e^{az} (d_0 - d_2 A_0 e^{bz}) + z A_1 e^{az} \\ &\quad \left[-d_2 (A_0 e^{bz})' - d_1 A_0 e^{bz} + d_2 A_1 A_0 e^{(a+b)z} \right] \\ &\quad - A_0 e^{bz} (d_1 - d_2 A_1 e^{az}) - z A_0 e^{bz} [d_0 - d_2 (A_1 e^{az})' \\ &\quad - d_2 A_0 e^{bz} - d_1 A_1 e^{az} + d_2 (A_1 e^{az})^2]. \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

Supposons que $\psi_2(z)$ et $\psi_4(z)$ sont définies comme dans le Lemme 3.2.7. Nous vérifions tous les termes de h , h' , et $-H(z)$, dans tous les termes de $H(z)$, $d_2 z A_0 A_1^2 e^{(2a+b)z}$ est éliminé. on peut écrire par (3.4.34),

$$-H(z) = \psi_2(z) + d_2 z A_0^2 e^{2bz} + \psi_2(z) \frac{h'(z)}{h(z)}. \quad (3.3.37)$$

De (3.3.28) et d'après le Lemme 3.2.7, h' peut être écrit comme

$$h' = \psi_2(z) - 2d_0^2 (A_0' + bA_0) A_0 e^{2bz}. \quad (3.3.38)$$

D'après le Lemme 3.2.7 on voit que $\psi_2(z) \cdot \psi_2(z)$, $d_2 z A_0^2 e^{2bz} \psi_2(z)$, $d_2 A_0^2 e^{2bz} \psi_2$, $-2d_0^2 (A_0' + bA_0) A_0 e^{2bz} \psi_2$ ont toutes les formes de $\psi_4(z)$, nous obtenons de (3.3.30), (3.3.37) et (3.3.38),

$$-H(z) = \frac{1}{h(z)} (\psi_4(z) - d_2^3 z A_0^4 e^{4bz}). \quad (3.3.39)$$

D'après le Lemme 3.2.7 on voit que $\psi_4(z) - d_2^3 z A_0^4 e^{4bz} \not\equiv 0$, i.e. $H(z) \not\equiv 0$.

Maintenant considérons l'équation (3.3.33). Nous avons déjà démontré que $H(z) \not\equiv 0$. De (3.3.32), (3.3.33), on voit que $H_1(z)$, $H_0(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre strictement inférieur à 1. De $d_2 \neq 0$, on sait que $d_2 A_0 e^{bz} - d_0 \not\equiv 0$. D'où d'après le Lemme 3.2.8 et $\sigma(w) = \infty$, on peut obtenir $\bar{\lambda}(w) = \sigma(w) = \infty$.

Maintenant supposons que $d_2 = 0$, alors $d_1 \neq 0$, $d_0 \neq 0$. Nous vérifions le processus ci-dessus, et on peut voir que

$$h = -d_1^2 A_0 e^{bz} - d_0^2 + d_0 d_1 A_1 e^{az}, \quad (3.3.40)$$

$$\begin{aligned} -H(z) &= -d_1 A_0 e^{bz} - d_1 (A_0 e^{bz})' + [d_0 - d_1 A_0 e^{bz}] \frac{h'}{h} \\ &\quad - d_0 A_1 e^{az} - d_1 z A_1 A_0 e^{(a+b)z} + d_1 A_0 e^{bz} \\ &\quad - d_0 z A_0 e^{bz} + d_1 z A_0 A_1 e^{(a+b)z}, \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

où le terme $d_1 z A_0 A_1 e^{(a+b)z}$ est éliminé. On peut utiliser une argumentation analogue à celle ci-dessus et facilement prouver que $\bar{\lambda}(w) = \infty$ \square

CONCLUSION

Plusieurs chercheurs ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients entières. On sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont souvent d'ordre infini.

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats dus à Chen et Shon [6] dans lesquels, ils ont étudié les solutions méromorphes des équations différentielles linéaires de la forme :

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = 0,$$

où a et b sont des nombres complexes et A_j ($j = 0, 1$) sont des fonctions méromorphes. On a démontré quelques résultats concernant ces solutions. On s'est intéressé à la croissance et point fixes des solutions méromorphes de ces équations. On remarque que ces équations sont peu étudiées car toutes leurs solutions ne sont pas toujours des fonctions méromorphes.

Bibliographie

- [1] **I. Amemiya and M. Ozawa**, *Non-existence of finite order solutions of $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$* . Hokkaido. Math. J., 10, 1-17 (1981).
- [2] **B. Belaïdi**, *On the meromorphic solutions of linear differential equations*, *J.syst. Sci. complex.*20(1) 2007, 41. 46.
- [3] **B. Belaïdi and K. Hamani**, *Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coefficients*, *E. J of Diff. Equ.*, 17 (2003), 1-12.
- [4] **Z. X. Chen**, *The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations*. *Acta Math. Scientia*, (in Chinese), 20(3), 425–432 (2000).
- [5] **Z. X. Chen**, *The growth of solution of $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ where the order $(Q) = 1$* . *Science in China (Series A)*, 45(3), 290-300 (2002).
- [6] **Z. K. Chen and K. h. Shon**, *On the Growth and Fixed Point of Solution of Second Order Differential Equations with Meromorphic Coefficients*, *Acta. Math. Sin*, English series, vol, No.4 (2005), 753-764.
- [7] **Z. X. Chen and C. C, Yang**, *Some oscillation theorems for linear differetial equations with meromorphic coefficients*. *Southeast Asian Bull. of Math.*, 23, 409–417 (1999).

- [8] **Z. X. Chen**, *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*. Analysis, 14, 425–438 (1994).
- [9] **M. Frei**, *Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung $w'' + e^{-z}w' + (\text{konst.})w = 0$* Comment. Math. Helv., 36, 1–8 (1962).
- [10] **M. Frei**, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris., 236 (1953), 38–40.
- [11] **G. Gundersen**, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*. J. London Math. Soc., 37(2), 88–104 (1988).
- [12] **G. Gundersen**, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 305. (1988), 415–429.
- [13] **G. Gundersen**, *On the question of whether $f'' + e^{-z}f + B(z)f = 0$ can admit a solution $f \not\equiv 0$ of finite order*. Proc. R.S.E., 102(A), 9–17 (1986).
- [14] **W. Hayman**, *Meromorphic Function*, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [15] **W. Hayman**, *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method*. Canad. Math. Bull., 17, 317–358 (1974).
- [16] **Y. Z. He and X. Z. Xiao**, *Algebroid Functions and Ordinary Differential Equations*. Science Press, Beijing, 1988 (in Chinese).
- [17] **S. Hellerstein, J. Miles and J. Rossi**, *On the growth of solutions of $f'' + gf' + hf = 0$* , Trans. Amer. Math. Soc., 324 (1991), 693–706.
- [18] **E. Hille**, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*. Wiley, New York, 1976.
- [19] **J. Jank and L. Volkmann**, *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*. Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.

-
- [20] **I. Laine**, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*. W. de Gruyter, Berlin, 1993.
- [21] **I. Laine and P. Wu**, *Growth of solutions of second order linear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 2693-2703.
- [22] **J. K. Langley**, *On complex oscillation and a problem of Ozawa*. Kodai Math. J., 9, 430–439 (1986).
- [23] **M. Ozawa**, *On a solution of $w'' + e^{-z}w' + (az + b)w = 0$* . Kodai Math. J., 3, 295–309 (1980).
- [24] **G. Valiron**, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*. Chelsea, New York, 1949.
- [25] **J.M. Whittaker**, *The order of the derivative of meromorphic function*, J. London Math. Soc 11(1936), 82-87, Jbuch 62, 357.