REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

Option: Analyse fonctionnelle

Par

Bendehiba SENOUSSI

METRIQUES RIEMANNIENNES ET SEMI RIEMANNIENNES DANS LES ESPACES RIEMANNIENS ET SEMI RIEMANNIENS, HEISENBERG EN DIMENSION SUPERIEURE OU EGALE A TROIS

Soutenue le : 26 / 06 / 2014 devant le jury

Présidente	Benbernou Amina, Professeur, Université de Mostaganem
Examinateurs	Gala Sadek, Professeur, Université de Mostaganem
	Djaa Mustapha, Professeur, C. U. de Relizane
	Zoubir Hanifi, M. C. A., E. N. S. E. T., d'Oran
Co - encadreur	Bendoukha Berrabah, Professeur, Université de Mostaganem
Directeur	Bekkar Mohammed, Professeur, Université d'Oran

Année Universitaire : 2013-2014

Thèse

Présentée à

L'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Par

Bendehiba SENOUSSI

Métriques riemanniennes et semi riemanniennes dans les espaces riemanniens et semi riemanniens, Heisenberg en dimension supérieure ou égale à trois

Soutenue le 26 / 06 / 2014 devant le jury composé de :

Présidente :	Mme BENBERNOU Amina	Prof.,	Université de Mostaganem
Examinateur :	Mr GALA Sadek	Prof.,	Université de Mostaganem
Examinateur :	Mr DJAA Mustapha	Prof.,	C. U. de Relizane
Examinateur :	Mr ZOUBIR Hanifi	M. C. A.,	E. N. S. E. T., Oran
Co-encadreur :	Mr BENDOUKHA Berrabah	Prof.,	Université de Mostaganem
Directeur :	Mr BEKKAR Mohammed	Prof.,	Université d'Oran

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse Mohammed Bekkar. Son encadrement a été exemplaire. Je dois énormément à tous ses conseils, à toutes ses remarques, et surtout à sa rigueur. Il a été toujours présent et répondu à mes questions. Je le remercie beaucoup pour sa disponibilité, pour le temps qu'il m'a consacré, et pour son appui constant.

Je remercie cordialement mon professeur Berrabah Bendoukha d'avoir accepter de superviser le travail. Je le remercie pour son aide et collaboration et je lui exprime toute ma reconnaissance.

Je remercie Madame le professeur Benbernou Lahmar Amina de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

J'exprime ma très profonde reconnaissance aux professeurs Gala Sadek, Djaa Mustapha et Zoubir Hanifi qui me font l'honneur d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier Amine Hadjar qui a supervisé mon stage à l'Université de Haute Alsace (Mulhouse), France. Je tiens à exprimer toute ma gratitude aux équipes du (L M I A) pour leur accueil.

Merci à mes collègues du département de Mathématiques de l'Université de Chlef et de l'Université de Mostaganem.

Table des matières

Introduction

0.0.1 Historique

L'objectif principal de cette thèse est la classification de surfaces de *type fini* dans l'espace de Lorentz-Minkowski $\mathbb{E}_1^3$ de dimension 3. L'étude des sous-variétés de type fini a débuté à la fin des années 1970 quand B.-Y. Chen tentait de trouver une notion de "*degré*" pour les sous-variétés d'un espace euclidien. Les principaux objets d'étude en géométrie algébrique sont les variétés algébriques. Comme une variété algébrique est définie à l'aide d'équations algébriques, on peut définir son degré par sa structure algébrique. En appliquant les notions d'ordre et de type d'une sous-variété de $\mathbb{E}^n$.

Toutes les sous-variérés minimales d'hypersphères $\mathbb{S}^n$ et celles de l'espace euclidien sont de type fini et réciproquement. Aussi, toutes les sous-variétés parallèles de $\mathbb{E}^n$ sont de type fini. La notion d'immersion de type fini dans un espace euclidien a été étendue à un espace pseudo-euclidien vers les années 1980 [18].

Soit $\mathbb{E}_s^n$ un espace pseudo-euclidien de dimension n, de signature $(s, n-s)$ et M une sous-variété pseudo-riemannienne de $\mathbb{E}_s^n$. M paramétrée par r, est dite de type fini si son champ de vecteur position r admet une décomposition spectrale finie

$$r = r_0 + \sum_{i=1}^{k} r_i,$$

où r_i $(i = 0, 1, 2, ..., k)$ sont des applications (r_i non constantes) telles que

$$\Delta r_0 = 0,\ \Delta r_i = \lambda_i r_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R},$$

Δ étant l'opérateur de Laplace associé à la première forme fondamentale. Si les scalaires λ_i sont différents, alors M est dite de type k. M de type fini est dite *nulle* si r_0 n'est pas constante.

La notion d'immersion de type fini de sous-variétés d'un espace euclidien (pseudo-euclidien) a été largement utilisée dans la classification et la caractérisation de sous-variétés riemanniennes (pseudo-riemannienne).

Dans un certain sens, c'est une généralisation de la résolution de problèmes aux valeurs propres à l'aide de l'opérateur de Laplace Δ dans l'ensemble des sous-variétés d'un espace euclidien (pseudo-euclidien). L'étude de sous-variétés de type fini fournit une manière naturelle de combiner la théorie spectrale avec la géométrie des sous-variétés. Les premiers résultats sur ce sujet ont été recueillis dans [11].

Ainsi, la notion d'immersion de type fini de sous-variétés d'un espace euclidien ou pseudo-euclidien est le prolongement naturel de l'étude de sous-variétés minimales.

1. B.-Y. Chen proposa le problème de base suivant :

Classifier les hypersurfaces de type fini de $\mathbb{R}^n$. En particulier, les surfaces de type fini de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

T. Takahashi affirme qu'une sous-variété d'un espace euclidien est de type 1, i.e

$$\Delta r = \lambda r,$$

où r est le champ de vecteurs position de la sous-variété et Δ étant l'opérateur de Laplace associé à la première forme fondamentale.

La sous-variété est une sous-variété minimale de l'espace Euclidien ($\lambda = 0$).

La sous-variété minimale d'une hypersphère de l'espace euclidien centrée en l'origine ($\lambda \neq 0$).

Dans [15], B.-Y.Chen, F. Dillen, L. Verstraelen ont donné une classification des surfaces réglées de $\mathbb{R}^3$ de type fini. Dans [27], F. Dillen, J. Pas et L. Verstraelen ont montré qu'une surface de $\mathbb{R}^3$ vérifie la condition

$$\Delta x = Ax + B$$

si et seulement si elle est minimale, une portion de sphère ou bien une portion de cylindre circulaire.

2. Pour la version lorentzienne, consulter les travaux de [16], [29] et [51].

Dans [7], M. Bekkar et H. Zoubir ont établi une classification des surfaces de révolution, avec courbure de Gauss non nulle dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski, qui vérifient la condition

$$\Delta r_i = \lambda_i r_i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

M. Choi, Y. H. Kim et D. W. Yoon [23] ont classifié les surfaces de révolution de $\mathbb{E}_1^3$ sans points paraboliques satisfaisant la condition

$$\Delta^{II} r = Ar + B,$$

où $A = (a_{ij}) \in Mat(3, \mathbb{R})$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ et Δ^{II} est l'opérateur de Laplace associé à la seconde forme fondamentale.

3. F. Dillen, J. Pas et L. Verstraelen [26] et C. Baikoussis, D. E. Blair [4] ont classifié les surfaces de révolution et les surfaces réglées de $\mathbb{R}^3$ respectivement, dont les applications de Gauss G satisfont la conditon

$$\Delta G = AG.$$

C. Baikoussis et L. Verstraelen [5], ont étudié les surfaces hélicoidales de $\mathbb{R}^3$ dont l'application de Gauss vérifie

$$\Delta G = AG.$$

S.M. Choi [24], [25] a étudié l'application de Gauss de surfaces réglées et de surfaces de révolution dans $\mathbb{E}_1^3$.

H.-L. Liu et G. Li Liu [42] ont exploré les surfaces de révolution de $\mathbb{E}_1^3$ qui satisfont

$$\Delta G{=}\lambda G,\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

D. W. Yoon a déterminé les surfaces de translation dans $\mathbb{E}_1^3$ dont l'application de Gauss G vérifie [52]

$$\Delta G{=}AG,\ \ A \in Mat(3,\mathbb{R}).$$

0.0.2 Description de la thèse

Ce travail est organisé comme suit.

Le chapitre 1 est consacré aux rappels et définitions. On définit la notion d'espace de Lorentz-Minkowski de dimension 3 qu'on note $\mathbb{E}_1^3$, de signature $(1, 2)$, l'endomorphisme de Weingarten et la troisième forme fondamentale. On y développe des notions de certains opérateurs différentiels dans $\mathbb{E}_1^3$.

Si la troisième forme fondamentale est non dégénérée, elle peut être considérée comme une métrique. Dans ce cas, on peut définir le Laplacien associé à la troisième forme fondamentale, noté Δ^{III}.

Dans [49], S. Stamatakis et H. Al-Zoubi ont donné une classification des surfaces de révolution sans points paraboliques dans $\mathbb{E}^3$, satisfaisant la condition

$$\Delta^{III}x = Ax,\ \ A \in Mat(3,\mathbb{R}), \tag{1}$$

où Δ^{III} est l'opérateur de Laplace associé à la troisième forme fondamentale et $Mat(3,\mathbb{R})$ est l'espace des matrices carrées réelles d'ordre 3.

Dans [38], G. Kaimakamis, B.J. Papantoniou et K. Petoumenos ont donné une classification des surfaces de révolution dans $\mathbb{E}_1^3$ satisfaisant la condition (1).

Plus précisément, ils ont étudié les surfaces de révolution et ont prouvé que ce sont, soit des surfaces minimales, soit des pseudo-sphères de rayon réel ou imaginaire, soit des cylindres lorentz hyperboliques.

Dans [41] C. W. Lee, Y. H. Kim et D. W. Yoon ont étudié les surfaces réglées dans $\mathbb{E}_1^3$ satisfaisant (1).

Dans [3] Ch. Baba-Hamed, M. Bekkar ont établi une classification des surfaces hélicoidales dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski, vérifiant la condition

$$\Delta^{II}r_i = \lambda_i r_i,\ \ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Quatre questions intéressantes se sont alors dégagées :

1) la classification des surfaces factorables dans les espaces 3-dimensionnel euclidien $\mathbb{E}^3$ et lorentzien $\mathbb{E}_1^3$ qui satisfont la condition

$$\Delta r_i = \lambda_i r_i,\ \ \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

2) la classification complète des surfaces de translation dans les espaces 3-dimensionnel euclidien $\mathbb{E}^3$ et lorentzien $\mathbb{E}^3_1$ qui satisfont la condition

$$\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i.$$

3) la classification complète des surfaces hélicoidales sans points paraboliques dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski $\mathbb{E}^3_1$, satisfaisant la condition

$$\Delta^{II} r = Ar.$$

4) la classification complète des surfaces hélicoidales sans points paraboliques dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski $\mathbb{E}^3_1$, satisfaisant la condition

$$\Delta^{III} r = Ar.$$

Ces quatres questions sont traitées aux chapitres 2, 3, 4 et 5 dans lesquels on donne également les formes explicites de telles surfaces.

Par ailleurs, pour la version euclidienne S. Stamatakis, H. Al-Zoubi [49] ont donné une classification des surfaces de révolution sans points paraboliques dans $\mathbb{E}^3$, vérifiant la condition

$$\Delta^{III} x = Ax.$$

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre rappelle quelques notions élémentaires de la théorie des surfaces, pour plus de détails voir [39], [45], [31].

1.1 L'espace de Lorentz-Minkowski $\mathbb{E}_1^3$

On appelle espace pseudo-euclidien de dimension m, de signature $(s, m-s)$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ muni de la métrique

$$g_L = -dx_1^2 - dx_2^2 - ... - dx_s^2 + dx_{s+1}^2 + ... + dx_m^2,$$

où $(x_1, x_2, ..., x_m)$ sont les coordonnées rectangulaires de $\mathbb{R}^m$. On le note $\mathbb{E}_s^m$.

$$\mathbb{E}_s^m = \{(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m, g_L = -dx_1^2 - dx_2^2 - ... - dx_s^2 + dx_{s+1}^2 + ... + dx_m^2\} \simeq (\mathbb{R}^m, g_L).$$

En particulier, pour $m \geq 2$, $\mathbb{E}_1^m$ s'appelle Lorentz-Minkowski $m-espace$.

On s'intéressera particulièrement à l'espace de Lorentz-Minkowski $\mathbb{E}_1^3$ qui est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique lorentzienne

$$g_L = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \tag{1.1}$$

où (x_1, x_2, x_3) est le système de coordonnées rectangulaires de $\mathbb{E}_1^3$. Souvent $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

On associe à cette métrique le produit scalaire de Lorentz (produit scalaire lorentzien) de deux vecteurs $V = (v_1, v_2, v_3)$ et $W = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbb{E}_1^3$, défini par

$$g_L(V, W) = -v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3.$$

Comme en géométrie euclidienne, on définit la norme de V comme suit :

$$\|V\|_L = \sqrt{|g_L(V, V)|}.$$

Définition 1.1 *i) Un vecteur de norme strictement négative est dit de type temps, ou plus simplement temporel.*

ii) Un vecteur de norme strictement positive est dit de type espace, ou spatial.

iii) Un vecteur non-nul de norme nulle est dit de type lumière, nul ou isotrope.

Dans cette section on fixe quelques notations utilisées par la suite.

Définition 1.2 *On définit le produit vectoriel de Lorentz, une opération sur les vecteurs, par*

1) $V \wedge W = 0$ *si* V *et* W *sont colinéaires.*

2) $V \wedge W = T$*, l'unique vecteur orthogonal à* V *et* W.

3) $g_L(V \wedge W, T) = \det[V, W, T]$ *pour tout* $T \in \mathbb{E}_1^3$*, où* $\det[V, W, T]$ *désigne le déterminant de la matrice dont les vecteurs colonnes sont respectivement* V, W *et* T.

Si V *et* W *sont unitaires et orthogonaux alors* $\{V, W, V \wedge W\}$ *forme une base orthonormée directe.*

Propriétés

Soient X, Y, Z, V, W, T des vecteurs de $\mathbb{E}_1^3$. On a :

1) $V \wedge W = -W \wedge V$.

2) $V \wedge (W + T) = V \wedge W + V \wedge T$.

3) $g_L(V \wedge W, W) = g_L(V \wedge W, V) = 0$.

4) $\det[V, W, T] = g_L(V \wedge W, T) = g_L(V, W \wedge T)$.

5) $(X \wedge Y)Z = g_L(Y, Z)X - g_L(X, Z)Y$.

6) Identité de Lagrange dans $\mathbb{E}_1^3$

$$g_L(V \wedge W, X \wedge Y) = g_L(W, X)g_L(V, Y) - g_L(V, X)g_L(W, Y).$$

7)

$$\det[X, Y, Z].\det[V, W, T] = -\begin{vmatrix} g_L(X, V) & g_L(Y, V) & g_L(Z, V) \\ g_L(X, W) & g_L(Y, W) & g_L(Z, W) \\ g_L(X, T) & g_L(Y, T) & g_L(Z, T) \end{vmatrix}.$$

Pour $V = (v_1, v_2, v_3)$, $W = (w_1, w_2, w_3)$ dans $\mathbb{E}_1^3$

$$V \wedge W = (v_3 w_2 - v_2 w_3, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1).$$

1.1.1 Hypersurfaces de $\mathbb{E}^m$ (resp. $\mathbb{E}_s^m$)

Définition 1.3 *Soit* $k \geq 1$*. Une hypersurface régulière* M^{m-1} *de* $\mathbb{E}^m$ *(resp.* $\mathbb{E}_s^m$*) de classe* C^k*, est une partie non vide de* $\mathbb{E}^m$ *(resp.* $\mathbb{E}_s^m$*) telle que pour tout point* p *dans* M^{m-1}*, il existe* *un ouvert* Ω_p *de* $\mathbb{E}^m$ *(resp.* $\mathbb{E}^m_s$*) contenant* p*, un ouvert* Ω' *de* $\mathbb{E}^{m-1}$ *et une application*

$$r : \Omega' \to \mathbb{E}^m (resp.\ \mathbb{E}^m_s)$$

de classe C^k *tel que*

$$r : \Omega' \to r(\Omega')$$

soit un homéomorphisme, que r *soit de rang* $(m-1)$ *sur* Ω'_p *et que*

$$r(\Omega') = M^{m-1} \cap \Omega_p.$$

Si $r(\Omega') = M^{m-1}$ *alors* M^{m-1} *est dite hypersurface régulière simple.*

Remarque 1.1 *Pour* $m = 3$ *et* $s = 1$*,* M^2 *est une surface régulière de l'espace de Lorentz-Minkowski* $\mathbb{E}^3_1$*.*

Le couple (Ω', r) est appelé une paramétrisation de M^2 au voisinage de p.

Définition 1.4 *Soit* $m \geq 3$ *et* $c \in \mathbb{E}^m_s$*.*

On appelle pseudo-sphère de centre c *et de rayon* $\rho > 0$*, et on note* $\mathbb{S}^{m-1}_s(c, \rho)$*, l'hypersurface pseudo-riemannienne de* $\mathbb{E}^m_s$ *définie par*

$$\mathbb{S}^{m-1}_s(c, \rho) = \left\{ x \in \mathbb{E}^m_s :< x - c, x - c >= \rho^2 \right\}, \quad 0 \leq s \leq m-1.$$

On appelle espace pseudo-hyperbolique de centre c *et de rayon* $\rho > 0$*, et on note* $\mathbb{H}^{m-1}_{s-1}(c, \rho)$*, l'hypersurface pseudo-riemannienne de* $\mathbb{E}^m_s$ *définie par*

$$\mathbb{H}^{m-1}_{s-1}(c, \rho) = \left\{ x \in \mathbb{E}^m_s :< x - c, x - c >= -\rho^2 \right\}, \quad 1 \leq s \leq m.$$

Remarque 1.2 *1) Pour* $s = 0$*,* $\mathbb{S}^{m-1}_0(c, \rho)$ *est la sphère standard* $\mathbb{S}^{m-1}(c, \rho)$ *de l'espace euclidien* $\mathbb{E}^m_0 = \mathbb{E}^m$*.*

2) $\mathbb{S}^{m-1}_s(c, \rho)$ *et* $\mathbb{H}^{m-1}_{s-1}(c, \rho)$ *sont des sous-variétés pseudo-riemanniennes complètes, à courbure sectionnelle constante* $\frac{1}{\rho^2}$ *et* $-\frac{1}{\rho^2}$ *respectivement.*

Définition 1.5 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* M^2 *une surface régulière de l'espace euclidien* $\mathbb{E}^3$ *(respectivement* $\mathbb{E}^3_1$*) paramétrée par*

$$r : U \to \mathbb{E}^3 \ (\mathbb{E}^3_1), \ (u, v) \to r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)).$$

Dans ces conditions on peut définir le plan tangent TM^2 *comme le plan engendré par* $\{r_u = r_u(u, v), r_v = r_v(u, v)\}$ *et le vecteur unitaire normal par*

$$\mathbf{N} = \frac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}.$$

On note E, F, G les coefficients de la première forme fondamentale dans la base $\{r_u, r_v\}$, i.e. les coefficients tels que, pour $dr = r_u du + r_v dv$ on a

$$\begin{aligned} I(du, dv) &= g_L(dr, dr) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ &= (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$E = g_L(du, du),\ F = g_L(du, dv),\ G = g_L(dv, dv).$$

$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ est la matrice associée à la forme fondamentale I.

Il faut noter que les quantités E, F et G peuvent être les mêmes pour deux surfaces différentes. La première forme fondamentale permet de calculer la longueur d'une courbe tracée sur la surface en terme du vecteur tangent.

Définition 1.6 *La forme quadratique II définie sur le plan tangent TM^2 par :*

$$II(du, dv) = -g_L(d\mathbf{N}, dr) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

est appelée la deuxième forme fondamentale de M^2, où $d\mathbf{N}$ est la dérivée covariante du vecteur normal unitaire.

L, M, N sont appelés les coefficients de la deuxième forme fondamentale. Cette forme quadratique permet de donner des informations géométriques sur la surface.

La deuxième forme fondamentale $II(dv, dv)$ peut s'écrire

$$II(du, dv) = (du, dv)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ est la matrice associée à la forme fondamentale II.

1.1.2 Endomorphisme de Weingarten

On considère $(\frac{\partial}{x_1}, \frac{\partial}{x_2}, .., \frac{\partial}{x_m})$ la base locale naturelle de l'espace $\mathbb{E}_s^m$.

Champs de vecteurs

Soit M une variété différentiable de classe C^∞. En chaque point p de M, nous venons de définir l'espace tangent. Nous avons alors la possibilité de considérer une application qui associe à tout point p de M un vecteur dans T_pM. C'est la notion de *champ de vecteurs.*

Notons $\Gamma(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M.

On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur M,

$$\mathfrak{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R},\ f\ \in\ C^\infty\}.$$

Définition 1.7 *Une connexion linéaire est une application*

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M),\ (X_1, Y_1) \to \nabla_{X_1} Y_1$$

telle que, pour tous $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \Gamma(M)$ *et* $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ *:*

$$\begin{aligned} \nabla_{fX_1+gX_2} Y_1 &= f\nabla_{X_1} Y_1 + g\nabla_{X_2} Y_1, \\ \nabla_{X_1}(Y_1 + Y_2) &= \nabla_{X_1} Y_1 + \nabla_{X_1} Y_2, \\ \nabla_{X_1}(fY_1) &= X_1(f)Y_1 + f\nabla_{X_1} Y_1. \end{aligned}$$

Définition 1.8 *Soit* $(x_1, x_2, ..., x_m)$ *un système de coordonnées locales dans une variété semi-riemannienne* (M, g) *munie de la connexion de Levi-Civita. Les symboles de Christoffel pour ce système de coordonnées sont les fonctions réelles notées* Γ_{ij}^k *définies par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{x_i}} \frac{\partial}{x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{x_k}, \quad 1 \leq i, j, k \leq m.$$

En effet, on a alors :

$$\nabla_X Y = X_i \left(\frac{\partial Y_k}{x_i} + \Gamma_{ij}^k Y_j \right) \frac{\partial}{x_k},$$

X et Y sont $X = X_i \frac{\partial}{x_i}$, $Y = Y_j \frac{\partial}{x_j}$.

Proposition 1.1 *Sur une variété* M *munie d'une métrique riemannienne (ou pseudo - riemannienne)* g_L*, il existe une unique dérivée covariante symétrique* ∇ *vérifiant :*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

et

$$X.g_L(Y, Z) = g_L(\nabla_X Y, Z) + g_L(Y, \nabla_X Z),\ X, Y, Z \in \Gamma(M). \tag{1.2}$$

En écrivant la deuxième équation pour toute les permutations circulaires de X, Y, Z *et en faisant la somme alternée, on en déduit :*

$$\begin{aligned} 2g_L(\nabla_X Z, Y) &= Z.g_L(X, Y) + X.g_L(Y, Z) - Y.g_L(X, Z) - g_L([X, Y], Z) \\ &\quad + g_L([Y, Z], X) - g_L([Z, X], Y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Preuve. Par une permutation cyclique des champs X, Y et Z, la formule (1.2) donne les identités

$$\begin{cases} X.g_L(Y, Z) = g_L(\nabla_X Y, Z) + g_L(Y, \nabla_X Z) \\ Y.g_L(Z, X) = g_L(\nabla_Y Z, X) + g_L(Z, \nabla_Y X) \\ Z.g_L(X, Y) = g_L(\nabla_Z X, Y) + g_L(X, \nabla_Z Y). \end{cases}$$

Cela donne (1.3). ∎

(1.3) veut dire que les symboles de Christoffel s'expriment en fonction des coefficients E, F et G de la première forme fondamentale de M.

Comme le tenseur métrique $g = g_{ij}dx_idx_j$ sur M est non dégénéré, la matrice $G = (g_{ij})$ est inversible.

On trouve :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left\{\frac{\partial g_{jl}}{x_i} + \frac{\partial g_{il}}{x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{x_l}\right\},$$

où g^{ij} sont les composantes de G^{-1}.

Lemme 1.1 *La connexion naturelle définie ci-dessus est la connexion de Levi-Civita de l'espace pseudo-euclidien $\mathbb{E}_s^m$, $0 \leq s \leq m$ et*

$$\begin{cases} g_{ij} = \delta^{ij}\varepsilon_j \\ \Gamma_{ij}^k = 0, \ 1 \leq i, j, k \leq m, \end{cases}$$

où

$$\varepsilon_j = \begin{cases} -1 & si \ \ 1 \leq j \leq s \\ +1 & si \ \ s+1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Soit M^{m-1} une hypersurface de $\mathbb{E}^m$ ou $\mathbb{E}_s^m$. Dans cette partie, on va noter $\tilde{\nabla}$ la connection de Levi-Civita de $\mathbb{E}^m$ ($\mathbb{E}_s^m$) et ∇ celle de l'hypersurface M^{m-1}.

On sait que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathbf{II}(X, Y),$$

où $\mathbf{II}(X, Y)$ désigne la partie normale de $\tilde{\nabla}_X Y$ à M^{m-1} et $\nabla_X Y$ est la partie tangente de $\tilde{\nabla}_X Y$ à M^{m-1}. $\mathbf{II}$ est dit tenseur de la seconde forme fondamentale de $M^{m-1} \subset \mathbb{E}^m$ (ou $\mathbb{E}_s^m$).

Définition 1.9 *Soit x un point de l'hypersurface M^{m-1} et $\mathbf{N}$ un vecteur unitaire normal dans un voisinage de x dans M^{m-1}. Soit*

$$\mathbf{S}_x : T_xM^{m-1} \to T_xM^{m-1}, \ V_x \mapsto \mathbf{S}_x(V_x)$$

l'application linéaire définie par

$$\mathbf{S}_x(V_x) = -\tilde{\nabla}_{V_x}\mathbf{N}$$

pour tout $V_x \in T_xM^{m-1}$. L'application $\mathbf{S}_x$ est dite endomorphisme de Weingarten de M^{m-1} en x déduit de $\mathbf{N}$.

En tout point x de M^{m-1} il existe deux applications $\pm\mathbf{S}_x$. On parlera d'endomorphisme de Weingarten $\mathbf{S}$ de M^{m-1}, et on écrira

$$\mathbf{S}(V) = -\tilde{\nabla}_V\mathbf{N}$$

pour tout champ de vecteurs $V \in TM^{m-1}$.

Proposition 1.2 *Si $\mathbf{S}$ est l'endomorphisme de Weingarten de M^{m-1}, alors en tout point x l'opérateur*

$$\mathbf{S} : T_xM^{m-1} \to T_xM^{m-1}$$

est auto-adjoint. Autrement dit

$$g_L(\mathbf{S}(V_x), W_x) = g_L(V_x, \mathbf{S}(W_x)), \quad \forall V_x, \ W_x \in T_xM^{m-1}.$$

Les valeurs propres de l'opérateur $\mathbf{S}$ sont dites les courbures principales de M^{m-1} et les vecteurs propres sont dits les directions principales de M^{m-1}.

Proposition 1.3 *L'endomorphisme* $\mathbf{S}$ *de Weingarten de* M^{m-1} *vérifie*

$$g_L(\mathbf{S}(X), Y) = g_L(\mathbf{II}(X,Y), \mathbf{N}), \quad \forall X,\ Y \in TM^{m-1}.$$

Proposition 1.4 *Soit* M^2 *une surface régulière de* $\mathbb{E}^3$ *(respectivement* $\mathbb{E}^3_1$*) paramétrée par*

$$r : M^2 \to \mathbb{E}^3\ (\mathbb{E}^3_1),\ (u,v) \mapsto r(u,v),$$

$\{r_u, r_v\}$ *est une base de* T_pM^2 *où* $p = r(u,v)$*. Soit* $t \mapsto \gamma(t)$ *une courbe tracée sur* M^2*, telle que*

$$\gamma(0) = p \text{ et } \gamma'(0) = r_u.$$

On a :

1)
$$\tilde{\nabla}_{r_u} r_v = r_{uv}.$$

2)
$$\tilde{\nabla}_{r_u}\mathbf{N} = \mathbf{N}_u,\ \tilde{\nabla}_{r_v}\mathbf{N} = \mathbf{N}_v.$$

3)
$$g_L(\mathbf{S}(r_u), r_v) = -g_L(\tilde{\nabla}_{r_u}\mathbf{N}, r_v) = -g_L(\mathbf{N}_u, r_v) = g_L(\mathbf{N}, r_{uv}) = M,$$
$$g_L(\mathbf{S}(r_u), r_u) = g_L(\mathbf{N}, r_{uu}) = L,\ g_L(\mathbf{S}(r_v), r_v) = g_L(\mathbf{N}, r_{vv}) = N,$$

où L*,* M *et* N *sont les coefficients de la deuxième forme fondamentale.*

En fait la deuxième forme fondamentale associée à M^2 en un point p est la forme quadratique définie sur T_pM^2 par

$$II_p(X) = g_L(\mathbf{S}(X), X) = g_L(\mathbf{II}(X,X), \mathbf{N})$$

pour $X \in T_pM^2$.

1.2 Équations de Gauss et Weingarten dans $\mathbb{E}^3_1$

Soit M^2 une pseudo-riemannienne de $\mathbb{E}^3_1$. Pour un système de coordonnées locales (u,v) dans M^2, les composantes du tenseur métrique sont notées E, F, G.

La formule (1.3) permet de calculer les symboles de Christoffel en fonction de E, F et G et leurs dérivées

$$g_L(r_u, \tilde{\nabla}_{r_u} r_u) = \frac{1}{2} r_u . g_L(r_u, r_u) = E\Gamma^1_{11} + F\Gamma^2_{11} = \frac{E_u}{2}$$

et

$$\begin{aligned} g_L(r_v, \tilde{\nabla}_{r_u} r_u) &= r_u . g_L(r_u, r_v) - \frac{1}{2} r_v . g_L(r_u, r_u) \\ &= F\Gamma^1_{11} + G\Gamma^2_{11} = F_u - \frac{Ev}{2}. \end{aligned}$$

On peut résoudre ce système pour les inconnues Γ_{11}^1 et Γ_{11}^2 en obtenant pour elles des expressions dépendants de E, F, G, E_u, E_v, F_u.

Les symboles de Christoffel vérifient :

$$
\begin{aligned}
Q\Gamma_{11}^1 &= \det\begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & F \\ F_u - \frac{Ev}{2} & G \end{pmatrix}, \ Q\Gamma_{11}^2 = \det\begin{pmatrix} E & \frac{E_u}{2} \\ F & F_u - \frac{Ev}{2} \end{pmatrix}, \ Q\Gamma_{12}^1 = \det\begin{pmatrix} \frac{E_v}{2} & F \\ \frac{G_u}{2} & G \end{pmatrix}, \\
Q\Gamma_{12}^2 &= \det\begin{pmatrix} E & \frac{E_v}{2} \\ F & \frac{G_u}{2} \end{pmatrix}, \ Q\Gamma_{22}^1 = \det\begin{pmatrix} F_v - \frac{G_u}{2} & F \\ \frac{G_v}{2} & G \end{pmatrix}, \ Q\Gamma_{22}^2 = \det\begin{pmatrix} E & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F & \frac{G_v}{2} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

où $Q = EG - F^2$, $E_{u_i} = \frac{\partial E}{\partial u_i}$, $F_{u_i} = \frac{\partial F}{\partial u_i}$, $G_{u_i} = \frac{\partial G}{\partial u_i}$ et $(u_1, u_2) = (u, v)$.

1.2.1 Équations de Gauss dans $\mathbb{E}_1^3$

Théorème 1.1 *Soit M^2 une surface régulière de $\mathbb{E}_1^3$ paramétrée par $r : U \to M^2$. Alors*

$$
\begin{cases}
r_{uu} = \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N}) L\mathbf{N} \\
r_{uv} = \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N}) M\mathbf{N} \\
r_{vv} = \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N}) N\mathbf{N}.
\end{cases} \tag{1.4}
$$

Preuve. Commençons par écrire les dérivées partielles $r_{u_i u_j}$ (où $(u_1, u_2) = (u, v)$) dans la base $\{r_u, r_v, \mathbf{N}\}$. La surface M^2 étant régulière, alors il existe des scalaires réel $a_{ij}, (1 \leq i, j \leq 3)$ tels que

$$
\begin{cases}
r_{uu} = a_{11} r_u + a_{12} r_v + a_{13}\mathbf{N} \\
r_{uv} = a_{21} r_u + a_{22} r_v + a_{23}\mathbf{N} \\
r_{vv} = a_{31} r_u + a_{32} r_v + a_{33}\mathbf{N}.
\end{cases}
$$

On en déduit que

$$
a_{13} = g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N})L, \ a_{23} = g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N})M, \ a_{33} = g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N})N.
$$

Par suite, en faisant le produit scalaire de chaque équation cidessus avec r_u et r_v, on obtient

$$
\begin{cases}
a_{11}E + a_{12}F = g_L(r_u, r_{uu}) = \frac{E_u}{2} \\
a_{11}F + a_{12}G = g_L(r_v, r_{uu}) = F_u - \frac{Ev}{2}
\end{cases} \tag{1.5}
$$

$$
\begin{cases}
a_{21}E + a_{22}F = g_L(r_u, r_{uv}) = \frac{E_v}{2} \\
a_{21}F + a_{22}G = g_L(r_v, r_{uv}) = \frac{G_u}{2}
\end{cases} \tag{1.6}
$$

$$
\begin{cases}
a_{31}E + a_{32}F = g_L(r_u, r_{vv}) = F_v - \frac{G_u}{2} \\
a_{31}F + a_{32}G = g_L(r_v, r_{vv}) = \frac{G_v}{2}.
\end{cases} \tag{1.7}
$$

La résolution de (1.5) donne

$$
a_{11} = \frac{1}{Q}\begin{vmatrix} \frac{E_u}{2} & F \\ F_u - \frac{Ev}{2} & G \end{vmatrix} = \Gamma_{11}^1.
$$

On procède d'une façon analogue pour les autres scalaires. ∎

1.2.2 Équations de Weingarten dans $\mathbb{E}_1^3$

Théorème 1.2 *Soit M^2 une surface régulière de $\mathbb{E}_1^3$ paramétrée par $r : U \to M^2$. Alors l'opérateur de Weingarten* $\mathbf{S}$ *de M^2 vérifie*

$$\begin{cases} -\mathbf{S}(r_u) = \mathbf{N}_u = \left(\frac{MF-LG}{EG-F^2}\right) r_u + \left(\frac{LF-ME}{EG-F^2}\right) r_v \\ -\mathbf{S}(r_v) = \mathbf{N}_v = \left(\frac{NF-MG}{EG-F^2}\right) r_u + \left(\frac{MF-NE}{EG-F^2}\right) r_v. \end{cases}$$

Preuve. On a $g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N}_u) = g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N}_v) = 0$. Comme les champs de vecteurs $\mathbf{N}_u$ et $\mathbf{N}_v$ sont tangents à M^2 il existe des scalaires réels $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ tels que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}.$$

On conclut d'après le **Proposition 1.4.** ■

Proposition 1.5 *La matrice de* $\mathbf{S}$ *dans la base $\{r_u, r_v\}$ est donnée par*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} MF-LG & NF-MG \\ & \\ LF-ME & MF-NE \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Remarque 1.3 *Si X est un champ de vecteurs sur M^2, $X = ar_u + br_v$, alors*

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \mathbf{N} &= a\mathbf{N}_u + b\mathbf{N}_v \\ &= (aa_{11} + ba_{21})r_u + (aa_{12} + ba_{22})r_v. \end{aligned}$$

Lemme 1.2 *On peut vérifier que*

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= -(g^{11}h_{11} + g^{12}h_{12})r_u - (g^{12}h_{11} + g^{22}h_{12})r_v \\ \mathbf{N}_v &= -(g^{11}h_{12} + g^{12}h_{22})r_u - (g^{12}h_{12} + g^{22}h_{22})r_v, \end{aligned}$$

où (g^{ij}) $((h^{ij}))$ désigne la matrice inverse de I (II).

1.2.3 Troisième forme fondamentale

On peut également construire un autre tenseur symétrique appelé troisième forme fondamentale défini par

$$\mathbf{III}(X) = g_L(\tilde{\nabla}_X \mathbf{N}, \tilde{\nabla}_X \mathbf{N}).$$

Définition 1.10 *Soit M^2 une surface régulière de $\mathbb{E}_1^3$ paramétrée par $r : U \to M^2$. La troisième forme fondamentale III_p au point p est la forme quadratique sur le plan tangent T_pM^2 (engendré par r_u et r_v). Elle est exprimée par*

$$III_p(X) = g_L(\mathbf{S}(X), \mathbf{S}(X)).$$

On définit les fonctions $e_{ij} : U \to \mathbb{R}$ *par*

$$e_{ij} = g(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u_j}).$$

Elles sont appelées coefficients de la troisième forme fondamentale associée à la surface M^2*.*

La matrice de la troisième forme fondamentale relative à la base $\{r_u, r_v\}$ de TM^2, induite par une paramétrisation $r(u,v)$ d'un voisinage de $p \in M^2$, est donné au point $p = r(u,v)$ par

$$\mathcal{F}_{III} = (e_{ij})_{0\leq i,j\leq 2} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{pmatrix}.$$

On peut écrire la troisième forme fondamentale comme forme quadratique sur TM^2 :

$$III(du, dv) = g_L(d\mathbf{N}, d\mathbf{N}) = e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2.$$

Lemme 1.3 *On peut vérifier que*

$$\begin{cases} g_L(\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u) = \varepsilon(2HL - K_G E) \\ g_L(\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v) = \varepsilon(2HM - K_G F) \\ g_L(\mathbf{N}_v, \mathbf{N}_v) = \varepsilon(2HN - K_G G), \end{cases} \tag{1.9}$$

où $\varepsilon = g_L(\mathbf{N}, \mathbf{N})$.

Preuve. On a, en vertu du théorème (1.2)

$$\begin{aligned} g_L(\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u) &= g_L(b_{11}r_u + b_{12}r_v, b_{11}r_u + b_{12}r_v) \\ &= b_{11}^2 g_L(r_u, r_u) + 2b_{11}b_{12}g_L(r_u, r_v) + b_{12}^2 g_L(r_v, r_v) \\ &= E\left(\frac{MF - LG}{EG - F^2}\right)^2 + 2F\left(\frac{MF - LG}{EG - F^2}\right)\left(\frac{LF - ME}{EG - F^2}\right) + G\left(\frac{LF - ME}{EG - F^2}\right)^2 \\ &= \varepsilon(2HL - K_G E). \end{aligned}$$

De la même manière on trouve $g_L(\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v)$ et $g_L(\mathbf{N}_v, \mathbf{N}_v)$. ■

Proposition 1.6 *La troisième forme fondamentale* III *est exprimée par les formes fondamentales* I *et* II *par la relation*

$$III(du, dv) = \varepsilon(2HII - K_G I). \tag{1.10}$$

Preuve. D'après (1.9), on a

$$\begin{aligned} III(du, dv) &= g_L(d\mathbf{N}, d\mathbf{N}) = g_L(\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u)du^2 + 2g_L(\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v)dudv + g_L(\mathbf{N}_v, \mathbf{N}_v)dv^2 \\ &= \varepsilon(2HL - K_G E)du^2 + 2\varepsilon(2HM - K_G F)dudv + \varepsilon(2HN - K_G G)dv^2 \\ &= \varepsilon(2HII - K_G I). \end{aligned}$$

De (1.10), il vient

$$\begin{aligned}e_{11} &= \varepsilon(2HL - K_G E)\\ e_{12} &= \varepsilon(2HM - K_G F)\\ e_{22} &= \varepsilon(2HN - K_G G).\end{aligned}$$

■

Un calcul direct donne

1)

$$\det(III) = e_{11}e_{22} - e_{12}^2 = K_G^2(EG - F^2) = K_G^2 \det(I).$$

2)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{III} &= \begin{pmatrix} b_{11}^2 E + 2b_{11}b_{12}F + b_{12}^2 G & b_{11}b_{21}E + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})F + b_{12}b_{22}G \\ b_{11}b_{21}E + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})F + b_{12}b_{22}G & b_{21}^2 E + 2b_{21}b_{22}F + b_{22}^2 G \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3)

$$\begin{cases} \mathbf{N}_u = \zeta_{11} r_u + \zeta_{12} r_v \\ \mathbf{N}_v = \zeta_{21} r_u + \zeta_{22} r_v, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}\zeta_{11} &= -(h^{11}e_{11} + h^{12}e_{12}),\ \zeta_{12} = -(h^{12}e_{11} + h^{22}e_{12})\\ \zeta_{21} &= -(h^{11}e_{12} + h^{12}e_{22}),\ \zeta_{22} = -(h^{12}e_{12} + h^{22}e_{22}).\end{aligned}$$

1.3 Courbure de Gauss et courbure moyenne

1.3.1 Courbure de Gauss

Proposition 1.7 *Soit M^2 une surface régulière de $\mathbb{E}_1^3$ et $\mathbf{N}$ le vecteur unitaire normal à M^2. Alors*

1)

$$K_G = \frac{g_L(\mathbf{N},\mathbf{N})(LN - M^2)}{EG - F^2}.$$

2)

$$K_G = -g_L(\mathbf{N},\mathbf{N}) \det(\mathbf{S}),$$

où $\mathbf{S}$ est l'endomorphisme de Weingarten.

3)

$$\mathbf{S}(r_u) \times \mathbf{S}(r_v) = -g_L(\mathbf{N},\mathbf{N}) K_G (r_u \times r_v).$$

La courbure de Gauss K_G peut-être calculée à partir de la première forme fondamentale.

Théorème 1.3 *La courbure de Gauss K_G de M^2 ne dépend que de la première forme fondamentale et ses dérivées. En particulier, deux surfaces isométriques on la même courbure de Gauss K_G.*

Lemme 1.4 *La courbure K_G d'une surface M^2 de $\mathbb{E}_1^3$ paramétrée par r est donnée par*

$$K_G = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left((EG-F^2)\left(F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{\mathrm{uu}}\right)+\det(\mathcal{A})-\det(\mathcal{B})\right),$$

où

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 0 & F_v-\frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2} \\ \frac{1}{2}E_u & E & F \\ F_u-\frac{Ev}{2} & F & G \end{pmatrix},\ \mathcal{B}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{Ev}{2} & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & F \\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{pmatrix}.$$

La courbure de Gauss est une quantité issue de la géométrie "interne à la surface", on dit que c'est une quantité *intrinsèque.*

1.3.2 Courbure moyenne

Définition 1.11 *Etant donné un point $m \in M^2$ et $\{e_1, e_2\}$ une base orthonormée de T_mM^2, le champ de vecteurs de courbure moyenne de M^2, noté $\mathbf{H}_m$, est défini par*

$$2\mathbf{H}_m = trace(g_L(e_i,e_j)\mathbf{II}(e_i,e_j)) = g_L(e_1,e_1)\mathbf{II}(e_1,e_1)+g_L(e_2,e_2)\mathbf{II}(e_2,e_2),$$

où $\mathbf{II}$ est le tenseur de la deuxième forme fondamentale associé à M^2.

Considérons une fonction réelle régulière $H : M^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto H(u,v)$ vérifiant

$$\mathbf{H} = H\mathbf{N}.$$

Proposition 1.8 *La fonction H définie ci-dessus est donnée par la formule*

$$H{=}g_L(\mathbf{N},\mathbf{N})\frac{EN+LG-2FM}{2(EG-F^2)}.$$

1.4 Quelques opérateurs différentiels

Soit (M^2, g) une variété semi-riemannienne et l'ensemble des fonctions réelles $\mathfrak{F}(M^2)$ régulières définies sur M^2.

Définition 1.12 *Le gradient $grad(f)$ d'une fonction $f \in \mathfrak{F}(M^2)$ est l'unique champ de vecteurs, noté ∇f, tel que*

$$\begin{aligned} g(X,\nabla f) &= df(X) = Xf \\ &= X_i\frac{\partial f}{\partial x_i},\ 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs X.

En coordonnées locales,

$$\nabla f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}).

Dans le cas pseudo-euclidien, on a

$$\nabla f = g_{ii}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où $g_{ii} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i})$.

Définition 1.13 *La divergence d'un champ de vecteurs X sur M^2, notée $div(X)$, est définie comme la trace de $V \mapsto \nabla_V X$. Ainsi, pour des champs de vecteurs orthonormaux $e_1, e_2, ..., e_m$*

$$div(X) = g_{ii}g(e_i, \nabla_{e_i}X), \; 1 \leq i \leq m,$$

et pour un système de coordonnées locales on a

$$div(X) = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \Gamma^i_{ij}X_j, \; 1 \leq i \leq m.$$

Par conséquent, pour des coordonnées naturelles sur $\mathbb{E}^m_s$, on a

$$div(X) = \frac{\partial X_i}{\partial x_i}, \; 1 \leq i \leq m.$$

Proposition 1.9 *Soit X un champ de vecteurs sur M^2 et f une fonction de $\mathfrak{F}(M^2)$. Alors*

$$div(fX) = df(X) + f div(X).$$

Pour un système de coordonnées locales sur M^2 on a

$$div(X) = \frac{1}{\sqrt{|D|}}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{|D|}X_i),$$

où $D = \det(I) = \det(g_{ij})$.

Soit φ une fonction de $\mathfrak{F}(M^2)$. On appelle Laplacien de φ, et on note $\Delta\varphi$, la divergence du gradient de φ.

On définit l'opérateur de Laplace-Beltrami comme l'opérateur différentiel du second ordre

$$\Delta\varphi = div(\nabla\varphi).$$

Le Laplacien Δ est donné, dans un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_m)$, par :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= g^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|D|}}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{|D|}g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}), \end{aligned} \tag{1.11}$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de I.

Remarque 1.4 *Soit M^2 une surface régulière de $\mathbb{E}^3$ (respectivement $\mathbb{E}^3_1$) paramétrée par*

$$r : M^2 \to \mathbb{E}^3 \ (\mathbb{E}^3_1), \ (u,v) \mapsto r(u,v).$$

Le tenseur II de la deuxième forme fondamentale associée à M^2 est un tenseur métrique si et seulement si il est non dégénéré. Si tel est le cas, on peut définir la divergence associée à la deuxième forme fondamentale, que l'on peut noter $div^{II}(X)$, par

$$div^{II}(X) = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\sqrt{|D|} X_i\big),$$

où $D = \det(II) = \det(h_{ij})$.

Par suite, on pourra définir le Laplacien de φ associé à la deuxième forme fondamentale, noté $\Delta^{II}\varphi$ pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{F}(M^2)$ par :

$$\Delta^{II}\varphi = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\sqrt{|D|} h^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\big) \right), \tag{1.12}$$

où (h^{ij}) désigne la matrice inverse de II.

Un calcul simple nous donne :

$$\Delta\varphi = \frac{-1}{\sqrt{|EG-F^2|}} \left(\left(\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{|EG-F^2|}} \right)_u - \left(\frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{|EG-F^2|}} \right)_v \right) \tag{1.13}$$

$$\Delta^{II}\varphi = \frac{-1}{\sqrt{|LN-M^2|}} \left(\left(\frac{N\varphi_u - M\varphi_v}{\sqrt{|LN-M^2|}} \right)_u - \left(\frac{M\varphi_u - L\varphi_v}{\sqrt{|LN-M^2|}} \right)_v \right) \tag{1.14}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{F}(M^2)$.

On pourra définir le Laplacien de φ associé à la troisième forme fondamentale, noté $\Delta^{III}\varphi$ pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{F}(M^2)$ par :

$$\Delta^{III}\varphi = \frac{1}{\sqrt{|e|}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big(\sqrt{|e|} e^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\big) \right),$$

où $e = \det(III)$ et (e^{ij}) désigne la matrice inverse de III.

Il est facile de montrer que

$$\Delta^{III}\varphi = \frac{-1}{\sqrt{|e_{11}e_{22}-e_{12}^2|}} \left(\left(\frac{e_{22}\varphi_u - e_{12}\varphi_v}{\sqrt{|e_{11}e_{22}-e_{12}^2|}} \right)_u - \left(\frac{e_{12}\varphi_u - e_{11}\varphi_v}{\sqrt{|e_{11}e_{22}-e_{12}^2|}} \right)_v \right) \tag{1.15}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{F}(M^2)$.

Chapitre 2

Surfaces factorables qui satisfont $\Delta r_i = \lambda_i r_i$ dans les espaces 3-dimensionnel Euclidien $\mathbb{E}^3$ et Lorentzien $\mathbb{E}^3_1$

Dans ce chapitre, on donne une classification des surfaces factorables dans les espaces 3-dimensionnel euclidien $\mathbb{E}^3$ et lorentzien $\mathbb{E}^3_1$ qui satisfont la condition

$$\Delta r_i = \lambda_i r_i \tag{2.1}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace associé à la première forme fondamentale et λ_i $(1 \leq i \leq 3)$ un nombre réel. On donnera également les formes explicites de ces surfaces [8].

2.1 Surfaces factorables minimales dans $\mathbb{E}^3$ $(\mathbb{E}^3_1)$

La théorie des surfaces minimales de $\mathbb{E}^3$ a débuté au $18^{ème}$ siécle avec notamment les travaux de Lagrange, d'Euler et de Meusnier. Par la suite, de nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, on peut par exemple citer Scherk. H.F et Weierstrass. K au cours du $18^{ème}$ siécle. Un des intérêts des surfaces minimales locales est de résoudre le problème de Plateau : *Trouver une surfaces d'aire minimum absolu de frontière une courbe donnée de l'espace.*

Parmi toutes les surfaces contenant une courbe fermée donnée γ, les surfaces minimales sont celles qui réalisent le minimum de l'aire limitée par γ. Les exemples les plus simples de surfaces minimales sont le plan, l'hélicoïde qui est une surface réglée, et la caténoïde qui est une surface de révolution.

Une immersion $r : M^2 \to \mathbb{E}^3$ $(\mathbb{E}^3_1)$ de la surface M^2 dans $\mathbb{E}^3$ $(\mathbb{E}^3_1)$ est dite minimale si sa courbure moyenne est partout nulle. Rappelons que la courbure moyenne d'une immersion est la moitié de la trace de sa deuxième forme fondamentale.

2.1.1 Surfaces factorables minimales dans $\mathbb{E}^3$

Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}^3$ une immersion isométrique d'une surface factorable dans l'espace euclidien de dimension 3 muni de la métrique induite. Notons

$$g = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

la métrique riemannienne standard euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

M^2 peut être paramétrée par

$$r(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v) = f(r_1(u,v))g(r_2(u,v))) \tag{2.2}$$

ou

$$r(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v) = f(r_1(u,v))g(r_3(u,v)), r_3(u,v)) \tag{2.3}$$

ou

$$r(u,v) = (r_1(u,v) = f(r_2(u,v))g(r_3(u,v)), r_2(u,v), r_3(u,v)), \tag{2.4}$$

où f et g des fonctions régulières des variables u et v, respectivement.

Supposons que la surface M^2 s'exprime par (2.2), ou de manière équivalente par

$$r(u,v) = (u, v, f(u)g(v)). \tag{2.5}$$

Les dérivées du rayon vecteur de la surface M^2 par rapport aux paramètres u et v sont désignées par r_u et r_v respectivement, et l'on a

$$r_u = (1, 0, f'g),\ \ r_v = (0, 1, fg'),$$

où $f' = \frac{df(u)}{du}$, $g' = \frac{dg(v)}{dv}$.

On calcule les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de M^2, on trouve

$$E = f'^2 g^2 + 1, \quad F = fgf'g', \quad G = 1 + f^2 g'^2.$$

On calcule les coefficients L, M, N de la deuxième forme fondamentale de la surface M^2. On a d'abord

$$r_{uu} = (0, 0, f''g),\ \ r_{uv} = (0, 0, f'g'),\ \ r_{vv} = (0, 0, fg'')$$

et ensuite

$$\mathbf{N} = \frac{1}{W}\big(-f'g, -fg', 1\big);$$

$$L = \frac{gf''}{W}, \quad M = \frac{f'g'}{W}, \quad N = \frac{fg''}{W},$$

où $W = \sqrt{f'^2 g^2 + f^2 g'^2 + 1}$.

Par des calculs immédiats. Il vient alors

$$H = \frac{1}{2} W^{-3} H_1,\ \ K_G = \frac{1}{W^2}\big(gf''fg'' - f'^2 g'^2\big),$$

où

$$H_1 = (1 + f^2 g'^2) f'' g + (f'^2 g^2 + 1) fg'' - 2fgf'^2 g'^2.$$

Nous allons décrire les surfaces factorables minimales de $\mathbb{E}^3$ (voir [43]).

Théorème 2.1 ([43]) *Les surfaces factorables minimales de* $\mathbb{E}^3$ *sont localement des graphes de fonctions*

1)
$$z = c_1 v + c_2,$$

2)
$$z = c_1 u + c_2,$$

3)
$$z = (c_1 v + c_2)\tan(c_3 u + c_4),$$

4)
$$z = (c_1 u + c_2)\tan(c_3 v + c_4),$$

5) $z = f(u)g(v)$, *où*

$(5,1)$
$$\begin{cases} u = \int \frac{df(u)}{\sqrt{2a\ln(f(u))+c_1}} \\ v = \displaystyle\int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_2 g^4(v) - \frac{b}{2}}}, \end{cases}$$

$(5,2)$
$$\begin{cases} u = \int \frac{df(u)}{\sqrt{c_1 f^4(u) - \frac{a}{2}}} \\ v = \displaystyle\int \frac{dg(v)}{\sqrt{2b\ln g(v)+c_2}}, \end{cases}$$

$(5,3)$
$$\begin{cases} u = \int \frac{df(u)}{\sqrt{c_1 f^{2(1+k)}(u) - c_2}} \\ v = \displaystyle\int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_3 g^{2(1-k)}(v) - c_4}}, \end{cases}$$

où $a, b, k, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ *et* $a^2 + b^2 \neq 0, k \neq \pm 1$.

2.1.2 Surfaces factorables minimales dans $\mathbb{E}^3_1$

Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}^3_1$ une immersion isométrique d'une surface dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski muni de la métrique induite (1.1).

Supposons que la surface M^2 s'exprime par (2.5).

Les expressions des dérivées premières de r sont immédiates :

$$r_u = (1, 0, f'g), \; r_v = (0, 1, fg').$$

On applique les formules classiques pour le calcul des coefficients des formes fondamentales de M^2, on trouve

$$E = f'^2 g^2 - 1, \quad F = fgf'g', \quad G = 1 + f^2 g'^2; \tag{2.6}$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{W}\big(f'g, -fg', 1\big)$$

et
$$L=\frac{gf''}{W},\quad M=\frac{f'g'}{W},\quad N=\frac{fg''}{W},\tag{2.7}$$
où $W=\sqrt{|EG-F^2|}$.

Par des calculs immédiats. Il vient alors (voir l'article [43]).
$$H=\frac{1}{2}W^{-3}H_1,$$
où
$$H_1=(1+f^2g'^2)f''g+(f'^2g^2-1)fg''-2fgf'^2g'^2.$$
Nous allons décrire les surfaces factorables minimales de $\mathbb{E}_1^3$ (voir [43]).

Théorème 2.2 ([43]) *Les surfaces factorables minimales de $\mathbb{E}_1^3$ sont localement des graphes de fonctions*

1)
$$z=c_1v+c_2,$$
2)
$$z=c_1u+c_2,\ \ b_3,b_4\in\mathbb{R}.$$
3)
$$z=(c_1v+c_2)\tan(c_3u+c_4),$$
4)
$$z=\frac{c_2u\exp(c_1v)}{1+c_2\exp(c_1v)},$$
5)
$$z=c_1\exp(c_2u+c_3v),$$
6)
$$z=\sqrt[k]{\frac{c_1v+c_2}{c_3u+c_4}},$$
7) $z=f(u)g(v),$ *où*

$(7,1)$
$$\begin{cases}u=\int\frac{df(u)}{\sqrt{c_1f^4(u)-\frac{a}{2}}}\\ v=\displaystyle\int\frac{dg(v)}{\sqrt{c_2g^4(v)-\frac{b}{2}}},\end{cases}$$
$(7,2)$
$$\begin{cases}u=\int\frac{df(u)}{\sqrt{2a\ln f(u)+c_1}}\\ v=\displaystyle\int\frac{dg(v)}{\sqrt{2b\ln g(v)+c_2}},\end{cases}$$
$(7,3)$
$$\begin{cases}u=\int\frac{df(u)}{\sqrt{c_1f^{2(1-k)}(u)-c_2}}\\ v=\displaystyle\int\frac{dg(v)}{\sqrt{c_3g^{2(1-k)}(v)-c_4}},\end{cases}$$
où $a,b,k,c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$ *et* $a^2+b^2\neq0,k\neq\pm1.$

Théorème 2.3 *Les surfaces factorables minimales de* $\mathbb{E}_1^3$ *sont localement des graphes de fonctions*

$$z = (au+b)\coth(c_1v+c_2),\ \ a,b,c_1,c_2 \in \mathbb{R}.$$

Preuve. La condition de minimalité $H_1 = 0$ conduit à l'équation

$$(1+f^2g'^2)f''g + (f'^2g^2-1)fg'' - 2fgf'^2g'^2 = 0. \tag{2.8}$$

L'équation ci-dessus devient

$$\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g} + f'^2(g''g-g'^2) + g'^2(f''f-f'^2) = 0. \tag{2.9}$$

Si $f'' = 0$, alors $f(u) = au+b$, $a,b \in \mathbb{R}$. L'équation (2.9) donne

$$g''(a^2g^2-1) = 2a^2gg'^2. \tag{2.10}$$

Les solutions de (2.10) sont de la forme

$$g(v) = c_3\coth(c_1v+c_2),\ \ c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}.$$

En substituant ces valeurs de $f(u)$ et $g(v)$ dans (2.5), on obtient

$$r(u,v) = \big((u,v,(au+b)\coth(c_1v+c_2))\big),\ \ a,b,c_1,c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

2.2 Surfaces factorables dans $\mathbb{E}^3$ satisfaisant la condition $\Delta r_i = \lambda_i r_i$

Dans ce paragraphe, on étudie les surfaces factorables M^2 de $\mathbb{E}^3$ qui satisfont la condition (2.1).

Si M^2 est construite avec des composantes qui sont des fonctions propres du Laplacian, alors on aura

$$\Delta(u) = \lambda_1(u),\ \ \Delta(v) = \lambda_2(v),\ \ \Delta(fg) = \lambda_3(fg), \tag{2.11}$$

où λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathrm{Spec}(M^2)$.

Le lemme suivant permet de simplifier des calculs :

Lemme 2.1 *Le Laplacien de* M^2 *est donné en termes de* u *et* v *par :*

$$\Delta = -\frac{1}{W^2}\left(E\frac{\partial^2}{\partial v^2} + G\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2F\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\right) + \frac{2H}{W}\left(fg'\frac{\partial}{\partial v} + f'g\frac{\partial}{\partial u}\right). \tag{2.12}$$

Preuve. De (1.11), on a

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \frac{-1}{\sqrt{|D|}}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\big(\sqrt{|D|}g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\big)\\
&= \frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\varphi_u-F\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F\varphi_u-E\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]\\
&= -\frac{1}{2W^4}\big(2W^2(G\varphi_{uu}-2F\varphi_{uv}+E\varphi_{vv})+((G_u-F_v)2W^2-G^2E_u-EGG_u+\\
&\quad 2FGF_u+FGE_v+FEG_v-2F^2F_v)\varphi_u+((E_v-F_u)2W^2-E^2G_v-EGE_v+\\
&\quad 2FEF_v+FGE_u+FEG_u-2F^2F_u)\varphi_v\big),
\end{aligned}$$

où $(x_1,x_2)=(u,v)$.

On vérifie facilement

$$\begin{aligned}
G_u &= 2fg'WM,\ E_u=2f'gWL,\ G_v=2fg'WN,\ E_v=2f'gWM,\\
F_u &= W(f'gM+fg'L),\ F_v=W(fg'M+f'gN).
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Comme

$$(G_u-F_v)2W^2-G^2E_u-EGG_u+2FGF_u+FGE_v+FEG_v-2F^2F_v=-2f'gWH_1$$

$$(E_v-F_u)2W^2-E^2G_v-EGE_v+2FEF_v+FGE_u+FEG_u-2F^2F_u=-2fg'WH_1,$$

d'où

$$\Delta\varphi=-\frac{1}{W^2}\left(E\varphi_{vv}+G\varphi_{uu}-2F\varphi_{uv}\right)+\frac{2H}{W}\left(fg'\varphi_v+f'g\varphi_u\right).\tag{2.14}$$

À l'aide de (2.5) et (2.14) nous obtenons

$$\begin{cases}\Delta u=\frac{2}{W}f'gH\\ \Delta v=\frac{2}{W}fg'H\\ \Delta fg=-\frac{2}{W}H.\end{cases}\tag{2.15}$$

■

Remarque 2.1 *On vérifie alors facilement que*

$$\Delta r=-2HN.\tag{2.16}$$

D'après (2.16), on voit alors que M^2 est minimale si et seulement si on a $\Delta r=0$.

En conséquence, nous obtenons

$$2f'gH=\lambda_1Wu\tag{2.17}$$

$$2fg'H=\lambda_2Wv\tag{2.18}$$

$$2H=-\lambda_3Wfg.\tag{2.19}$$

Ainsi, le problème de la classification des surfaces factorables M^2 vérifiant (2.1) est réduit à la résolution du système d'équations différentielles ordinaires. Etudions ce dernier suivant les valeurs des constantes λ_1,λ_2 et λ_3.

Nous allons considérer deux cas : $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_3 \neq 0$.

Cas 1. $\lambda_3 = 0$. L'équation (2.19) donne $H = 0$, ce qui signifie que ces surfaces sont minimales. D'après (2.17) et (2.18), nous déduisons que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Cas 2. $\lambda_3 \neq 0$.

Dans ce cas deux possibilités s'imposent

$i)$ Si $fg = 0$, alors $H = 0$.

$ii)$ Si $fg \neq 0$, on traite quatre cas :

$a)$ Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, il vient des équations (2.17) et (2.18)

$$f(u) = \alpha \in \mathbb{R}^*, g' \neq 0 \text{ and } H = \frac{\alpha g'' W^{-3}}{2}.$$

Par suite, le système d'équations différentielles ordinaires (2.17), (2.18) et (2.19) est réduit au système équivalent suivant

$$\alpha^2 g' g'' = \lambda_2 v \big(\alpha^2 g'^2 + 1\big)^2 \tag{2.20}$$

$$g'' = -\lambda_3 g \big(\alpha^2 g'^2 + 1\big)^2. \tag{2.21}$$

D'après (2.20) on déduit

$$g' = \frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{\sqrt{\lambda_2 v^2 + \beta + 1}}{\sqrt{-\lambda_2 v^2 - \beta}}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

pour certaine constante β telle que $-1 < \lambda_2 v^2 + \beta < 0$.

On peut donc écrire

$$g'' = \frac{\varepsilon \lambda_2 v}{\alpha(-\lambda_2 v^2 - \beta)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\lambda_2 v^2 + \beta + 1}}.$$

L'équation (2.21) donne

$$g(v) = \frac{\varepsilon \lambda_2 v}{\alpha \lambda_3} \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 - \beta}{\lambda_2 v^2 + \beta + 1}}.$$

Ainsi

$$r(u,v) = \Big(u, v, \frac{\varepsilon \lambda_2 v}{\lambda_3} \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 - \beta}{\lambda_2 v^2 + \beta + 1}}\Big), \quad -1 < \lambda_2 v^2 + \beta < 0.$$

$b)$ Si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$, il vient des équations (2.17) et (2.18)

$$g(v) = \alpha \in \mathbb{R}^*, f' \neq 0 \text{ and } H = \frac{\alpha f'' W^{-3}}{2}.$$

Ainsi, le système est réduit à

$$\alpha^2 f' f'' = \lambda_1 u (\alpha^2 f'^2 + 1)^2 \tag{2.22}$$

$$f'' = -\lambda_3(\alpha^2 f'^2 + 1)^2 f. \tag{2.23}$$

L'équation (2.22) donne

$$f'' = \frac{\varepsilon\lambda_1 u}{\alpha(-\lambda_1 u^2 - \beta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\lambda_1 u^2 + \beta + 1}}. \tag{2.24}$$

Finalement, (2.23) et (2.24) nous donnent

$$f(u) = \frac{\varepsilon\lambda_1 u}{\alpha\lambda_3}\sqrt{\frac{-\lambda_1 u^2 - \beta}{\lambda_1 u^2 + \beta + 1}}.$$

Dans ce cas, les surfaces factorables sont données par

$$r(u,v) = \big(u, v, \frac{\varepsilon\lambda_1 u}{\lambda_3}\sqrt{\frac{-\lambda_1 u^2 - \beta}{\lambda_1 u^2 + \beta + 1}}\big), \quad -1 < \lambda_1 u^2 + \beta < 0.$$

c) Si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, le système différentiel (2.17), (2.18) et (2.19) devient

$$f' \neq 0 \text{ et } g' \neq 0. \tag{2.25}$$

En multipliant (2.17) par $g'f$ et (2.18) par $f'g$, on obtient

$$\frac{\lambda_2 v g}{g'} = \frac{\lambda_1 u f}{f'} = a, \quad a \in \mathbb{R}^*. \tag{2.26}$$

En utilisant (2.17) et (2.19), on obtient

$$\lambda_1 u = -\lambda_3 f f' g^2. \tag{2.27}$$

D'après (2.26) et (2.27), nous déduisons que

$$a = -\lambda_3 f^2 g^2.$$

Par conséquent les fonctions f et g sont constantes. Ceci est en contradiction avec (2.25). Ainsi, il n'existe pas de surfaces factorables satisfaisant la condition (2.1).

d) Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$, d'après (2.17) et (2.18) on trouve

$$f' = 0 \text{ et } g' = 0.$$

Par conséquent, $\lambda_3 = 0$ et ainsi nous avons une contradiction. Ainsi, dans ce cas également, il n'y a pas de surfaces factorables satisfaisant (2.1).

En conclusion, nous mentionnons la classification suivante

Théorème 2.4 *Soit M^2 une surface factorable décrite par (2.5) dans $\mathbb{E}^3$. Alors $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, $(i = 1, 2, 3)$ si et seulement si M^2 désigne l'une des surfaces suivantes :*

1) *M^2 est une surface minimale.*

2) M^2 *est paramétrée par*

$$r(u,v) = \big(u, v, \frac{\varepsilon\lambda_2 v}{\lambda_3}\sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 - \beta}{\lambda_2 v^2 + \beta + 1}}\big), \quad -1 < \lambda_2 v^2 + \beta < 0.$$

3) M^2 *est paramétrée par*

$$r(u,v) = \big(u, v, \frac{\varepsilon\lambda_1 u}{\lambda_3}\sqrt{\frac{-\lambda_1 u^2 - \beta}{\lambda_1 u^2 + \beta + 1}}\big), \quad -1 < \lambda_1 u^2 + \beta < 0.$$

2.3 Surfaces factorables dans $\mathbb{E}^3_1$ satisfaisant la condition $\Delta r_i = \lambda_i r_i$

Comme la surface M^2 est non dégénérée, $EG - F^2 = f'^2 g^2 - f^2 g'^2 - 1 \neq 0$. On distinguera deux cas selon que $EG - F^2 > 0$ ou $EG - F^2 < 0$.

2.3.1 Surfaces factorables de type espace dans $\mathbb{E}^3_1$

Supposons que $EG - F^2 > 0$, la métrique de M^2 est de type espace.

Lemme 2.2 *Le Laplacien de* M^2 *est donné en* (u,v) *par :*

$$\Delta = \frac{-1}{W^2}\left(E\frac{\partial^2}{\partial v^2} + G\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2F\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\right) - \frac{2H}{W}\left(fg'\frac{\partial}{\partial v} - f'g\frac{\partial}{\partial u}\right), \tag{2.28}$$

où $W = \sqrt{EG - F^2}$.

Preuve. De (1.11), on a

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2W^4}\big(2W^2(G\varphi_{uu} - 2F\varphi_{uv} + E\varphi_{vv}) + ((G_u - F_v)2W^2 - G^2E_u - \\
&\quad EGG_u + 2FGF_u + FGE_v + FEG_v - 2F^2F_v)\varphi_u + ((E_v - F_u)2W^2 - \\
&\quad E^2G_v - EGE_v + 2FEF_v + FGE_u + FEG_u - 2F^2F_u)\varphi_v\big),
\end{aligned}$$

où $(x_1, x_2) = (u, v)$.

On vérifie facilement

$$\begin{aligned}
G_u &= 2fg'WM, \ E_u = 2f'gWL, \ G_v = 2fg'WN, \ E_v = 2f'gWM, \\
F_u &= W(f'gM + fg'L), \ F_v = W(fg'M + f'gN).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Comme

$$\begin{array}{rcl} 2(G_u - F_v)W^2 - G^2E_u - EGG_u + 2FGF_u + FGE_v + FEG_v - 2F^2F_v & = & -2f'gWH_1 \\ 2(E_v - F_u)W^2 - E^2G_v - EGE_v + 2FEF_v + FGE_u + FEG_u - 2F^2F_u & = & 2fg'WH_1, \end{array}$$

d'où

$$\Delta\varphi = \frac{-1}{W^2}\left(E\varphi_{vv} + G\varphi_{uu} - 2F\varphi_{uv}\right) - \frac{2H}{W}\left(fg'\varphi_v - f'g\varphi_u\right).$$

Puisque $EG - F^2 = f'^2g^2 - f^2g'^2 - 1 > 0$, de (2.1), (2.6) et (2.28) nous obtenons ■

$$W^{-4}f'gH_1 = \lambda_1 u \tag{2.30}$$

$$W^{-4}fg'H_1 = -\lambda_2 v \tag{2.31}$$

$$W^{-4}H_1 = \lambda_3 fg. \tag{2.32}$$

Remarque 2.2 *1) On vérifie alors facilement que*

$$\Delta r = 2HN. \tag{2.33}$$

2) Comme $EG - F^2 = f'^2g^2 - f^2g'^2 - 1 > 0$, *alors* $fg \neq 0$ *et* $f' \neq 0$.

D'après (2.33), on voit alors que M^2 est minimale si et seulement si on a $\Delta r = 0$.

Cas 1. Si $\lambda_3 = 0$.

L'équation (2.32) donne $H_1 = 0$, ce qui signifie que ces surfaces sont minimales.

Nous obtenons également, par les équations (2.30) et (2.31), $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Cas 2. Si $\lambda_3 \neq 0$, alors, $H_1 \neq 0$ et par conséquent nous avons nécessairement d'après (2.30), $\lambda_1 \neq 0$.

i) Si $\lambda_2 = 0$, on déduit de (2.31) que $g(v)$ constant, soit

$$g(v) = \alpha \in \mathbb{R}^*. \tag{2.34}$$

Dans ce cas, le système d'équations (2.30), (2.31) et (2.32), est réduit à

$$\alpha^2 f'f'' = \lambda_1 u\left(\alpha^2 f'^2 - 1\right)^2 \tag{2.35}$$

$$f'' = \lambda_3 f\left(\alpha^2 f'^2 - 1\right)^2. \tag{2.36}$$

L'équation (2.35) donne

$$f'' = \frac{\varepsilon\lambda_1 u}{\alpha(\lambda_1 u^2 + \beta)^2}\sqrt{\frac{\lambda_1 u^2 + \beta}{\lambda_1 u^2 + \beta - 1}},\ \beta \in \mathbb{R},\ \lambda_1 u^2 + \beta < 0.$$

Une solution de l'équation différentielle (2.36) est

$$f(u) = \frac{\varepsilon\lambda_1 u}{\alpha\lambda_3}\sqrt{\frac{\lambda_1 u^2 + \beta}{\lambda_1 u^2 + \beta - 1}}. \tag{2.37}$$

En substituant (2.34) et (2.37) dans (2.5) on trouve

$$r(u,v) = \big(u, v, \frac{\varepsilon\lambda_1 u}{\lambda_3}\sqrt{\frac{\lambda_1 u^2+\beta}{\lambda_1 u^2+\beta-1}}\big),\ \beta\in\mathbb{R},\ \lambda_1 u^2+\beta<0.$$

ii) Si $\lambda_2 \neq 0$, le système d'équations (2.30), (2.31) et (2.32), est réduit à

$$\begin{cases} \lambda_2 vg = -ag' \\ \lambda_1 uf = af', \end{cases} \tag{2.38}$$

où a est un réel non nul.

Les équations (2.30), (2.32) donnent

$$\lambda_1 u = \lambda_3 ff'g^2. \tag{2.39}$$

De (2.38) et (2.39) on déduit que

$$a = \lambda_3 f^2 g^2.$$

Par conséquent les fonctions f et g sont constantes. Ceci est une contradiction, donc il n'existe pas de surfaces factorables de type espace dans ce cas satisfaisant la relation (2.1).

Finalement, on peut énoncer le

Théorème 2.5 *Soit M^2 une surface factorable de type espace décrite par (2.5) dans $\mathbb{E}^3_1$. Alors $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, $(i = 1, 2, 3)$ si et seulement si M^2 désigne l'une des surfaces suivantes*

1) *M^2 est une surface minimale.*

2) *M^2 est paramétrée par*

$$r(u,v) = \big(u, v, \frac{\varepsilon\lambda_1 u}{\lambda_3}\sqrt{\frac{\lambda_1 u^2+\beta}{\lambda_1 u^2+\beta-1}}\big),\ \beta\in\mathbb{R},\ \lambda_1 u^2+\beta<0.$$

2.3.2 Surfaces factorables de type temps dans $\mathbb{E}^3_1$

Supposons que $EG - F^2 = f'^2g^2 - f^2g'^2 - 1 < 0$, la métrique de M^2 est de type temps.

Lemme 2.3 *Le Laplacien de M^2 est donné en (u, v) par :*

$$\Delta = -\frac{1}{W^2}\left(E\frac{\partial^2}{\partial v^2} + G\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2F\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\right) + \frac{2H}{W}\left(fg'\frac{\partial}{\partial v} - f'g\frac{\partial}{\partial u}\right) \tag{2.40}$$

Preuve. De (1.11), on a

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]\\ &= -\frac{1}{2W^4}\big(2W^2(G\varphi_{uu} - 2F\varphi_{uv} + E\varphi_{vv}) + (2(G_u - F_v)W^2 + G^2E_u + EGG_u -\\ &\quad 2FGF_u - FGE_v - FEG_v + 2F^2F_v)\varphi_u + (2(E_v - F_u)W^2 + E^2G_v + EGE_v -\\ &\quad 2FEF_v - FGE_u - FEG_u + 2F^2F_u)\varphi_v\big),\end{aligned}$$

où $(x_1, x_2) = (u, v)$.

On vérifie facilement

$$\begin{aligned}G_u &= 2fg'WM,\ E_u = 2f'gWL,\ G_v = 2fg'WN,\ E_v = 2f'gWM,\\ F_u &= W(f'gM + fg'L),\ F_v = W(fg'M + f'gN).\end{aligned} \tag{2.41}$$

Comme

$$\begin{aligned}(G_u - F_v)2W^2 + G^2E_u + EGG_u - 2FGF_u - FGE_v - FEG_v + 2F^2F_v &= -2f'gWH_1\\ (E_v - F_u)2W^2 + E^2G_v + EGE_v - 2FEF_v - FGE_u - FEG_u + 2F^2F_u &= -2fg'WH_1,\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta = -\frac{1}{W^2}\left(E\frac{\partial^2}{\partial v^2} + G\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2F\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\right) + \frac{2H}{W}\left(fg'\frac{\partial}{\partial v} - f'g\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

À l'aide de (2.40) et (2.6) nous obtenons

$$\begin{cases}\Delta u = -W^{-4}f'gH_1\\ \Delta v = W^{-4}fg'H_1\\ \Delta fg = -W^{-4}H_1.\end{cases} \tag{2.42}$$

■

Remarque 2.3 *On vérifie alors facilement que*

$$\Delta r = W^{-4}H_1\big(-f'g, fg', -1\big) = 2HN. \tag{2.43}$$

D'après (2.43), on a alors M^2 minimale si et seulement si $\Delta r = 0$ (r est harmonique).

En utilisant (2.11) et (2.42) pour la surface factorable décrite par (2.5), on obtient le système

$$W^{-4}f'gH_1 = -\lambda_1 u \tag{2.44}$$

$$W^{-4}fg'H_1 = \lambda_2 v \tag{2.45}$$

$$W^{-4}H_1 = -\lambda_3 fg. \tag{2.46}$$

Ainsi, le problème de la classification des surfaces factorables vérifiant (2.1) est réduit à l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires ci-dessus. Etudions ce dernier suivant les valeurs des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Cas 1. $\lambda_3 = 0$.

L'équation (2.46) donne $H_1 = 0$, ce qui signifie que ces surfaces sont minimales.

Nous obtenons également, par les équations (2.44) et (2.45), $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Cas 2. $\lambda_3 \neq 0$.

$i)$ Si $fg = 0$, il vient (d'après (2.46)) $H_1 = 0$.

$ii)$ Si $fg \neq 0$, on traite quatre cas :

$a)$ Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, il vient des équations (2.44) et (2.45)

$$f' = 0,\ g' \neq 0 \text{ et } g'' \neq 0.$$

Il s'en suit que $f(u) = a$, $a \in \mathbb{R}^*$ et que $g'(v)$ n'est pas une fonction constante.

Dans ce cas, le système d'équations (2.44), (2.45) et (2.46), est réduit à

$$-a^2 g' g'' = \lambda_2 v \big(1 + a^2 g'^2\big)^2, \tag{2.47}$$

$$g'' = \lambda_3 g \big(1 + a^2 g'^2\big)^2. \tag{2.48}$$

L'équation (2.47) donne

$$g'^2 = \frac{1}{a^2}\big(\frac{1}{\lambda_2 v^2 + b} - 1\big),\ b \in \mathbb{R},\ 0 < \lambda_2 v^2 + b < 1. \tag{2.49}$$

Si on compare (2.47) et (2.49), on déduit

$$g'' = \frac{-\varepsilon \lambda_2 v}{a(\lambda_2 v^2 + b)^2} \sqrt{\frac{\lambda_2 v^2 + b}{1 - b - \lambda_2 v^2}}, \tag{2.50}$$

où $\varepsilon = \pm 1$.

En utilisant (2.48), on obtient

$$g(v) = \frac{\varepsilon \lambda_2 v}{a \lambda_3} \sqrt{\frac{\lambda_2 v^2 + b}{1 - b - \lambda_2 v^2}},\ b \in \mathbb{R},\ 0 < \lambda_2 v^2 + b < 1.$$

Ainsi

$$r(u, v) = \big(u, v, \frac{\varepsilon \lambda_2 v}{\lambda_3} \sqrt{\frac{\lambda_2 v^2 + b}{1 - b - \lambda_2 v^2}}\big),$$

où b est une constante vérifiant $0 < \lambda_2 v^2 + b < 1$.

$b)$ Si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$, il vient des équations (2.44) et (2.45)

$$g' = 0,\ f' \neq 0 \text{ and } f'' \neq 0.$$

Il s'en suit que $g(v) = b \in \mathbb{R}^*$ et que $f'(u)$ n'est pas une fonction constante.

Dans ce cas, le système (2.44), (2.45) et (2.46), est réduit à

$$-b^2 f' f'' = \lambda_1 u \big(1 - b^2 f'^2\big)^2 \tag{2.51}$$

$$-f'' = \lambda_3 \big(1 - b^2 f'^2\big)^2 f. \tag{2.52}$$

L'équation (2.51) donne

$$f' = \frac{\varepsilon}{b}\sqrt{\frac{\lambda_1 u^2 + \beta + 1}{\lambda_1 u^2 + \beta}}, \quad f'' = \frac{-\varepsilon \lambda_1 u}{b(\lambda_1 u^2 + \beta)^2}\sqrt{\frac{\lambda_1 u^2 + \beta}{\lambda_1 u^2 + \beta + 1}},$$

où $\beta \in \mathbb{R}^*$, $\lambda_1 u^2 + \beta < -1$.

Donc

$$f(u) = \frac{\varepsilon \lambda_1 u}{\lambda_3 b}\sqrt{\frac{\lambda_1 u^2 + \beta}{\lambda_1 u^2 + \beta + 1}},$$

et

$$r(u,v) = \big(u, v, \frac{\varepsilon \lambda_1 u}{\lambda_3}\sqrt{\frac{\lambda_1 u^2 + \beta}{\lambda_1 u^2 + \beta + 1}}\big),$$

où $\lambda_1 u^2 + \beta < -1$.

c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, on traite trois cas :

i) Pour $f' = g' = 0$, on obtient $H_1 = 0$. De l'équation (2.46) il vient $\lambda_3 = 0$. Ceci est une contradiction, donc il n'existe pas de surfaces factorables de type temps dans ce cas.

ii) Pour $f' = 0$ et $g' \neq 0$, on obtient $f = 0$ d'après l'équation (2.45). Ceci est une contradiction, donc il n'existe pas de surfaces factorables de type temps dans ce cas.

iii) Pour $f' \neq 0$ et $g' = 0$, on obtient $g = 0$ d'après l'équation (2.44). Ceci est une contradiction, donc il n'existe pas de surfaces factorables de type temps dans ce cas satisfaisant (2.1).

d) Pour $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, alors

$$f' \neq 0, \;\; g' \neq 0.$$

En multipliant (2.44) par $g'f$ et (2.45) par $f'g$ et en additionnant les équations qui en résultent, on obtient

$$\frac{\lambda_2 v g}{g'} = -\frac{\lambda_1 u f}{f'} = a, \;\; a \in \mathbb{R}^*. \tag{2.53}$$

Les équations (2.44), (2.46) donnent

$$\lambda_1 u = \lambda_3 f f' g^2. \tag{2.54}$$

D'autre part, en combinant les équations (2.53), (2.54) on obtient

$$-a = \lambda_3 f^2 g^2.$$

Par conséquent les fonctions f et g sont constantes. Ceci est une contradiction, donc il n'existe pas de surfaces factorables de type temps dans ce cas satisfaisant (2.1).

Finalement, on peut énoncer le

Théorème 2.6 *Soit M^2 une surface factorable de type temps décrite par (2.5) dans $\mathbb{E}_1^3$. Alors $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, $(i = 1, 2, 3)$ si et seulement si M^2 désigne l'une des surfaces suivantes*

1) *M^2 est une surface minimale.*

2) *M^2 est paramétrée par*

$$r(u,v) = \big(u, v, \frac{\varepsilon\lambda_2 v}{\lambda_3}\sqrt{\frac{\lambda_2 v^2 + b}{1 - b - \lambda_2 v^2}}\big),\ \ 0 < \lambda_2 v^2 + b < 1.$$

3) M^2 est paramétrée par

$$r(u,v) = \big(u, v, \frac{\varepsilon\lambda_1 u}{\lambda_3}\sqrt{\frac{\lambda_1 u^2 + b}{\lambda_1 u^2 + b + 1}}\big),\ \ \lambda_1 u^2 + b < -1.$$

Chapitre 3

Surfaces de translation dans l'espace 3-dimentionnel satisfaisant la condition $\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i$

Dans ce chapitre, on donne une classification des surfaces de translation dans les espaces 3-dimensionnel Euclidien $\mathbb{E}^3$ et Lorentzien $\mathbb{E}^3_1$ qui satisfont la condition

$$\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i,$$

où Δ^{III} est l'opérateur de Laplace associé à la troisième forme fondamentale et λ_i un nombre réel. On donnera également les formes explicites de ces surfaces [9].

Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}^3(\mathbb{E}^3_1)$ une surface de translation (non dégénérée) dans $\mathbb{E}^3(\mathbb{E}^3_1)$. M^2 peut être paramétrée par

$$r(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)), \tag{3.1}$$

f et g étant des fonctions régulières des variables u et v, respectivement.

Dans [2], Ch. Baba-Hamed, M. Bekkar et H. Zoubir ont donné une classification des surfaces de translation dans $\mathbb{E}^3_1$, satisfaisant la condition $\Delta r_i = \lambda_i r_i$. Plus précisément, ils ont étudié les surfaces de translation de $\mathbb{E}^3_1$ de type espace et de type temps et ont prouvé que

Théorème 3.1 ([2]) *Soit M^2 une surface de translation de type espace décrite par (3.1) dans $\mathbb{E}^3_1$: Alors $\Delta r_i = \lambda_i r_i$ si et seulement si M^2 désigne l'une des surfaces suivantes*

1) *M^2 est le plan de type espace donné par*

$$r(u, v) = (u, v, a_1 u + a_2 v + a_3),\ \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},\ \ a_1^2 - a_2^2 - 1 > 0.$$

2) *M^2 est la surface de Scherk*

$$r(u, v) = (u, v, \frac{1}{a} \ln \left| c \frac{\sinh(au + c_2)}{\cos(av + c_4)} \right|),\ \ c \neq 0,\ \ c_2, c_4 \in \mathbb{R}.$$

3) *M^2 est paramétrée par*

$$r(u, v) = \big(u, v, \pm \frac{\lambda_1}{\lambda_3} u \sqrt{\frac{\lambda_1 u^2 + d}{\lambda_1 u^2 + d - 1}}\big),$$

avec $d < 0$, $\lambda_1 u^2 + d < 0$.

Théorème 3.2 ([2]) *Soit* M^2 *une surface de translation de type temps décrite par (3.1) dans* $\mathbb{E}_1^3$ *: Alors* $\Delta r_i = \lambda_i r_i$ *si et seulement si* M^2 *désigne l'une des surfaces suivantes*

1) M^2 *est un plan Lorentzien avec*

$$r(u,v) = (u, v, a_1 u + a_2 v + a_3),\ \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},\ \ a_1^2 - a_2^2 - 1 < 0,\ \ a_1^2 \neq 1$$

ou le plan donné par

$$r(u,v) = (u, v, 0).$$

2) M^2 *est la surface de Scherk de l'une des deux espèces*

$$r(u,v) = (u, v, \frac{1}{a} \ln \left| c \frac{\sinh(au + c_2)}{\cos(av + c_4)} \right|),\ \ c \neq 0,\ \ c_2, c_4 \in \mathbb{R}.$$

ou

$$r(u,v) = (u, v, \frac{1}{a} \ln \left| c' \frac{\cosh(au + c_6)}{\cos(av + c_4)} \right|),\ \ c' \neq 0,\ \ c_4, c_6 \in \mathbb{R}.$$

3) M^2 *est une B - scroll de courbe de base de type lumière.*

4) M^2 *est paramétrée par*

$$r(u,v) = \big(u, v, \pm\frac{\lambda_2}{\lambda_3} v \sqrt{\frac{\lambda_2 v^2 + b}{1 - \lambda_2 v^2 - b}}\big),$$

où b vérifie $0 < \lambda_2 v^2 + b < 1$.

5) M^2 *est paramétrée par*

$$r(u,v) = \big(u, v, \pm\frac{\lambda_1}{\lambda_3} u \sqrt{\frac{k - \lambda_1 u^2}{k - \lambda_1 u^2 - 1}}\big),$$

où k vérifie $-\lambda_1 u^2 + k > 1$.

Ce résultat nous conduit naturellement à la question suivante :

Quelles sont les surfaces de translation dans les espaces 3-dimensionnel euclidien $\mathbb{E}^3$ et lorentzien $\mathbb{E}_1^3$ qui vérifient la condition $\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i$.

Dans [38], G. Kaimakamis, B.J. Papantoniou, K. Petoumenos, ont donné une classification des surfaces de révolution sans points paraboliques dans $\mathbb{E}_1^3$, satisfaisant

$$\Delta^{III} r = Ar,$$

où A est une matrice carrée réelle d'ordre 3.

Récemment, dans [49] S. Stamatakis, H. Al-Zoubi ont donné une classification des surfaces de révolution sans points paraboliques dans $\mathbb{E}^3$, vérifiant la condition

$$\Delta^{III} x = Ax.$$

3.1 Surfaces de translation dans l'espace 3 - dimensionnel Euclidien satisfaisant la condition $\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i$

Dans ce chapitre, on étudie les surfaces de translation dans $\mathbb{E}^3$ qui vérifient la condition

$$\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i, \;\; \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}^3$, $(x, y) \mapsto r(x, y) = (r_1(x, y), r_2(x, y), r_3(x, y))$ une surface de translation (non dégénérée) dans $\mathbb{E}^3$. M^2 peut être paramétrée par

$$r(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)), \tag{3.3}$$

f et g étant des fonctions régulières des variables x et y, respectivement.

Le repère naturel $\{r_x, r_y\}$ est donné par

$$r_x = (1, 0, f'), \;\; r_y = (0, 1, g').$$

Par conséquent, la métrique euclidien induite sur M^2 est obtenue par

$$E = 1 + f'^2, \quad F = f'g', \;\; G = 1 + g'^2.$$

Le vecteur unitaire normal à M^2 est donnée par

$$\mathbf{N} = -\frac{1}{W}(f', g', -1),$$

où $W = \sqrt{1 + f'^2 + g'^2}$.

On peut vérifier que

$$L = \frac{f''}{W}, \;\; M = 0, \;\; N = \frac{g''}{W}$$

et

$$H = \frac{(1 + f'^2)g'' + (1 + g'^2)f''}{2W^3}, \;\; K_G = \frac{f''g''}{W^4}.$$

La troisième forme fondamentale III est définie par la matrice

$$e_{ij} = g_L(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u_j}),$$

où $(u_1, u_2) = (x, y)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} e_{11} &= (\frac{f''}{W^2})^2 G, \quad e_{12} = -\frac{f''g''}{W^4}F, \;\; e_{22} = (\frac{g''}{W^2})^2 E; \\ e^{11} &= \frac{W^2}{f''^2}E, \quad e^{12} = \frac{W^2}{f''g''}F, \quad e^{22} = \frac{W^2}{g''^2}G. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Si cette surface de translation est construite avec des composantes qui sont des fonctions propres du Laplacian, alors on aura

$$\begin{aligned} \Delta^{III} r(x,y) &= (\Delta^{III} r_1(x,y), \Delta^{III} r_2(x,y), \Delta^{III} r_3(x,y)) \\ &= (\Delta^{III}(x), \Delta^{III}(y), \Delta^{III}(f(x)+g(y))), \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in Spec(M^2)$.

D'après (1.15) et (3.4), on a

$$\begin{aligned} \Delta^{III} &= -W^2\Big(\frac{1}{f''}\frac{d}{dx}\big(\frac{1+f'^2}{f''}\big)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{g''}\frac{d}{dy}\big(\frac{1+g'^2}{g''}\big)\frac{\partial}{\partial y} + \\ & 2\frac{f'g'}{f''g''}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \big(\frac{1+f'^2}{f''^2}\big)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \big(\frac{1+g'^2}{g''^2}\big)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big). \end{aligned} \tag{3.6}$$

En utilisant (3.5) et (3.6) pour la surface de translation décrite par (3.3) sous la condition (3.2), on obtient le système

$$\frac{d}{dx}\big(\frac{1+f'^2}{f''}\big) = -\lambda_1\big(\frac{xf''}{W^2}\big), \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dy}\big(\frac{1+g'^2}{g''}\big) = -\lambda_2\big(\frac{yg''}{W^2}\big), \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{g''}\frac{d}{dy}\Big(g'\big(\frac{1+g'^2}{g''}\big)\Big) + \frac{1}{f''}\frac{d}{dx}\Big(f'\big(\frac{1+f'^2}{f''}\big)\Big) = -\lambda_3\big(\frac{f+g}{W^2}\big). \tag{3.9}$$

Ainsi, le problème de la classification des surfaces de translation de type fini vérifiant (3.2) est réduit à la résolution du système d'équations différentielles ordinaires. Etudions ce dernier suivant les valeurs des constantes λ_i, $(i = 1, 2, 3)$.

D'après les équations (3.7) et (3.8) on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Alors

$$\frac{1+f'^2}{f''} = d_1, \quad \frac{1+g'^2}{g''} = d_2, \ d_1, \ d_2 \in \mathbb{R}^*. \tag{3.10}$$

Par conséquent, d'après (3.9) et (3.10) on trouve

$$-\lambda_3(f+g) = (d_1+d_2)W^2. \tag{3.11}$$

Soit $d_1 + d_2 \neq 0$. En dérivant par rapport à u on obtient

$$-\lambda_3 = 2(d_1+d_2)f''.$$

De (3.10) il vient $f'' = 0$, d'où la contradiction. Donc $d_1 + d_2 = 0$.

Par conséquent, d'après (3.11) on trouve $\lambda_3 = 0$.

Les solutions des équations différentielles (3.10) sont données par

$$f(x) = k \ln\left|c_0 \cos(-\frac{1}{k}x + c_1)\right|, \quad c_0, c_1, k \in \mathbb{R}, \ c_0 k \neq 0,$$

$$g(y) = -k \ln \left| c_3 \cos(\frac{1}{k} y + c_2) \right|, \quad c_2, c_3, k \in \mathbb{R},\ c_3 k \neq 0,$$

où $k = d_2 = -d_1$.

En substituant ces valeurs de $f(x)$ et $g(y)$ dans (3.3), on obtient une paramétrisation de la surface de Scherk

$$r(x,y) = \left(x, y, k_1 \ln \left| k_2 \frac{\cos(-\frac{1}{k_1} x + c_1)}{\cos(\frac{1}{k_1} y + c_2)} \right| \right), \quad c_1, c_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ k_1 k_2 \neq 0.$$

Ainsi, on vient de prouver le

Théorème 3.3 *Soit M^2 une surface de translation décrite par (3.3) dans $\mathbb{E}^3$. Alors $\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i$ si et seulement si M^2 est la surface de Scherk*

$$r(x,y) = \left(x, y, k_1 \ln \left| k_2 \frac{\cos(-\frac{1}{k_1} x + c_1)}{\cos(\frac{1}{k_1} y + c_2)} \right| \right), \quad c_1, c_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ k_1 k_2 \neq 0.$$

Théorème 3.4 *Si $\frac{2H}{K_G} = \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, alors*

$$\Delta^{III} r(x,y) = -\frac{2H}{K_G} N.$$

Preuve. Si $\frac{2H}{K_G} = \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, alors

$$\frac{1+f'^2}{f''} + \frac{1+g'^2}{g''} = \frac{\alpha}{W}.$$

En substituant (3.7), (3.8) et (3.9) dans (3.5) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta^{III} r(x,y) &= -W^2 \Big(\frac{1}{f''} \frac{d}{dx} \big(\frac{1+f'^2}{f''} \big), \frac{1}{g''} \frac{d}{dy} \big(\frac{1+g'^2}{g''} \big), \\
&\quad \frac{1+f'^2}{f''} + \frac{1+g'^2}{g''} + \frac{g'}{g''} \frac{d}{dy} \big(\frac{1+g'^2}{g''} \big) + \frac{f'}{f''} \frac{d}{dx} \big(\frac{1+f'^2}{f''} \big) \Big) \\
&= -\frac{\alpha}{W} (-f', -g', +1) \\
&= -\frac{2H}{K_G} N.
\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta^{III} r(x,y) = -\frac{2H}{K_G} N.$$

■

3.2 Surfaces de translation dans l'espace 3 - dimensionnel de Lorentz-Minkowski satisfaisant la condition $\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i$

Comme dans la section précédente, on explore la classification des surfaces de translation dans $\mathbb{E}_1^3$ sous la même condition

$$\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i, \ \ \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}_1^3$ une surface de translation (non dégénérée) dans $\mathbb{E}_1^3$. M^2 peut être paramétrée par

$$r(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)), \tag{3.13}$$

f et g étant des fonctions régulières des variables x et y, respectivement.

Si cette surface de translation est construite avec des composantes qui sont des fonctions propres du Laplacian, alors on aura

$$\begin{aligned} \Delta^{III} r(x, y) &= (\Delta^{III} r_1(x, y), \Delta^{III} r_2(x, y), \Delta^{III} r_3(x, y)) \\ &= (\Delta^{III}(x), \Delta^{III}(y), \Delta^{III}(f(x) + g(y))), \end{aligned} \tag{3.14}$$

La métrique pseudo-riemannienne induite sur M^2 est obtenue par

$$E = -1 + f'^2, \ \ F = f'g', G = 1 + g'^2.$$

Le vecteur unitaire normal à M^2 est donnée par

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\omega}(f', -g', 1),$$

où $\omega = \sqrt{\varepsilon(1 - f'^2 + g'^2)}$ et $\varepsilon = \pm 1$.

On peut vérifier que

$$L = \frac{f''}{\omega}, \ \ M = 0, \ \ N = \frac{g''}{\omega}$$

et

$$H = \frac{-\varepsilon((1 - f'^2)g'' - (1 + g'^2)f'')}{2\omega^3}, \ \ K_G = \frac{\varepsilon f'' g''}{\omega^4}.$$

Les coefficients de la troisième forme fondamentale associée à M^2 sont

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\varepsilon\left(\frac{f''}{\omega^2}\right)^2 G, \ \ e_{12} = \varepsilon\frac{f''g''}{\omega^4}F, \ \ e_{22} = -\varepsilon\left(\frac{g''}{\omega^2}\right)^2 E; \\ e^{11} &= \frac{\omega^2}{f''^2}E, \ \ e^{12} = \frac{\omega^2}{f''g''}F, \ \ e^{22} = \frac{\omega^2}{g''^2}G. \end{aligned} \tag{3.15}$$

D'après (1.15) et (3.15), on a

$$\begin{aligned} \Delta^{III} = \ & \omega^2\Big(\frac{1}{f''}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1 - f'^2}{f''}\Big)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{g''}\frac{d}{dy}\Big(\frac{1 + g'^2}{g''}\Big)\frac{\partial}{\partial y} - \\ & 2\frac{f'g'}{f''g''}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \Big(\frac{1 - f'^2}{f''^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Big(\frac{1 + g'^2}{g''^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big). \end{aligned} \tag{3.16}$$

En utilisant cette fois-ci (3.12) et (3.16), on obtient le système

$$\frac{\omega^2}{f''}\frac{d}{dx}(\frac{1-f'^2}{f''}) = \lambda_1 x, \tag{3.17}$$

$$-\frac{\omega^2}{g''}\frac{d}{dy}(\frac{1+g'^2}{g''}) = \lambda_2 y, \tag{3.18}$$

$$\omega^2\Big(\frac{f'}{f''}\frac{d}{dx}(\frac{1-f'^2}{f''}) - \frac{g'}{g''}\frac{d}{dy}(\frac{1+g'^2}{g''}) - \frac{1+g'^2}{g''} + \frac{1-f'^2}{f''}\Big) = \lambda_3(f+g). \tag{3.19}$$

D'après les équations (3.17) et (3.18) on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Alors

$$\frac{1-f'^2}{f''} = d_1, \quad \frac{1+g'^2}{g''} = d_2, \; d_1, d_2 \in \mathbb{R}^*. \tag{3.20}$$

Par conséquent, d'après (3.19) et (3.20) on trouve

$$\lambda_3(f+g) = (d_1 - d_2)\omega^2. \tag{3.21}$$

Soit $d_1 - d_2 \neq 0$. En dérivant par rapport à u on obtient

$$-\lambda_3 = 2\varepsilon(d_1 - d_2)f'',$$

D'après (3.20) on trouve $f'' = 0$, d'où la contradiction. Donc $d_1 - d_2 = 0$.

D'après l'équation (3.21) on déduit $\lambda_3 = 0$.

Les solutions des équations différentielles ci-dessus sont données par

$$\begin{aligned} f(x) &= k\ln\left|c_0\sinh(\frac{1}{k}x + c_1)\right|, \quad c_0, c_1, k \in \mathbb{R}, \; c_0 k \neq 0, \\ g(y) &= -k\ln\left|c_3\cos(\frac{1}{k}y + c_2)\right|, \quad c_2, c_3, k \in \mathbb{R}, \; c_3 k \neq 0, \end{aligned}$$

où $k = d_2 = d_1$.

En substituant ces valeurs de $f(x)$ et $g(y)$ dans (3.13), on obtient une paramétrisation de la surface de Scherk

$$r(x,y) = \Big(x, y, k_1 \ln\left|k_2\frac{\sinh(\frac{1}{k_1}x + c_1)}{\cos(-\frac{1}{k_1}y + c_3)}\right|\Big), \quad c_1, c_3, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \; k_1 k_2 \neq 0.$$

Finalement, on peut énoncer le

Théorème 3.5 *Soit M^2 une surface de translation décrite par (3.13) dans $\mathbb{E}^3_1$. Alors $\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i$ si et seulement si M^2 est la surface de Scherk*

$$r(x,y) = \Big(x, y, k_1 \ln\left|k_2\frac{\sinh(\frac{1}{k_1}x + c_1)}{\cos(-\frac{1}{k_1}y + c_3)}\right|\Big), \quad c_1, c_3, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \; k_1 k_2 \neq 0.$$

Théorème 3.6 *Si* $\frac{2H}{K_G} = \alpha \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\Delta^{III} r(x,y) = -\frac{2\varepsilon H}{K_G} N.$$

Preuve. Si $\frac{2H}{K_G} = \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, alors

$$\frac{1-f'^2}{f''} - \frac{1+g'^2}{g''} = -\frac{\alpha}{\omega}.$$

En substituant (3.17), (3.18) et (3.19) dans (3.14) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta^{III} r(x,y) &= \omega^2 \Big(\frac{1}{f''}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1-f'^2}{f''}\Big), -\frac{1}{g''}\frac{d}{dy}\Big(\frac{1+g'^2}{g''}\Big), \\
&\quad \Big(\frac{f'}{f''}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1-f'^2}{f''}\Big) - \frac{g'}{g''}\frac{d}{dy}\Big(\frac{1+g'^2}{g''}\Big) - \frac{1+g'^2}{g''} + \frac{1-f'^2}{f''}\Big)\Big) \\
&= \frac{\alpha}{\omega}(-f', g', -1) \\
&= -\frac{2\varepsilon H}{K_G} N.
\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta^{III} r(x,y) = -\frac{2\varepsilon H}{K_G} N.$$

■

Chapitre 4

Surfaces hélicoidales dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski satisfaisant la condition $\Delta^{II}r = Ar$

Dans [10], Chr. Beneki, G. Kaimakamis, B.J. Papantoniou ont donné une classification des surfaces hélicoidales dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski.

Dans ce chapitre, on donne une classification des surfaces hélicoidales dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski qui vérifient la condition $\Delta^{II}r = Ar$ où Δ^{II} est l'opérateur de Laplace associé à la seconde forme fondamentale et A est une matrice carrée réelle d'ordre 3. On donnera également les formes explicites de ces surfaces [47].

4.1 Introduction

Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}_1^3$ une immersion isométrique d'une surface dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski muni de la métrique induite (1.1).

Dans [37], Kaimakamis et Papantoniou ont donné une classification des surfaces de révolution sans points paraboliques dans $\mathbb{E}_1^3$, satisfaisant

$$\Delta^{II}r = Ar,$$

où Δ^{II} est l'opérateur de Laplace associé à la seconde forme fondamentale et A est une matrice carrée réelle d'ordre 3.

Récemment, dans [3] Ch. Baba-Hamed, M. Bekkar ont établi une classification des surfaces hélicoidales dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski, vérifiant la condition

$$\Delta^{II}r_i = \lambda_i r_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Plus précisément, ils ont étudié les surfaces hélicoidales de $\mathbb{E}_1^3$ d'axe de type espace, type temps et type lumière et ont prouvé que

Théorème 4.1 ([3]) *Il n'existe pas de surfaces hélicoidales de type I, II ou III dans $\mathbb{E}_1^3$ sans points paraboliques, satisfaisant la condition $\Delta^{II}r_i = \lambda_i r_i$.*

Théorème 4.2 ([3]) *Il n'existe pas de surfaces hélicoidales de type IV dans* $\mathbb{E}_1^3$ *sans points paraboliques, satisfaisant la condition* $\Delta^{II} r_i = \lambda_i r_i$.

A partir de ces travaux, une question géométrique intéressante s'est dégagée :

classifier des surfaces hélicoidales dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski, vérifiant la condition

$$\Delta^{II} r = Ar. \tag{4.1}$$

où A est une matrice carrée réelle d'ordre 3.

4.2 Prélimilaires

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to P$ une courbe dans un plan P de $\mathbb{E}_1^3$ et soit L une droite de P qui ne rencontre pas la courbe γ. Une surface hélicoidale M^2 dans $\mathbb{E}_1^3$ est une surface non dégénérée, engendrée par les déplacements

$$g_v : \mathbb{E}_1^3 \to \mathbb{E}_1^3; v \in \mathbb{R}$$

autour de l'axe L.

On distinguera les trois cas spéciaux suivants :

Premier cas. Supposons que l'axe de rotation soit l'axe des z (de type espace) et que la courbe γ soit dans le plan xz ou dans le plan yz. Une paramétrisation de γ peut être donnée par

$$\gamma(u) = \big(f(u), 0, g(u)\big) \text{ or } \gamma(u) = \big(0, f(u), g(u)\big),$$

où f, g sont des fonctions régulières et $f > 0$ sur I. Le sous-groupe du groupe de Lorentz qui fixe le vecteur $(0, 0, 1)$ est formé des matrices

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ v \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la surface hélicoidale M^2 peut être paramétrée soit par :

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix}$$

d'où

$$r(u, v) = \big(f(u)\cosh v, f(u)\sinh v, cv + g(u)\big), \ c \in \mathbb{R}^+, \tag{4.2}$$

ou par :

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix}$$

d'où

$$r(u, v) = \big(f(u)\sinh v, f(u)\cosh v, cv + g(u)\big), \ c \in \mathbb{R}^+. \tag{4.3}$$

On dit que ces surfaces hélicoidales sont de type I (4.3) ou de type II (4.2) respectivement (voir [10]).

Deuxième cas. Supposons que l'axe de rotation soit l'axe des x (de type temps) et que γ soit dans le plan xy. Alors, une des paramétrisation de γ est

$$\gamma(u) = \big(g(u), f(u), 0\big)$$

où f, g sont des fonctions régulières et $f > 0$ sur I. Dans ce cas, le sous-groupe du groupe de Lorentz qui fixe le vecteur $(1, 0, 0)$ est formé des matrices

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}, \ v \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la surface hélicoidale M^2 d'axe x peut être paramétrée par :

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$r(u, v) = \big(g(u) + cv, f(u)\cos v, f(u)\sin v\big), \ f(u) > 0, c \in \mathbb{R}^+. \tag{4.4}$$

Cette surface hélicoidale est dite de type III (voir [10]).

Troisième cas. Supposons que l'axe de révolution L soit la droite du plan xy engendrée par le vecteur $(1, 1, 0)$ i.e., $L =< (1, 1, 0) >$ est de type lumière et que la courbe γ soit dans le plan xy. Alors une des paramétrisation de γ est

$$\gamma(u) = \big(f(u), g(u), 0\big), u \in I,$$

où f, g sont des fonctions régulières sur I, telles que $f(u) \neq g(u), \forall u \in I$.

Le sous-groupe du groupe de Lorentz qui fixe le vecteur $(1, 1, 0)$ est formé des matrices

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix}, \ v \in \mathbb{R}.$$

La surface hélicoidale M^2 peut donc être décrite par

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ cv \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$r(u, v) = \big((1+\frac{v^2}{2})f(u) - \frac{v^2}{2}g(u) + cv, \frac{v^2}{2}f(u) + (1-\frac{v^2}{2})g(u) + cv, (f(u)-g(u))v\big), \ c \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

En posant $h(u) = f(u) - g(u)$ dans (4.5) on trouve

$$r(u, v) = \big(f(u) + \frac{v^2}{2}h(u) + cv, g(u) + \frac{v^2}{2}h(u) + cv, vh(u)\big), \ c \in \mathbb{R}.$$

Cette surface hélicoidale est dite de type IV (voir [10]).

4.3 Surfaces hélicoidales de type I, II

Dans ce paragraphe, on étudie les surfaces hélicoidales non dégénérées M^2 de $\mathbb{E}^3_1$ sans points paraboliques, qui vérifient la condition (4.1).

Supposons que la surface M^2 s'exprime par (4.3), ou de manière équivalente par

$$r(u,v) = \big(u\sinh v, u\cosh v, cv + g(u)\big),\ c \in \mathbb{R}^+. \tag{4.6}$$

On en déduit le repère naturel $\{r_u, r_v\}$ donné par

$$\begin{aligned} r_u &= \big(\sinh v, \cosh v, g'\big), \\ r_v &= \big(u\cosh v, u\sinh v, c\big). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E = 1 + g'^2,\ F = cg',\ G = c^2 - u^2;$$
$$L = \frac{-ug''}{W},\ M = \frac{c}{W},\ N = \frac{u^2 g'}{W}. \tag{4.7}$$

Le vecteur unitaire normal à M^2 est donnée par

$$N = \frac{1}{W}(ug'\sinh v - c\cosh v, ug'\cosh v - c\sinh v, -u)$$

où $W = \sqrt{\varepsilon g_L(r_u \wedge_L r_v, r_u \wedge_L r_v)} = \sqrt{\varepsilon(u^2(1+g'^2) - c^2)}$, $g' = \frac{dg}{du}$ et $\varepsilon = \pm 1$.

La courbure de Gauss K_G et la courbure moyenne H sont

$$K_G = \frac{-1}{W^4}\big(u^3 g' g'' + c^2\big) \tag{4.8}$$

et

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2W^3}\big(u^2 g'(1+g'^2) - 2c^2 g' - ug''(c^2 - u^2)\big) \\ &= \frac{1}{2u}\left(\frac{u^2 g'}{W}\right)'. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Remarque 4.1 *Si* $F = 0$ $(g' = 0)$, *alors*

$$K_G = \frac{-c^2}{W^4} < 0,\ H = 0.$$

Comme la surface M^2 n'a pas de points paraboliques, on a

$$u^3 g' g'' + c^2 \neq 0.$$

Supposons que $LN - M^2 > 0$ (on a le même résultat si $LN - M^2 < 0$).

D'après (1.14) et (4.7), on a

$$\begin{aligned}\Delta^{II} &= \frac{W}{R}\big(- u^2 g' \frac{\partial^2}{\partial u^2} + u g'' \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2c \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\big) - \\ &\quad \frac{W}{2R^2}\big(g'(g'g''' - g''^2)u^4 - g'^2 g'' u^3 - 2c^2 g'' u - 4c^2 g'\big) u \frac{\partial}{\partial u} + \\ &\quad \frac{W}{2R^2}\big((g'g''' + g''^2)u + 3g'g''\big) c u^2 \frac{\partial}{\partial v},\end{aligned} \tag{4.10}$$

où $R(u) = R = u^3 g' g'' + c^2$.

Par suite, en utilisant (4.10) et (4.6) on obtient

$$\Delta^{II} r(u,v) = \begin{pmatrix} u g' A(u) \sinh v - cA(u) \cosh v \\ u g' A(u) \cosh v - cA(u) \sinh v \\ u g'^2 A(u) + u^2 B(u) \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

où

$$A(u) = \frac{W}{2R^2}\big(- (g''^2 + g'g''')u^4 + g'g''u^3 + 4c^2\big), \tag{4.12}$$

$$B(u) = \frac{W}{2R^2}\big(4g'^2 g''^2 u^3 + c^2(g''^2 + g'g''')u + 7c^2 g' g''\big). \tag{4.13}$$

Remarque 4.2 *Remarquons que*

$$c^2 A(u) + u^3 B(u) = 2W. \tag{4.14}$$

En utilisant (4.1) et (4.11), on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} u(g'A(u) - a_{11}) \sinh v - (cA(u) + a_{12} u) \cosh v = a_{13}(cv + g) \\ u(g'A(u) - a_{22}) \cosh v - (cA(u) + a_{21} u) \sinh v = a_{23}(cv + g) \\ a_{32} u \cosh v + a_{31} u \sinh v = u g'^2 A(u) + u^2 B(u) - a_{33}(cv + g), \end{array}\right. \tag{4.15}$$

$A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ une matrice carrée réelle d'ordre 3.

Les fonctions sinh et cosh sont linéairement indépendants, alors on obtient

$$a_{32} = a_{31} = a_{33} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

Posons $a_{11} = a_{22} = \lambda$ et $a_{12} = a_{21} = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Le système (4.15) prend la forme

$$\left\{\begin{array}{l} g'A(u) = \lambda \\ cA(u) = -\mu u \\ g'^2 A(u) + uB(u) = 0. \end{array}\right. \tag{4.16}$$

Etudions (4.16) suivant les valeurs des constantes λ et μ.

$a)$ Soit $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$. Le système différentiel (4.16) devient

$$\left\{\begin{array}{l} g' = 0 \\ cA(u) = -\mu u \\ B(u) = 0. \end{array}\right. \tag{4.17}$$

Dérivons $cA(u) = -\mu u$, on obtient $A''(u) = 0$, ce qui est impossible. Donc il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans $\mathbb{E}_1^3$ satisfaisant la condition (4.1).

b) Soit $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$.

Par suite, le système (4.16) est réduit au système équivalent suivant

$$\begin{cases} g'A(u) = \lambda \\ A(u) = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $\lambda = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans ce cas satisfaisant (4.1).

c) Soit $\lambda = \mu = 0$.

Dans ce cas, le système (4.16) est réduit à

$$\begin{cases} A(u) = 0 \\ B(u) = 0. \end{cases}$$

De (4.14) il vient $W = 0$, ce qui est impossible. Donc il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans $\mathbb{E}_1^3$ satisfaisant (4.1).

d) Soit $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$.

Le système (4.16) donne

$$g(u) = -\frac{\lambda c}{\mu}\ln(u) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la surface hélicoidale est donnée par

$$r(u,v) = \big(u\sinh v, u\cosh v, cv - \frac{\lambda c}{\mu}\ln(u) + k\big), \; c \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}.$$

e) Soit $\lambda = \pm\mu \neq 0$, alors

$$g(u) = \pm c\ln(u) + k$$

i.e. la courbure moyenne H de M^2 est nulle. Autrement dit, les surfaces hélicoidales (4.6) sont minimales.

Théorème 4.3 *Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}_1^3$ une immersion isométrique donnée par (4.6). Alors $\Delta^{II} r = Ar$, si et seulement si la surface M^2 désigne l'une des surfaces suivantes :*

1) M^2 est minimale.

2) M^2 est paramétrée par

$$r(u,v) = \big(u\sinh v, u\cosh v, cv - \frac{\lambda c}{\mu}\ln(u) + k\big), \; c \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.4 *Si $K_G = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, alors*

$$\Delta^{II} r(u,v) = -2\varepsilon N. \tag{4.18}$$

Preuve. Si $K_G = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, alors $\frac{\partial K_G}{\partial u} = 0$.

D'après (4.8), on a

$$\begin{aligned} & -g'g''u^4 - 7c^2g'g''u^2 - c^2g''^2u^3 - 4c^2u - g'^3g''u^4 - 4c^2g'^2u \\ = \; & -(3g'^2g''^2 + g'' + g'g''' + g'^3g''')u^5 + c^2g'g'''u^3. \end{aligned} \tag{4.19}$$

D'après (4.12), (4.13) et (4.19), on a

$$\begin{aligned} -uA(u) - u^2B(u) &= \frac{W}{2R^2}\big(g'^3g''u^4 + 4c^2g'^2u - g'^3g'''u^5 - g'^2g''^2u^5\big) \\ &= g'^2uA(u). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Donc d'après (4.11) et (4.20), on aura

$$\Delta^{II}r(u,v) = WA(u)N. \tag{4.21}$$

De (4.14) et (4.20), il vient

$$A(u) = \frac{-2\varepsilon}{W}. \tag{4.22}$$

En utilisant (4.21) et (4.22), on obtient (4.18). ■

4.4 Surfaces hélicoidales de type III

Dans ce paragraphe, on étudie les surfaces hélicoidales non dégénérées M^2 de $\mathbb{E}^3_1$ de type III sans points paraboliques, qui vérifient la condition (4.1).

Supposons que la surface M^2 soit donnée par (4.4), ou de manière équivalente par

$$r(u,v) = \big(cv + g(u), u\cos v, u\sin v\big). \tag{4.23}$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} E = 1 - g'^2,\ F = -cg',\ G = u^2 - c^2; \\ L = \frac{ug''}{W},\ M = -\frac{c}{W},\ N = \frac{u^2g'}{W}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Le vecteur unitaire normal à M^2 est donnée par

$$N = \frac{-1}{W}(u, ug'\cos v - c\sin v, ug'\sin v + c\cos v),$$

où $W = \sqrt{\varepsilon g_L(r_u \wedge_L r_v, r_u \wedge_L r_v)} = \sqrt{\varepsilon(u^2(1-g'^2) - c^2)}$ et $\varepsilon = \pm 1$.

La courbure moyenne H et la courbure de Gauss K_G sont

$$H = \frac{\big(u^2g'(1-g'^2) - 2c^2g' - ug''(c^2 - u^2)\big)}{2W^3} = \frac{1}{2u}\left(\frac{u^2g'}{W}\right)'$$

et

$$K_G = \frac{\big(u^3g'g'' - c^2\big)}{W^4}. \tag{4.25}$$

Comme la surface M^2 n'a pas de points paraboliques, on a

$$u^3 g' g'' - c^2 \neq 0.$$

Supposons que $LN - M^2 > 0$ (on a le même résultat si $LN - M^2 < 0$).

D'après (1.14) et (4.24), on a

$$\begin{aligned} \Delta^{II} &= -\frac{W}{R}\big(u^2 g' \frac{\partial^2}{\partial u^2} + u g'' \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2c\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\big) - \\ & \frac{W}{2R^2}\big(g'(g''^2 - g' g''')u^4 + g'^2 g'' u^3 - 2c^2 g'' u - 4c^2 g'\big)u\frac{\partial}{\partial u} + \\ & \frac{W}{2R^2}\big((g' g''' + g''^2)u + 3g' g''\big)cu^2 \frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

où $R(u) = R = u^3 g' g'' - c^2$.

L'opérateur Δ^{II} de la relation (4.26), appliqué aux fonctions composantes de (4.23) donne

$$\Delta^{II} r(u,v) = \begin{pmatrix} u g'^2 A(u) + u^2 B(u) \\ u g' A(u) \cos v - cA(u) \sin v \\ u g' A(u) \sin v + cA(u) \cos v \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

où

$$A(u) = \frac{W}{2R^2}\big((g''^2 + g' g''')u^4 - g' g'' u^3 + 4c^2\big) \tag{4.28}$$

$$B(u) = \frac{W}{2R^2}\big(-4g'^2 g''^2 u^3 + c^2(g''^2 + g' g''')u + 7c^2 g' g''\big). \tag{4.29}$$

Remarque 4.3 *Remarquons que*

$$c^2 A(u) - u^3 B(u) = 2W. \tag{4.30}$$

En utilisant la condition (4.1) et (4.27), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12} u \cos v + a_{13} u \sin v = u g'^2 A(u) + u^2 B(u) - a_{11}(cv + g) \\ (u g' A(u) - a_{22} u) \cos v - (cA(u) + a_{23} u) \sin v = a_{21}(cv + g) \\ (u g' A(u) - a_{33} u) \sin v + (cA(u) - a_{32} u) \cos v = a_{31}(cv + g). \end{array} \right. \tag{4.31}$$

Les fonctions cos et sin sont linéairement indépendants, alors on obtient

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0, \;\; a_{22} = a_{33}, \;\; a_{32} = -a_{23}.$$

Posons $a_{22} = a_{33} = \lambda$ et $a_{32} = -a_{23} = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Le système (4.31) prend la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} g' A(u) = \lambda \\ cA(u) = \mu u \\ g'^2 A(u) + u B(u) = 0. \end{array} \right. \tag{4.32}$$

Etudions (4.32) suivant les valeurs des constantes λ et μ.

a) Soit $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$.

De (4.32), on obtient $A''(u) = 0$, ce qui est impossible. Donc il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans $\mathbb{E}_1^3$ satisfaisant la condition (4.1).

b) Soit $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$.

Le système (4.32) est réduit à

$$\begin{cases} g'A(u) = \lambda \\ A(u) = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $\lambda = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans ce cas satisfaisant (4.1).

c) Soit $\lambda = \mu = 0$.

Dans ce cas, le système (4.32) est réduit à

$$\begin{cases} A(u) = 0 \\ B(u) = 0. \end{cases}$$

De (4.30) il vient $W = 0$, ce qui est impossible. Donc il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans $\mathbb{E}_1^3$ satisfaisant (4.1).

d) Soit $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$.

Le système (4.32) est réduit à

$$g(u) = \frac{\lambda c}{\mu} \ln(u) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, les surfaces hélicoidales sont données par

$$r(u, v) = \big(cv + \frac{\lambda c}{\mu} \ln(u) + k, u \cos v, u \sin v\big).$$

Théorème 4.5 *Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}_1^3$ une immersion isométrique donnée par (4.23). Alors $\Delta^{II} r = Ar$, si et seulement si la surface M^2 est paramétrée par*

$$r(u, v) = \big(cv + \frac{\lambda c}{\mu} \ln(u) + k, u \cos v, u \sin v\big).$$

Théorème 4.6 *Si $K_G = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, alors*

$$\Delta^{II} r(u, v) = 2\varepsilon N. \tag{4.33}$$

Preuve. D'après (4.25), on a

$$\begin{aligned} & -g'g''u^4 - 7c^2g'g''u^2 - c^2g''^2u^3 - 3g'^2g''^2u^5 - 4c^2u - g'^3g''u^4 - 4c^2g'^2u \\ = \; & -(g'g''' + g'^3g''' + g''^2)u^5 + c^2g'g'''u^3 \end{aligned} \tag{4.34}$$

D'après (4.28), (4.29) et (4.34), on a

$$\begin{aligned} uA(u) - u^2B(u) &= \frac{W}{2R^2}\big(g'^3g''u^4 + 4c^2g'^2u - g'^3g'''u^5 - g'^2g''^2u^5\big) \\ &= g'^2uA(u). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Donc d'après (4.27) et (4.35), on aura

$$\Delta^{II}r(u,v) = -WA(u)N. \tag{4.36}$$

De (4.30) et (4.35), il vient

$$A(u) = \frac{-2\varepsilon}{W}. \tag{4.37}$$

En utilisant (4.36) et (4.37), on obtient (4.33). ■

4.5 Surfaces hélicoidales de type IV

Dans ce paragraphe, on étudie les surfaces hélicoidales non dégénérées M^2 de $\mathbb{E}^3_1$ de type IV sans points paraboliques, qui vérifient la condition (4.1).

On peut supposer que $f(u) = u$, de sorte que la paramétrisation (4.5) devienne

$$r(u,v) = \big(u - \frac{v^2}{2}h(u) + cv, (1 - \frac{v^2}{2})g(u) + \frac{v^2}{2}u + cv, -vh(u)\big),\ c \in \mathbb{R}, \tag{4.38}$$

où $h(u) = g(u) - u \neq 0$, $\forall u \in I$.

On peut vérifier que

$$\begin{gathered} E = -1 + g'^2,\ F = ch',\ G = h^2; \\ L = \frac{hh''}{W},\ M = \frac{ch'^2}{W},\ N = \frac{h^2h'}{W}; \\ N = \frac{1}{W}\big(h + (1 + \frac{v^2}{2})hh' - cvh', h + \frac{v^2}{2}hh' - cvh', vhh' - ch'\big), \end{gathered} \tag{4.39}$$

où $W = \sqrt{\varepsilon g_L(r_u \wedge_L r_v, r_u \wedge_L r_v)} = \sqrt{\varepsilon(h'\big((h^2 - c^2)h' + 2h^2\big))}$.

La courbure moyenne H et la courbure de Gauss K_G sont

$$H = \frac{1}{2W^3}\big(h'^3(h^2 - 2c^2) + h^2(2h'^2 + hh'')\big) = \frac{1}{hh'}\left(\frac{h^2h'}{W}\right)', \tag{4.40}$$

$$K_G = \frac{h'}{W^4}\big(h^3h'' - c^2h'^3\big). \tag{4.41}$$

Remarque 4.4 ([10]) *Si* $K_G = 0$, *alors*

$$h^3h'' - c^2h'^3 = 0. \tag{4.42}$$

Pour résoudre l'équation différentielle (4.42), on pose $h' = P$. *On obtient alors*

$$P\frac{dP}{dh}h^3 - c^2P^3 = 0.$$

On obtient alors l'équation

$$u + c_2 = -\frac{c^2}{2h} - c_1 h, \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si $c_1 = 0$, *alors*

$$h = -\frac{c^2}{2(u+c_2)}.$$

Par conséquent, la surface hélicoidale est donnée par

$$r(u,v) = \big(u + \frac{c^2v^2}{4(u+c_2)} + cv, u - \frac{c^2(2-v^2)}{4(u+c_2)} + cv, \frac{c^2v}{2(u+c_2)}\big), \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Si $c_1 \neq 0$, *alors*

$$h = \frac{1}{2c_1}\big(- (u+c_2) \pm \sqrt{(u+c_2)^2 - 2c_1c^2}\big), \ \ c_1, c_2, c \in \mathbb{R}.$$

Comme la surface M^2 n'a pas de points paraboliques, on a

$$h'\big(h^3h'' - c^2h'^3\big) \neq 0.$$

Supposons que $LN - M^2 > 0$ (on a le même résultat si $LN - M^2 < 0$).

D'après (1.14) et (4.39), on a

$$\begin{aligned}\Delta^{II} \ = \ & \frac{W}{R}\big(- h^2h'\frac{\partial^2}{\partial u^2} - hh''\frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2ch'^2\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\big) - \\ & \frac{W}{2R^2}\big(h^4h''^2 + 2c^2h'^3hh'' - h^4h'h''' + h^3h'^2h'' - 4c^2h'^5\big)hh'\frac{\partial}{\partial u} - \\ & \frac{W}{2R^2}\big(- 3hh''^2 + 3h'^2)h'' + hh'h'''\big)ch^2h'^2\frac{\partial}{\partial v},\end{aligned} \tag{4.43}$$

où $R(u) = R = h'\big(h^3h'' - c^2h'^3\big)$.

L'opérateur Δ^{II} de (4.43), appliqué aux fonctions composantes de (4.38) donne

$$\Delta^{II}r(u,v) = \begin{pmatrix} h'\Big(A(u)(h + h'(cv - \frac{v^2}{2}h)) + h^2B(u)\Big) \\ h'\Big(A(u)(hg' + h'(cv - \frac{v^2}{2}h)) + h^2B(u)\Big) \\ h'^2(c - vh)A(u) \end{pmatrix}, \tag{4.44}$$

où

$$A(u) \ = \ \frac{W}{2R^2}\big((-3h''^2 + h'h''')h^4 - h'^2h''h^3 + 4c^2h'^5\big), \tag{4.45}$$

$$B(u) \ = \ \frac{W}{2R^2}\big(4h''^2h^3 + (3c^2h''^2 - c^2h'h''')h'h - 7c^2h'^3h''\big). \tag{4.46}$$

Remarque 4.5 *On a clairement*

$$c^2h'^3A(u) + h'^2h^3B(u) = 2W. \tag{4.47}$$

En utilisant la condition (4.1) et (4.44), on obtient

$$\begin{cases} (h'hA(u) + h^2h'B(u) - a_{11}u - a_{12}g) + (ch'^2A(u) - ca_{11} - ca_{12} + ha_{13})v \\ +h(-h'^2A(u) + a_{11} + a_{12})\frac{v^2}{2} = 0 \\ \\ (h'hg'A(u) + h^2h'B(u) - a_{21}u - a_{22}g) + (ch'^2A(u) - ca_{21} - ca_{22} + ha_{23})v \\ +h(-h'^2A(u) + a_{21} + a_{22})\frac{v^2}{2} = 0 \\ \\ (ch'^2A(u) - a_{31}u - a_{32}g) + (-hh'^2A(u) - ca_{31} - ca_{32} + ha_{33})v \\ -h(a_{31} + a_{32})\frac{v^2}{2} = 0. \end{cases} \tag{4.48}$$

Ces trois dernières équations peuvent être considérées comme des fonctions polynômiales de variable v, nulles. Leurs coefficients respectifs sont donc nuls, ce qui équivaut à

$$h'hA(u) + h^2h'B(u) - a_{11}u - a_{12}g = 0 \tag{4.49}$$

$$c(h'^2A(u) - a_{11} - a_{12}) + ha_{13} = 0 \tag{4.50}$$

$$-h'^2A(u) + a_{11} + a_{12} = 0 \tag{4.51}$$

$$h'hg'A(u) + h^2h'B(u) - a_{21}u - a_{22}g = 0 \tag{4.52}$$

$$c(h'^2A(u) - a_{21} - a_{22}) + ha_{23} = 0 \tag{4.53}$$

$$-h'^2A(u) + a_{21} + a_{22} = 0 \tag{4.54}$$

$$ch'^2A(u) - a_{31}u - a_{32}g = 0 \tag{4.55}$$

$$-hh'^2A(u) - c(a_{31} + a_{32}) + ha_{33} = 0 \tag{4.56}$$

$$a_{31} + a_{32} = 0. \tag{4.57}$$

D'après (4.50), (4.51) et (4.53), on déduit que

$$a_{13} = a_{23} = 0.$$

Si on compare (4.54) et (4.51), on déduit

$$a_{21} + a_{22} = a_{11} + a_{12}. \tag{4.58}$$

D'autre part, en combinant les équations (4.56), (4.57) on obtient

$$h'^2A(u) = a_{33}. \tag{4.59}$$

Si on combine (4.57) et (4.55) on arrive à

$$ch'^2A(u) = a_{32}h. \tag{4.60}$$

De (4.59) et (4.60), il vient

$$a_{32}h = ca_{33}. \tag{4.61}$$

En dérivant (4.61) par rapport à u on obtient $a_{32} = 0$ (car $h' \neq 0$). D'autre part, d'après (4.57) et (4.61), on a

$$a_{33} = a_{31} = 0.$$

D'après (4.49) et (4.52), on a

$$h'A(u)(1-g') = -h'^2A(u) = a_{12} - a_{22} = 0. \tag{4.62}$$

Si on compare (4.62) et (4.58), on déduit $a_{12} = a_{22}$ et $a_{21} = a_{11}$.

De plus, d'après (4.54) on obtient $a_{21} = -a_{22}$.

Posons $a_{12} = a_{22} = \lambda = -a_{21} = -a_{11}$. Le système (4.48) se réduit alors à

$$\begin{cases} A(u) = 0 \\ hh'B(u) = \lambda. \end{cases} \tag{4.63}$$

On traite deux cas :

Cas 1. $\lambda = 0$.

Le système (4.63) donne $A(u) = B(u) = 0$. De l'équation (4.47) on déduit que $W = 0$, d'où la contradiction. Donc il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans $\mathbb{E}_1^3$ satisfaisant (4.1).

Cas 2. $\lambda \neq 0$.

De (4.63) il vient

$$B(u) = \frac{\lambda}{hh'}.$$

En remplaçant cette dernière valeur de $B(u)$ dans (4.47), on obtient

$$\frac{h'h^2}{W} = \frac{2}{\lambda}. \tag{4.64}$$

Alors, l'équation (4.64) donne $H = 0$, ce qui signifie que ces surfaces sont minimales.

Finalement, on peut énoncer le

Théorème 4.7 *Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}_1^3$ une immersion isométrique donnée par (4.38). Alors $\Delta^{II}r = Ar$, si et seulement si la surface M^2 est minimale.*

Théorème 4.8 *Si $K_G = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, alors*

$$\Delta^{II}r(u,v) = 2\varepsilon N. \tag{4.65}$$

Preuve. D'après (4.41), on a

$$-2h''h'^3h^4 - h''h'^4h^4 - 3h'^2h''^2h^5 - 2h'h''^2h^5 - 7c^2h'^4h''h^2 + 3c^2h'^2h''^2h^3 =$$
$$c^2h'^3h'''h^3 - 2h'^2h'''h^5 - 8c^2hh'^6 - h'^3h'''h^5 - 4c^2hh'^7. \tag{4.66}$$

D'après (4.45), (4.46) et (4.66), on a

$$\begin{aligned} hh'^2A(u) + h'h^2B(u) &= \frac{W}{2R^2}\big(-2h'^2h'''h^5 + 2h''h'^3h^4 - 8c^2hh'^6 + 6h'h''^2h^5\big) \\ &= -2h'hA(u). \end{aligned} \tag{4.67}$$

Donc d'après (4.44) et (4.67), on aura

$$\Delta^{II}r(u,v) = -h'WA(u)N. \tag{4.68}$$

De (4.47) et (4.67), il vient

$$h'A(u) = -\frac{2}{W}. \tag{4.69}$$

En utilisant (4.68) et (4.69), on obtient (4.65). ∎

Chapitre 5

Surfaces hélicoidales dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski satisfaisant la condition $\Delta^{III} r = Ar$

Dans ce chapitre, on donne une classification des surfaces hélicoidales dans l'espace 3-dimensionnel de Lorentz-Minkowski qui vérifient la condition

$$\Delta^{III} r = Ar, \tag{5.1}$$

où Δ^{III} est l'opérateur de Laplace associé à la troisième forme fondamentale et A est une matrice carrée réelle d'ordre 3. On donnera également les formes explicites de ces surfaces [48].

Dans [49], S. Stamatakis et H. Al-Zoubi ont donné une classification des surfaces de révolution sans points paraboliques dans $\mathbb{E}^3$ satisfaisant la condition (5.1).

Dans [38], G. Kaimakamis, B.J. Papantoniou et K. Petoumenos ont donné une classification des surfaces de révolution dans $\mathbb{E}^3_1$ satisfaisant (5.1).

C. W. Lee, Y. H. Kim et D. W. Yoon [41] ont étudié les surfaces réglées dans $\mathbb{E}^3_1$ satisfaisant (5.1).

5.1 Surfaces hélicoidales de type I, II

Dans ce paragraphe, on étudie les surfaces hélicoidales non dégénérées M^2 de $\mathbb{E}^3_1$ sans points paraboliques, qui vérifient la condition (5.1).

Supposons que la surface M^2 s'exprime par (4.6).

Les coefficients de la troisième forme fondamentale associée à M^2 sont

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\varepsilon}{W^4}\left(u^4 g''^2 - c^2(ug''+g')^2 - c^2\right), \\ e_{12} &= \frac{-c}{W^2}(ug''+g'), \\ e_{22} &= \frac{1}{W^2}(c^2 - u^2 g'^2); \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} e^{11} &= \frac{1}{W^4 K_G^2}(c^2 - u^2 g'^2), \quad e^{12} = \frac{c}{W^4 K_G^2}(ug''+g') \\ e^{22} &= \frac{\varepsilon}{W^6 K_G^2}(u^4 g''^2 - c^2(ug''+g')^2 - c^2). \end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{|e|} = \frac{\varepsilon_1 R}{W^3}, \ \varepsilon_1 = \pm 1, \ R = u^3 g' g'' + c^2.$$

Proposition 5.1 *Si* $H = 0$, *alors*

$$g(u) = \pm \int \sqrt{\frac{a^2(u^2 - c^2)}{\varepsilon u^4 - a^2 u^2}} du + b, \ a, b \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Preuve. Si $H = 0$, alors

$$\left(\frac{u^2 g'}{W}\right)' = 0 \tag{5.4}$$

D'après (5.4), on a

$$u^2 g' = aW, \ a \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

L'équation (5.5) donne

$$g'^2 = \frac{a^2(u^2 - c^2)}{\varepsilon u^4 - a^2 u^2}, \tag{5.6}$$

La solution générale de (5.6) est

$$g(u) = \pm \int \sqrt{\frac{a^2(u^2 - c^2)}{\varepsilon u^4 - a^2 u^2}} du + b, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

■

Comme la surface M^2 n'a pas de points paraboliques, on a

$$u^3 g' g'' + c^2 \neq 0, \ \forall u \in I.$$

Supposons que $LN - M^2 > 0$ (on a le même résultat si $LN - M^2 < 0$).

Rappelons que si $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ est une fonction régulière alors

$$\Delta^{III}\varphi = \frac{-1}{\sqrt{|e_{11}e_{22} - e_{12}^2|}}\left(\left(\frac{e_{22}\varphi_u - e_{12}\varphi_v}{\sqrt{|e_{11}e_{22} - e_{12}^2|}}\right)_u - \left(\frac{e_{12}\varphi_u - e_{11}\varphi_v}{\sqrt{|e_{11}e_{22} - e_{12}^2|}}\right)_v\right), \tag{5.7}$$

où e_{11}, e_{12} et e_{22} sont les coefficients de la troisième forme fondamentale associée à la surface M^2.

D'après (5.2) et (5.7), on a

$$\begin{aligned} \Delta^{III} = & -\frac{\varepsilon W^3}{R}\Big(\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{WR^2}\big(-\varepsilon W^2u^3g'g'''(c^2-u^2g'^2)+c^4u-3c^2u^3g'^2+ \\ & 3c^4g'^2u-3c^2g'^4u^3+6c^4g'g''u^2-4c^2g'g''u^4+c^2g'^2g''^2u^5- \\ & 2g'^4g''^2u^7-g'^2g''^2u^7-c^2g''^2u^5+c^4g''^2u^3-6c^2g'^3g''u^4\big)\frac{\partial}{\partial u}+ \\ & \frac{c\varepsilon\varepsilon_1}{WR^2}\big(\varepsilon W^2ug'''(c^2-g'^2u^2)-g'g''^2u^5-2g''g'^2u^4-2g'^4g''u^4+ \\ & 3c^2g'g''^2u^3+3c^2g''u^2+c^2g'u+7c^2g''g'^2u^2+c^2g'^3u-2c^4g''+ \\ & c^2g''^3u^4-g''^3u^6\big)\frac{\partial}{\partial v}+ \\ & \frac{2\varepsilon_1Wc(ug''+g')}{R}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{\varepsilon_1W(c^2-g'^2u^2)}{R}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+ \\ & \frac{\varepsilon\varepsilon_1(g''^2u^4-c^2(ug''+g')^2-c^2)}{WR}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{5.8}$$

En utilisant (4.6) et (5.8), on obtient

$$\begin{cases} \Delta^{III}(u\sinh v)=P(u)\cosh v+Q(u)\sinh v \\ \Delta^{III}(u\cosh v)=Q(u)\cosh v+P(u)\sinh v \\ \Delta^{III}(cv+g(u))=T(u) \end{cases} \tag{5.9}$$

où

$$\begin{aligned} P(u) = & -\frac{\varepsilon W^2}{R^3}\big(\varepsilon cW^2u^2g'''(c^2-g'^2u^2)-cg''^3u^7+c(1+2g'^2)g'g''^2u^6 \\ & +c^3g''^3u^5+c^3g'g''^2u^4+c^3(7g'^2+5)g''u^3+3c^3(1+g'^2)g'u^2 \\ & -4c^5g''u-2c^5g'\big), \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} Q(u) = & -\frac{\varepsilon W^2}{R^3}\big(\varepsilon W^2u^3g'g'''(g'^2u^2-c^2)+2c^4g'^2u+4c^4g''g'u^2 \\ & -3c^2(g'^2+g'^4)u^3-c^2(7g'^3g''+5g''g')u^4-c^2g'^2g''^2u^5 \\ & -c^2g''^3g'u^6-(2g'^4g''^2+g'^2g''^2)u^7+g''^3g'u^8\big), \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} T(u) = & -\frac{\varepsilon W^2}{R^3}\big(\varepsilon W^2ug'''(c^2-g'^2u^2)^2+(-3g'^2-2)g'^3g''^2u^7- \\ & c^2g''^3u^6+c^2(3g'^2-1)g'g''^2u^5+c^2(c^2g''^2-7g'^2-9g'^4)g''u^4 \\ & +3c^2(c^2g''^2-g'^4-g'^2)g'u^3+c^4(15g'^2+4)g''u^2 \\ & +2c^4(2g'^2+1)g'u-3c^6g''\big). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Remarque 5.1 *Remarquons que*

$$ug'P(u)+cQ(u) = 0 \tag{5.13}$$

$$(c^2-g'^2u^2)P(u)-cuT(u) = \varepsilon cW\left(\frac{2H}{K_G}\right). \tag{5.14}$$

En utilisant (5.9) et (5.1) pour la surface hélicoidale décrite par (4.6), on obtient le système

$$\begin{cases} (P(u) - a_{12}u)\cosh v + (Q(u) - a_{11}u)\sinh v - a_{13}(cv + g) = 0 \\ (Q(u) - a_{22}u)\cosh v + (P(u) - a_{21}u)\sinh v - a_{23}(cv + g) = 0 \\ a_{31}u\sinh v + a_{32}u\cosh v + a_{33}(cv + g) - T(u) = 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Les fonctions cos et sin sont linéairement indépendants, alors on obtient

$$a_{32} = a_{31} = a_{33} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

Posons $a_{11} = a_{22} = \lambda$ et $a_{12} = a_{21} = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Par suite, le système (5.15) devient

$$\begin{cases} Q(u) = \lambda u \\ P(u) = \mu u \\ T(u) = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Ainsi, le problème de la classification des surfaces hélicoidales non dégénérées M^2 vérifiant (5.1) est réduit à la résolution du système d'équations différentielles ordinaires. Etudions (5.16) suivant les valeurs des constantes λ et μ.

A) Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, le système différentiel (5.16) se réduira dans ce cas à :

$$\begin{cases} g'P(u) = 0 \\ P(u) = \mu u \\ T(u) = 0. \end{cases}$$

Mais dans ce cas $g' = 0$ et de (5.10) il vient $P(u) = 0$. Ceci est une contradiction, donc il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans ce cas.

B) Si $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$, le système (5.16) est réduit à

$$\begin{cases} g'P(u) = -\lambda c \\ P(u) = 0 \\ T(u) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, on aboutit à une contradiction. Dans ce cas, il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans $\mathbb{E}^3_1$.

C) Si $\lambda = \mu = 0$, le système (5.16) est réduit à

$$\begin{cases} P(u) = 0 \\ Q(u) = 0 \\ T(u) = 0. \end{cases}$$

En substituant (5.3) dans (5.11) on trouve $Q(u) = 0$. En utilisant (5.14), on obtient $P(u) = 0$ et $T(u) = 0$. L'équation (5.14) donne $H = 0$, ce qui signifie que ces surfaces sont minimales.

D) Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, le système (5.16) est réduit à

$$g(u) = -\frac{\lambda c}{\mu}\ln(u) + k, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{5.17}$$

En substituant (5.17) dans (5.11) on trouve $Q(u) = 0$. On conclut que $\lambda = \mu = 0$. Ceci contredit notre supposition, et alors il n'existe pas de surfaces hélicoidales non dégénérées M^2 de $\mathbb{E}^3_1$ dans ce cas.

Finalement, on peut énoncer le

Théorème 5.1 *Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}^3_1$ une immersion isométrique donnée par (4.6). Alors $\Delta^{III} r = Ar$, si et seulement si la surface M^2 est minimale.*

Théorème 5.2 *Si $\frac{2H}{K_G} = \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, alors*

$$\Delta^{III} r(u,v) = \frac{2H}{K_G}N.$$

Preuve. En dérivant $\frac{2H}{K_G}$, on obtient

$$\begin{aligned} W^4 u g'''(u^2 g'^2 - c^2) \;=\;& 14c^2 g'^2 g'' u^4 + 2c^2 g' g''^2 u^5 + g' g''^2 u^7 - 3c^2 g'^3 g''^2 u^5 \\ & +4g'^3 g''^2 u^7 + 3g'^5 g''^2 u^7 - 3c^4 g' g''^2 u^3 + 3c^2 g' u^3 \\ & +6c^2 g'^3 u^3 - 4c^4 g' u - 8c^4 g'' u^2 + 5c^2 g'' u^4 + 3c^2 g'^5 u^3 \\ & -4c^4 g'^3 u - 15c^4 g'' g'^2 u^2 + 3c^6 g'' + 2c^2 g''^3 u^6 - g''^3 u^8 \\ & +9c^2 g'^4 g'' u^4 - c^4 g''^3 u^4. \end{aligned} \tag{5.18}$$

En substituant (5.18) dans (5.10) on trouve

$$\begin{aligned} P(u) \;=\;& -\frac{1}{R^3}\big(- 2c^3 g'^2 g'' u^5 - 2c^3 g' g''^2 u^6 + 2c^3 g'^3 g''^2 u^6 - c g''^2 g'^3 u^8 \\ & -c g''^2 g'^5 u^8 + 2c^5 g' g''^2 u^4 - c^5 g' u^2 - c^5 g'' u^3 - c^5 g'^3 u^2 + c^7 u g'' \\ & +4c^5 g'' g'^2 u^3 - 2c^3 g'^4 g'' u^5 - c g'^2 g''^3 u^9 + c^3 g'^2 g''^3 u^7 + 2c^7 g'\big). \end{aligned} \tag{5.19}$$

De (5.18) et (5.12) il vient

$$\begin{aligned} T(u) \;=\;& -\frac{1}{R^3}\big(- 2c^2 g'^2 g'' u^6 - 2c^2 g' g''^2 u^7 + 2c^2 g'^3 g''^2 u^7 - g''^2 g'^3 u^9 \\ & -g''^2 g'^5 u^9 + 2c^4 g' g''^2 u^5 - c^4 g' u^3 - c^4 g'' u^4 - c^4 g'^3 u^3 + c^6 u^2 g'' \\ & +4c^4 g'' g'^2 u^4 - 2c^2 g'^4 g'' u^6 - g'^2 g''^3 u^{10} + c^2 g'^2 g''^3 u^8 + 2c^6 u g'\big). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Si on combine (5.19) et (5.20) on arrive à

$$cT(u) = uP(u). \tag{5.21}$$

D'après (5.9), (5.13) et (5.21), on a

$$\begin{aligned}
\Delta^{III} r(u,v) &= (\Delta^{III}(u\sinh v), \Delta^{III}(u\cosh v), \Delta^{III}(cv+g(u))) \\
&= (P(u)\cosh v + Q(u)\sinh v, Q(u)\cosh v + P(u)\sinh v, T(u)) \\
&= -\frac{P(u)}{c}(ug'\sinh v - c\cosh v, ug'\cosh v - c\sinh v, -u) \\
&= -\frac{WP(u)}{c}N.
\end{aligned}$$

D'après (5.14) et (5.21), on a

$$-\frac{WP(u)}{c} = \frac{2H}{K_G}.$$

Par conséquent,

$$\Delta^{III} r(u,v) = \frac{2H}{K_G}N.$$

■

5.2 Surfaces hélicoidales de type III

Dans ce paragraphe, on étudie les surfaces hélicoidales non dégénérées M^2 de $\mathbb{E}_1^3$ de type III sans points paraboliques, qui vérifient la condition (5.1).

Supposons que la surface M^2 soit donnée par (4.23).

Les coefficients de la troisième forme fondamentale associée à M^2 sont

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{\varepsilon}{W^4}\left(u^4 g''^2 - c^2(ug''+g')^2 + c^2\right), \\
e_{12} &= \frac{-c}{W^2}(ug''+g'),\ e_{22} = \frac{1}{W^2}(u^2g'^2 + c^2).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Donc

$$\sqrt{|e|} = \frac{\varepsilon_1 R}{W^3},\ \varepsilon_1 = \pm 1,$$

où $R = u^3 g' g'' - c^2$ et $W = \sqrt{\varepsilon g_L(r_u \wedge_L r_v, r_u \wedge_L r_v)} = \sqrt{\varepsilon(u^2(1-g'^2) - c^2)}$.

La courbure moyenne H et la courbure de Gauss K_G sont

$$H = \frac{\left(u^2g'(1-g'^2) - 2c^2g' - ug''(c^2-u^2)\right)}{2W^3} = \frac{1}{2u}\left(\frac{u^2g'}{W}\right)' \tag{5.23}$$

et

$$K_G = \frac{\left(u^3g'g'' - c^2\right)}{W^4}.$$

Proposition 5.2 *Si $H = 0$, alors*

$$g(u) = \varepsilon \int \sqrt{\frac{a^2(u^2-c^2)}{\varepsilon u^4 + a^2u^2}}du + b, \quad \varepsilon = \pm 1,\ a, b \in \mathbb{R}. \tag{5.24}$$

Preuve. Si $H=0$, alors
$$u^2g' = aW,\ \ a\in\mathbb{R}. \tag{5.25}$$
L'équation (5.25) donne
$$g'^2 = \frac{a^2(u^2-c^2)}{\varepsilon u^4+a^2u^2}. \tag{5.26}$$
La solution générale de (5.26) est
$$g(u) = \varepsilon\int\sqrt{\frac{a^2(u^2-c^2)}{\varepsilon u^4+a^2u^2}}du+b, \quad \varepsilon=\pm1,\ \ a,b\in\mathbb{R}.$$

■

Comme la surface M^2 n'a pas de points paraboliques, on a
$$u^3g'g''-c^2\neq 0.$$

Supposons que $LN-M^2>0$ (on a le même résultat si $LN-M^2<0$).

D'après (5.22) et (5.7), on a
$$\begin{aligned}\Delta^{III} \;=\;& \frac{\varepsilon W^3}{R}\Big(\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{WR^2}\big(\varepsilon W^2u^3g'g'''(c^2+g'^2u^2)+(2g'^2-1)g'^2g''^2u^7+\\ & c^2(g'^2+1)g''^2u^5+c^2(4-6g'^2)g'g''u^4+c^2(3g'^2-3g'^4-c^2g''^2)u^3-\\ & 6c^4g'g''u^2+c^4(1-3g'^2)u\big)\frac{\partial}{\partial u}+\\ & \frac{\varepsilon\varepsilon_1c}{WR^2}\big(\varepsilon W^2ug'''(c^2+g'^2u^2)+g''^3u^6+g'g''^2u^5+\\ & (2g'^2-2g'^4-c^2g''^2)g''u^4-3c^2g'g''^2u^3+c^2(3-7g'^2)g''u^2+\\ & c^2(1-g'^2)g'u-2c^4g''\big)\frac{\partial}{\partial v}-\\ & \left(\frac{2\varepsilon_1Wc(ug''+g')}{R}\right)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}-\left(\frac{\varepsilon_1W(c^2+g'^2u^2)}{R}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\\ & \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_1(-g''^2u^4+c^2(ug''+g')^2-c^2)}{WR}\right)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\Big)\Big)\end{aligned} \tag{5.27}$$

En utilisant (5.27) et (4.23), on obtient
$$\begin{cases}\Delta^{III}(cv+g(u)) = T(u)\\ \Delta^{III}(u\cos v) = P(u)\cos v+Q(u)\sin v\\ \Delta^{III}(u\sin v) = -Q(u)\cos v+P(u)\sin v,\end{cases} \tag{5.28}$$

où
$$\begin{aligned}P(u) \;=\;& \frac{\varepsilon W^2}{R^3}\big(\varepsilon W^2u^3g'g'''(c^2+g'^2u^2)+g'g''^3u^8+(2g'^2-1)g'^2g''^2u^7\\ & -c^2g'g''^3u^6-c^2g'^2g''^2u^5+c^2(5-7g'^2)g'g''u^4+3c^2(1-g'^2)g'^2u^3\\ & -4c^4g'g''u^2-2c^4g'^2u\big),\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$
\begin{aligned}
Q(u) &= \frac{-\varepsilon W^2}{R^3}\big(\varepsilon c W^2 u^2 g'''(c^2+g'^2u^2) + c g''^3 u^7 + c(-1+2g'^2)g'g''^2u^6 \\
&\quad -c^3g''^3u^5 - c^3g'g''^2u^4 + (-7g'^2+5)c^3g''u^3 + 3c^3g'(1-g'^2)u^2 \\
&\quad -4c^5g''u - 2c^5g'\big),
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

$$
\begin{aligned}
T(u) &= \frac{\varepsilon W^2}{R^3}\big(\varepsilon W^2 u g'''(c^2+g'^2u^2)^2 + (3g'^5g''^2 - 2g'^3g''^2)u^7 + c^2g''^3u^6 + \\
&\quad (3c^2g'^3g''^2 + c^2g'g''^2)u^5 + (-c^4g''^3 + 7c^2g'^2g'' - 9c^2g'^4g'')u^4 + \\
&\quad (-3c^4g'g''^2 - 3c^2g'^5 + 3c^2g'^3)u^3 + (-15c^4g'^2g'' + 4c^4g'')u^2 + \\
&\quad (-4c^4g'^3 + 2c^4g')u - 3c^6g''\big).
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

Remarque 5.2 *Remarquons que*

$$
cuT(u) + (c^2+g'^2u^2)Q(u) = -cW\varepsilon\left(\frac{2H}{K_G}\right) \tag{5.32}
$$

$$
cP(u) + ug'Q(u) = 0. \tag{5.33}
$$

En utilisant (5.27) et (5.1) pour la surface hélicoidale décrite par (4.23), on obtient le système

$$
\begin{cases}
a_{12}u\cos v + a_{13}u\sin v + a_{11}(cv+g) = T(u) \\
(P(u) - a_{22}u)\cos v + (Q(u) - a_{23}u)\sin v - a_{21}(cv+g) = 0 \\
(Q(u) + a_{32}u)\cos v - (P(u) - a_{33}u)\sin v + a_{31}(cv+g) = 0.
\end{cases} \tag{5.34}
$$

Les fonctions cos et sin sont linéairement indépendants, alors on obtient

$$
a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0, \quad a_{22} = a_{33}, \quad a_{32} = -a_{23}.
$$

Posons $a_{22} = a_{33} = \lambda$ et $-a_{32} = a_{23} = \mu$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Par suite, le système (5.34) devient

$$
\begin{cases}
P(u) = \lambda u \\
Q(u) = \mu u \\
T(u) = 0.
\end{cases} \tag{5.35}
$$

Ainsi, le problème de la classification des surfaces hélicoidales non dégénérées M^2 vérifiant (5.1) est réduit à la résolution du système d'équations différentielles ordinaires. Etudions (5.35) suivant les valeurs des constantes λ et μ.

A) Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, le système différentiel (5.35) devient

$$
\begin{cases}
P(u) = 0 \\
Q(u) = \mu u \\
T(u) = 0.
\end{cases}
$$

Mais dans ce cas $g' = 0$ et de (5.30) il vient $Q(u) = 0$. Ceci est une contradiction, donc il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans ce cas.

B) Si $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$, le système (5.35) est réduit à

$$\begin{cases} g'Q(u) = -\lambda c \\ Q(u) = 0 \\ T(u) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, on aboutit à une contradiction. Dans ce cas, il n'existe pas de surfaces hélicoidales dans $\mathbb{E}_1^3$.

C) Si $\lambda = \mu = 0$, le système (5.35) est réduit à

$$\begin{cases} g'Q(u) = 0 \\ Q(u) = 0 \\ T(u) = 0. \end{cases}$$

En substituant (5.24) dans (5.29) on trouve $P(u) = 0$. En utilisant (5.32), on obtient $P(u) = 0$ et $T(u) = 0$. L'équation (5.32) donne $H = 0$, ce qui signifie que ces surfaces sont minimales.

D) Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, le système (5.35) est réduit à

$$g(u) = -\frac{\lambda c}{\mu} \ln(u) + k, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{5.36}$$

En substituant (5.36) dans (5.30) on trouve $Q(u) = 0$. On conclut que $\lambda = \mu = 0$. Ceci contredit notre supposition, et alors il n'existe pas de surfaces hélicoidales non dégénérées M^2 de $\mathbb{E}_1^3$ dans ce cas.

Finalement, on peut énoncer le

Théorème 5.3 *Soit $r : M^2 \to \mathbb{E}_1^3$ une immersion isométrique donnée par (4.23). Alors $\Delta^{III} r = Ar$, si et seulement si la surface M^2 est minimale.*

Théorème 5.4 *Si $\frac{2H}{K_G} = \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, alors*

$$\Delta^{III} r(u, v) = \frac{2H}{K_G} N.$$

Preuve. En dérivant $\frac{2H}{K_G}$, on obtient

$$\begin{aligned} W^4 u g'''(u^2 g'^2 + c^2) &= 14c^2 g'^2 g'' u^4 + 2c^2 g' g''^2 u^5 + g' g''^2 u^7 + 3c^2 g'^3 g''^2 u^5 \\ &\quad -4g'^3 g''^2 u^7 + 3g'^5 g''^2 u^7 - 3c^4 g' g''^2 u^3 - 3c^2 g' u^3 \\ &\quad +6c^2 g'^3 u^3 + 4c^4 g' u + 8c^4 g'' u^2 - 5c^2 g'' u^4 - 3c^2 g'^5 u^3 \\ &\quad -4c^4 g'^3 u - 15c^4 g'' g'^2 u^2 - 3c^6 g'' + 2c^2 g''^3 u^6 - g''^3 u^8 \\ &\quad -9c^2 g'^4 g'' u^4 - c^4 g''^3 u^4. \end{aligned} \tag{5.37}$$

En substituant (5.37) dans (5.30) on trouve

$$\begin{aligned} Q(u) &= -\frac{1}{R^3}\big(2c^3g'^2g''u^5 + 2c^3g'g''^2u^6 + 2c^3g'^3g''^2u^6 - cg''^2g'^3u^8 \\ &\quad +cg''^2g'^5u^8 - 2c^5g'g''^2u^4 - c^5g'u^2 - c^5g''u^3 + c^5g'^3u^2 + c^7ug'' \\ &\quad -4c^5g''g'^2u^3 - 2c^3g'^4g''u^5 - cg'^2g''^3u^9 + c^3g'^2g''^3u^7 + 2c^7g'\big). \end{aligned} \tag{5.38}$$

De (5.37) et (5.31) il vient

$$\begin{aligned} T(u) &= -\frac{1}{R^3}\big(2c^2g'^2g''u^6 + 2c^2g'g''^2u^7 + 2c^2g'^3g''^2u^7 - g''^2g'^3u^9 \\ &\quad +g''^2g'^5u^9 - 2c^4g'g''^2u^5 - c^4g'u^3 - c^4g''u^4 + c^4g'^3u^3 + c^6u^2g'' \\ &\quad -4c^4g''g'^2u^4 - 2c^2g'^4g''u^6 - g'^2g''^3u^{10} + c^2g'^2g''^3u^8 + 2c^6ug'\big). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Si on combine (5.38) et (5.39) on arrive à

$$cT(u) = -uQ(u). \tag{5.40}$$

D'après (5.28), (5.33) et (5.40), on a

$$\begin{aligned} \Delta^{III}r(u,v) &= (\Delta^{III}(cv + g(u)), \Delta^{III}(u\cos v), \Delta^{III}(u\sin v)) \\ &= (T(u), P(u)\cos v + Q(u)\sin v, -Q(u)\cos v + P(u)\sin v) \\ &= -\frac{Q(u)}{c}(u, ug'\cos v - c\sin v, ug'\sin v + c\cos v) \\ &= \frac{WQ(u)}{c}N. \end{aligned}$$

D'après (5.32) et (5.40), on a

$$\frac{WQ(u)}{c} = \frac{2H}{K_G}.$$

Par conséquent,

$$\Delta^{III}r(u,v) = \frac{2H}{K_G}N.$$

■

Bibliographie

[1] Ch. Baba-Hamed, M. Bekkar, Helicoidal surfaces in the three-dimensional Lorentz - Minkowski space satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$. Int. J. Contemp. Math. Sci. 7 (2009), 311 - 327.

[2] Ch. Baba-Hamed, M. Bekkar and H. Zoubir, Translation Surfaces in the Three-Dimensional Lorentz-Minkowski Space Satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 4, (2010), no. 17, 797-808.

[3] Ch. Baba-Hamed, M. Bekkar, Helicoidal surfaces in the three-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta^{II} r_i = \lambda_i r_i$, J. Geom. 100 (2011), 1-10.

[4] C. Baikoussis and D. E. Blair, On the Gauss map of ruled surfaces, Glasgow Math. J. 34 (1992), 355-359.

[5] C. Baikoussis and L. Verstraelen, On the Gauss map of helicoidal surfaces, Rend. Sem. Mat. Messina Ser. II 16 (1993), 31-42.

[6] C. Baikoussis, B-Y. Chen and L. Verstraelen, Ruled surfaces and tubes with finite type Gauss maps, Tokyo J. Math., 16 (1993), 341-349.

[7] M. Bekkar, H. Zoubir, Surfaces of revolution in the 3-dimensional Lorentz - Minkowski space satisfying $\Delta x^i = \lambda^i x^i$, Int. J. Contemp. Math. Sciences. 3 (2008), 1173-1185.

[8] M. Bekkar and B. Senoussi, Factorable surfaces in the three-dimensional Euclidean and Lorentzian spaces satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, J. Geom. 96 (2012), 17 - 29.

[9] M. Bekkar and B. Senoussi, Translation surfaces in the 3-dimensional space satisfying $\Delta^{III} r_i = \mu_i r_i$, J. Geom. 103 (2012), 367-374.

[10] Chr. Beneki, G. Kaimakamis, B.J. Papantoniou, Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space, J. Math. Appl. 275 (2002) 586-614.

[11] B.-Y. Chen, Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific, Singapore, (1984).

[12] B.-Y. Chen, Finite type submanifolds and generalizations, University of Rome, Rome, (1985).

[13] B.-Y. Chen, Surfaces of finite type in Euclidean-3-space, Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B, 39 (1987), 243-254.

[14] B.-Y. Chen and H. S. Lue, Some 2-type submanifolds and applications, Ann. Fac. Sc. Toulouse Math. Ser. V , 9 (1988), 121-131.

[15] B.-Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen and L. Vrancken, Ruled surfaces of finite type, Bull. Austral. Math. Soc., 42 (1990), 447-453.

[16] B.-Y. Chen, Submanifolds of finite type in hyperbolic spaces, Chinese J. Math., 20 (1992), 5-21.

[17] B.-Y. Chen and S. Ishikawa, On classification of some surfaces of revolution of finite type, Tsukuba J. Math., 17 (1993), 287-298.

[18] B.-Y. Chen, A report of submanifolds of finite type, Soochow J. Math., Vol. 22, No. 2, (1996), 117-337.

[19] B.-Y. Chen, M. Choi and Y. H. Kim, Surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map, J. Korean Math. Soc., 42 (2005), No. 3, 447-455.

[20] M. Choi, Y. H. Kim, Characterization of the helicoid as ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map, Bull. Korean Math. Soc., 38 (2001), No. 4, 753-761.

[21] M. Choi, D.-S. Kim and Y. H. Kim, Helicoidal surfaces with pointwise 1-type Gauss map, J. Korean Math. Soc., 46 (2009), No. 1, 215-223.

[22] M. Choi, Y. H. Kim, H. Liu and D. W. Yoon, Helicoidal surfaces and their Gauss map in Minkowski 3-space, Bull. Korean Math. Soc., 47 (2010), No. 4, 859-881.

[23] M. Choi, Y. H. Kim and D. W. Yoon, Some classification of surfaces of revolution in Minkowski 3-space, J. Geom. 104 (2013), 85-106.

[24] S. M. Choi, On the Gauss map of ruled surfaces in a 3-dimensional Minkowski space, Tsukuba J. Math. 19 (1995), 285-304.

[25] S. M. Choi, On the Gauss map of surfaces of revolution in a 3-dimensional Minkowski space, Tsukuba J. Math. 19 (1995), 351-367.

[26] F. Dillen, J. Pas and L. Verstraelen, On the Gauss map of surfaces of revolution, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 18 (1990), 239-246.

[27] F. Dillen, J. Pas and L. Verstraelen, On surfaces of finite type in Euclidean-3-space, Kodai Math. J., 13 (1990), 10-21.

[28] F. Dillen, Ruled submanifolds of finite type, Proc. Amer. Math. Soc., 114 (1992), 795-798.

[29] F. Dillen, I. Van de Voestijne, L. Verstraelen and J. Walrave, Ruled surfaces of finite type in 3-dimensional Minkowski space, Results Math., 27 (1995), 250-255.

[30] F. Dillen, W. Sodsiri, Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space, J. Geom. 83 (2005), 10-21.

[31] M. P. Do Carmo, Differential Geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ,(1976).

[32] J. Fenghui, H. H. Zhong, A kind of helicoidal surfaces in 3-dimensional Minkowski space, J. Math. Anal. Appl. 304 (2005) 632-643.

[33] A. Ferràndez and P. Lucas, Null 2-type hypersurfaces in a Lorentz space, Canad. Math. Bull., 35 (1992), 354-360.

[34] O. J. Garay, On a certain class of finite type surfaces of revolution, Kodai Math. J. 11(1) (1988) 25-31.

[35] E. Güler, Y. Yayh, H.H. Hacisalihoğlu, Bour's theorem on the Gauss map in 3-Euclidean space, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. 39 (2010), 515 - 525.

[36] T. Hasanis and T. Vlachos, Hypersurfaces of $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfying $x = Ax + B$, J. Austral. Math. Soc., A 53 (1992),377-384.

[37] G. Kaimakamis, B. J. Papantoniou, Surfaces of revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta^{II}\vec{r} = A\vec{r}$. J. Geom. 81 (2004), 81-92.

[38] G. Kaimakamis, B.J. Papantoniou, K. Petoumenos, Surfaces of revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$ satisfying $\Delta^{III}\overrightarrow{r} = A\overrightarrow{r}$, Bull. Greek. Math. Soc. 50, (2005), 76-90.

[39] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Vol. I, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, (1963).

[40] W. Kühnel, Differential geometry curves - surfaces - manifolds, 2nd edition, Student mathematical library V 16 (2005)

[41] C. W. Lee, Y. H. Kim and D. W. Yoon, Ruled surfaces of non-degenerate third fundamental forms in Minkowski 3-spaces. Applied Mathematics and Computation 216 (2010) 3200–3208.

[42] H. L. Liu and G. L. Liu, On the Gauss map of rotation surfaces in a 3-dimensional Minkowski space, Kyushu J. Math., 48 (1994), 347-356.

[43] Yu, Y., Liu, H., The factorable minimal surfaces. Proceedings of the Eleventh International Workshop on Di . Geom. 11, 33-39 (2007)

[44] Meng, H., Liu, H., Factorable surfaces in 3- Minkowski space. Bull. Korean Math. Soc. 46 (2009), No. 1, pp. 155–169

[45] B. O'Neill, Elementary differential geometry, 2nd edition, Academic Press, Orlando, FL, (1997).

[46] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Van Nostrand Reinhold, New York, (1969).

[47] B. Senoussi and M. Bekkar, Helicoidal surfaces in the 3-dimensional Lorentz - Minkowski space satisfying $\Delta^{II}r = Ar$, Kyushu J. Math. 67 (2013), 323 - 338.

[48] B. Senoussi and M. Bekkar, Helicoidal surfaces in the 3-dimensional Lorentz - Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$ satisfying $\Delta^{III}r = Ar$, Tsukuba J. Math. 37 (2013), 339 - 353.

[49] S. Stamatakis, H. Al-Zoubi, Surfaces of revolution satisfying $\Delta^{III}x = Ax$, J. Geom. Graph. 14 (2010), 181-186.

[50] T. Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan 18 (1966) 380-385.

[51] I. Van. De Woestijne, Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space, Geometry and Topology of Submanifolds ; Vol. II,World Scientific, Singapore, (1990), 344-369.

[52] D. W. Yoon, On the Gauss map of translation surfaces in Minkowski 3-space, Taiwanese Journal of Mathematics (2002) 389-398.