

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique



Mémoire de Master en Mathématiques

Option : Analyse harmonique et EDP

Thème

**Les surfaces minimales réglées dans l'espace de
Heisenberg H_3**

Présenté par

Harrati Hanane

Les membres de jury

Mme	BENDAHDANE . H	Président	U. MOSTAGANEM
Mme	OULDALI . S	Examineur	U. MOSTAGANEM
Mr	BELARBI . L	Encadreur	U. MOSTAGANEM.

Soutenu le 26/05/2015

Année Universitaire 2014 -2015

Table des matières

Remerciments	i
Résumé	ii
Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Variétés différentiables, généralités	2
1.1.1 Définitions des Variétés	2
1.1.2 Espaces tangents	4
1.1.3 Champs de vecteurs	4
1.2 Variétés Riemanniennes	5
1.2.1 Métrique Riemannienne	5
1.2.2 Connexion de Levi-Civita	7
1.3 Groupes de Carnot	9
1.3.1 Groupes de Lie	9
1.3.2 Algèbre de Lie	10
1.3.3 Le groupe de Carnot	11
2 L'espace de Heisenberg H_3	13
2.1 Groupe de Heisenberg H_3	13
2.1.1 Le groupe matriciel modèle de H_3	13

2.1.2	Courbure et connexion de Levi-Civita de H_3	14
2.1.3	Géodésiques de H_3	15
3	Les surfaces minimales réglées dans l'espace de Heisenberg H_3	18
3.1	Les surfaces minimales réglées par des droites géodésiques dans H_3	19
3.2	Les surfaces minimales réglées par des droites.	24
	Conclusion	27
	Bibliographie	28

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur BELARBI LAKEHAL. Son encadrement a été exceptionnel. Je le remercie chaleureusement pour son écoute, sa patience pour ses conseils toujours avisés et ses remarques pertinentes, ainsi qu'à l'intérêt qu'il a porté à toutes mes questions.

Je voudrais aussi remercier chacun des membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce modeste travail.

J'adresse également mes remerciements à tous les enseignants qui nous ont donné les bases de la science.

Je voudrais remercier mon père Abdelkader et ma tendre mère pour leur soutien et ses encouragements. Et je tiens à remercier mes frères Zakaria et Abd Essalam, ma sœur Abassia, sans oublier mon grand père (Mohammed et Abed).

Pour terminer, je tiens aussi à remercier tous mes camarades qui m'ont encouragée.

Merci à toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce travail.

RÉSUMÉ

Ce travail est consacré à l'étude de la surface minimale réglée dans l'espace de Heisenberg H_3

Ce mémoire est réparti en trois chapitres

Le premier chapitre est réservé aux préliminaires des éléments mathématiques de base en géométrie. Nous commencerons par rappeler les notions de base dans les variétés différentiables : il s'agit de la définition des variétés topologiques et différentielles, espaces tangents, champ de vecteurs. Nous présenterons succinctement une des métriques riemanniennes et la connexion de Levi-Civita. Nous donnerons aussi la définition d'un groupe de Lie et d'un algèbre de Lie ainsi que le groupe de Carnot, et enfin groupes nilpotentes.

Dans le deuxième chapitre nous rappellerons les notations sur l'espace de Heisenberg H_3 . Le but de ce chapitre est d'introduire le groupe Heisenberg H_3 : le groupe matriciel modèle de H_3 , courbure et connexion de Levi-Civita, géodésiques de H_3 .

Le troisième chapitre constitue la partie propre de notre travail. Elle sera consacrée à l'étude des surfaces minimales réglées dans l'espace de Heisenberg H_3 . Nous commencerons par les surfaces minimales réglées par des droites géodésiques dans H_3 . Nous donnerons aussi les surface minimale réglées par des droites.

INTRODUCTION

Ce mémoire présente les résultats de monsieur M.Bekkar [1], sur l'étude des surfaces minimales dans l'espace de Heisenberg noté H_3 . Cet espace homogène intéresse les géomètres par le fait qu'il admet une assez grande mobilité (car son groupe d'isométries est de dimension quatre) et qu'il admet un sous groupe simplement transitif d'isométries qui est nilpotent.

Certaines surfaces minimales de l'espace Euclidien restent encore minimales dans l'espace H_3 , par exemple les plans de l'espace Euclidien sont minimaux dans l'espace de Heisenberg. L'espace de Heisenberg qu'on note H_3 est l'espace numérique $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique Riemannienne (qui est une métrique invariante à gauche sur le groupe de Lie H_3)

$$g_{H_3} = dx^2 + dy^2 + (dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy))^2.$$

C'est un espace homogène qui jouit de la plus grande mobilité après l'espace Euclidien. Son groupe d'isométries est de dimension quatre.

La composante connexe de l'identité, qu'on notera G ; est le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\cos \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ A & B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où θ, a, b, c sont des réels et

$$A = \frac{1}{2}(a \sin \theta - b \cos \theta), \quad B = \frac{1}{2}(a \sin \theta + b \cos \theta)$$

Ce mémoire est réparti en trois chapitres, le premier chapitre est consacré à donnés quelques bases sur les variétés différentiables, Variétés Riemanniennes, et Groupes de Carnot.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons les nappes géométriques (paramétrées, réglées et de révolutions).

Dans le dernier chapitre, nous procèderons à l'étude des surfaces minimales dans l'espace de Heisenberg H_3 . Nous présenterons deux cas : le premier étant les surface minimale réglées par des droites géodésiques dans H_3 , et le deuxième, les surfaces minimales réglées par des droites.

Préliminaires

1.1 Variétés différentiables, généralités

1.1.1 Définitions des Variétés

La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.1 (Variétés topologiques) [9] *Une variété topologique est un espace topologique M séparé et à chaque point $p \in M$, il existe un ouvert U de M contenant p , et un homéomorphisme*

$$\phi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

Où W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1.2 [9] *Soit un ensemble non vide M . Une topologie sur M est une famille ϑ de sous-ensembles de M telle que les conditions suivantes sont vérifiées*

$A_1 : \emptyset \in \vartheta$ et $X \in \vartheta$, ($\emptyset$ est l'ensemble vide),

$A_2 : V_1 \dots V_n \in \vartheta \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n V_i \in \vartheta$,

$A_3 : V_1 \dots V_n \in \vartheta \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n V_i \in \vartheta$.

* Le couple (M, ϑ) est dit **espace topologique**, les $V \in \vartheta$ sont appelés les ouverts de la topologie.

* Le couple (M, ϑ) est dit **espace de Hausdorff** (espace séparé), si de plus, l'axiome

$A_4 : \forall p, q \in M$ avec $p \neq q$, il existe $V_p, V_q \in \vartheta$ tels que $p \in V_p, q \in V_q$ et $V_p \cap V_q = \emptyset$.

Définition 1.1.3 [9] Une carte de dimension n sur M est un couple (U, φ) tel que

- i U ouvert de M
- ii $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ homéomorphisme

Remarque 1.1.1 $f : E \rightarrow F$ homéomorphisme si f est continue, bijective et son inverse est continue.

Définition 1.1.4 [9] Soient (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) deux cartes de M on dit que (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ où $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est un difféomorphisme de $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ dans $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$.

Rappel $f : E \rightarrow F$ application. On dit que f est difféomorphisme si et seulement si f est continue, bijective et de classe C^∞ , et son inverse f^{-1} de classe C^∞

Définition 1.1.5 [9] Un atlas de dimension n sur M est un ensemble de cartes $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que la réunion des U_i soit M et toutes les cartes sont compatibles deux à deux.

Définition 1.1.6 [9] M est une variété différentiable de classe C^r ($r \geq 1$) si

- i M est une variété topologique
- ii Il existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M tel que pour tous i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

est difféomorphisme.

Exemple 1.1.1 La sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est une variété différentiable de dimension 2, telle que $U_1 = S^2 - \{(0, 0, 1)\}$, $U_2 = S^2 - \{(0, 0, -1)\}$ et on définit les difféomorphismes φ_1 et φ_2 comme

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \varphi_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \varphi_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right) \end{aligned}$$

Exemple 1.1.2 Le Tore de révolution : $T^2 = S^1 \times S^1$ est une variété différentiable de dimension 2. telle que $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

1.1.2 Espaces tangents

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ .

Définition 1.1.7 [9] *On définit une courbe différentiable sur M de classe C^∞ comme une application*

$$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

est de classe C^∞ .

Définition 1.1.8 [9] *On appelle vecteur tangent à γ en m si $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R} \rightarrow M$ une courbe sur M tel que $\gamma(0) = m$ et la fonction $\gamma'(0) : D \subset \mathcal{F}(m) \rightarrow \mathbb{R}$ définit par*

$$\gamma'(0)(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} /_{t=0}$$

où $\mathcal{F}(m) = \{f : v_m \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^\infty\}$ l'algèbre des fonction différentiables sur le voisinage v_m d'un point m .

Définition 1.1.9 [9] *Sur les courbes différentiables $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R} \rightarrow M$, on définit une relation d'équivalence*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_1'(0)(f) = \gamma_2'(0)(f) \text{ pour tout } f \text{ de } D \subset \mathcal{F}(m).$$

Cette relation signifie qu'on considère deux courbes γ_1 et γ_2 comme équivalentes si elles ont le même vecteur tangent en 0 dans $\mathbb{R}^n$, sur n'importe quelle carte locale.

Définition 1.1.10 [9] *L'espace tangent en p à M , que l'on note $T_p M$, est l'ensemble des classes d'équivalences dans l'ensemble des courbes γ pour cette relation.*

1.1.3 Champs de vecteurs

Définition 1.1.11 [9] *Soit U un ouvert de M ; on appelle champ de vecteur de classe C^p sur U toute application*

$$X : U \rightarrow TU = \cup_{m \in U} T_m U \text{ pour tout } m \in U$$

On note $\Gamma^p(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs C^p sur U .

Définition 1.1.12 [9] *On définit la somme de deux champs de vecteurs comme étant le champ de vecteur*

$$(X + Y)(m) = X(m) + Y(m)$$

Et la multiplication par une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ comme

$$(f.X)(m) = f(m)X(m).$$

Remarque 1.1.2 *Le produit de deux champs de vecteurs X et Y n'est pas un champ de vecteur.*

Exemple 1.1.3 *Dans $\mathbb{R}^2$, si $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ alors $XY = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.*

1.2 Variétés Riemanniennes

1.2.1 Métrique Riemannienne

Définition 1.2.1 [9] *Une métrique Riemannienne sur M est une application qui à chaque couple de vecteur $(X, Y) \in T_m M$ donnée un scalaire $g_m(X, Y) \in \mathbb{R}$ tel que les conditions suivantes sont vérifiées*

1 Pour tout $m \in M$ l'application

$$\begin{aligned} g_m : T_m M \times T_m M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto g_m(X, Y), \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

2 Les coefficients g_{ij} dans chaque représentation locale

$$g_m = \sum_{i,j} g_{ij}(m) dx_i \otimes dx_j.$$

Sont des fonctions différentiables.

Définition 1.2.2 [9] *On appelle variété Riemannienne toute variété différentiable munie d'une métrique Riemannienne. Noté (M, g) .*

Notation

* Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M tel que $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

$$\text{alors on a : } g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j$$

* Etant donnée une variété Riemannienne (M, g) on définit

a) La longueur d'un vecteur $X \in T_m M$ est défini par

$$\|X\|_g = \sqrt{g(X, X)}$$

b) L'angle entre les deux champs de vecteurs X et Y est donnée comme

$$\cos \beta = \frac{g(X, Y)}{\|X\| \|Y\|}; \quad X, Y \text{ non nuls.}$$

Remarque 1.2.1 Soit (Ω_2, φ_2) est une autre carte de M au voisinage de m avec $\varphi_2^{-1} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ alors on a

$$g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \sum_{k,h} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \times \frac{\partial x_h}{\partial y_j} \times g\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_h}\right)$$

Exemple 1.2.1 (Métrique euclidienne)

1 On a $M = \mathbb{R}^4$ et $g = g_0$ où la métrique $(g_0)_{ij} = \delta_{ij}$ (matrice identité).

Soit $\mathbb{R}^n$ munit des coordonnées (x, y, z, t) , on choisit le repère orthonormé est $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t})$ pour la métrique euclidienne :

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $g_{11} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x})$, $g_{12} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, ..., $g_{22} = (\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y})$, ..., $g_{24} = (\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t})$, ..., $g_{44} = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t})$.

2 Le demi plan supérieur de Poincaré $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ avec la métrique :

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une variété riemannienne.

1.2.2 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.2.3 [9] Soit M une variété différentiable est une application ∇ tel que

$$\begin{aligned} \nabla &: \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

on dit que ∇ est un connexion si elle vérifie les conditions suivantes :

1 ∇ est $\mathbb{R}$ -bilinéaire.

2 Pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$; on a

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \text{ et } \nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y.$$

Exemple 1.2.2 Soient X et Y deux champs de vecteurs tel que : $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, on définit une connexion linéaire ∇ sur $\mathbb{R}^n$ comme

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} e_j.$$

Notons que cette connexion vérifie aussi

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) e_j = [X, Y],$$

et

$$Z.g_{\mathbb{R}^n}(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n \left(Z_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} Y_j - Z_i X_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) = g_{\mathbb{R}^n}(\nabla_Z X, Y) + g_{\mathbb{R}^n}(X, \nabla_Z Y).$$

Théorème 1.2.1 [9] Sur tout variété Riemannienne (M^n, g) , il existe une unique connexion linéaire ∇ telle que pour tout $(X, Y, Z) \in \Gamma(M)^3$ on a

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= [X, Y]. \\ Z.g(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

∇ est appelée connexion de Levi-Civita de la métrique g .

Symboles de Christoffel Soit (Ω, φ) une carte locale de M . On définit sur $U = \varphi(\Omega)$ des fonction

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

où les coefficients g_{ij} sont les coefficients de métrique g dans la carte et les coefficients g^{ij} sont ceux de la matrice $(g_{ij})^{-1}$, on a alors

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \forall i, j.$$

Les fonction Γ_{ij}^k sont appelées les symboles de Christoffel de la métrique g dans la carte (Ω, φ) .

Exemple 1.2.3 Si $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ sont deux champs de vecteur alors

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n X_i Y_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

Remarque 1.2.2 Pour tout (i, j, k) on a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, car

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] &= 0 \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_k \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Exemple 1.2.4 Dans la carte $(\mathbb{R}^3, Id_{\mathbb{R}^3})$ on a

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour tout (i, j, k) .

Définition 1.2.4 [9] Soit (M, g) un variété riemannienne muni d'un connexion de Levi-Civita.

Le tenseur de courbure R est un tenseur de type $(3, 1)$, définie par

$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) Z.$$

Le tenseur de courbure s'exprime en fonction des Symboles de Christoffel

$$R_{lij}^k = \frac{\Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m)$$

Remarque 1.2.3 Si $M = \mathbb{R}^n$ alors $R(X, Y)Z = 0$

Proposition 1.2.1 Le tenseur R est bilinéaire. soit $X_1, X_2 \in \Gamma(M)^2; \forall Y, Z \in \Gamma(M); \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} :$

- 1) $R(\alpha X_1 + \beta X_2, Y)Z = \alpha R(X_1, Y)Z + \beta R(X_2, Y)Z$
- 2) $R(X, \alpha Y_1 + \beta Y_2)Z = \alpha R(X, Y_1)Z + \beta R(X, Y_2)Z$
- 3) $R(X, Y)(\alpha Z_1 + \beta Z_2) = \alpha R(X, Y)Z_1 + \beta R(X, Y)Z_2.$

Proposition 1.2.2 Soit (M, g) un variété riemannienne. On pose $\langle R(X, Y)Z; T \rangle = g(R(X, Y)Z; T), \forall X, Y, T \in \Gamma(M) :$

- 1) $\langle R(X, Y)Z; T \rangle = -\langle R(Y, X)Z; T \rangle$
- 2) $\langle R(X, Y)Z; T \rangle = -\langle R(X, Y)T; Z \rangle$
- 3) $\langle R(X, Y)Z; T \rangle = -\langle R(Z, T)X; Y \rangle$
- 4) $\langle R(X, Y)Z; T \rangle = \langle R(Y, Z)X; T \rangle + \langle R(Z, X)Y; T \rangle = 0.$

Définition 1.2.5 [9] Soit (M, g) une variété riemannienne, pour tout $p \in M$ et tout couple $(X, Y) \in \Gamma(M) = T_p M$, de vecteurs linéairement indépendants, on définissants

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y; X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

On appelle courbure sectionnelle de M .

1.3 Groupes de Carnot

1.3.1 Groupes de Lie

Définition 1.3.1 [9] Un groupe de Lie est une variété différentiable de classe C^∞ muni d'une structure de groupe, telle que l'application produit

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g.h, \end{aligned}$$

et dont l'inverse

$$\begin{aligned} inv : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

sont de classe C^∞ .

Proposition 1.3.1

- 1 Le produit direct de deux groupes de Lie est un groupe de Lie.
- 2 Tout sous groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie

Exemple 1.3.1

- 1) Le groupe $\mathbb{R}^*$ est un groupe de Lie réel de $\dim = 1$
- 2) Le groupe $\mathbb{C}^n$ est un groupe de Lie complexe de dimension n .

Lemme 1.3.1 Dans un groupe de Lie G , les translations à gauche :

$$L_g : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow gx$$

et à droite

$$R_g : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow xg^{-1}$$

L_g et R_g sont des difféomorphismes de classe C^∞

1.3.2 Algèbre de Lie

Définition 1.3.2 [9] **Crochet de Lie** Soient X et Y deux champs de vecteurs sur U et pour toute fonction $f \in C^\infty(U)$, on définit le champ de vecteur, noté $[X, Y]$ par :

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

et pour les coordonnées locales (x_i) sur U :

$$[X, Y](f) = \sum_i \sum_j \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Proposition 1.3.2 Soient X, Y, Z des champs de vecteurs, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions différentiables alors

- 1 $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha [X, Z] + \beta [Y, Z]$.
- 2 $[X, Y] = -[Y, X]$.
- 3 $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.
- 4 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Démonstration Les Propositions 1 et 2 sont évidentes

- De la troisième formule de la proposition précédent on a

Soit $\Psi \in C^\infty(U)$,

$$\begin{aligned}
 [fX, gY](\Psi) &= fX((gY)\Psi) - gY((fX)\Psi) \\
 &= f(Xg)(Y\Psi) + fgX(Y\Psi) - g(Yf)(X\Psi) - gfY(X\Psi). \\
 &= (fg[X, Y]) + f(Xg)Y - g(Yf)X\Psi.
 \end{aligned}$$

- La quatrième formule de la Proposition

On a par définition pour une telle fonction φ définie sur un voisinage d'un point de U , On a

$$\begin{aligned}
 [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ \\
 &\quad - ZXY + XZY + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Définition 1.3.3 [9] On définit Algèbre de Lie, l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche muni de l'opérateur crochet de Lie.

1.3.3 Le groupe de Carnot

Définition 1.3.4 [7] Un groupe de Carnot est la donnée d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N et d'une dérivation α sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}$. Ayant la propriété suivant : le sous espace $V_1 = \ker(\alpha - 1)$ engendre l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}$.

Définition 1.3.5 (Gradation d'un algèbre de Lie) [7] Soit G une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de G on not $[A, B]$ le sous-espace de G engendré par les crochets $[X, Y]$ ($X \in A$ et $Y \in B$) on pose

$$D(G) = [G, G].$$

C'est un idéal de G appelé idéal dérive. La suite centrale descendante $C^k(G)$ est définie par récurrence

$$C^1(G) = g; \quad C^k = [C^{k-1}(G), G]$$

On note aussi $C^k(G) = G^k$. Remarquons que $C^2(G) = D(G)$.

Définition 1.3.6 [7] *L'algèbre de Lie G est dit nilpotente s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $C^n(G) = \{0\}$*

Exemple 1.3.2 *L'algèbre de Lie de Heisenberg est une algèbre de Lie G de dimension 3. De base $\{X_1, X_2, X_3\}$, telle que*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifiant

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0$$

Ainsi $C^2(G) = \mathbb{k}X_3$, qui est le centre de G et $C^3(G) = \{0\}$, Donc G est nilpotente.

L'espace de Heisenberg H_3

2.1 Groupe de Heisenberg H_3

2.1.1 Le groupe matriciel modèle de H_3

Définition 2.1.1 (groupe de Heisenberg) [3] *Nous appelons groupe de Heisenberg, est le groupe de Lie réel de dimension 3. C'est le sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$; ces éléments sont des matrices de la forme :*

$$\begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; s, r, t \in \mathbb{R},$$

Alors

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}); s, r, t \in \mathbb{R} \right\}$$

On note $H_3(\mathbb{R})$ où simplement H_3 .

Proposition 2.1.1 [3] *Soient A et B deux matrices de H_3 telle que*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + b_1 & a_2 + b_2 + a_1 b_3 \\ 0 & 1 & a_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_1 a_3 - a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & b_1 b_3 - b_2 \\ 0 & 1 & -b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La bijection :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow H_3 \\ \Phi(x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

induit une structure d'une groupe non commutatif sur $\mathbb{R}^3$. On peut le voir comme $\mathbb{R}^3$ muni d'un loi de groupe (*) qui le rend non commutatif. cette loi est défini par

$$(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)) \quad \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

2.1.2 Courbure et connexion de Levi-Civita de H_3

Proposition 2.1.2 [8] *L'espace de Heisenberg H_3 est l'espace numérique $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique riemannienne*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz\right)^2$$

– Tenseur métrique associé donné par la matrice g_{ij}

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}; \quad \det(g_{ij}) = 1$$

– De plus, on peut donner $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormé de l'espace tangent de H_3 tel que :

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}; \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}; \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

– De cette manière, on obtient la relation $[e_1, e_2] = e_3$ et les autres commutatifs sont nuls $[e_1, e_3] = 0; [e_2, e_3] = 0$.

– Les Symboles de Christoffel sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{y}{2}, & \Gamma_{13}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{-x}{2}, & \Gamma_{23}^1 &= \frac{1}{2}, & \Gamma_{33}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-y}{2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{x}{4}, & \Gamma_{13}^2 &= \frac{-1}{2}, & \Gamma_{22}^2 &= 0, & \Gamma_{23}^2 &= 0, & \Gamma_{33}^2 &= 0, \\ \Gamma_{11}^3 &= \frac{-xy}{4}, & \Gamma_{12}^3 &= \frac{x^2 - y^2}{8}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{-x}{4}, & \Gamma_{22}^3 &= \frac{xy}{4}, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{-y}{4}, & \Gamma_{33}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Alors connexion de Levi-Civita de H_3 est :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0, & \nabla_{e_2} e_1 &= \frac{-e_3}{2}, & \nabla_{e_3} e_1 &= \frac{-e_2}{2}, \\ \nabla_{e_1} e_2 &= \frac{e_3}{2}, & \nabla_{e_2} e_2 &= 0, & \nabla_{e_3} e_2 &= \frac{e_1}{2}, \\ \nabla_{e_1} e_3 &= \frac{-e_2}{2}, & \nabla_{e_2} e_3 &= \frac{e_1}{2}, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0. \end{aligned}$$

– Le tenseur de courbure

$$R_{212}^1 = \frac{-3}{4}, \quad R_{313}^1 = \frac{1}{4}, \quad R_{323}^2 = \frac{-1}{4}.$$

2.1.3 Géodésiques de H_3

Notations Les géodésiques sont des courbes particulières dans un espace riemannien qui réalisent le minimum de distance entre deux points.

Définition 2.1.2 [9] Soit (M, g) une variété riemannienne, on dit que γ est un géodésique de (M, g) si et seulement si γ est C^2 vérifie

$$\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0$$

– Les équations des géodésique

Soit

$$\begin{array}{ccc} \gamma & : & I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \\ & & t \mapsto \dot{\gamma}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$$

– γ est géodésique de (M, g) si et seulement si

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0 \quad \forall i, j, k.$$

Définition 2.1.3 [8] Une courbe γ est une géodésique si et seulement si :

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$$

Exemple 2.1.1

1 Dans une sphère les grands cercles sont des géodésiques..

2 Les droites génératrices parallèles, les cercles horizontaux et les hélices sont les géodésiques de cylindre droit.

Définition 2.1.4 [8] Soit $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ une courbe dans H_3 paramétrisée par la longueur d'arc, L'accélération du champ de vecteur est donnée par :

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = (x'' + \omega(\dot{\gamma}) y') e_1 + (y'' + \omega(\dot{\gamma}) x') e_2 + (\omega(\dot{\gamma}))' e_3. \quad (2.1.1)$$

où ω est la forme de contact de H_3 définie par $\omega = dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy)$.

Démonstration On a

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(s) &= x'(s) \frac{\partial}{\partial x} + y'(s) \frac{\partial}{\partial y} + t'(s) \frac{\partial}{\partial t} \\ &= x'(s) e_1 + \frac{y(s)x'(s)}{2} \frac{\partial}{\partial t} + y'(s) e_2 - \frac{x(s)y'(s)}{2} \frac{\partial}{\partial t} + t'(s) \frac{\partial}{\partial t} \\ &= x'(s) e_1 + y'(s) e_2 + \left(t'(s) + \frac{x'(s)y'(s) - y'(s)x(s)}{2} \right) e_3.\end{aligned}$$

et de plus, on a

$$\omega(\dot{\gamma}) = dt \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + t' \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{y}{2} dx \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + t' \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{x}{2} dy \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + t' \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Alors, par un calcul simple on obtient

$$\omega(\dot{\gamma}) = t' + \frac{1}{2}(yx' - xy').$$

Ainsi

$$\dot{\gamma}(s) = x'(s) e_1 + y'(s) e_2 + \omega(\dot{\gamma}) e_3.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}(s)} \dot{\gamma}(s) &= \nabla_{(x'(s)e_1 + y'(s)e_2 + \omega(\dot{\gamma})e_3)} (x'(s) e_1 + y'(s) e_2 + \omega(\dot{\gamma}) e_3) \\ &= \nabla_{x'(s)e_1} x'(s) e_1 + \nabla_{y'(s)e_2} x'(s) e_1 + \nabla_{\omega(\dot{\gamma})e_3} x'(s) e_1 \\ &+ \nabla_{x'(s)e_1} y'(s) e_2 + \nabla_{y'(s)e_2} y'(s) e_2 + \nabla_{\omega(\dot{\gamma})e_3} y'(s) e_2 \\ &+ \nabla_{x'(s)e_1} \omega(\dot{\gamma}) e_3 + \nabla_{y'(s)e_2} \omega(\dot{\gamma}) e_3 + \nabla_{\omega(\dot{\gamma})e_3} \omega(\dot{\gamma}) e_3\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}(s)} \dot{\gamma}(s) &= x'^2(s) \nabla_{e_1} e_1 + x''(s) e_1 + x'(s) y'(s) \nabla_{e_1} e_2 + x'(s) \omega(\dot{\gamma}) \nabla_{e_1} e_3 \\ &+ x'(s) y'(s) \nabla_{e_1} e_1 + y^2(s) \nabla_{e_2} e_2 + y''(s) e_2 + y'(s) \omega(\dot{\gamma}) \nabla_{e_2} e_3 \\ &+ x'(s) \omega(\dot{\gamma}) \nabla_{e_3} e_1 + \omega(\dot{\gamma}) y'(s) \nabla_{e_3} e_2 + (\omega(\dot{\gamma}))^2 \nabla_{e_3} e_3 + (\omega(\dot{\gamma}))' e_3.\end{aligned}$$

En utilisant la connection de Levi-Civita, on obtient alors

$$\nabla_{\dot{\gamma}(s)} \dot{\gamma}(s) = (x''(s) + \omega(\dot{\gamma}) y'(s)) e_1 + (y''(s) - \omega(\dot{\gamma}) x'(s)) e_2 + (\omega(\dot{\gamma}))' e_3.$$

D'où le résultat.

Remarque 2.1.1 L'équation $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$ implique que les équations des géodésiques sont.....
de l'espace de Heisenberg H_3 soit données par

$$x'' + \omega(\dot{\gamma}) y' = 0.$$

$$y'' + \omega(\dot{\gamma}) x' = 0. \quad (2.1.2)$$

$$(\omega(\dot{\gamma}))' = 0. \quad (2.1.3)$$

2.1.3 implique que $\omega(\dot{\gamma})$ est constant le long de la courbe γ . On note par A cette constante. Alors, les équations de la géodésique deviennent

$$\begin{aligned} x'' &= -Ay', \\ y'' &= Ax'. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Avec les conditions $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\dot{\gamma}(0) = (u_0, v_0, \omega_0)$.

Proposition 2.1.3 [8] *Soit γ une géodésique paramétrée par longueur d'arc, issue du point (x_0, y_0, z_0) et de vitesse initiale (u_0, v_0, ω_0) dans H_3 . Alors, la constante A est déterminée par $A = \omega_0 - \frac{1}{2}(x_0 v_0 - y_0 u_0)$. La géodésique γ est donnée explicitement par les formules suivantes :*

1 Si $A = 0$, alors γ est une ligne horizontale. plus précisément γ est la ligne issue du point

$$(x_0, y_0, z_0) \text{ et de vitesse initiale } (u_0, v_0, \omega_0), \quad \omega_0 = \frac{1}{2}(x_0 v_0 - y_0 u_0)$$

2 Si $A \neq 0$ et $A \neq \pm 1$, alors γ est donnée par

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{A}(u_0 \sin(As) + v_0 \cos(As)) + x_0 \\ y(s) &= \frac{1}{A}(-u_0 \cos(As) + v_0 \sin(As)) + y_0 \\ z(s) &= As + \frac{1-A^2}{2A}s - \frac{1}{2A}(x_0 v_0 - y_0 u_0) \cos(As) + \frac{1}{2A}(x_0 v_0 - y_0 u_0) \sin(As) + z_0; \end{aligned}$$

3 Si $A = \pm 1$ alors γ est une ligne verticale. C'est à dire

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A} \end{bmatrix}.$$

Les surfaces minimales réglées dans l'espace de Heisenberg H_3

Dans ce chapitre on caractérisera les surfaces minimales réglées par des droites géodésiques et par des droites dans l'espace de Heisenberg H_3 , d'après M.Bekkar [1]

1.1. Le groupe d'isométrie de l'espace de Heisenberg H_3 est de dimension quatre, la composante connexe de l'identité est le groupe qu'on note G les transformations affines R^3 suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\cos \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ A & B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où θ, a, b, c sont des réels et

$$A = \frac{1}{2}(a \sin \theta - b \cos \theta), \quad B = \frac{1}{2}(a \sin \theta + b \cos \theta)$$

Dans la suite, les éléments de G seront notés par $(\theta; a, b, c)$.

1.2. Nous obtenons dans cette note les deux résultats suivants :

- Les seules surfaces minimales de H_3 réglées par des droites géodésiques verticales sont des morceaux de plans verticaux.
- Les seules surface minimales de H_3 réglées par des droites géodésiques de contact sont à isométries près de H_3 , des morceaux de plans , des morceaux d'hélicoïdes $z = \gamma \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$ avec γ réel, ou des morceaux du paraboloides hyperboliques $z = \frac{xy}{2}$. Ce résultat a été annoncé dans la note [2] dans laquelle est établie l'équation des surface minimales de H_3 qui sont des graphes de fonction $z = f(x, y)$.

3.1 Les surfaces minimales réglées par des droites géodésiques dans H_3

2.1. Considérons la surface Σ de H_3 définie par l'application

$$(t, s) \rightarrow m(t, s) = U(t) + sV(t) \text{ avec } U(t) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } V(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

Cette surface Σ est réglée par la droite L_t , passant par le point $U(t)$ et de vecteur direct $V(t)$.

On appelle la directrice de Σ est la courbe $t \rightarrow U(t)$.

Moyennant une isométrie de H_3 et un choix approprié de la directrice $U(t)$ on peut se ramener localement à l'un des deux cas suivants :

$$U(t) = (t, 0, a(t)) \text{ et } v(t) = (u(t), 1, v(t))$$

Ou bien

$$U(t) = (t, a(t), 0) \text{ et } V(t) = (0, 0, 1)$$

En effet le premier cas correspond à une surface Σ dont la trace sur au moins un plan vertical est le graphe d'une fonction sur le plan $y = 0$ dans le deuxième paramétrisation, la directrice de Σ est sa trace sur le plan $z = 0$.

Nous commençons par l'étude de ce deuxième cas.

2.2. La surface Σ est paramétrisée localement par :

$$(t, s) \rightarrow \begin{cases} x(t, s) = t \\ y(t, s) = a(t) \\ z(t, s) = s \end{cases}$$

Équation des surfaces minimales dans H_3

Le première et le deuxième forme fondamentale de cette surface est donne par :

$$\begin{aligned} I &= E dt^2 + 2F dt ds + G ds^2 \\ II &= L dt^2 + 2M dt ds + N ds^2 \end{aligned}$$

Nous allons déterminer ces coefficients :

On a

$$X_t = (1, a'(t), 0) = \frac{\partial}{\partial x} + a'(t) \frac{\partial}{\partial y} = e_1 + a' e_2 + \frac{1}{2} (a - a'(t)) e_3$$

$$X_s = (0, 0, 1) = \frac{\partial}{\partial z} = e_3$$

Soit donc

$$E = \langle X_t, X_t \rangle = 1 + a'^2 + \frac{1}{4}(a - a't)^2.$$

$$F = \langle X_t, X_s \rangle = \frac{1}{2}(a - a't)$$

$$G = \langle X_s, X_s \rangle = 1$$

Le vecteur normal unitaire

$$N = \frac{X_t \wedge X_s}{\|X_t \wedge X_s\|} = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + 1}} (a'e_1 - e_2) \text{ où } X_t \wedge X_s = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & a & \frac{1}{2}(a - a't) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a'e_1 + e_2$$

et on a

$$\nabla_{X_s} X_s = \nabla_{e_3} e_3 = 0$$

$$\nabla_{X_t} X_s = \nabla_{(e_1 + a'e_2 + \frac{1}{2}(a - a't)e_3)} e_3 = \frac{1}{2}e_2 - \frac{a'}{2}e_1$$

$$\text{donc } n = g(\nabla_{X_s} X_s, n) = 0, \quad m = g(\nabla_{X_t} X_s, n) = \frac{-1}{2}\sqrt{a'^2 + 1},$$

$$l = g(\nabla_{X_t} X_t, n) = \left[-a'' + \frac{1}{2}(a - a't)(1 + a'^2) \right] \frac{1}{\sqrt{a'^2 + 1}}.$$

La condition minimale $En + Gl - 2Fm = 0$. Construit à l'équation $a'' = 0$, c'est à dire $a(t) = \lambda t + \mu$; λ, μ réels. Nous avons démontré le

Théorème 3.1.1 *Les seules surfaces minimales de H_3 réglées par des droites verticales sont des morceaux de plans verticaux.*

2.3. Revenons au premier cas. On a $v(t) = \frac{t}{2}$ et la surface Σ est paramétrisée localement par la

$$(t, s) \rightarrow \begin{cases} x(t, s) &= t + s.u(t) \\ y(t, s) &= s \\ z(t, s) &= a(t) + \frac{ts}{2} \end{cases}$$

L'équation $x(t, s) = t + yu(t)$ définit implicitement $t = t(x, y)$ en fonction de x et y . Par conséquent la surface Σ est localement le graphe d'une fonction $z = f(x, y)$ avec

$$f(x, y) = a(t(x, y)) + \frac{yt(x, y)}{2}.$$

La courbure moyenne dans H_3

Les coefficients de la première forme fondamentale

On a

$$X_x = (1, 0, f_x) = e_1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)e_3$$

$$X_y = (0, 1, f_y) = e_2 + (f_y - \frac{x}{2})e_3$$

soit donc

$$\begin{aligned} E &= g(X_x, X_x) \\ &= (1, 0, f_x) \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} \\ &= 1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 \\ F &= g(X_x, X_y) \\ &= (1, 0, f_x) \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} \\ &= (f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) \\ G &= g(X_y, X_y) \\ &= (0, 1, f_y) \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} \\ &= 1 + (f_y - \frac{x}{2})^2 \end{aligned}$$

Les coefficients de deuxième forme fondamentale

$$l = g(\nabla_{X_x} X_x, n), \quad m = g(\nabla_{X_x} X_y, n), \quad \text{et} \quad n = g(\nabla_{X_y} X_y, n).$$

Le vecteur normal unitaire N : On pose $\lambda = (f_x + \frac{y}{2})$ et $\gamma = (f_y - \frac{x}{2})$

$$N = \frac{X_t \wedge X_s}{\|X_t \wedge X_s\|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2 + 1}}(-\lambda, -\gamma, 1)$$

et on a

$$\begin{aligned} \nabla_{X_x} X_x &= \nabla_{(e_1 + \lambda e_3)}(e_1 + \lambda e_3) = -\lambda e_2 + f_{xx} e_3 \\ \nabla_{X_x} X_y &= \nabla_{(e_1 + \lambda e_3)}(e_2 + \gamma e_3) = \frac{\lambda}{2} e_1 - \frac{\gamma}{2} e_2 + f_{xy} e_3 \\ \nabla_{X_y} X_y &= \nabla_{(e_2 + \gamma e_3)}(e_2 + \gamma e_3) = \gamma e_1 + f_{yy} e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad l &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2 + 1}}(f_{xx} + \lambda\gamma), \quad m = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2 + 1}}(\frac{-\lambda}{2} + \frac{\gamma}{2} + f_{xy}), \\ \text{et} \quad n &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2 + 1}}(f_{yy} - \lambda\gamma). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} H &= \frac{lG + nE - 2Fm}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2 + 1}} \frac{f_{xx}(1 + \gamma^2) - 2f_{xy}\lambda\gamma + f_{yy}(1 + \lambda^2)}{2(1 + \gamma^2)(1 + \lambda^2) - 2\lambda\gamma}. \end{aligned}$$

On sait que cette surface est minimale si la fonction f vérifie l'équation

$$f_{xx}(1 + (f_y - \frac{x}{2})^2) - 2f_{xy}(f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) + f_{yy}(1 + (f_x + \frac{y}{2})^2) = 0 \quad (3.1.1)$$

Permet des définitions des fonctions $f(x, y)$ et $t(x, y) = x - yu(t(x, y))$ on obtient

$$\begin{cases} t_x = 1 - yt_x & \Rightarrow t_x = \frac{1}{1 + yu'} \\ t_y = u + yt_y u' & \Rightarrow t_x = \frac{-u}{1 + yu'} = -ut_x \\ f_x = (a' + \frac{y}{2})t_x & f_y = (a' + \frac{y}{2})t_y + \frac{t}{2} \end{cases}$$

En dérivant de le deuxième fois par rapport à x et y on obtient :

$$\begin{cases} f_{xx} &= a''t_x^2 + (a' + \frac{y}{2})t_{xx} \\ f_{xy} &= \frac{1}{2}t_x + a''t_xt_y + (a' + \frac{y}{2})t_{xy} \\ f_{yy} &= t_y + a''t_y^2 + (a' + \frac{y}{2})t_{yy} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

avec

$$t_{xx} = \frac{1}{(1+yu')^3}, t_{xy} = -u't_x^2 - ut_{xx}, t_{yy} = 2u'ut_x^2 + u^2t_{xx}.$$

En tenant compte de la relation $f_y - \frac{x}{2} = -u \left(f_x + \frac{y}{2} \right)$, l'équation 3.1.1 des surfaces minimale devient

$$f_{xx} + f_{yy} + \left(f_x + \frac{y}{2} \right)^2 [u^2f_{xx} + 2uf_{xy} + f_{yy}] = 0.$$

D'où l'équation des surfaces minimales $z = f(x, y)$ de H_3 s'écrit

$$f_{xx} + f_{yy} = 0 \quad (3.1.3)$$

car

$$\begin{aligned} u^2f_{xx} + 2uf_{xy} + f_{yy} &= u^2 \left(a'' \left(\frac{1}{1+yu'} \right)^2 + (a' + \frac{y}{2}) \frac{1}{(1+yu')^3} \right) \\ &\quad + 2u \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+yu'} - \frac{a''u}{(1+yu')^2} + (a' + \frac{y}{2}) - u' \left(\frac{1}{1+yu'} \right)^2 - \frac{u}{(1+yu')^3} \right) \\ &\quad - \frac{u}{1+yu'} + a'' \left(\frac{-u}{1+yu'} \right)^2 + (a' + \frac{y}{2}) \left(2u'u \left(\frac{1}{1+yu'} \right)^2 + u^2 \frac{1}{(1+yu')^3} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent nous avons établi le

Théorème 3.1.2 *Les surfaces minimales de H_3 réglées par des droites géodésiques de contact sont localement des graphes de fonctions harmoniques (sauf au voisinage des points où elles contiennent une droite verticale).*

2.4. Déterminons maintenant les fonctions u et a pour que l'équation 3.1.3 soit satisfaite.

On a :

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} &= 0 \\ \Rightarrow a'' \left(\frac{1}{1+yu'} \right)^2 + (a' + \frac{y}{2}) \frac{1}{(1+yu')^3} + -\frac{u}{1+yu'} + a'' \left(\frac{-u}{1+yu'} \right)^2 \\ &\quad + (a' + \frac{y}{2}) \left(2u'u \left(\frac{1}{1+yu'} \right)^2 + u^2 \frac{1}{(1+yu')^3} \right) = 0 \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}y^2 [u'' (1+u^2)] + y [u' (a'' (1+u^2) + 2u'u + u) - u'' (1+u^2) a'] \\ &\quad + [a'' (1+u^2) + 2u'ua' + u] = 0. \end{aligned}$$

Ce qui équivaut au système de deux équations

$$\begin{cases} u'' = 0 \\ a''(1 + u^2) + 2u'ua' + u = 0 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Le première équation donne $u(t) = \alpha t + \beta$ avec α, β réels.

Le deuxième équation s'écrit $(a'(1 + u^2))' = u$, soit donc :

$$\begin{aligned} \int (a'(1 + u^2))' &= \int (\alpha t + \beta) dt \\ \Rightarrow a'(1 + u^2) &= \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \nu \quad \text{avec } \nu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Finalement on obtient les solution suivantes

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{t}{2\alpha} + \gamma \operatorname{Arctg}(\alpha t + \beta) + \delta \quad \text{si } \alpha \neq 0 \\ a(t) &= \frac{\beta}{2(1+\beta^2)}t^2 + \gamma t + \delta \quad \text{si } \alpha = 0 \end{aligned}$$

D'où les fonctions f correspondantes

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{x-\beta y}{2\alpha} + \gamma \operatorname{Arctg}\left(\frac{\alpha x + \beta}{\alpha y + 1}\right) + \delta \quad \text{si } \alpha \neq 0 \\ f_2(x, y) &= \frac{(x-\beta y)(\beta x + y)}{2(1+\beta^2)} + \gamma(x - \beta y) + \delta \quad \text{si } \alpha = 0 \end{aligned}$$

Considérons l'isométrie $(0; \frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, -\delta)$, elle transforme la surface $z = f_1(x, y)$ en la surface $z = \gamma \operatorname{Arctg}(\frac{x}{y})$ qui est un plan si $\gamma = 0$ et un hélicoïde si $\gamma \neq 0$. Cet hélicoïde peut être globalement paramétrais par

$$\begin{cases} x(t, s) = s \sin t \\ y(t, s) = s \cos t \\ z(t, s) = \gamma t. \end{cases}$$

Par conséquent les surfaces minimales représentées localement par $z = f_1(x, y)$ sont à isométrie près de H_3 des morceaux de plans où morceaux d'hélicoïdes.

En ce qui concerne les surfaces minimales représentées localement par $z = f_2(x, y)$, l'isométrie $(\operatorname{Arctg}(\beta; 0, \gamma\sqrt{1+\beta^2}, -\delta))$ permet de les transformer en un morceaux du paraboloïde hyperbolique $z = \frac{xy}{2}$. Par conséquent nous avons démontré le

Théorème 3.1.3 *Les seules surfaces minimales de H_3 réglées par des droites géodésiques de contact sont, à isométrie près de H_3 , des morceaux de plans, des morceaux d'hélicoïdes où des morceaux du paraboloïde hyperbolique.*

3.2 Les surfaces minimales réglées par des droites.

3.1. Le cas des surfaces réglées par des droites quelconques est plus délicat car il y a trois fonctions inconnues $a(t)$, $u(t)$ et $v(t)$ à déterminer pour que la surface Σ paramétrisée localement par

$$\begin{cases} x(t, s) &= t + su(t) \\ y(t, s) &= s \\ z(t, s) &= a(t) + sv(t) \end{cases}$$

soit minimale.

Comme dans le paragraphe précédent on voit que la surface Σ est localement le graphe d'une fonction $z = f(x, y)$ avec

$$f(x, y) = a(t(x, y)) + yv(t(x, y)).$$

En dérivant par rapport aux variables x et y on obtient

$$\begin{aligned} f_x &= (a' + yv')t_x, & f_y &= (a' + yv')t_y + v. \\ \begin{cases} f_{xx} &= (a'' + yv'')t_x^2 & + & (a' + yv')t_{xx} \\ f_{xy} &= v't_x & + & (a'' + yv'')t_xt_y & + & (a' + yv')t_{xy} \\ f_{yy} &= 2v't_y & + & (a'' + yv'')t_y^2 & + & (a' + yv')t_{yy} \end{cases} \end{aligned}$$

Ces expressions portées dans l'équation 3.1.1 conduisent à un trinôme du second degré en y dont l'annulation des coefficients conduit au système de trois équations

$$\begin{cases} P(u'v'' - u''v') - QRu' &= 0 \\ (Pu'' - 2Ru)u' + P(v'' - u''a') - QR(2v' + 1) &= 0 \\ Pa'' - 2R(u + Qa') &= 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Où $P = 1 + u^2 + Q^2$, $Q = v - \frac{t}{2}$ et $R = v' - a'u'$.

Multiplions la première équation par $v'' - u''a'$, la deuxième équation par $v'u'' - u'v''$ et la troisième équation par $u'(u'v'' - v'u'')$ et faisons la somme.

Nous obtenons alors l'équation

$$QR[u'' - 2(u'v'' - v'u'')] = 0. \quad (3.2.2)$$

Trois cas sont à considérer : $Q = 0$, $R = 0$, ou $u'' = 2(u'v'' - v'u'')$.

3.2. Supposons que $Q = 0$, c'est à dire $v = \frac{t}{2}$. C'est le cas des surfaces réglées par les droites géodésiques de contact qui a été étudié aux paragraphes 2.3. et 2.4. (voir Théorème (3.1.3)).

3.3. Supposons que $R = 0$, le système 3.2.1 s'écrit

$$\begin{cases} u'v' - v'u'' = 0 \\ a''u' + v'' - u''a' = 0 \\ a'' = 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Sachant que $v' = a'u'$ le système 3.2.3 équivaut alors à $a'' = 0$ c'est à dire $a(t) = \lambda t + \mu$ et $v(t) = \lambda u(t) + \varepsilon$ avec $\lambda, \mu, \varepsilon$ des réels et u une fonction quelconque. La solution correspondante s'écrit

$$\begin{cases} x(t, s) = t + su(t) \\ y(t, s) = s \\ z(t, s) = \lambda t + \mu + \lambda su(t) + \varepsilon s \end{cases}$$

c'est à dire $z = \lambda x + \varepsilon y + \mu$ qui représente un plan.

3.4. Supposons que $u'' = 2(u'v'' - v'u'')$. Cette équation équivaut à $2u'v'' = u''(2v' + 1)$ dont les solutions sont

$$u'' = 0 \quad \text{et } v \text{ quelconque} \quad (3.2.4)$$

ou bien

$$u \text{ quelconque } v(t) = \lambda t + \mu - \frac{t}{2} \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ réels.} \quad (3.2.5)$$

Le système 3.2.1 s'écrit maintenant

$$\begin{cases} Pu'' - 2QRu' = 0 \\ Pv'' - QR(2v' + 1) = 0 \\ Pa'' - 2R(u + Qa') = 0 \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Dans le premier cas où u est constant, une rotation autour de l'axe (Oz) permet de se restreindre au cas $u = 0$. Le système 3.2.6 devient

$$\begin{cases} Pv'' - Qv'(2v' + 1) = 0 \\ Pa'' - 2Qa'v' = 0 \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Le premier équation 3.2.7 admet la solution particulière $v' = \frac{-1}{2}$ c'est à dire $v = \frac{-t}{2} + \kappa$ où $\kappa \in \mathbb{R}$, pour laquelle la deuxième équation 3.2.7 devient

$$(1 + (t - \kappa)^2) a'' - (t - \kappa) a' = 0 \quad (3.2.8)$$

dont les solutions sont

$$a(t) = \frac{\lambda}{2} \left[\tau \sqrt{1 + \tau^2} + \log \left(\tau + \sqrt{1 + \tau^2} \right) \right] + \mu$$

avec $\tau = t - \kappa$, λ et μ des réels.

La surface minimale correspondante admet comme paramétrisation

$$\begin{cases} x(t, s) &= t \\ y(t, s) &= s \\ z(t, s) &= a(t) + s \left(\frac{-t}{2} + \kappa \right). \end{cases}$$

Cette surface est le graphe de la fonction $z = a(x) + (\kappa - x) \frac{y}{2}$.

L'isométrie $(0; -\kappa, 0, -\mu)$ permet de ramener cette surface au graphe de la fonction

$$z = \frac{\lambda}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right] + \frac{xy}{2}.$$

On retrouve donc les surfaces annoncées dans [2].

Considérons maintenant la solution générale v de la première équation 3.2.7, avec $v' \neq \frac{-1}{2}$.

On vérifie facilement que

$a(t) = \lambda \left(v(t) + \frac{t}{2} \right) + \mu$ avec λ et μ réels est la solution générale de la deuxième équation 3.2.7 car cette équation est linéaire en a et la solution proposée dépend de deux constantes arbitraires. La surface

minimale correspondante admet comme paramétrisation

$$\begin{cases} x(t, s) &= t \\ y(t, s) &= s \\ z(t, s) &= \lambda \left(v(t) + \frac{t}{2} \right) + \mu + sv(t). \end{cases}$$

Cette surface est le graphe de la fonction $z = (\lambda + y)v(x) + \lambda \frac{x}{2} + \mu$.

L'isométrie $(0; 0, \lambda, -\mu)$ permet de ramener cette surface au graphe de la fonction $z = yv(x)$, où la fonction v est une solution de la première équation 3.2.7, c'est à dire vérifie

$$\left(1 + \left(v - \frac{x}{2} \right)^2 \right) v'' - \left(v - \frac{x}{2} \right) (2v' + 1) v' = 0.$$

Le changement de variable $v(x) = \frac{r(x)+x}{2}$ transforme cette équation en

$$r'' (4 + r^2) - 2r (r' + 1) (r' + 2) = 0.$$

On retrouve donc les surfaces minimales dans [2].

3.5. Il reste à considérer maintenant le cas donné par la relation 3.2.5.

Le système 3.2.6 s'écrit

$$\begin{cases} Pu'' + (1 + 2u'(a' - \lambda)) Qu' &= 0 \\ y(t, s) = (1 + 2u'(a' - \lambda)) (Qa' + u) &= 0 \end{cases}$$

avec $P = 1 + y^2 + (\lambda u + \mu - t)^2$ et $Q = \lambda + \mu - t$.

La surface minimale correspondante admet comme paramétrisation

$$\begin{cases} x(t, s) = t + su(t) \\ y(t, s) = s \\ z(t, s) = a(t) + s(\lambda u(t) + \mu - \frac{t}{2}) \end{cases} \text{ avec } \lambda, \mu \text{ réels}$$

L'isométrie $(0; 2\lambda, -2\mu, 0)$ permet de se ramener au cas $\lambda = \mu = 0$. En regroupant les résultats précédents, on énonce le

Théorème 3.2.1 *Les surfaces minimales de H_3 réglées par les droites sont à isométrie près de H_3 :*

I Les morceaux de plans

II Les morceaux du paraboloïde hyperbolique d'équation $z = \frac{xy}{2}$.

III Les morceaux d'hélicoïdes paramétrés par

$$x(t, s) = s \sin t, \quad y(t, s) = s \cos t, \quad z(t, s) = \gamma t; \quad \gamma \text{ réel non nul.}$$

IV Les morceaux de surfaces d'équation $z = z = \frac{\lambda}{2} [x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})] - \frac{xy}{2}$, λ réel non nul.

V Les morceaux de surfaces qui sont localement des graphes de fonction $z = \frac{1}{2}y(r(x) + x)$ où r est une solution de l'équation $r''(4+r^2) - 2r(r'+1)(r'+2) = 0$.

VI Les morceaux de surfaces qui sont paramétrisées localement par

$$x(t, s) = t + su(t), \quad y(t, s) = s, \quad z(t, s) = a(t) - \frac{st}{2}$$

avec u et a solutions du système

$$\begin{cases} (1 + u^2 + t^2) u'' - (1 + 2u'a') tu' = 0 \\ (1 + u^2 + t^2) a'' - (1 + 2u'a') (ta' - u) = 0 \end{cases}$$

3.6. Remarquons que les morceaux d'hélicoïdes ne sont réglés que par des droites géodésiques, tandis que les morceaux de plans et les morceaux du paraboloïde hyperbolique peuvent être réglés par des droites géodésiques et par des droites qui ne sont pas des géodésiques.

Bibliographie

- [1] M. Bekkar, T. Sari. Surfaces Minimales réglées dans l'espace de Heisenberg H_3 , Rend.Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 50(3), (1992), 243–254.
- [2] M. Bekkar, Exemples de surfaces minimales dans l'espace de Heisenberg H_3 , Rend. Sem Fac. Scienze Università di Cagliari 61, 2 (1991).
- [3] M. Belkhef. Parallel and minimal surfaces in Heisenberg, Proceedings of the Summer School on Differential Geometry, Coimbra (Portugal). September 3 - 7, (1999), pp. 67–76.
- [4] T. H. Colding, W. P. Minicozzi II, A course in minimal surfaces, Graduate Studies in Mathematics. New York. 121, (2011).
- [5] M. P. do Carmo, differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1976).
- [6] M. P. do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, (1992).
- [7] J. Faraut, Groupes et algèbres de Lie, Université Pierre Marie Curie, Version Septembre (2001).
- [8] J. Inoguchi, T. Kumamoto, N. Ohsugi and Y. Suyama, Differential geometry of curves and surfaces in 3-dimensional homogeneous spaces I, Fukuoka Univ. Sci. Rep. 29, (1999), 155–182.
- [9] T. Masson, Géométrie Différentielle, Groupes et Algèbres de Lie. Fibrés et connexion, version du 10 Novembre 2003.

- [10] P.Pansu, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un, *Annals of Mathematics*, 129(1989), 1–60.