

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités	2
1.1 La transformée de Laplace	2
1.1.1 Conditions suffisantes d'existence	2
1.1.2 Table de quelques transformée de Laplace	3
1.1.3 Propriétés de la transformée de Laplace	3
1.1.4 La transformée inverse de Laplace	5
1.2 La transformée en Z	6
1.2.1 Propriétés de la transformée en Z	6
2 Systèmes linéaires positifs	8
2.1 Matrices non-négatives , positives et de Metzler	8
2.2 La positivité des Systèmes Linéaires à temps invariant (LTI)	9
2.2.1 Modèles d'état linéaires à temps invariants	9
2.2.2 La fonction de transfert	10
3 La représentation d'état	12
3.1 Définition d'un faisceau	13
3.2 Faisceau régulier	13
3.3 Théorème de Weierstrass : Cas d'un faisceau régulier	13
4 Problématique : Comment passe-t-on d'une fonction de transfert à la réalisation ?	15
4.1 Forme modale	15
4.1.1 Comment choisir les états du système?	16
4.2 Réalisation positive	18
4.3 Existence de la réalisation WCF	18
4.4 calcul d'une réalisation positive	23
Conclusion	25

INTRODUCTION

Les systèmes linéaires positifs sont des spécificités des systèmes dynamiques où l'espace d'entrée, l'espace d'état, et l'espace de la sortie sont des espaces non-négatifs.

Les systèmes linéaires positifs ont été utilisés dans les biomathématiques, économie, chimie et autres axes de la recherche [1], [2], [4], [5]. Le problème de la réalisation d'une fonction de transfert positive donnée a été considéré dans [2], [5].

L'objectif de ce mémoire est d'explicitier des conditions suffisantes pour l'existence d'une réalisation positive avec la forme canonique de Weierstrass (WCF) pour une matrice de transfert du modèle singulier, et une procédure pour le calcul de la réalisation positive sera présentée.

Ce mémoire comporte quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux généralités, rappels et définitions : la transformée de Laplace, la transformée inverse de Laplace, et la Z-transformée pour le cas 1D.

Dans le deuxième chapitre nous présentons une classe récente de systèmes dite la classe des systèmes linéaires à temps invariant (LTI) du cas singulier, pour des modèles discret-continu.

Le troisième chapitre est consacré à la représentation d'état pour les deux cas : continu et discret, et nous définissons le faisceau et le faisceau régulier d'une matrice puis le théorème de Weierstrass.

Dans le dernier chapitre on expose la problématique : Comment passe-t-on d'une fonction de transfert à la réalisation ? Et nous définissons la forme modale, réalisation positive, l'existence de la réalisation WCF, et la procédure de le calcul d'une réalisation positive.

Nous concluons notre travail par une conclusion.

Généralités

Dans cette section , nous proposons quelques définitions et propriétés concernant la transformée de Laplace et la Z-transformée pour le cas 1D .

1.1 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires en temps continu.

Définition 1.1 Une fonction est dite causale , si elle est nulle pour

$$t < 0$$

Définition 1.2 Soit f une fonction du temps t et causale , sa transformée de Laplace notée $L(f(t))$ ou $F(p)$ est donnée par la relation,

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (1.1)$$

où , p est à priori un nombre complexe.

1.1.1 Conditions suffisantes d'existence

Nous allons maintenant donner une condition sur $f(t)$ qui garantisse l'existence de

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Théorème 1.1 Si $f(t)$ est continue par morceaux sur tout intervalle fini $[0, a]$, $a > 0$, et est de l'ordre de e^{bt} quand $t \rightarrow +\infty$, la transformée de Laplace $L(f(t))$ existe pour tout $\operatorname{Re}(p) > b$.

La démonstration découle directement de la définition de la transformée de Laplace et d'une fonction d'ordre exponentiel.

Dans ce qui suit quelques transformées de quelques fonctions usuelles seront données.

1.1.2 Table de quelques transformée de Laplace

La fonction $f(t)$ Sa transformée $F(p)$

a	$\frac{a}{p}$
at	$\frac{a}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$t.e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin wt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
$\cos wt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
$\sinh wt$	$\frac{w}{p^2-w^2}$
$\cosh wt$	$\frac{p}{p^2-w^2}$
$e^{-at} \sin wt$	$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$
$e^{-at} \cos wt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$
$e^{-at} \sinh wt$	$\frac{w}{(p+a)^2-w^2}$
$e^{-at} \cosh wt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-w^2}$
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{(n-1)!}e^{at}$	$\int_0^{+\infty} f(u)du$
	$\frac{1}{(p-a)^n}$

1.1.3 Propriétés de la transformée de Laplace

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour f, g deux fonctions causales, nous décrivons quelques propriétés importantes et utiles pour répondre à certains problèmes de résolution.

1. Linéarité :

Si α et β sont des constantes quelconques et $f(t), g(t)$ sont des fonctions dont les transformées de Laplace sont respectivement $F(p)$ et $G(p)$, alors :

$$\begin{aligned} L[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] \\ &= \alpha F(p) + \beta G(p). \end{aligned}$$

2. Dérivation :

Soit f une fonction qui vérifie les conditions du théorème.1, on a :

$$L \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = pF(p) - f(0).$$

3. Intégration :

Si $L[f(t)] = F(p)$ alors :

$$L \left[\int_0^t f(u) du \right] = \frac{F(p)}{p},$$

(où $f(0) = 0$).

4. Convolution :

Soient $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions dont les transformées de Laplace sont respectivement $F(p)$ et $G(p)$, la transformée de Laplace de la convolution $f * g$ est le produit des transformées de Laplace de f et g , c'est à dire l'on a :

$$\begin{aligned} L[f(t) * g(t)] &= L(f(t)).L(g(t)) \\ &= F(p).G(p), \end{aligned}$$

où $f(t) * g(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$.

5. Retard temporel :

Soit la fonction : $t \rightarrow f(t - \tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}^+$, tel que f vérifient les conditions du théorème.1, alors :

$$L[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p).$$

6. Théorème de la valeur initiale :

On suppose que $\frac{df(t)}{dt}$ admet une transformée de Laplace . On admet que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-p\tau} dt \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-p\tau} \right) dt.$$

On sait que :

$$L \left(\frac{df(t)}{dt} \right) (p) = pF(p) - f(0^+)$$

Alors, comme

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-p\tau} = 0,$$

on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

7. Théorème de la valeur finale :

On suppose que $\frac{df(t)}{dt}$ admet une transformée de Laplace. On admet que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-p\tau} dt \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{p \rightarrow 0} \frac{df(t)}{dt} e^{-p\tau} \right) dt.$$

Or,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{df(t)}{dt} e^{-p\tau} = \frac{df(t)}{dt}$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-p\tau} dt \right) &= [f(t)]_0^{+\infty} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} f(t) - f(0^+) \end{aligned}$$

De

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)(p) = pF(p) - f(0^+),$$

on en déduit que :

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} f(t).$$

1.1.4 La transformée inverse de Laplace

A chaque transformée de Laplace peut correspondre son originale sous les conditions d'existence.

La transformée inverse de Laplace notée $f(t)$ dite aussi originale d'une fonction $F(p)$ est définie par,

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(p)] &= f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_0^{+\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp, \end{aligned}$$

où le chemin d'intégration peut être choisi quelconque dans le plan complexe à condition de rester dans le domaine de convergence de $F(p)$.

Pour le cas des systèmes à temps discrets, on définit la transformée dite en Z pour pouvoir calculer la solution.

1.2 La transformée en Z

La Z-transformée est aussi un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires en temps discret.

Définition 1.3 Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On appelle la transformée en Z de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la fonction notée $Z[x_n]$ ou $X(z)$, de la variable complexe z définie lorsque il y a convergence, par :

$$Z[x_n] = X(z) \quad (1.2)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n}.$$

Exemple 1.1 On note que les valeurs $n = 0$ sont notées par " $\hat{}$ ", et soit une suite $x(n)$ définie par :

$$x(n) = \{\hat{1}, 3, 4, 8, 0, 2\}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \\ &= 1 \times z^0 + 3 \times z^{-1} + 4 \times z^{-2} + 8 \times z^{-3} + 0 \times z^{-4} + 2 \times z^{-5} \\ &= 1 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + 2z^{-5}. \end{aligned}$$

Quelques propriétés seront en suite données. On se base la référence suivant : [2].

1.2.1 Propriétés de la transformée en Z

1. Linéarité.

Soient deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettent des transformée en z de domaine de convergence non vide. Alors :

$$Z[a x_n + b y_n] = a Z[x_n] + b Z[y_n].$$

2. Dérivation.

Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de transformée en Z définie (au moins) à l'extérieur du disque de centre 0 et de rayon R. On a pour z telque $|z| > R$:

$$\dot{Z}[x_n] = \frac{dZ[x_n]}{dz} = -z^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} n x_n z^{-n},$$

alors :

$$\dot{Z}[x_n] = -z^{-1} Z[nx_n].$$

3. Convolution.

Cette propriété est une des plus importantes et justifie à elle seule l'usage qui est fait de la transformée en Z pour étudier les systèmes linéaires permanents en temps discret

Si w_n est obtenue par convolution de u_n et v_n , on a que :

$$w_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_n v_{n-m},$$

donc,

$$\begin{aligned} Z[w_n] &= \sum_{m=0}^{+\infty} w_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_n v_{n-m} z^{-n} \\ &= \left[\sum_{m=0}^{+\infty} u_n z^{-n} \right] \left[\sum_{m=0}^{+\infty} v_{n-m} z^{n-m} \right] \\ &= Z(u_n) Z(v_n). \end{aligned}$$

Systèmes linéaires positifs

Notre objectif principal est l'étude des systèmes positifs qui sont des systèmes appartenant à une nouvelle classe dont la trajectoire repose dans l'orthant non négatif pour une condition initiale et un contrôle positif. Ce sont alors des systèmes dont les variables d'états sont par nature positives. Ce genre de systèmes trouvent leurs applications dans plusieurs domaines pratiques, notamment, les systèmes à compartiment, biomédical, les circuits RLC et autres. Nous allons cependant analyser une classe récente de systèmes qui dite la classe des systèmes singuliers positifs. Le problème de la recherche d'une réalisation positive est faite en partie essentiel de ce mémoire.

Pour commencer, nous donnerons quelques définitions et caractérisations essentielles à notre travail. Pour ce faire, on se réfère à [1], [2], [4], [6].

2.1 Matrices non-négatives, positives et de Metzler

Soient $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ des matrices à coefficients réels.

Définition 2.1 – On dit que A est une matrice non-négative si

$$\forall i : 1 \leq i \leq n, \forall j : 1 \leq j \leq m$$

alors

$$a_{ij} \geq 0,$$

autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives. Nous noterons une telle matrice : $A \geq 0$ ou encore, $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

– On dit que A est une matrice positive si elle est non négative et

$$\exists k : 1 \leq k \leq n, \exists l : 1 \leq l \leq m, a_{kl} > 0,$$

c'est à dire toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée (strictement) positive. Nous noterons une telle matrice par : $A > 0$.

– On dit que A est une matrice de Metzler si

$$\forall i : 1 \leq i \leq n, \forall j : 1 \leq j \leq m, i \neq j \quad : a_{ij} \geq 0,$$

i.e toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives .

L'ensemble des matrices carrées de Metzler de dimension n est noté $M_n(\mathbb{R})$.

2.2 La positivité des Systèmes Linéaires à temps invariant (LTI)

2.2.1 Modèles d'état linéaires à temps invariants

Une classe importante de système LTI (linéaire à temps invariant) est spécifiée par le modèle d'état. Pour donner lieu à un système LTI, l'équation de mise à jour et l'équation de sortie du modèle d'état doivent être linéaires et invariantes, c'est -à-dire :

Pour des modèles en temps discret, on a la forme :

$$x_{n+1}(t) = Ax_n(t) + Bu_n(t) \quad (2.1)$$

$$y_n(t) = Cx_n(t) + Du_n(t). \quad (2.2)$$

Et pour des modèles en temps continu, on a la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (2.4)$$

Dans ces expressions A, B, C et D sont en général des matrices réelles de dimensions appropriées .

Il existe deux cas des systèmes :

Cas standard

Définition 2.2 *Un système est dit standard si $\det E \neq 0$.*

-Si $E = I_n$, le système est aussi appelé standard (ou explicite).

Remarque 2.1 *Si $\det E \neq 0$, alors en multipliant (2.3) par E^{-1} , on obtient le système suivant,*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

qui est un système explicite.

Cas singulier

Définition 2.3 -Un système est dit *singulier* si $\det E = 0$.

Remarque 2.2 Pour un système singulier, on supposera pour la suite que $\det(Es - A) \neq 0$ pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Définition 2.4 Le système (2.3) est positif si

$$\forall x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$\forall u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t > 0,$$

alors

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}_+^p, t > 0.$$

Théorème 2.1 [6] Le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

est positive si et seulement si : $A \in M_n$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.

2.2.2 La fonction de transfert

On considère le système (2.3), alors sa fonction de transfert est définie par la relation :

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad (2.6)$$

car :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ L[\dot{x}(t)] &= AL[x(t)] + BL[u(t)] \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) + x(0) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s), \end{aligned}$$

(où $x(0) = 0$).

Et

$$\begin{aligned}Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\Y(s) &= C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\Y(s) &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \\Y(s) &= T(s) \times U(s).\end{aligned}$$

Dans ce cas, il est clair que les coefficients de la matrice $T(s)$ sont des fractions rationnelles dont le numérateur et le dénominateur ont même degré. Réciproquement, lorsqu'on dispose d'une matrice de transfert $T(s)$ pour représenter un système linéaire continu, on peut chercher à calculer un modèle d'état (i.e déterminer des matrices A, B, C) tel que :

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

La représentation d'état

Un triplet (A, B, C) est appelé réalisation d'état continu de la matrice de transfert $T(s)$. Notez qu'il n'y a pas d'unicité d'une réalisation.

On considère la représentation d'état du système dynamique linéaire continu :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.2)$$

où :

(3.1) : équation d'état ou équation de commande.

(3.2) : équation de mesure ou équation de sortie.

telle que :

A : matrice d'état, et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

B : matrice de commande ou d'entrée, et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

C : matrice de mesure ou sortie, et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

D : matrice de transmission discrète ou matrice de couplage, et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

$x(t)$: vecteur d'état, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (n : nombre d'états).

$u(t)$: vecteur d'entrée, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ (m : nombre d'entrées).

$y(t)$: vecteur de sortie, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ (p : nombre de sorties).

– On adapte les mêmes terminologies pour le cas discret :

$$x_{k+1}(t) = Ax_k(t) + Bu_k(t) \quad (3.3)$$

$$y_k(t) = Cx_k(t) + Du_k(t) \quad (3.4)$$

Définition 3.1 On appelle réalisation toute représentation d'état (A, B, C, D) vérifiant :

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (3.5)$$

Définition 3.2 Une réalisation est dite minimale s'il n'existe aucune réalisation de $H(s)$ de dimension inférieure à n ($n = \dim A$).

La question dans ce mémoire est donc de considérer un système singulier de la forme :

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

de la fonction de transfert

$$T(s) = C(sE - A)^{-1}B + D. \quad (3.6)$$

On procédera ensuite à la réduction de ce système moyennant le théorème de Weierstrass.

3.1 Définition d'un faisceau

Définition 3.3 Un faisceau de matrice $\lambda A + B$ est une matrice polynomiale dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, où λ est une variable indéterminée, $A + B$ sont deux matrices quelconques de même ordre ($m \times n$).

3.2 Faisceau régulier

Un faisceau d'une matrice est une matrice dont les coefficients sont des polynômes de degré 1, il est dit régulier si :

1. E et A sont des matrices carrées de même ordre.
2. Le déterminant $\det(Es - A)$ ne s'annule pas identiquement.

Notons que dans le cas où $\det(Es - A) = 0$, le faisceau est dit singulier.

3.3 Théorème de Weierstrass : Cas d'un faisceau régulier

Tout faisceau régulier $A + \lambda B$ peut être réduit en une forme quasi-diagonale canonique (strictement équivalente) :

$$\begin{bmatrix} J + \lambda I & & & & \\ & N^{\mu_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N^{\mu_s} \end{bmatrix}$$

où la forme normale du premier bloc diagonal $J + \lambda I$ est déterminée d'une façon unique par les diviseurs élémentaires de $A + \lambda B$ et les s derniers blocs diagonaux correspondent aux diviseurs élémentaires infinis μ_1, \dots, μ_s .

Avec

$$\begin{aligned}
 N^{\mu_1} &= I^{\mu_1} + \mu_1 H \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 1 & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Problématique : Comment passe-t-on d'une fonction de transfert à la réalisation ?

A partir d'une fonction de transfert, est-il possible de déterminer une représentation d'état (une seule ou la plus simple possible) ? Ce problème est dénommé **problème de réalisation**. On aura suite à la recherche de la représentation d'état plusieurs types correspondant à ces différents cas :

4.1 Forme modale

Cas où le système possède n pôles simples réels et distincts λ_i , $i = 1, \dots, n$
Soit alors, de la relation (2.6) :

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

Cette forme, peut avoir l'écriture suivante :

$$H(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(s - \lambda_i)} \quad (4.1)$$

du fait que

$$T(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - \lambda_n)(s - \lambda_{n-1}) \dots (s - \lambda_1)} \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

La forme (4.1) est obtenu à partir (4.2) par décomposition en éléments simples.
Nous avons cependant

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(s - \lambda_i)} \quad (4.4)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{(s - \lambda_i)} \quad (4.5)$$

$$\implies Y(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{U(s)}{(s - \lambda_i)}. \quad (4.6)$$

4.1.1 Comment choisir les états du système ?

On pose

$$X_i(s) = \frac{U(s)}{s - \lambda_i}, \quad (4.7)$$

A partir de (4.7) , on écrit :

$$sX_i(s) = \lambda_i X_i(s) + U(s)$$

Enfin , on applique la transformée inverse de Laplace à la relation

$$L^{-1}(sX_i(s)) = \lambda_i L^{-1}(X_i(s)) + L^{-1}(U(s))$$

$$(x_i(0) = 0)$$

$$x'_i(t) = \lambda_i x(t) + u(t), \quad (4.8)$$

En suite , à partir de la relation (4.4) on détermine les équations de sortie.

$$(4.2) \iff Y(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i(s). \quad (4.9)$$

Par application de la TL^{-1} , on aura les équations vouleus

$$L^{-1}(Y(s)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L^{-1}(X_i(s)) \quad (4.10)$$

$$\implies y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t) \quad (4.11)$$

En conclusion :

On obtient à partir de (4.8) et (4.11) la représentation demandée.

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} U(t)$$

telle que,

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n(t) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c-à-d :

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

où A est une matrice diagonale.

et

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

telque $D = 0$.

Remarque 4.1 a- *La représentation d'état contient des pôles simples.*

b- *Gain de temps plus simplification du calcul de la matrice de transition e^{At} .*

c- *La matrice d'état A étant diagonale, on peut cependant assurer l'existence d'une matrice inversible dite **matrice de transformation** T_r contenant les colonnes les vecteurs propres de la matrice A (les pôles λ_i) c-à-d :*

$$T_r^{-1}AT_r = \hat{A},$$

$$T_r^{-1}B = \hat{B},$$

$$D = \hat{D},$$

$$\hat{C} = CT_r.$$

On s'intéresse à la fonction de transfert (3.6) considéré positive. Le problème posé est comment réaliser cette fonction de transfert donc comment donner les matrices A, B, C et D , et dans quels conditions cette réalisation sera positive. On procédera alors à l'application du théorème de Weierstrass.

4.2 Réalisation positive

Définition 4.1 *On dit que la réalisation est positive si les matrices $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.*

4.3 Existence de la réalisation WCF

Toute matrice de transfert rationnelle donnée $T(z) \in \mathbb{R}^{n \times m}(z)$ peut être décomposé dans une partie strictement adéquate T_{sp} et une partie polynomial $P(z)$ comme

$$T(z) = \frac{N(z)}{d(z)} - P(z), \quad (4.12)$$

où

$$\begin{aligned}
 N(z) &= \begin{bmatrix} n_{11}(z), \dots, n_{1m}(z) \\ \dots\dots\dots \\ n_{p1}(z), \dots, n_{pm}(z) \end{bmatrix} \\
 &= N_{n_1-1}z^{n_1-1} + N_{n_1-2}z^{n_1-2} + \dots + N_1z + N_0 \in \mathbb{R}^{p \times m}[z], \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

$$P(z) = \begin{bmatrix} p_{11}(z), \dots, p_{1m}(z) \\ \dots\dots\dots \\ p_{p1}(z), \dots, p_{pm}(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}[z],$$

$$n_{ij}(z) = a_{m_{ij}}^{ij}z^{m_{ij}} + a_{m_{ij}-1}^{ij}z^{m_{ij}-1} + \dots + a_1^{ij}z + a_0^{ij},$$

$$\begin{aligned}
 p_{ij}(z) &= b_{t_{ij}}^{ij}z^{m_{ij}} + b_{t_{ij}-1}^{ij}z^{t_{ij}-1} + \dots + b_1^{ij}z + b_0^{ij}, \tag{4.14} \\
 & \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m,
 \end{aligned}$$

et

$$d(z) = z^{n_1} + d_{n_1-1}z^{n_1-1} + \dots + d_1z + d_0 \tag{4.15}$$

est le dénominateur commun le plus petit de toutes les entrées de $T_{sp}(z)$.

Théorème 4.1 *Il existe une réalisation positive WCF d'une matrice du transfert donnée $T(z) \in \mathbb{R}^{p \times m}[z]$ si :*

(i) *tous les coefficients de (4.15) sont des non-positifs ,*

$$d_k \leq 0 \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \dots, n_1 - 1, \tag{4.16}$$

(ii) *tous les coefficients du matrices des polynômes(4.13) sont non-négatives*

$$\begin{aligned}
 & \quad i = 1, \dots, p, \\
 a_k^{i,j} &\geq 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, m, \tag{4.17} \\
 & \quad k = 1, \dots, m_{ij},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \quad i = 1, \dots, p, \\
 b_k^{i,j} &\geq 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, m, \tag{4.18} \\
 & \quad k = 1, \dots, t_{ij}.
 \end{aligned}$$

de plus une réalisation positive WCF de $T(z)$ est donnée par

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -d_0 I_p \\ I_p & 0 & \dots & 0 & -d_1 I_p \\ 0 & I_p & \dots & 0 & -d_2 I_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -d_{n_1-2} I_p \\ 0 & 0 & \dots & I_p & -d_{n_1-1} I_p \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \dots \\ N_{n_1-1} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$C_1 = [0 \quad \dots \quad 0 \quad I_p],$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} b_0^{11} & b_1^{11} & \dots & b_{t_1}^{21} & \dots & b_0^{1m} & b_1^{1m} & \dots & b_{t_m}^{1m} \\ b_0^{21} & b_1^{21} & \dots & b_{t_1}^{21} & \dots & b_0^{2m} & b_1^{2m} & \dots & b_{t_m}^{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0^{p1} & b_1^{p1} & \dots & b_{t_1}^{p1} & \dots & b_0^{pm} & b_1^{pm} & \dots & b_{t_m}^{pm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times t}, \quad (4.20)$$

$$t_j = \max_i t_{ij}, \quad t = \sum_{j=1}^m t_j + m,$$

$$N = \text{diag} [N_1, N_2, \dots, N_m],$$

$$N_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t_j+1) \times (t_j+1)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$B_2 = \text{diag} [b_1, b_2, \dots, b_m],$$

$$b_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{t_j+1}.$$

Preuve. Il est facile de vérifier que la matrice (4.19) est une réalisation de la matrice du transfert strictement adéquate $T_{sp}(z) = \frac{N(z)}{d(z)}$.

Si (4.16) et (4.17) sont vérifiées les matrices (4.19) sont une réalisation positive de $T_{sp}(z)$. Utiliser la matrice

$$Z = \text{diag} [Z_1, \dots, Z_m],$$

tel que

$$Z_j = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z^{t_j} \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, m,$$

et on a

$$P(s) = C_2 Z .$$

de (4.20) nous avons

$$[I - Nz]^{-1} B_2 = \sum_{i=0}^{q-1} N^i B_2 z^i = \sum_{i=0}^{q-1} \text{diag} [N_1^i b_1, \dots, N_m^i b_m] z^i = Z,$$

où q est l'index de N .

D'où la matrice (4.20) est une réalisation de la matrice polynômiale $P(z)$. Si (4.14) est vérifiée , alors la matrice (4.20) sont une réalisation positive de $P(s)$. \square

Remarque 4.2 Si les relations (4.16) et (4.17) sont vérifiées, alors les matrices A'_1, B'_1, C'_1 définies par :

$$A'_1 = \begin{bmatrix} -d_0 I_p & I_p & 0 & \dots & 0 \\ -d_1 I_p & 0 & I_p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_{n_1-2} I_p & 0 & 0 & \dots & I_p \\ -d_{n_1-1} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$B'_1 = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_{n_1-1} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$C'_1 = [I_p \quad \dots \quad 0 \quad 0]$$

sont une réalisation positive de $T_{sp}(z) = \frac{N(z)}{d(z)}$.

Remarque 4.3 Si (4.18) est vérifiée , alors les matrices B'_2, N'_i, C'_2 définies par :

$$B'_2 = \begin{bmatrix} b_0^{11} & \dots & b_0^{1m} \\ b_1^{11} & \dots & b_1^{1m} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{t'_1}^{11} & \dots & b_{t'_1}^{1m} \\ b_0^{p1} & \dots & b_0^{pm} \\ b_1^{p1} & \dots & b_1^{pm} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{t'_p}^{p1} & \dots & b_{t'_p}^{pm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{t' \times m}, \quad (4.22)$$

$$N' = \text{diag} [N'_1, \dots, N'_p],$$

$$N'_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t'_i+1) \times (t'_i+1)},$$

$$C'_2 = \text{diag} [C_1, \dots, C_p], \quad C_i = [10\dots 0] \in \mathbb{R}^{1 \times (t'_i+1)}$$

$$t'_i = \max t_{ij}, \quad t' = \sum_{i=1}^p t'_i + p \quad i = 1, \dots, p,$$

sont une réalisation positive de $P(z)$.

Remarque 4.4 Les conditions (4.16), (4.17) et (4.18) ne sont pas nécessaire pour l'existence d'une réalisation positive d'une donnée $T(z)$. L'exemple suivant nous le montre,

Exemple 4.1 Soit la fonction de transfert suivante :

$$T(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - z + 1}$$

$T(z)$ a une réalisation positive c'est-à-dire :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0].$$

4.4 calcul d'une réalisation positive

si les conditions (4.16) , (4.17) et (4.18) de Théorème 2.1 sont satisfaites, alors une réalisation positive WCF peut être calculé par la technique suivant.

Procédure

Etape 1. Décomposer $T(z)$ dans une partie strictement adéquate $T_{sp}(z)$ et une partie polynomiale $P(s)$.

Etape 2. Utiliser (4.19) (ou (4.21)) trouver les matrices A_1, B_1 et C_1 (ou A'_1, B'_1 et C'_1) .

Etape 3. Trouver les degrés de la colonne t_1, t_2, \dots, t_m (ou les degrés de la ligne t'_1, t'_2, \dots, t'_m) de $\overline{P(s)}$, et utiliser (4.20). Trouver les matrices C_2, N et B_2 (ou utiliser (4.22) et trouver les matrices C'_2, N' et B'_2).

La procédure sera illustrée par l'exemple suivant .

Exemple 4.2 trouvez une réalisation positive WCF de la matrice du transfert

$$T(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 1} \begin{bmatrix} -z^4 + z^3 + 3z^2 + 2z + 2 & -z^3 + z^2 + 4z + 2 \\ -2z^3 + 4z^2 + 3z & -z^4 + 2z^3 + 3z + 4 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Dans ce cas $p = m = 2$ et $n_1 = 2$. Utiliser la procédure , nous obtenons :

Etape 1. la décomposition de (4.23) rendements

$$T(s) = T_{sp}(z) - P(z),$$

où

$$T_{sp}(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 1} \begin{bmatrix} z + 2 & z + 1 \\ z & z + 3 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{d(z)} [N_1 z + N_0],$$

$$d(z) = z^2 - 2z - 1, \quad (4.25)$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$P(z) = \begin{bmatrix} z^2 + z & z + 1 \\ 2z & z^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

De (4.24) et (4.25) il suit que les conditions (4.16) , (4.17) et (4.18) de Théorème 2.1 sont satisfaites .

Etape 2. Utiliser (4.19) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -d_0 \\ I_2 & -d_1 I_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \end{bmatrix} \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= [0 \quad I_2] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Etape 3. Les degrés de la colonne de (4.25) sont $t_1 = t_2 = 2$.Utiliser (4.20) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \begin{bmatrix} b_0^{11} & b_1^{11} & b_2^{11} & b_0^{12} & b_1^{12} & b_2^{12} \\ b_0^{21} & b_1^{21} & b_2^{21} & b_0^{22} & b_1^{22} & b_2^{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 N &= \text{diag}[N_1, \quad N_2], \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

$$N_1 = N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \text{diag}[b_1, b_2],$$

$$b_1 = b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La réalisation positive désirée WCF de (4.23) est donnée par (4.26) et (4.27) .

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons pu extraire des conditions suffisantes pour l'existence d'une réalisation positive avec la forme canonique de Weierstrass (WCF) pour une matrice de transfert du modèle singulier. Une procédure de calcul de la réalisation positive a été présentée et illustrée par un exemple.

Bibliographie

- [1] **T. Kaczorek** : *Positive Realisation of Improper Transfer Matrices Of Discrete-time Linear Systems* , *Academy of sciences Poland* , 1997.
- [2] **B.D.O.Anderson, M.Deistler, L.Benvenuti.** : Nonegative realisation of a linear system with nonnegative impulse response, Submitted to IEEE Trans. on Circuits and Systems.
- [3] **D.Bouagada** : *Thèse de Doctorat d'état : Systèmes Diférentiels Singulier Positifs et LMIs* , *Université d'es-sinia Oran*, 2007.
- [4] **T.George et H.Peng.** : *Digital Control Of Physical System*, 2008.
- [5] **G.Blanchet etD. Matignon** : *Eléments sur les représentations d'état*, *Paris*, 2011.
- [6] **M.Ghadli** : *Commande de systèmes linéaires Ecole Supèreure, d'ingénieurs en Electro-technique et Electronique*, 2006.
- [7] **T.Kaczorek** : *Existence And Determination Of The Set OF Metzler Matrices For Given StablePolynomials* , *Bialystok Technical University Poland* , 2012.