

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique



Mémoire de fin d'études

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Master En Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

**THEME : Etude Sur Les Espaces Localement
Compacts**

présentée par :

Arrouche Amina Halima

Juin 2021

M. B Bendoukha	Président	Prof	UMAB
Mme M Saïdani	Examinatrice	M.C.B	UMAB
Mme H Bendahmane	Encadrante	M.C.B	UMAB

Année Universitaire : 2020/2021

REMERCIEMENTS

Louange à dieu qui m'a donné le courage, la puissance, et la patience pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier particulièrement Mme Hafida BENDAHDANE mon encadreur de m'avoir bien suivi durant la réalisation de mon travail, ainsi que ses conseils, et pour tout son aide, les remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer et réaliser l'objectif de ce travail.

Je remercie également le jury composé du professeur Berrabah BENDOUKHA et de Mme Mansouria SAIDANI pour avoir bien voulu faire la lecture de ce mémoire et de l'évaluer mais aussi tous les enseignants qui ont participé à ma formation.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à mes parents, mes frères et mes sœurs.
J'adresse mes sincères remerciements enfin à M. Mohamed MECHDENE et à mes collègues de travail, en particulier le directeur du lycée M. "Belassal Abdel Qader
Merci à tous les lecteurs de cet humble mémoire.

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré à l'étude des espaces localement compact. Après avoir énoncé les principales notions topologiques et métriques nécessaires, on introduit tout d'abord les espaces compacts qui sont très fortement liés à notre étude, puis les espaces localement compacts, objet de ce traité et cela, en enrichissant par des exemples simples à comprendre.

Nous avons donné quelques propriétés liés à ces espaces puis expliqué le principe de compactification mais aussi énoncé le théorème de Riesz.

Table des matières

Remerciments	2
Résumé	3
Introduction	1
1 Notions préliminaires	2
1.1 Espace topologique	2
1.1.1 La topologie induite	4
1.1.2 Produit d'espaces topologiques	4
1.1.3 Voisinages	5
1.1.4 Intérieur, adhérence, frontière point d'accumulation et point isolé	6
1.1.5 Axioms de séparation	8
1.2 Espace métrique	10
1.2.1 Boule ouverte, boule fermée et sphère	11
1.2.2 Topologie d'un espace métrique	12
1.2.3 Bases de voisinages	13
1.2.4 Parties bornées dans un espace métrique	13
1.2.5 Distance entre deux ensembles	14
1.3 Produit d'espaces métriques	14
1.4 Suites	15

1.4.1	Valeurs d'adhérence d'une suite	16
1.4.2	Suites partielles ou suites extraites	16
1.4.3	La densité	17
1.4.4	Espaces métriques complets	17
1.4.5	Sous espaces complets	18
1.5	Continuité	18
1.5.1	Homéomorphisme	19
1.5.2	Applications ouvertes-Applications fermées	19
1.6	Espace vectoriel normé	19
2	Espaces compacts	21
2.1	Définitions et propriétés	21
2.2	Compacité dans les espaces métriques	28
2.3	Union - Intersection	28
2.4	Compacts de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$	29
2.5	Produit d'espaces compacts	30
2.6	Espaces compacts - Espaces normaux	31
2.7	Fonctions continues sur un compact	32
2.8	Compacts dans les espaces vectoriels normés de dimension finies	32
2.8.1	Lemme de Riesz	37
2.8.2	Théorème de Riesz	38
3	Espaces localement compacts	39
3.1	Définitions et propriétés	39
3.2	Compactification	42
3.2.1	Exemple de compactification	43
3.3	Espaces localement compacts dans les espaces vectoriels normés de dimension finie	49
3.3.1	Théorème de F.Riesz	49
	Conclusion	51

Bibliographie**54**

INTRODUCTION

Ce mémoire traite de l'étude des espaces dits "espaces localement compacts". Ces derniers constituent une catégorie importante d'espaces, déjà parce que certains espaces classiques tels $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et généralement tout espace vectoriel normé de dimension finie en font partie. Par définition, un espace est localement compact si tout élément admet un voisinage compact, on verra ultérieurement qu'un tel espace peut être compactifié et donc peut être vu comme étant une partie d'un espace compact.

Ce mémoire contient trois chapitres :

Le premier chapitre introduit les notions préliminaires sur les espaces topologiques et leurs propriétés telles que les ouverts et les fermés ainsi que les voisinages, ...viennent par la suite les espaces métriques où là aussi on y définit la distances et les boules puis nous avons abordé les suites et leurs valeurs d'adhérences, ce qui nous a amenés à parler des suites de Cauchy puis des espaces métriques complets. Nous avons également vu la notion de continuité et d'homéomorphisme. Enfin, nous nous sommes familiarisés avec les espaces vectoriels normés et la plupart des propriétés qui s'offrent à nous dans ces espaces et qui sont nécessaires par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous avons concentré notre étude sur les espaces compacts car comme il a été mentionné plus haut, ces espaces sont étroitement liés au sujet de cette étude, nous avons donc donné les définitions et les théorèmes les plus importants, et nous avons essayé autant que possible de les étayer par des exemples compréhensibles pour le lecteur. Nous avons également énoncé certaines propriétés des espaces compacts, dont les plus importantes et qui sont peut-être celles qui relient les compacts aux espaces vectoriels normés (Le théorème de Riesz).

Dans le troisième et dernier chapitre, nous avons consacré notre étude aux espaces localement compacts. Nous avons défini et mentionné les meilleurs exemples faciles à saisir, puis nous avons expliqué le principe de la compactification, principe qui permet de construire à partir d'un espace localement compact un autre espace l'incluant mais qui est cette fois compact et nous l'avons soutenu avec quelques exemples. Enfin, nous avons abordé la caractéristique la plus importante qui relie les espaces localement compacts aux espaces vectoriels normés (Le théorème de F.Riesz).

Peux-être le lecteur de ce mémoire remarquera-t-il que nous avons mentionné certaines des proposition supposé être connue, sans preuve. Cela est dû au fait que nous nous sommes borné au notions primordiales pour ce mémoire sans pour autant démontrer les propositions qui puissent dérouter le lecteur.

Notions préliminaires

Tout au long de ce mémoire, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Espace topologique

Définition 1.1.1 *On appelle topologie sur X toute partie τ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les trois propriétés suivantes (les axiomes de Hausdorff)*

- (θ_1) L'ensemble vide $\emptyset$ et X appartiennent à τ ;
- (θ_2) La réunion (quelconque) de toute famille d'éléments de τ appartient à τ ;
- (θ_3) L'intersection de toute famille finie d'éléments de τ appartient à τ .

(X, τ) s'appelle espace topologique de support X . Les éléments de τ sont appelés ouverts de (X, τ) ou de τ , et sont souvent notés $\mathcal{O}$.

Exemple 1.1.1 *La topologie grossière (ou chaotique) : $\tau = \tau_g = \{\emptyset, X\}$, c'est la topologie qui contient le moins d'ouverts possible.*

Exemple 1.1.2 *La topologie discrète : tous les ensembles sont des ouverts $\tau = \tau_{di} = \mathcal{P}(X)$.*

Exemple 1.1.3 *Si X possède au moins deux éléments $X = \{a, b\}$, alors $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ est une topologie sur X dite topologie de Sierpinski.*

Exemple 1.1.4 La topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est celle dont la famille d'ouverts est,

$$\mathcal{O} = \{\omega \subset \mathbb{R}, \omega \text{ est une union d'intervalles ouverts de } \mathbb{R}\}$$

Cet espace topologique est noté $(\mathbb{R}, \tau_u)$ et $]a, b[$ ($a, b \in \mathbb{R} : a < b$) constitue, par exemple, un ouvert dans cet espace.

Définition 1.1.2 Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que le sous ensemble $A \subset X$ est fermé dans X si et seulement si son complémentaire $A^c = C_X^A$ est ouvert dans X . Autrement dit :

$$A \text{ fermé dans } X \iff A^c \text{ ouvert dans } X$$

Proposition 1.1.1 (caractérisation d'une topologie par les fermés) Soit (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de X . on a :

- (F₁) L'intersection de toute famille d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$;
- (F₂) La réunion de toute famille finie d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$;
- (F₃) L'ensemble vide $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathcal{F}$.

Exemple 1.1.5 Les fermés de la topologie grossière τ_g sont $\emptyset$ et X lui même. On remarque, par ailleurs, qu'ils sont aussi ouverts d'après la définition même d'une topologie. D'où la possibilité d'existence de parties ouvertes et fermées à la fois.

Exemple 1.1.6 Toute partie $A \subset X$ est ouverte et fermée à la fois pour la topologie discrète τ_{di} .

Exemple 1.1.7 Si $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$ donc $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, e\}, \{e\}, \{c, d\}\}$.

Exemple 1.1.8 Dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R} : a < b$) est, un fermé car son complémentaire $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert.

Proposition 1.1.2 Soit X un ensemble et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X ($\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$). Supposons que $X \in \mathcal{B}$ et que l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathcal{B}$ appartient lui aussi à $\mathcal{B}$. Alors ;

- 1) L'ensemble τ des réunions d'éléments de $\mathcal{B}$ est une topologie sur X ;
- 2) Pour qu'un sous ensemble A dans X soit un élément de τ il faut et il suffit que,

$$\forall x \in A, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } x \in B \text{ et } B \subset A$$

Preuve. Voir [21]. □

1.1.1 La topologie induite

Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$.

Proposition 1.1.3 La famille $\tau_A = \{A \cap \theta, \theta \in \tau\}$ de $\mathcal{P}(X)$ définit une topologie sur A , c'est à dire que le couple (A, τ_A) est un espace topologique.

Définition 1.1.3 Le couple (A, τ_A) , dans la proposition 1.1.3, est dit "sous espace topologique de l'espace topologique" (X, τ) et la topologie τ_A est dite "topologie induite par la topologie τ sur A ".

Remarque 1.1.1 $(X, \tau) = (X, \tau_X)$.

1.1.2 Produit d'espaces topologiques

Définition 1.1.4 [21] Soient (X_1, τ_1) , (X_2, τ_2) deux espaces topologiques. On appelle ouvert élémentaire tout ensemble de la forme $U_1 \times U_2$ où U_1 est un ouvert de X_1 et U_2 est un ouvert de X_2 .

Théorème 1.1.1 [21] Soient (X_1, τ_1) , (X_2, τ_2) deux espaces topologiques. Il existe alors une topologie sur $X_1 \times X_2$ dont les ouverts sont la réunions d'ouverts élémentaires

Preuve. Notons $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$ l'ensemble des ouverts élémentaires. On a, $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$ et si U_1, U'_1 sont deux ouverts de X_1 et U_2, U'_2 sont deux ouverts de X_2 , alors l'intersection $(U_1 \times U_2) \cap (U'_1 \times U'_2)$ de deux ouverts élémentaires est aussi un ouvert élémentaire. Il résulte de la proposition ?? que τ qui représente la réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ est une topologie sur $X_1 \times X_2$. □

Définition 1.1.5 On appelle *topologie produit* la topologie sur $X_1 \times X_2$ décrite ci-dessus.

Remarque 1.1.2 On comprend par la définition ci-dessus qu'il existe dans $X_1 \times X_2$ des ouverts qui ne sont pas des ouverts élémentaires (mais une réunion de ces derniers). Par exemple dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle, Les ensembles,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \succ y\} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \prec 4\}$$

sont des ouverts qui ne représentent pas le produit de deux ouverts dans $\mathbb{R}$, et ne sont pas, par conséquent, des ouverts élémentaires.

Proposition 1.1.4 (Produit fini de topologies) Soient (X_k, τ_k) , $1 \leq k \leq n$ des espaces topologiques et $X = X_1 \times \dots \times X_n$ le produit Cartésien. La topologie produit est la famille τ de parties de X qui sont réunion quelconque d'ensembles de la forme ;

$$U_1 \times \dots \times U_n \text{ où } U_k \in \tau_k$$

c'est aussi la topologie que l'on obtient par récurrence sur n , en posant ;

$$X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times X_n = (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$$

Remarque 1.1.3 1) Le lecteur peut aussi consulter [5] ou [14] pour une définition qui utilise la notion de "topologie initiale".

2) On peut aussi montrer qu'un produit quelconque d'espaces topologiques constitue un espace topologique.

Proposition 1.1.5 Soient (X_k, τ_k) , $k = 1, 2, \dots, n$ des espaces topologiques et A_k une partie non vide de X_k ($k = 1, 2, \dots, n$), alors

$$i) \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \dots \times \overline{A_n} = \overline{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}$$

$$ii) \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 \times \dots \times \mathring{A}_n = A_1 \times \overset{\circ}{A_2 \times \dots \times A_n}$$

1.1.3 Voisinages

Définition 1.1.6 Soit (X, τ) un espace topologique

(1) On appelle voisinage d'un point $x \in X$, toute partie de X qui contient un ouvert contenant $\{x\}$.

(2) Plus généralement on appelle voisinage d'une partie A de X , toute partie de X qui contient un ouvert contenant A .

On note : $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x et $V(A)$ l'ensemble des voisinages de A .

Proposition 1.1.6 Soit (X, τ) un espace topologique, $A \subset X$ et $A \neq \emptyset$. A est ouvert dans X si et seulement s'il est voisinage de tous ses points.

Exemple 1.1.9 Dans (X, τ_g) , le seul voisinage d'un point x est X .

Exemple 1.1.10 Dans (X, τ_{di}) , toute partie contenant $\{x\}$ est un voisinage de x , en particulier $\{x\} \in V(x)$.

Définition 1.1.7 On appelle base de voisinage (ou système fondamental de voisinages) de x toute partie $s(x)$ de $V(x)$ telle que, pour tout $V \in V(x)$, V contient un voisinage W de $s(x)$.

Exemple 1.1.11 1. Pour un espace topologique (X, τ) quelconque, $s(x) = V(x)$ est une base de voisinages de x .

2. Dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $s(x) = \left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right], n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une base de voisinages de x .

3. Dans X discret, $s(x) = \{\{x\}, x \in X\}$ est une base de voisinages de x .

1.1.4 Intérieur, adhérence, frontière point d'accumulation et point isolé

Définition 1.1.8 (point intérieur) Soit (X, τ) un espace topologique.

(1) Un point $x \in X$ est dit intérieur à A si A est voisinage de x ($A \in V(x)$) et on définit l'intérieur d'une partie A comme étant le plus grand ensemble ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A . C'est aussi l'union de tous les ouverts inclus dans A .

(2) L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et est noté $\mathring{A}$ ou $Int(A)$

$$Int(A) = \mathring{A} = \bigcup_{\theta \subset A} \theta, \theta \subset A$$

Exemple 1.1.12 Dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $\overset{\circ}{[a, b]} = \overset{\circ}{]a, b[} = \overset{\circ}{[a, b[} = \overset{\circ}{]a, b]} =]a, b[$, où τ_u est la topologie usuelle et a, b sont deux réels vérifiant $a \prec b$.

Définition 1.1.9 (point adhérent) Soit (X, τ) un espace topologique.

(1) Un point $x \in X$ est adhérent à A si tout voisinage de x rencontre A . L'ensemble des points adhérents s'appelle l'adhérence (ou fermeture) de A et est noté $\bar{A}$ ou $\text{adh}(A)$.

$$\text{adh}(A) = \bar{A} = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset\}$$

(2) $\bar{A}$ est la plus petite partie (au sens de l'inclusion fermée) contenant A . En d'autres termes, $\bar{A}$ est l'intersection de toutes les parties fermées de X et qui contiennent A . Ce que l'on note par :

$$\text{adh}(A) = \bar{A} = \bigcap_{F \supset A} F, F^c \in \tau$$

Proposition 1.1.7 Soit A une partie d'un espace topologique

- $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A .
- Si U est un ouvert et $U \subset A$, alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.
- A est ouvert $\iff A = \overset{\circ}{A}$
- $\bar{A}$ est un fermé contenant A .
- Si F est un fermé et $F \supset A$, alors $F \supset \bar{A}$.
- A est fermé $\iff A = \bar{A}$.

Exemple 1.1.13 Dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $\overline{[a, b]} = \overline{]a, b[} = \overline{[a, b[} = \overline{]a, b]} = [a, b]$, où τ_u est la topologie usuelle et a, b sont deux réels vérifiant $a \prec b$.

Définition 1.1.10 Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie de X . On définit la frontière de A , qu'on note $\text{Fr}(A)$ ou $F(A)$ ou encore ∂A , par :

$$\text{Fr}(A) = F(A) = \partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \bar{A} - \overset{\circ}{A}.$$

Remarque 1.1.4 Il est clair que ∂A est fermée.

Exemple 1.1.14 Dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $\partial[a, b] = \partial]a, b[= \partial[a, b[= \partial]a, b] = \{a, b\}$ où τ_u est la topologie usuelle et a, b sont deux réels vérifiant $a \prec b$.

Définition 1.1.11 (point d'accumulation) *Un point x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x contient un point de A autre que x . L'ensemble des points d'accumulation est appelé dérivé de A et noté A' .*

Exemple 1.1.15 *Dans $\mathbb{R}$, l'élément 0 est le seul point d'accumulation de l'ensemble*

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

Remarque 1.1.5 *Il est évident que $A' \subseteq \bar{A}$*

Définition 1.1.12 *Un point $a \in A$ est un point isolé de A , s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$. On note $Is(A)$ l'ensemble des points isolés de A .*

Exemple 1.1.16 *Dans $\mathbb{R}$, tous les points de $\mathbb{N}$ sont isolés.*

Remarque 1.1.6 *1 Il est évident que $Is(A) \subseteq \bar{A}$ mieux encore, on a,*

$$\bar{A} = A' \cup Is(A) \text{ et } A' \cap Is(A) = \emptyset$$

1.1.5 Axioms de séparation

Espace de Kolmogorov (espace de type T_0)

On dit qu'un espace topologique X est de Kolmogorov, ou vérifie la propriété T_0 , si pour deux points distincts quelconques de X , l'un (au moins) des deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre point. Ou encore, l'un des deux points n'est pas adhérent à l'autre.

Espace de Frechet (espace de type T_1)

Définition 1.1.13 *Un espace est de type T_1 si pour tous points x, y distincts de X , il existe un voisinage de x ne contenant pas y et un voisinage de y ne contenant pas x .*

Proposition 1.1.8 *Un espace topologique X est T_1 si et seulement si les singletons $\{x\} \subset X$ sont des fermés*

Preuve. Voir [22]

□

Espace topologique séparé ou encore de Hausdorff (espace de type T_2)

Définition 1.1.14 On dit qu'un espace topologique (X, τ) est séparé (un espace de Hausdorff) ou que la topologie τ est séparée si pour tout x et y distincts de X , il existe deux voisinages disjoints de x et y . C'est à dire :

$$(X, \tau) \text{ séparé} \iff (\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow \exists V_1 \in V(x), \exists V_2 \in V(y) : V_1 \cap V_2 = \emptyset)$$

Remarque 1.1.7 Il suit directement de la définition 1.1.14 que dans un espace séparé les points sont des fermés : si $x \in X$ et $y \in X \setminus \{x\}$, alors $x \neq y$ et $y \in V_y \subset X \setminus \{x\}$.

Exemple 1.1.17 L'espace topologique (X, τ_g) n'est pas séparé car :

$$\forall x, y \in X : V(x) = V(y) = \{X\}$$

Exemple 1.1.18 L'espace (X, τ_{di}) est séparé car :

$$\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow \exists \{x\} \in V(x), \exists \{y\} \in V(y) : \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$$

Exemple 1.1.19 $\mathbb{R}$ usuel est séparé.

Remarque 1.1.8 On a $T_2 \implies T_1 \implies T_0$

Proposition 1.1.9 Si X est séparé et $A \subset X$ est muni de la topologie induite, alors A est séparé.

Proposition 1.1.10 Dans un espace de Hausdorff X tout ensemble fini est fermé.

Proposition 1.1.11 Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces non vides. Alors

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ est séparé} \iff X_i \text{ est séparé.}$$

Espace régulier

Définition 1.1.15 On dit que l'espace topologique X est de type T_3 si,

Quel que soit le fermé F_2 ($F_2 \subset X$) et pour tout $x_1 \notin F_2$, il existe $V_1 \in V(x_1)$ et il existe $V_2 \in V(F_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Définition 1.1.16 Un espace topologique X qui vérifie à la fois T_1 et T_3 est **séparé** (de type T_2), on l'appelle alors espace régulier.

Exemple 1.1.20 X discret est régulier. Il suffit de considérer $V_1 = \{x\}$ et $V_2 = F_2$.

Espace complètement régulier ou espace de Tychonov

Définition 1.1.17 *Un espace topologique X vérifie $T_{31/2}$ si pour tout point x de X et pour tout fermé F de X ne contenant pas x , il existe une fonction continue de X dans le segment $[0, 1]$ valant 0 en x et 1 sur F*

Définition 1.1.18 *Un espace topologique X qui vérifie à la fois T_1 et $T_{3\frac{1}{2}}$ est **séparé** (de type T_2), on l'appelle alors espace complètement régulier.*

Remarque 1.1.9 *Tout espace complètement régulier est régulier (voir [22]), l'inverse n'est à toujours vrai.*

Espace normal

Définition 1.1.19 *Un espace topologique X vérifie T_4 si pour tous fermés disjoints F_1 et F_2 de X , il existe $V_1 \in \mathcal{V}(F_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(F_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$*

Exemple 1.1.21 *La topologie grossière vérifie T_4 (sans être séparée).*

Définition 1.1.20 *L'espace topologique X est dit normal s'il est séparé (de type T_2).et vérifie aussi T_4 .*

Remarque 1.1.10 1. *Dans la définition, on peut remplacer V_1 et V_2 par deux ouverts θ_1 et θ_2 .*

2. *Si X est normal, alors X est complètement régulier mais la réciproque est fausse.*

Exemple 1.1.22 1. *X discret est normal; il suffit de considérer $V_1 = F_1$ et $V_2 = F_2$.*

2. *$\mathbb{R}$ usuel est normal.*

1.2 Espace métrique

Soit X un ensemble non vide.

Définition 1.2.1 *On appelle distance ou métrique sur X , toute application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout couple (x, y) de $X \times X$ associe le nombre fini, non négatif $d(x, y)$, appelé distance entre les deux éléments (points) x et y , et qui vérifie :*

(d_1) $d(x, y) = 0 \iff x = y; \forall x, y \in X$ (Axiome de séparation);

(d_2) $d(x, y) = d(y, x); \forall x, y \in X$ (Symétrie);

(d_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y); \forall x, y, z \in X$ (Inégalité triangulaire).

Le couple (X, d) est alors appelé espace métrique.

Remarque 1.2.1 Si $A \subset X$ alors la restriction de d à $A \times A$, notée d_A , possède les propriétés (d_1), (d_2) et (d_3) ci-dessus. (A, d_A) est un sous espace métrique de (X, d) .

Exemple 1.2.1 Dans $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a une métrique définie, pour tous $x, y \in X$ par

$$d(x, y) = |x - y|$$

où $|\cdot|$ représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$ respectivement.

1.2.1 Boule ouverte, boule fermée et sphère

soit (X, d) un espace métrique, $x_0 \in X$ et $\rho > 0$.

Définition 1.2.2 On appelle boule ouverte (respectivement boule fermée, sphère) de centre x_0 et de rayon ρ l'ensemble noté $B_o(x_0, \rho)$ (respectivement $B_f(x_0, \rho)$, $S(x_0, \rho)$) et défini par :

$$B_o(x_0, \rho) = \{x \in X, d(x_0, x) < \rho\}$$

$$B_f(x_0, \rho) = \{x \in X, d(x_0, x) \leq \rho\}$$

$$S(x_0, \rho) = \{x \in X, d(x_0, x) = \rho\}$$

Remarque 1.2.2 Il est clair que $B_f(x_0, \rho) = B_o(x_0, \rho) \cup S(x_0, \rho)$.

Exemple 1.2.2 Si $X = \mathbb{R}$ muni de la métrique euclidienne $d(x, y) = |x - y|$ pour $x, y \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$B_o(x_0, \rho) =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$$

Exemple 1.2.3 Si $X = \mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ alors, $B_o(x_0, \rho)$ [resp. $B_f(x_0, \rho)$] est le disque ouvert [resp. fermé] de centre x_0 et de rayon ρ et $S(x_0, \rho)$ est le cercle de centre x_0 et de rayon ρ .

1.2.2 Topologie d'un espace métrique

soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Définition 1.2.3 On dit que la partie A de X est ouverte dans l'espace métrique $((X, d))$ ou au sens de (par rapport à) la distance d si on a :

$$\forall x \in A, \exists \rho \succ 0 : B_o(x, \rho) \subset A$$

Exemple 1.2.4 L'intervalle ouvert $A =]a, b[$, où $a \prec b$, est ouvert dans $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon \succ 0$ tel que $B_o(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Il suffit de prendre

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{d(x, a), d(x, b)\} = \frac{1}{2} \min \{|x - a|, |x - b|\}$$

.

Proposition 1.2.1 L'ensemble de parties τ_d définie par :

$$\tau_d = \{\mathcal{O} \subset X / \forall x \in \mathcal{O}, \exists B(x, \rho_x) \subset \mathcal{O}\}$$

est une topologie sur X .

Définition 1.2.4 τ_d est une topologie associée à la métrique d . On supposera toujours que l'espace métrique (X, d) est muni de τ_d .

Proposition 1.2.2 La famille des ouverts de (X, d) vérifie les propriétés suivantes :

- 1- $\emptyset$ et X sont des ouverts de X ;
- 2- Une réunion quelconque d'ouverts est encore un ouvert ;
- 3- Une intersection finie d'ouverts est encore un ouvert.

Proposition 1.2.3 1- La boule $B_o(x_0, \rho)$ est un ouvert.

2- Les ensembles $B_f(x_0, \rho)$ et $S(x_0, \rho)$ sont des fermés.

1.2.3 Bases de voisinages

Proposition 1.2.4 *Les ensembles*

$$V_1(x) = \{B_o(x, \rho) / \rho \succ 0\}$$

et

$$V_2(x) = \{B_f(x, \rho) / \rho \succ 0\}$$

sont des bases de voisinages de x .

Proposition 1.2.5 *Les ensembles*

$$V_1(x) = \left\{ B_o \left(x, \frac{1}{n} \right) / n \succ 0 \right\}$$

et

$$V_2(x) = \left\{ B_f \left(x, \frac{1}{n} \right) / n \succ 0 \right\}$$

sont des bases de voisinages de x .

Proposition 1.2.6 *Tout espace métrique (X, d) est un espace topologique séparé.*

Preuve.

- i) On a vu au ci-dessus que la famille des ouverts de X vérifie les axiomes de la topologie (de Hausdorff) et par suite cette famille définit bien une topologie sur X dite topologie induite ou générée sur X par la distance d . Donc tout espace métrique est bien un espace topologique.
- ii) Il reste à montrer que cet espace topologique est séparé. Soit, à cet effet, x et y dans X tel que $x \neq y$. Comme $x \neq y$ on a bien $d(x, y) \succ 0$. En posant $\rho = \frac{1}{2}d(x, y)$, alors les deux boules ouvertes $B_o(x, \rho)$ et $B_o(y, \rho)$ sont deux voisinages ouverts et disjoints des deux points x et y respectivement. C'est à dire : $B_o(x, \rho) \in V(x)$ et $B_o(y, \rho) \in V(y)$ et $B_o(x, \rho) \cap B_o(y, \rho) = \emptyset$ et donc X est séparé. $\square$

1.2.4 Parties bornées dans un espace métrique

Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Définition 1.2.5 *On dit que la partie de X est bornée dans X ou par rapport à la distance d définie sur X s'il existe $\rho \succ 0$ et $x_0 \in X$ tel que $A \subset B_o(x_0, \rho)$.*

Définition 1.2.6 On appelle diamètre de la partie A de X la quantité (finie ou infinie), notée $\delta(A)$, définie par :

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

Proposition 1.2.7 La partie A de X est bornée si et seulement si $\delta(A)$ est fini.

1.2.5 Distance entre deux ensembles

Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ et $B \subset X$ deux parties de X .

Définition 1.2.7 La distance $d(A, B)$ entre les deux parties A et B de X est définie par $d(A, B) = \inf_{x \in A; y \in B} d(x, y)$.

Remarque 1.2.3 Si $B = \{x\}$ alors :

$$d(x, A) = d(\{x\}, A) = \inf_{x \in \{x\}; y \in A} d(x, y) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

$d(x, A)$ est dite distance du point $x \in X$ à l'ensemble A .

1.3 Produit d'espaces métriques

Définition 1.3.1 Soit $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques. On définit sur le produit cartésien $X = X_1 \times \dots \times X_n$ l'application suivante

$$d(x, y) = \max_{i=1,2,\dots,n} d(x_i, y_i)$$

pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de X .

Alors, (X, d) est un espace métrique.

Il est aisé de montrer que les trois propriétés de la distance sont vérifiées.

Proposition 1.3.1 On a pour tout $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $r > 0$

$$B_o(a, r) \subseteq \prod_{i=1}^n (B_o)_i(a_i, r)$$

où $B_o(a, r)$, $(B_o)_i(a_i, r)$ sont les boules ouverte de centre a [resp. a_i] et de rayon r par rapport à la distance d [resp. d_i]

Preuve. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$,

$$\begin{aligned} x \in B_o(a, r) &\implies d(x, a) = \max_{i=1,2,\dots,n} d(x_i, a_i) \prec r \\ &\implies d(x_i, a_i) \prec r, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ &\implies x_i \in (B_o)_i(a_i, r), \forall i = 1, 2, \dots, n \\ &\implies x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n (B_o)_i(a_i, r) \end{aligned}$$

□

Remarque 1.3.1 La même propriété est valide si on remplace toutes les boules ouvertes par des boules fermées.

1.4 Suites

Définition 1.4.1 On appelle suite, toute application $x : \mathbb{N} \rightarrow X, n \mapsto x(n)$. On écrira, par la suite, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$ pour désigner l'application x et x_n pour désigner $x(n)$. L'application x est la suite $(x_n)_n$ tandis que l'image de n par l'application x (c'est à dire x_n ou $x(n)$) est le terme générale de la suite $(x_n)_n$.

Définition 1.4.2 Soient (X, τ) un espace topologique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et soit $l \in X$, on dit que l est une limite de la suite x_n quand n tend vers l'infini ou que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la limite l , si pour tout voisinage V de l dans X il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans V . On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$ et on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \iff (\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N_V \in \mathbb{N}, \forall n \succeq N_V : x_n \in V)$$

Définition 1.4.3 Soit (X, d) un espace métrique et $l \in X$. On dit que la suite $(x_n)_n$ converge ou tend vers l quand n tend vers $+\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : d(x_n, l) \prec \varepsilon.$$

Proposition 1.4.1 La partie A d'un espace métrique X est fermée si et seulement si elle contient toutes les limites de ses suites convergentes.

$$\bar{A} = \left\{ x \in X : \exists \text{ une suite } (x_n) \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x \right\}$$

Exemple 1.4.1 *L'adhérence de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ puisque tout nombre réel est limite d'une suite des nombres rationnels, et on a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$*

Définition 1.4.4 *On dit que la suite $(x_n)_n$ est suite de Cauchy dans l'espace métrique (X, d) si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq n_0) \wedge (m \geq n_0) \implies d(x_n, x_m) \prec \varepsilon.$$

Proposition 1.4.2 *Toute suite convergente dans un espace métrique (X, d) est une suite de Cauchy dans cet espace. L'inverse (réciproque) étant évidemment faux.*

1.4.1 Valeurs d'adhérence d'une suite

Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite dans X .

Posons $A_n = \{x_k, k \succeq n\} = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots\}$. Il est clair que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Définition 1.4.5 [5], [10], [14] *On dit de $x \in X$ que c'est une valeur d'adhérence (une valeur d'adhérence et non pas un point adhérent à l'ensemble des valeurs de la suite) si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \forall n \in \mathbb{N} : B_o(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$$

C'est à dire : $x \in \overline{A_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Ou encore : $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$.

Remarque 1.4.1 *Toute valeur d'adhérence est un point adhérent à l'ensemble des points de la suite, mais la réciproque est inexacte.*

1.4.2 Suites partielles ou suites extraites

Définition 1.4.6 *On appelle suite partielle, suite extraite ou sous suite de la suite $(x_n)_n$, la suite $(x_{\varphi(n)})_n$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.*

Exemple 1.4.2 *Soit la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = (-1)^n$. En considérant les deux applications φ et ψ définies de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, respectivement, par $\varphi(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\psi(n) = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$, on obtient les deux suites partielles $(x_{\varphi(n)})_n$ et $(x_{\psi(n)})_n$ définies par :*

$$\begin{aligned} x_{\varphi(n)} &= x_{2n} = (-1)^{2n} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \\ x_{\psi(n)} &= x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.3 *Si x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$, alors il existe une suite $(x_{\varphi(n)})_n$ extraite de la suite $(x_n)_n$ et convergente vers x .*

Proposition 1.4.4 *Une suite de Cauchy $(x_n)_n$ qui possède une valeur d'adhérence, est une suite convergente.*

On peut aussi reformuler cette proposition comme suit : Si une suite partielle d'une suite de Cauchy est convergente, alors la suite initiale est, elle aussi, convergente vers la même limite.

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq n_0, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers x . Donc, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors,

$$\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}, d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon$$

Ce que montre que la suite converge. □

1.4.3 La densité

Soit A une partie d'un espace topologique X .

Définition 1.4.7 *On dit que A est dense dans X si et seulement si $\bar{A} = X$ i.e : les éléments de X sont les limites des suites d'éléments de A et on écrit :*

$$\forall x \in X, \exists (x_n)_n \subset A : x_n \rightarrow x \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

1.4.4 Espaces métriques complets

Définition 1.4.8 *On dit que l'espace métrique (X, d) est complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X , c'est à dire par rapport ou au sens de la distance d .*

Exemple 1.4.3 $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle $\forall x, y \in \mathbb{Q} : d(x, y) = |x - y|$ n'est pas complet, car il existe dans $\mathbb{Q}$ des suites de Cauchy non convergentes. En effet, considérons la suite définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, n \geq 1$. Les éléments de cette suite sont rationnels, or cette même suite considérée dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, et de l'unicité de la limite on déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limites dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.4.5 $\mathbb{R}$ est complet.

1.4.5 Sous espaces complets

Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Définition 1.4.9 On dit que la partie A de X est complète si le sous espace (A, d_A) où $d_A = d|_A$ est la restriction de d à A , est complet.

Proposition 1.4.6 Dans un espace métrique (X, d) tout partie A de X complète est fermée.

Proposition 1.4.7 Dans un espace métrique complet (X, d) , il y a équivalence entre les parties fermées et les parties complètes. C'est à dire que toute partie fermée est complète et toute partie complète est fermée.

1.5 Continuité

Définition 1.5.1 Soit (X, τ) et (X', τ') deux espaces topologiques et soit $x \in X$. On dit qu'une fonction $f : X \longrightarrow X'$ est continue au point x si l'image réciproque $f^{-1}(V')$ de tout voisinage V' de $f(x)$ est un voisinage de x et on écrit :

$$(f \text{ est continue au point } x) \iff (\forall V' \in \mathcal{V}(f(x)) : f^{-1}(V') \in \mathcal{V}(x))$$

Définition 1.5.2 L'application f est dite continue dans X (ou sur X) si elle est continue en tout point de X .

Proposition 1.5.1 Soit (X, τ) et (X', τ') deux espaces topologiques et soit $f : X \longrightarrow X'$ une fonction. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue sur X ;
- (ii) L'image réciproque par f d'un ouvert quelconque de X' est un ouvert de X ;
- (iii) L'image réciproque par f d'un fermé quelconque de X' est un fermé de X .

1.5.1 Homéomorphisme

Définition 1.5.3 (1) Une application $f : X \longrightarrow X'$ est un homéomorphisme si f est une bijection bicontinue (f et f^{-1} sont continues).

(2) Les ensembles X et X' sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de X dans X' .

1.5.2 Applications ouvertes-Applications fermées

Définition 1.5.4 Soit f une application de $X \longrightarrow X'$.

(1) f est dite ouverte si l'image par f de tout ouvert de X est ouverte dans X' .

(2) f est dite fermée si l'image par f de tout fermé de X est fermée dans X' .

Proposition 1.5.2 Si f est une bijection de $X \longrightarrow X'$, il y a équivalence entre :

(1) f est une application ouverte ;

(2) f est une application fermée ;

(3) f^{-1} est une application continue.

Preuve. L'équivalence entre (1) et (2) résulte de l'égalité

$$f(C_X^A) = C_{X'}^{f(A)}$$

L'équivalence entre (2) et (3) résulte de la relation

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$

et de la caractérisation de la continuité par image réciproque de fermés. □

1.6 Espace vectoriel normé

Dans cette partie, on suppose que X est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$. Généralement $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et on dit dans ce cas que X est un espace vectoriel réel, ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ et on dit dans ce cas que X est un espace vectoriel complexe.

Définition 1.6.1 Soit X un espace vectoriel. Une norme sur X est une application $x \longmapsto \|x\|$ de X dans $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ vérifiant :

$$(N_1) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$(N_2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X;$$

$$(N_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X \text{ (inégalité triangulaire)}.$$

Définition 1.6.2 Un espace vectoriel normé est un couple $(X, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur X .

Exemple 1.6.1 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ [resp. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$] est $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] espace vectoriel normé.

Exemple 1.6.2 Dans $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme (la norme euclidienne standard); ici, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.6.1 Un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ est un espace métrique pour la métrique

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Le couple (X, d) s'appelle l'espace métrique attaché à l'espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$.

Définition 1.6.3 On dit que l'espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si l'espace métrique (X, d) qui y est attaché est complet.

Exemple 1.6.3 Soit X un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie n et $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de X . tout élément $x \in X$ s'écrira sous la forme unique,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \text{ avec } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$$

On pose, $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i|$. Alors $(X, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Définition 1.6.4 Soit X un espace vectoriel. Deux normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sur X sont dites équivalentes si et seulement si $\exists C_1, C_2 \succ 0$ telles que

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \forall x \in X.$$

Espaces compacts

2.1 Définitions et propriétés

Soient X un ensemble non vide, A une partie de X , $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X et I un ensemble quelconque (généralement infini et non dénombrable).

Définition 2.1.1 On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ constitue un recouvrement de A par des parties de X si et seulement si $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. C'est à dire si et seulement si pour tout $x \in A$ il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$. Ou en d'autres termes : $\forall x \in A, \exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}$.

Définition 2.1.2 Soit (X, τ) un espace topologique, A une partie de X et $(\theta_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X . On dit que la famille $(\theta_i)_{i \in I}$ constitue un recouvrement ouvert de A par des ouverts de X si et seulement si $A \subset \bigcup_{i \in I} \theta_i$. C'est à dire si et seulement si pour tout $x \in A$ il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in \theta_{i_0}$. Ou en d'autres termes : $\forall x \in A, \exists i_0 \in I : x \in \theta_{i_0}$.

Définition 2.1.3 Soit (X, τ) un espace topologique et $(\theta_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X . On dit que la famille $(\theta_i)_{i \in I}$ constitue un recouvrement ouvert de X par des ouverts de X si et seulement si $X = \bigcup_{i \in I} \theta_i$. C'est à dire si et seulement si pour tout $x \in X$ il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in \theta_{i_0}$. Ou en d'autres termes : $\forall x \in X, \exists i_0 \in I : x \in \theta_{i_0}$.

Définition 2.1.4 Soit (X, τ) un espace topologique séparé.

On dit que (X, τ) est compact ou que X est " τ -compact" si et seulement si de tout recouvrement ouvert de X par des ouverts de X on peut en extraire un sous recouvrement fini de X . C'est à dire que X est compact si et seulement si :

Pour toute famille $(\theta_i)_{i \in I} \subset \tau$ telle que $X = \bigcup_{i \in I} \theta_i$, il existe $J \subset I$, J fini, tel que $X = \bigcup_{i \in J} \theta_i$. Ou encore que X est compact si et seulement si :

$$\forall (\theta_i)_{i \in I} \subset \tau, X = \bigcup_{i \in I} \theta_i \Rightarrow \exists J \subset I, |J| < +\infty, X = \bigcup_{i \in J} \theta_i.$$

Où $|J| = \text{card} J$ désigne le nombre d'éléments de J .

Définition 2.1.5 Soit (X, τ) un espace topologique séparé.

On dit que (X, τ) est compact ou que X est " τ -compact" si et seulement si de toute de fermés de X ayant une intersection vide, on peut en extraire une sous famille finie ayant la même propriété (d'intérieur vide). C'est à dire, et en désignant par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de X , que X est compact si et seulement si :

Pour toute famille $(F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe $J \subset I$, J fini, tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$. Ou encore que E est compact si et seulement si :

$$\forall (F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}, \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \Rightarrow \exists J \subset I, |J| < +\infty, \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset.$$

Remarque 2.1.1 Les auteurs anglosaxons n'utilisent pas toujours la "séparation" dans ces définitions!. En français, on parle d'espaces quasi-compacts.

Le but de la condition (X, τ) , séparé est d'exclure certains espaces topologiques triviaux, comme l'espace topologique grossier, (X, τ_g) , par exemple.

Proposition 2.1.1 Les deux définitions 2.1.4 et 2.1.5 sont équivalentes.

Preuve. Supposons que (X, τ) soit compact au sens de la définition 2.1.4 c'est à dire :

$$\forall (\theta_i)_{i \in I} \subset \tau, X = \bigcup_{i \in I} \theta_i \Rightarrow \exists J \subset I, |J| < +\infty, X = \bigcup_{i \in J} \theta_i$$

On obtient alors en passant aux complémentaires et en notant $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de X :

$$\begin{aligned} & \left(\forall (\theta_i)_{i \in I} \subset \tau, C_X^X = C_X^{\bigcup_{i \in I} \theta_i} \Rightarrow \exists J \subset I, |J| < +\infty, C_X^X = C_X^{\bigcup_{i \in J} \theta_i} \right) \\ \iff & \left(\forall (C_X^{\theta_i})_{i \in I} \text{ / } \theta_i \in \tau, \forall i \in I, \bigcap_{i \in I} C_X^{\theta_i} = \emptyset \Rightarrow \exists J \subset I, |J| < +\infty, \bigcap_{i \in J} C_X^{\theta_i} = \emptyset \right) \\ \iff & \left(\forall (F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}, \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \Rightarrow \exists J \subset I, |J| < +\infty, \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset \right) \end{aligned}$$

Et cette dernière expression n'est que la formulation de la compacité au sens de la définition 2.1.5. $\square$

Exemple 2.1.1 *Tout espace topologique X fini discret est compact.*

Mais

$$X \text{ est infini discret} \not\Rightarrow X \text{ compact}$$

car on peut prendre les singletons comme recouvrement de X par des ouverts.

Exemple 2.1.2 *L'espace topologique usuel, $(\mathbb{R}, \tau_u)$, n'est pas compact car la famille $(]-n, n[)_{n \geq 1}$ constitue un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, par des ouverts de $\mathbb{R}$, et du quel on ne peut extraire aucun sous recouvrement fini. Autrement $\mathbb{R}$ serait borné.*

En effet, supposons qu'il existe $N \subset \mathbb{N}$, N fini tel que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in N}]-n, n[$. Comme N est une partie finie de $\mathbb{N}^$, alors elle possède un plus grand élément n_0 et on aura dans ce cas*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in N}]-n, n[=]-n_0, n_0[$$

et $\mathbb{R}$ serait borné. Ce qui est absurde.

Exemple 2.1.3 *(voir [3], [21]) L'intervalle $[0, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}$.*

Soit $(\theta_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts qui recouvre $[0, 1]$. On note :

$$W = \{s \in [0, 1] : [0, s] \text{ admet un recouvrement fini par des } \theta_i\}.$$

On a $W \neq \emptyset$ car $0 \in W$. De plus, par construction W est un sous-intervalle de $[0, 1]$: donc $W = [0, c[$ ou $W = [0, c]$ pour $c = \sup W$.

Si $c < 1$, on remarque qu'il existe $j \in I$ tel que $c \in \theta_j$. L'ensemble θ_j étant ouvert, on peut trouver $s < c < s'$ tels que $s, s' \in \theta_j$. En particulier $[0, s] \subset W$ car on peut ajouter θ_j au recouvrement fini de $[0, s]$: ceci contredit le fait que c est la borne supérieure de W . Ainsi $c = 1$ et on montre de même que $c \in W$.

Théorème 2.1.1 (Borel-Lebesgue) *[8] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors l'intervalle $[a, b]$ est compact.*

Définition 2.1.6 Soit X un ensemble non vide.

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ des parties de X jouit de la Propriété de l'Intersection Finie ou possède la Propriété de l'Intersection Finie (P.I.F) si et seulement toute sous famille finie de la famille $(A_i)_{i \in I}$ a une intersection non vide.

Ou, en d'autres termes, la famille $(A_i)_{i \in I}$ jouit de la P.I.F si et seulement si :

$$\forall J \subset I : \text{card} J < +\infty \Rightarrow \bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset.$$

Proposition 2.1.2 Soit (X, τ) , un espace topologique séparé.

L'espace topologique (X, τ) est compact si et seulement si toute famille de fermés de X qui jouit de la P.I.F a une intersection non vide.

Preuve.

i) Supposons (X, τ) compact et soit $(F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ une famille de fermés de X possédant la P.I.F, c'est à dire telle que : $\forall J \subset I : \text{card} J < +\infty \Rightarrow \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$.

Montrons que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

On doit donc montrer que : $\left(\forall J \subset I : (\text{card} J < +\infty) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset \right) \right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \right)$

On a, en utilisant la compacité de X : $\left(\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I : (\text{card} J < +\infty) \wedge \left(\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset \right) \right)$.

Puis en passant à la contraposée dans cette dernière implication, et en notant $\bar{P}$ la négation de la proposition P :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I : (\text{card} J < +\infty) \wedge \left(\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset \right) \right) \right] \\ \iff & \left[\overline{\left(\exists J \subset I : (\text{card} J < +\infty) \wedge \left(\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset \right) \right)} \Rightarrow \overline{\left(\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \right)} \right] \\ \iff & \left[\left(\forall J \subset I : \overline{(\text{card} J < +\infty)} \vee \overline{\left(\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset \right)} \right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \right) \right] \\ \iff & \left[\left(\forall J \subset I : \overline{(\text{card} J < +\infty)} \vee \left(\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset \right) \right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \right) \right] \\ \iff & \left[\left(\forall J \subset I : (\text{card} J < +\infty) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset \right) \right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \right) \right]. \end{aligned}$$

ii) Supposons que toute famille $(F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ de X possédant la P.I.F, c'est à dire telle que : $\forall J \subset I : (card J < +\infty) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset \right)$ a une intersection non vide, c'est à dire :

$$\left(\forall J \subset I : (card J < +\infty) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset \right) \right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \right)$$

et montrons que (X, τ) est compact.

Soit donc $(F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ de X tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$ et montrons que : $\exists J \subset I : (card J < +\infty) \wedge \left(\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset \right)$.

Puisque cette famille $(F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ de fermés de X possède la P.I.F on a :

$$\left(\forall J \subset I : (card J < +\infty) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset \right) \right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \right)$$

Puis par passage à la contraposée dans cette dernière implication, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\forall J \subset I : (card J < +\infty) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset \right) \right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \right) \right] \\ \iff & \left[\left(\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I : (card J < +\infty) \wedge \left(\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset \right) \right) \right] \end{aligned}$$

qui est exactement la caractérisation de la compacité de X au sens de définition 2.1.5. $\square$

Proposition 2.1.3 Soit (X, τ) un espace topologique séparé.

Si l'espace topologique (X, τ) est compact, alors toute famille $(F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ de fermés, non vides, de X et totalement ordonnée (selon l'inclusion) a une intersection non vide.

Preuve. Soit $(F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ une famille de fermés, non vides, de X et totalement ordonnée par l'inclusion.

On a alors, pour tout $J \subset I$, J fini, la famille $(F_i)_{i \in J}$ a un plus petit élément F_{i_0} , $i_0 \in J$ qui n'est pas vide ($F_{i_0} \neq \emptyset$) et qui n'est autre que $\bigcap_{i \in J} F_i$ c'est à dire $\bigcap_{i \in J} F_i = F_{i_0} \neq \emptyset$. Ou en encore, et en d'autres termes :

$$\forall J \subset I : (card J < +\infty) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset \right)$$

Donc $(F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ est une famille de fermés de X qui jouit de la PIF et comme X est compact, cette famille a (proposition 2.1.2) une intersection non vide, c'est à dire que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. $\square$

Remarque 2.1.2 Si l'espace topologique (X, τ) est compact, alors toute famille $(F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ de fermés, non vides, de X et décroissante (selon l'inclusion) a une intersection non vide.

Exemple 2.1.4 Dans l'espace topologique $(\mathbb{R}, \tau_u)$ qui n'est pas compact :

i) La famille décroissante de fermés non vides $(F_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}$ définie par $F_n = [-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}]$ a une intersection $\bigcap_{n \geq 1} F_n = \{0\}$ non vide.

ii) Alors que la famille $(G_n)_{n \geq 0}$ définie par $G_n = [n, +\infty[$ qui est aussi une famille décroissante de fermés, non vides, de $\mathbb{R}$, a une intersection vide.

Autrement dit, lorsque l'espace topologique (X, τ) n'est pas compact, toutes les situations peuvent se présenter.

Proposition 2.1.4 [10] Soit (X, τ) un espace topologique séparé.

Si l'espace topologique (X, τ) est compact, alors toute suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ de points de X admet au moins une valeurs d'adhérence. Si elle admet une seule valeurs d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.

Preuve. i) Montrons que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ admet au moins un valeur d'adhérence :

Posons $X_n = \{x_k, k \geq n\}$, alors $(\overline{X_n})_{n \geq 1}$ est une famille décroissante de fermés non vides de l'espace compact X . En vertu de la remarque 2.1.2, cette famille a une intersection non vide, c'est à dire,

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n} \neq \emptyset$$

Or, cette intersection n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ qui est donc non vide.

ii) Supposons que $\bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n} = \{x\}$ et montrons que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers cette valeur x : c'est à dire, montrer que

$$\forall V \in V(x), \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies x_n \in V$$

Soit alors $V \in V(x)$:

$$\begin{aligned}
(V \in V(x)) &\implies \exists \theta \in \tau, x \in \theta \subset V \\
&\implies x \notin C_X^\theta \\
&\implies \{x\} \cap C_X^\theta = \emptyset \\
&\implies \left(\bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n} \right) \cap C_X^\theta = \emptyset \\
&\implies \bigcap_{n \geq 1} (\overline{X_n} \cap C_X^\theta) = \emptyset
\end{aligned}$$

Comme $(\overline{X_n} \cap C_X^\theta)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de fermés de X et que X est compact, alors nécessairement, l'un de ces fermés serait vide car autrement on aurait $\bigcap_{n \geq 1} (\overline{X_n} \cap C_X^\theta) \neq \emptyset$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overline{X_{n_0}} \cap C_X^\theta = \emptyset$. D'où

$$\begin{aligned}
(\overline{X_{n_0}} \cap C_X^\theta = \emptyset) &\implies \overline{X_{n_0}} \subset \theta \subset V \\
&\implies X_{n_0} \subset \overline{X_{n_0}} \subset \theta \subset V \\
&\implies X_{n_0} \subset V.
\end{aligned}$$

Et comme la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n \succeq n_0 \implies x_n \in X_n \subset X_{n_0} \subset V$$

En conclusion

$$\forall V \in V(x), \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \succeq n_0 \implies x_n \in V.$$

C'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

□

Il résulte de cette propriété le théorème suivant,

Théorème 2.1.2 (Bolzano-Weierstrass) [10], [21] *Toute partie infinie A de X compact admet au moins un point d'accumulation.*

Il s'en suit,

Théorème 2.1.3 (Bolzano-Weierstrass) *Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si, de toute suite d'éléments de X on peut extraire une sous-suite qui converge.*

2.2 Compacité dans les espaces métriques

Proposition 2.2.1 *Un espace métrique compact est complet.*

Preuve. Soit (X, d) un espace métrique compact. Alors toute suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence; elle est donc convergente.

La condition de séparation est remplie grâce à la proposition 1.2.6, Par conséquent, (X, d) est complet. $\square$

Proposition 2.2.2 *Soient (X, d) un espace métrique compact et $A \subset X$. Alors*

$$A \text{ compact} \iff A \text{ fermé dans } X.$$

Preuve. Si A est compact, alors A est complet, donc fermé dans X . Réciproquement, si $(x_n)_n$ est une suite de A , alors $(x_n)_n$ a une valeur d'adhérence dans X ; A étant fermé, cette valeur d'adhérence appartient à A , et donc $(x_n)_n$ a une valeur d'adhérence dans A . $\square$

Proposition 2.2.3 *Soient (X, d) un espace métrique compact et $A \subset X$. Alors*

$$A \text{ compact} \implies A \text{ borné et complet.}$$

2.3 Union - Intersection

Proposition 2.3.1 (1) *Dans X séparé, la réunion d'une famille finie de compacts est compacte.*

(2) *Dans X séparé, l'intersection d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de compacts est compacte si $I \neq \emptyset$.*

Preuve. Pour (1) c'est immédiat, par récurrence.

Pour (2) c'est évident, car A_i fermé donne $A = \cap A_i$ est fermé, et donc A est compact car contenu dans A_i compact. $\square$

2.4 Compacts de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Théorème 2.4.1 (Borel-Lebesgue) *A est compact dans $\mathbb{R}$ si et seulement si A est fermé borné.*

Preuve. i) Si A est compact, alors elle est fermé selon la proposition 2.2.2 et borné (et complet) selon la proposition 2.2.3, et donc il est fermé borné.

ii) Supposons que A est fermé borné et prouver qu'il est compact. Soit $(x_n)_n \subset A$ une suite de points de A , nous prouverons que nous pouvons en extraire une suite partielle de points convergents. Pour cela, il suffit d'en extraire une suite partielle de Cauchy, et puisque A est fermé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est complet, il est également complet, et donc la suite convergera.

► Si la suite $(x_n)_n$ a un nombre fini de termes, alors elle est stable et donc convergente.

►► Si non, et comme A est borné, il existe $a, b \in \mathbb{R}, a < b : A \subset [a, b] = I_0$. Divisons I_0 en deux parties égales. L'une de ces deux parties contient un nombre infini de termes de la suite $(x_n)_n$, soit I_1 cette partie et n_1 le plus petit nombre tel que $x_{n_1} \in I_1$.

►►► Divisons I_1 en deux parties égales. Soit I_2 la partie qui contient un nombre infini de termes de la suite $(x_n)_n$ et n_2 le plus petit nombre tels que $n_2 \neq n_1$ et $x_{n_2} \in I_2$.

►►►► Divisons I_2 en deux parties égales. Soit I_3 la partie qui contient un nombre infini de termes de la suite $(x_n)_n$ et n_3 le plus petit nombre tels que $n_3 \neq n_1, n_3 \neq n_2$ et $x_{n_3} \in I_3$.

⋮

► ... ►► Divisons I_{k-1} en deux parties égales. Soit I_k la partie qui contient un nombre infini de termes de la suite $(x_n)_n$ et n_k le plus petit nombre tels que $n_k \neq n_1, n_k \neq n_2, \dots, n_k \neq n_{k-2}$ et $n_k \neq n_{k-1}$, et $x_{n_k} \in I_k$.

D'une part, nous avons, pour les longueurs des intervalles I_k tels que $k = 0, 1, 2, \dots$:

La longueur de l'intervalle $I_0 = [a, b]$ est $b - a = \frac{b-a}{2^0}$.

La longueur de l'intervalle I_1 est $\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2^1}$.

La longueur de l'intervalle I_2 est $\frac{b-a}{2^2}$.

La longueur de l'intervalle I_3 est $\frac{b-a}{2^3}$.

⋮

La longueur de l'intervalle I_k est $\frac{b-a}{2^k}$.

D'autre part, $\dots \subset I_{k+1} \subset I_k \subset I_{k-1} \subset \dots \subset I_2 \subset I_1 \subset I_0$, Alors, la suite des intervalles $(I_p)_{p \geq 0}$ décroissante.

Donc, considérant $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $k \succ n_0$, $k' \succ n_0$ alors

$$\left. \begin{array}{l} x_{n_k} \in I_k \subset I_{n_0} \\ x_{n_{k'}} \in I_{k'} \subset I_{n_0} \end{array} \right\} \implies (x_{n_k} \in I_{n_0}) \wedge (x_{n_{k'}} \in I_{n_0}) \implies |x_{n_k} - x_{n_{k'}}| \leq \frac{1}{n_0} \prec \varepsilon$$

Il suffit de prendre : $n_0 \succeq E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

Et en fin

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \left(n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \right), \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall k' \in \mathbb{N}^* : (k \succ n_0) \wedge (k' \succ n_0) \implies |x_{n_k} - x_{n_{k'}}| \prec \varepsilon.$$

C'est-à-dire $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans A alors elle est convergente et donc A est compact. $\square$

Proposition 2.4.1 *A est compact dans $\mathbb{C}$ si et seulement si A est fermé borné.*

Preuve. La démonstration de cette proposition est assez similaire à la précédente, pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [1]. $\square$

2.5 Produit d'espaces compacts

Soit $X = \prod_{i \in J \text{ fini}} X_i$ où, pour tout $i \in J$, X_i est un espace topologique.

Proposition 2.5.1 [10], [8] *X est compact si et seulement si pour tout $i \in J$ fini, X_i est compact.*

Remarque 2.5.1 *Le théorème de Tychonoff lui stipule que le produit fini ou infini de compacts est lui aussi compact¹.*

Proposition 2.5.2 *A est compact dans $\mathbb{R}^n$ [resp. $\mathbb{C}^n$] si et seulement si A est fermé borné.*

Preuve. Si A est compact dans $\mathbb{R}^n$ [resp. $\mathbb{C}^n$] et sachant que $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ où $A_i \subset \mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, alors A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) est compact d'après la proposition 2.5.1 (on prendra les topologies induites de $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] usuel pour A et A_i), mais alors

¹Le lecteur intéressé pourra consulter [14] p. 85 ou [21] p. 290

A_i est *fermé borné* dans $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] d'après la proposition 2.4.1 [resp. 2.4.1]. Comme A_i est un borné alors il est inclu dans une boule (ouverte elle même incluse dans une boule fermée) $(B_f)_i(a_i, r_i)$ ($a_i \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ selon le cas, $r_i > 0$) et enfin, $A = \prod_{i=1}^n A_i \subset \prod_{i=1}^n (B_f)_i(a_i, r_i)$

est aussi borné car $\prod_{i=1}^n (B_f)_i(a_i, r_i)$ est borné. D'autre part, on a vu que A_i est fermée. comme il est aisé de voir que le produit fini de fermés est lui aussi fermé, alors A est fermé.

Inversement, si A est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ [resp. $\mathbb{C}^n$], alors du fait que A soit borné il est inclu dans une boule $B_f(a, r)$, cette dernière est incluse dans $\prod_{i=1}^n (B_f)_i(a_i, r)$ où $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ($a_i \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ selon le cas, $r > 0$) et donc,

$$A = \bar{A} \subset \overline{\prod_{i=1}^n (B_f)_i(a_i, r_i)} = \prod_{i=1}^n \overline{(B_f)_i(a_i, r_i)} = \prod_{i=1}^n (B_f)_i(a_i, r_i)$$

Or, $(B_f)_i(a_i, r_i)$ est fermé borné dans $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] d'après la proposition 2.4.1 [resp. 2.4.1] c'est donc un compact, $\prod_{i=1}^n (B_f)_i(a_i, r_i)$ est compact comme produit fini de compacts et A est compact car c'est un fermé dans un compact (voir proposition 2.2.2) $\square$

2.6 Espaces compacts - Espaces normaux

Proposition 2.6.1 *Tout espace compact est normal.*

Preuve. - Soit un point x et F un fermé, avec $x \notin F$. Pour tout $y \in F$, il existe deux ouverts disjoints U_y et V_y contenant respectivement x et y et tels que $U_y \cap V_y = \emptyset$ ($U_y \in \mathcal{v}(x)$ et $V_y \in \mathcal{v}(y)$).

Maintenant quand y décrit F , V_y décrit un recouvrement ouvert de F . Dans X compact, F fermé donne F compact, et donc on peut extraire un sous recouvrement fini par $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$. Ainsi $V_x = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ est un ouvert $\supset F$ et $W_x = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ est un ouvert qui contient x . Puisque $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$; alors $V_x \cap W_x = \emptyset$.

- Soit F et φ deux fermés disjoints. Pour tout $x \in \varphi$, on peut trouver deux voisinages ouverts disjoints W_x de x et V_x de F . En faisant décrire φ par x et en recommençant le raisonnement précédent, on trouve un ouvert U contenant φ disjoint d'un ouvert V contenant F . $\square$

Il en découle que tout espace compact est complètement continu.

2.7 Fonctions continues sur un compact

Proposition 2.7.1 *Soient (X, τ) et (X', τ') deux espaces topologiques séparés et soit $f : X \longrightarrow X'$ une application continue, alors l'image de tout compact de X par f est un compact, en particulier, si X est lui-même un espace compact alors $f(X)$ est compact.*

Preuve. Soit $f : X \longrightarrow X'$ une fonction continue et K un compact de X . Si $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}'_i$ est un recouvrement d'ouverts de $f(K)$, alors $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\mathcal{O}'_i)$ est un recouvrement d'ouverts de K . Comme K est compact on peut en extraire un sous-recouvrement fini, $K \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(\mathcal{O}'_i)$ ($J \subset I$ est fini), on a alors $f(K) \subset \bigcup_{i \in J} \mathcal{O}'_i$. Ainsi K est compact. $\square$

Proposition 2.7.2 *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue et bijective entre deux espaces topologiques, X étant un compact. Alors f est un homéomorphisme.*

Preuve. Il suffit de vérifier la continuité de f^{-1} . Soit F un fermé de X ; F est donc compact. Alors $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est un compact de Y , donc un fermé de Y . $\square$

Proposition 2.7.3 *Tout espace métrique compact est borné.*

Preuve. Démonstration. Soit (X, d) compact. On fixe un $a \in X$ et on considère la fonction continue $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = d(x, a)$. Alors f est bornée; en particulier, il existe un $r > 0$ tel que $f(x) \leq r$, $x \in X$, ou encore $X = \overline{B}(a, r)$. $\square$

2.8 Compacts dans les espaces vectoriels normés de dimension finies

Proposition 2.8.1 *Soit X un $\mathbb{k}$ espace vectoriel normé de dimension finie n et $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de X . Alors, $(X, \|\cdot\|_\infty)$ défini dans la proposition 1.6.3 est homéomorphe à $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Mieux encore, il existe un isomorphisme bicontinu entre ces deux derniers.*

Preuve. Soit

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{k}^n, x \longmapsto \varphi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ avec } x = \sum_{k=1}^n x_k X_k, x_k \in \mathbb{k}$$

1) φ est un isomorphisme. $\forall x, y \in X; x = \sum_{k=1}^n x_k X_k, x_k \in \mathbb{k}, y = \sum_{k=1}^n y_k X_k, y_k \in \mathbb{k}$ on a

$$x + y = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k) X_k$$

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

De plus, il est aisé de vérifier que φ est bijectif (existence et unicité de l'écriture $x = \sum_{k=1}^n x_k X_k, x_k \in \mathbb{k}$)

2) φ est bicontinu. $\forall x, y \in X$,

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{\infty} &= \|\varphi(x - y)\|_{\infty} = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)\|_{\infty} \quad (2.8.1) \\ &= \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i - y_i| = \|x - y\|_{\infty} \end{aligned}$$

Ce qui fait de φ une application 1-Lipschitzienne donc continue. Comme φ est un morphisme bijectif, alors

$$\forall x, y \in \mathbb{k}^n \left(\varphi^{-1}(x) = \sum_{k=1}^n x_k X_k, x_k \in \mathbb{k} \text{ et } \varphi^{-1}(y) = \sum_{k=1}^n y_k X_k, y_k \in \mathbb{k} \right)$$

$$\begin{aligned} \|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)\|_{\infty} &= \|\varphi^{-1}(x - y)\|_{\infty} \\ &= \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i - y_i| = \|x - y\|_{\infty} \end{aligned}$$

Ce qui fait de φ^{-1} une application 1-Lipschitzienne donc aussi continue. □

Corollaire 2.8.1 1. φ est une isométrie, en effet on pose dans (2.8.1) $y = 0_X$ et sachant que $\varphi(0_X) = 0$ on obtient :

$$\forall x \in X, \|\varphi(x)\|_{\infty} = \|x\|_{\infty}$$

Il en est de même pour φ^{-1} .

2. L'image de tout compact par φ ou φ^{-1} est compacte.

Proposition 2.8.2 La boule unité fermée de $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ est compacte.

Preuve. 1er cas : $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $B_{\infty f}(0, 1) = [-1, 1]^n$. $[-1, 1]$ est un compact dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ car c'est un fermé borné, comme le produit fini de compacts est un compact (théorème de Tychonov), alors $[-1, 1]^n$ est aussi un compact dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$.

2ème cas $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, $B_{\infty f}(0, 1) = D(0, 1)^n$, où $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

Se démontre comme le 1er cas. □

Proposition 2.8.3 *Soit X un espace vectoriel normé de dimension finie. La boule unité fermée de $(X, \|\cdot\|_{\infty})$ est compacte.*

Preuve. Notons par $B_{\infty f}(0, 1)_X$ la boule unité fermée dans $(X, \|\cdot\|_{\infty})$. En utilisant la partie 1 du corollaire 2.8.1 on trouve que $B_{\infty f}(0, 1)_X = \varphi^{-1}(B_{\infty f}(0, 1))$, Or, d'après la proposition 2.8.2 $B_{\infty f}(0, 1)$ est compact, on conclut que $B_{\infty f}(0, 1)_X$ est compact par la partie 2 du corollaire 2.8.1. □

Proposition 2.8.4 *Si X est de dimension finie, toute norme N est une application continue de $(X, \|\cdot\|_{\infty})$ à $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.*

Preuve. Il suffit pour cela de montrer que N est lipchitzienne. Pour tout $x \in X : x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ où $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de X et $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{k}$, donc,

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) \\ &\leq |x_1| N(e_1) + |x_2| N(e_2) + \dots + |x_n| N(e_n) \\ &\leq (N(e_1) + N(e_2) + \dots + N(e_n)) \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i| \\ &\leq \beta \|x\|_{\infty} \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

où, $\beta = N(e_1) + N(e_2) + \dots + N(e_n) \succ 0$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ étant une base, ses éléments sont par définition non-nuls et leurs images par N aussi puisque N est une norme.

Et alors $x, y \in X$,

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq \beta \|x - y\|_{\infty}$$

iné trian généralisée

N est β -lipchitzienne et donc continue. □

Théorème 2.8.1 *En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve. On va montrer que toute norme N définie sur un espace de dimension finie X est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Le résultat découlera de la symétrie et la transitivité de l'équivalence des normes.

Pour montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, il faut et il suffit de trouver deux constantes $\alpha \succ 0$ et $\beta \succ 0$ pour lesquelles

$$\forall x \in X : \alpha \|x\|_\infty \leq N(x) \leq \beta \|x\|_\infty$$

L'une des deux inégalités recherchées découle immédiatement de (2.8.2), il reste à trouver α .

soit $S_\infty(0, 1)_X = \{x \in X : \|x\|_\infty = 1\}$, on rappelle que :

$B_{\infty f}(0, 1)_X$ est compact (proposition 2.8.3).

$S_\infty(0, 1)_X \subseteq B_{\infty f}(0, 1)_X$ et $S_\infty(0, 1)_X$ est un fermé. on déduit que $S_\infty(0, 1)_X$ est compact (toute partie fermée contenue dans un compact est elle même compact).

Or, la norme N est une application continue de $(X, \|\cdot\|_\infty)$ à $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (voir proposition 2.8.4).

Elle atteint donc ses bornes et,

$$\exists m, M \in \mathbb{R}; \forall x \in S_\infty(0, 1)_X : m \leq N(x) \leq M$$

En particulier, $\exists x_0 \in S_\infty(0, 1)_X : m = N(x_0) \succ 0$ (car elle atteint ses bornes!)

On peut affirmer que

$$\exists m \succ 0, \forall x \in S_\infty(0, 1)_X : m \leq N(x)$$

Enfin, on pose pour tout $x \in X, x$ non nul : $y = \frac{x}{\|x\|_\infty}$, alors $\|y\|_\infty = \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_\infty = 1$ et donc $y \in S_\infty(0, 1)_X$. D'où,

$$\begin{aligned} \forall x \in X : m \leq N(y) &= N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \frac{N(x)}{\|x\|_\infty} \\ \implies \|x\|_\infty m &\leq N(x) \end{aligned}$$

comme cette inégalité est aussi vérifiée pour $x = 0_X$ on déduit que $\alpha = m$. □

Corollaire 2.8.2 *Deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{k}$ et de même dimension finie sont isomorphes.*

Corollaire 2.8.3 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet et donc tout sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Preuve. i) Soit X un espace vectoriel normé de dimension n . Alors d'après le corolaire 2.8.2, X est isomorphe à $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet. Comme la complétude est préservée sous les isomorphismes d'espaces vectoriels normés (la continuité de l'isomorphisme et de son inverse donne qu'une suite est de Cauchy et convergente dans un espace si et seulement si son image est de Cauchy et convergente dans l'autre espace), donc X est complet.

ii) Soit Y un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé X . Alors Y est complet donc Y est (topologiquement) fermé. $\square$

Corollaire 2.8.4 *Dans un espace vectoriel normé X de dimension finie, une partie A de X est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. En particulier, la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ est compacte.*

Preuve. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel de dimension finie et A , une partie A de X .

i) On suppose que A est compacte et on montre que A est fermée et bornée.

A est fermée : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans A convergente vers $x \in X$. on veut montrer que $x \in A$.

A étant compact alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $y \in A$, mais comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, forcément $x = y$ et $x \in A$.

A est bornée : Supposons le contraire, c à d que A ne soit pas bornée, alors

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A : \|x\| \geq M$$

pour :

$$M = 1 : \exists x_1 \in A : \|x_1\| \geq 1$$

$$M = 2 : \exists x_2 \in A : \|x_2\| \geq 2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$M = n : \exists x_n \in A : \|x_n\| \geq n$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite n'admet pas de valeur d'adhérence ce qui contre-dit le fait que A soit compacte.

ii) on suppose que A est fermée et bornée et on montre que A est compacte.

Comme X est de dimension finie n d'après la proposition 2.8.1 $(X, \|\cdot\|_\infty)$ est homéomorphe à $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ par l'application φ , mais alors $\varphi(A)$ est fermée et bornée de $\mathbb{K}^n$, car c'est l'image (directe) du fermée (φ est un homéomorphisme) bornée (φ est une isométrie) A par l'application φ et par conséquent, A est compacte (les fermés et bornés sont des compacts de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$). Enfin, $A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$ est compacte car c'est l'image du compact $\varphi(A)$ par l'application fermée φ^{-1} . $\square$

2.8.1 Lemme de Riesz

Lemme 2.8.1 *Soit Y un espace vectoriel (topologiquement) propre (ie : non-vide et différent de X) fermé d'un espace vectoriel normé X alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un vecteur unité $x_0 \in X$ pour lequel $\|x_0 - y\| > 1 - \varepsilon$ pour tout $y \in Y$.*

Preuve. On donne la preuve pour le cas $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On a seulement besoin du résultat pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ pour prouver le théorème de Riesz. Puisque Y est un sous-ensemble propre de X alors il y a $x \in X \setminus Y$. Puisque Y est un sous-ensemble (topologiquement) fermé de X alors $X \setminus Y$ est ouvert et donc il y a une boule d'un certain rayon positive centrée en x qui est disjoint de Y . Donc si on prends l'infimum de la distance de x à un élément de Y alors on obtient une distance $d > 0 : \inf \{\|x - y'\| / y' \in Y\} = d > 0$. Choisir $y_1 \in Y$ pour lequel $\|x - y_1\| < 2d$ (ce qui peut être fait par la définition infimum de d). Définir $x_0 = \frac{x - y_1}{\|x - y_1\|}$. Alors pour tout $y \in Y$:

$$x_0 - y = \frac{x - y_1}{\|x - y_1\|} - y = \frac{x - y_1 - y \|x - y_1\|}{\|x - y_1\|} = \frac{1 - y'}{\|x - y_1\|}$$

où $y' = y_1 + y \|x - y_1\| \in Y$

Puis :

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\| &= \frac{\|x - y'\|}{\|x - y_1\|} \text{ car } x_0 - y = \frac{x - y'}{\|x - y_1\|} \\ &> \frac{\|x - y'\|}{2d} \text{ car } d \leq \|x - y'\| \text{ par le choix de } d \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

car $y \in Y$ est arbitraire, le résultat suivant. $\square$

2.8.2 Théorème de Riesz

Théorème 2.8.2 [14] *La boule unité fermée $B_f(0,1)$ d'un espace vectoriel normé X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.*

Preuve. Si X est de dimension finie alors la boule unité fermée est compacte d'après le corolaire 2.8.4.

Supposons $\dim X = \infty$. On montre que X n'est pas compact. Soit $x_1 \in B_f(0,1)$. Considérons l'espace de $\{x_1\}$

$$X_1 = \{x \in X / x = \alpha x_1 \text{ pour certains } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Alors X_1 est un sous-espace vectoriel propre fermé de X ("fermé" car toute suite convergente des éléments de X_1 converge vers un élément de X_1 , de sorte que X_1 contient tous ses points limites ; "propre" car $\dim X = \infty$). Donc d'après le lemme de Riesz avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il y a $x_2 \in B_f(0,1)$ pour lequel $\|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}$. On utilise maintenant l'induction. On suppose qu'on avait choisi n vecteurs dans $B_f(0,1)$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont les paires sont distantes de plus d'une distance $\frac{1}{2}$. Soit X_n l'extension de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Alors X_n est un sous-espace de dimension finie de X et il est fermé par le corolaire 2.8.3, et X_n est un sous-espace propre de X puisque $\dim X = \infty$.

Encore une fois, par le lemme de Riesz avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il y a $x_{n+1} \in B_f(0,1)$ pour lequel $\|x_i - x_{n+1}\| > \frac{1}{2}$ pour $1 \leq i \leq n$. La suite résultante $(x_i) \subset B_f(0,1)$ satisfait $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ pour tout $n \neq m$. Elle n'a donc pas de sous-suites convergentes (rappelons que les suites convergentes sont toujours de Cauchy par l'inégalité triangulaire). Donc $B_f(0,1)$ n'est pas compacte (on traite ici $B_f(0,1)$ comme un espace métrique). $\square$

Espaces localement compacts

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.1 *Un espace est dit localement compact s'il est séparé et si tout point de cet espace possède un voisinage ouvert à clôture compacte (ou encore plus simplement un voisinage compact).*

On trouve aussi dans la littérature une autre définition :

Définition 3.1.2 *Un espace est dit localement compact s'il est séparé et si tout point de cet espace possède une base de voisinages ouverts à clôture compacte.*

Nous allons montrer à présent que ces deux définitions sont équivalentes, ceci s'appuie fortement sur la séparabilité.

Proposition 3.1.1 *Ces deux définitions sont équivalentes.*

Preuve. Il suffit de montrer que la première implique la seconde.

Soit donc x dans X , localement compact selon la première définition. Soit V un voisinage ouvert de x . On veut trouver un voisinage compact de x contenu dans V .

Soit U un voisinage ouvert de x à fermeture compacte, quitte à prendre l'intersection avec V , on peut supposer que $U \subset V$. Supposons construit un voisinage ouvert W de x inclus dans U tel que $\overline{W} \subset U$. Alors, $\overline{W}$ est compact et inclus dans V , ce qui confirmerait la proposition. Montrons donc l'existence d'un tel ouvert W .

Soit ∂U la frontière de U , qui est compacte. Pour tout x_i de ∂U , il existe un ouvert U_i de x_i et un ouvert W_i de x qui les séparent. Le compact ∂U est recouvert de tous les U_i et donc par un nombre fini de ceux-ci. Posons W l'intersection finie des W_i correspondant, alors W est un voisinage ouvert de x et par construction $\overline{W}$ n'intersecte pas ∂U . Il en résulte $\overline{W} \subset U$.

□

Exemple 3.1.1 *Tout espace discret X est localement compact, en effet : Pour tous $x \in X$, $\{x\}$ est un voisinage compact de x . en particulier, $\mathbb{Z}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ est localement compact.*

Exemple 3.1.2 *$\mathbb{R}$ est localement compact car, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\eta \succ 0$, $[x - \eta, x + \eta]$ est un voisinage de x fermé et borné, donc compact. Plus généralement, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont localement compacts.*

Exemple 3.1.3 *Tout espace compact X est localement compact. En effet, pour tout $x \in X$, il suffit de considérer comme voisinage X lui-même, la réciproque est par contre fausse, par exemple $\mathbb{R}$ est localement compact mais non compact.*

Proposition 3.1.2 *$\mathbb{Q}$ n'est pas localement compact.*

Preuve. Supposons $\mathbb{Q}$ localement compact. Alors tout point de $\mathbb{Q}$ aurait un voisinage ouvert à clôture compacte. Choisissons un ouvert U de 0 à clôture compacte. Tout ouvert de U est également à clôture compacte, donc on peut prendre pour U un intervalle ouvert $] -t, t[\cap \mathbb{Q}$, où t est un irrationnel (cela forme effectivement une base d'ouverts de 0 dans $\mathbb{Q}$). L'ensemble $] -t, t[\cap \mathbb{Q} = [-t, t] \cap \mathbb{Q}$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{Q}$ car t est irrationnel. Donc, U est compact. Maintenant, on prend une suite x_n de rationnels de U tendant vers t . C'est une suite dans un compact qui ne possède pas de sous-suite convergente dans le-dit compact, puisque toutes ces sous-suites tendent vers t . Ce qui contredit la compacité de U .

□

Remarque 3.1.1 *Comme $\mathbb{Q}$ est un sous espace de $\mathbb{R}$, on déduit qu'en général un sous espace d'un espace localement compact n'est pas forcément localement compact.*

Proposition 3.1.3 *soit X un espace topologique localement compact. Tout fermé de X est localement compact.*

Preuve. soit F un fermé de X et soit $x \in F$.

Il existe V voisinage compact de x dans X . Or, $V \cap F$ est un voisinage de x fermé dans F .

Donc, $V \cap F$ est un compact.

Par conséquent, F est localement compact. $\square$

Proposition 3.1.4 *Tout espace localement compact X est régulier.*

Preuve. On rappelle que tout compact est régulier.

Soit $V \in V(x)$: Existe-t-il $V' \in V(x)$ fermé tel que $V' \subseteq V$?

X étant localement compact, donc il existe $W \in V(x)$ compact de X . Comme W est compact, il W est régulier.

Or, $W \cap V \in V_W(x)$, donc il existe $V' \in V_W(x)$ fermé tel que $V' \subset W \cap V$.

W étant un compact de X , donc c'est fermé de X Donc, V' est un fermé de X et $V' \subset V$.

Par conséquent, X est régulier. $\square$

Proposition 3.1.5 *Tout espace localement compact X est complètement régulier.*

Preuve. Soient X un espace localement compact, $x \in X$ et F un fermé de X tel que $x \notin F$.

Il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\bar{U}$ est compact. L'ensemble,

$$F_0 = (\bar{U} \setminus U) \cup (\bar{U} \cap F)$$

est un fermé dans U . Il est clair que $x \notin F_0$ c'est à dire $x \in \bar{U} \setminus F_0$. Mais $\bar{U}$ est compact donc complètement régulier (proposition 2.6.1), alors il existe une application continue

$$f_1 : \bar{U} \longrightarrow [0, 1] \text{ tel que } f_1(x) = 0 \text{ et } f_1(F_0) = \{1\}$$

Considérons l'application

$$f_2 : X \setminus U \longrightarrow [0, 1]$$

définie par $f_2(y) = 1$. On a,

$$\bar{U} \cap (X \setminus U) = \bar{U} \setminus U \subset F_0$$

donc,

$$f_1|_{\bar{U} \cap (X \setminus U)} = f_2|_{\bar{U} \cap (X \setminus U)}$$

Donc l'application,

$$f : X = \bar{U} \cup (X \setminus U) \longrightarrow [0, 1]$$

définie par $f(z) = f_1(z)$ si $z \in U$, $f(z) = f_2(z)$ si $z \in X \setminus U$, est continue. Par conclusion X est complètement régulier. $\square$

Proposition 3.1.6 *Si X est localement compact, alors tout point admet un système fondamental de voisinages compact.*

Preuve. Soient $x \in X$ et $V \in V(x)$.

Il existe $W \in V(x)$ compact.

$W \cap V \in V_X(x)$ et X régulier, donc il existe $U \in V_X(x)$ fermé tel que $U \subset W \cap V$.

Comme W est compact, il est fermé dans X et $U \subset W$.

Donc U est un fermé de W qui est compact, Par conséquent, U est un compact tel que $U \subset V$. $\square$

Proposition 3.1.7 *Si X est localement compact, alors tout ouvert de X est localement compact.*

Preuve. En effet : Soit A un ouvert de X et soit $x \in A$. Existe-t-il $W \in V_A(x)$ compact ?

Comme X est localement compact, il existe $V \in V_X(x)$ compact.

Or A est un ouvert de X , donc $A \cap V \in V_X(x)$.

Donc il existe $W \in V_X(x)$ compact tel que $W \subset A \cap V \subset A$.

Par conséquent, $W \in V_A(x)$ compact. $\square$

3.2 Compactification

Définition 3.2.1 *En topologie, la compactification est un procédé général de plongement d'un espace topologique comme sous-espace dense d'un espace compact. Le plongement est appelé le compactifié. Un tel plongement existe si et seulement si l'espace est complètement régulier. Autrement dit :*

Le couple (Y, φ) où Y est un espace compact et $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme prolongeant (intégrant) X dans Y tel que $\overline{\varphi(X)} = Y$, est appelé une compactification de l'espace X .

Comme tout espace localement compact est complètement régulier, alors ce dernier, s'il n'est pas compact, peut être compactifié. Nous présentons dans ce qui suit quelques exemples.

3.2.1 Exemple de compactification

Compactifié d'Alexandroff

Théorème 3.2.1 [5], [8], [21] Soit (X, τ) un espace localement compact (non compact). Il existe un espace compact $\tilde{X}$ et un point $p \in \tilde{X}$ tel que X soit homéomorphe à $\tilde{X} \setminus \{p\} = C_{\tilde{X}}^{\{p\}}$.

Proposition 3.2.1 L'espace $\tilde{X}$ est définie à un homéomorphisme près.
 $\tilde{X}$ est appelé le compactifié d'Alexandroff de X .

Preuve. Soit (X, τ) un espace topologique localement compact. Soit $\mathcal{O}$ la famille des ouverts de X pour la topologie τ .

Soit $\tilde{X} = X \cup \{p\}$ où $p \notin X$.

On munit $\tilde{X}$ de la topologie $\tilde{\tau}$ définie par la famille des ouverts $\tilde{\mathcal{O}}$:

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \left\{ C_{\tilde{X}}^K \text{ où } K \text{ décrit l'ensemble des compacts de } X \right\}.$$

$\tilde{\tau}$ est une topologie sur $\tilde{X}$:

En effet, $\tilde{\mathcal{O}}$ vérifie les axiomes (θ_1) , (θ_2) et (θ_3) :

(θ_1) : - $\emptyset \in \tilde{\mathcal{O}}$ car $\emptyset \in \mathcal{O}$

- $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{O}}$ car $\emptyset$ est un compact de X et $\tilde{X} = C_{\tilde{X}}^{\emptyset}$.

(θ_2) : Soit $(V_i)_{i \in I} \subset \tilde{\mathcal{O}}$.

- Si $(V_i)_{i \in I} \subset \mathcal{O}$, alors $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$.

- Si, pour tout $i \in I$, $V_i = C_{\tilde{X}}^{K_i} : \bigcup_{i \in I} V_i = C_{\tilde{X}}^{\bigcap_{i \in I} K_i}$ et $\bigcap_{i \in I} K_i$ est un compact de X . Donc $\bigcup_{i \in I} V_i \in \tilde{\mathcal{O}}$.

- S'il existe $I_1 \subset I$ et $I_2 \subset I$ tel que $I_1 \cup I_2 = I$ avec $(V_i)_{i \in I_1} \subset \mathcal{O}$ et $(V_j)_{j \in I_2} \subset \tilde{\mathcal{O}}$ alors $\bigcup_{i \in I_1} V_i \in \mathcal{O}$ et $\bigcup_{j \in I_2} V_j \in \tilde{\mathcal{O}}$.

Donc, tout revient à montrer que si $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{U}_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$ alors $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$.

En effet, soit $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{U}_2 = C_{\tilde{X}}^K$

$$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 \cup C_{\tilde{X}}^K = C_{\tilde{X}}^{\mathcal{U}_1^c \cap K}$$

$\mathcal{U}_1^c \cap K$ est un fermé de K , donc c'est un compact. Par conséquent, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$.

(θ_3) : Soient $V_1, V_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$.

- Si $V_1, V_2 \in \mathcal{O}$, alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$.

- Si $V_1 = C_{\tilde{X}}^{K_1}, V_2 = C_{\tilde{X}}^{K_2}$ où K_1 et K_2 sont deux compacts de X , alors $V_1 \cap V_2 = C_{\tilde{X}}^{K_1} \cap C_{\tilde{X}}^{K_2} = C_{\tilde{X}}^{K_1 \cup K_2}$, comme $K_1 \cup K_2$ est un compact, alors $V_1 \cap V_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$.

- Si $V_1 \in \mathcal{O}$ et $V_2 \notin \mathcal{O}$, alors $V_2 = C_{\tilde{X}}^K$. Donc $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap C_{\tilde{X}}^K = V_1 \cap C_X^K$ car $p \in V_2$ mais $p \notin V_1$.

Par conséquent, $V_1 \cap V_2$ appartient à $\mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$.

Montrons que la topologie induite sur X par celle de $\tilde{X}$ coïncide avec celle de X :

Soit β la famille des ouverts de X pour la topologie induite sur X . Alors $\beta = \mathcal{O}$, en effet :

Il est clair que $\mathcal{O} \subset \beta$.

Soit $A \in \beta$;

- Si $A \in \mathcal{O}$ c'est terminé.

- Sinon, il existe K compact de X tel que $A = C_{\tilde{X}}^K \cap X = C_X^K \in \mathcal{O}$.

Donc la topologie induite sur X par celle de $\tilde{X}$.

$\tilde{X}$ est séparé :

Soit $x, y \in \tilde{X}$ avec $x \neq y$.

- Si $x, y \in X$ c'est fini car X est séparé.

- Si $x = p$ et $y \in X$, il existe $K \in V_X(y)$ compact car X est localement compact. Soit $V = C_{\tilde{X}}^K \in V_{\tilde{X}}(p)$ et on a $K \cap V = \emptyset$.

Donc X est séparé.

$\tilde{X}$ est compact :

Soit (V_i) un recouvrement ouvert de $\tilde{X}$ donc $\tilde{X} = \bigcup_{i \in I} V_i$. Comme $p \in \tilde{X}$, il existe $j \in I$ tel que $p \in V_j$.

Donc, il existe K compact de X tel que $V_j = C_{\tilde{X}}^K$.

K étant un compact de X donc il existe $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ tel que $K \subset \bigcup_{m=1}^n V_{i_m}$.

Or $\tilde{X} = K \cup C_{\tilde{X}}^K \subset \left(\bigcup_{m=1}^n V \right) \cup V_j$. Donc $\tilde{X}$ est un compact.

(X, τ) est homéomorphe à $C_{\tilde{X}}^{\{p\}}$:

En effet, considérons la correspondance :

$$\begin{aligned} (X, \tau) &\longrightarrow C_{\tilde{X}}^{\{p\}} \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

C'est une bijection continue et ouverte. Donc, c'est un homéomorphisme.

$\tilde{X}$ est défini à un homéomorphisme près :

Soit X' un espace localement compact tel qu'il existe $p' \in X'$ et un homéomorphisme f de X sur le sous-espace $X' \setminus \{p\}$:

Montrer qu'il existe un homéomorphisme $\tilde{f}$ de $\tilde{X}$ sur X' tel que $\tilde{f}(p) = p'$.

On prolonge f à $\tilde{f}$ en posant : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ p' & \text{si } x = p \end{cases}$

Alors, $\tilde{f}$ est bijective et $\tilde{f}^{-1}$ est continue. En effet, $\tilde{f}^{-1} : X' \longrightarrow \tilde{X}$.

Soit A un ouvert de $\tilde{X}$:

1^{er} cas : $A \subset X$

$\tilde{f}(A) = f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ ouvert de $f(X) = X' \setminus \{p'\}$ car f^{-1} est continue.

Or, X' séparé $\implies \{p'\}$ fermé $\implies X' \setminus \{p'\} = f(X)$ est un ouvert de $X' \implies f(A)$ est ouvert de X' .

2^{eme} cas : $p \in A$.

Alors, il existe K compact de x tel que $A = C_{\tilde{X}}^K = \tilde{X} \setminus K$.

$\tilde{f}(A) = \tilde{f}(\tilde{X}) \setminus \tilde{f}(K) = \tilde{X} \setminus f(K)$

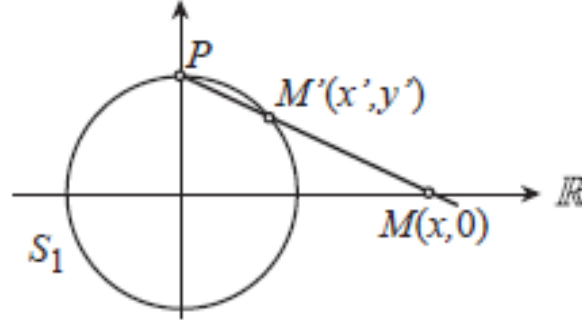
Or, K compact et X' séparé $\implies f(K)$ est un compact de $X' \implies f(K)$ est un fermé de X' .

$\tilde{f}(A)$ est un ouvert de X' . □

Application :

Exemple 3.2.1 1) Considérons $X = [a, b[\subset \mathbb{R}$. Alors X est localement compact car $X =]-\infty, b] \cap [a, +\infty[$ (intersection d'un ouvert et d'un fermé), la proposition 3.2.1 donne alors $\tilde{X} = [a; b]$ est compact.

2) $X = \mathbb{R}$ est localement compact. Soit $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Alors $\tilde{\mathbb{R}}$ est homéomorphe au cercle unité S_1 de $\mathbb{R}^2(x^2 + y^2 = 1)$.



L'application $M \longrightarrow M'$ est l'inversion de centre P et de puissance 2 ($\text{Inv}(P, 2)$) et $f : M(x; 0) \longrightarrow M'$ est une bijection de $\mathbb{R} \longrightarrow S_1 - \{P\}$ est bicontinue donc un homéomorphisme de $\mathbb{R} \longrightarrow S_1 - \{P\}$. $\tilde{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $\overline{S_1 - \{P\}} = S_1$.

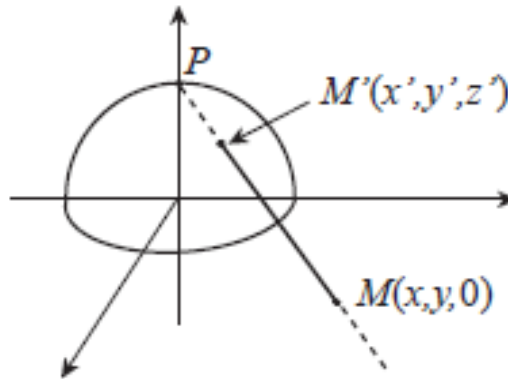
$$f : x \longmapsto \left(\frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

Plus généralement le compactifié d'Alexandroff $\tilde{\mathbb{R}}^n$ de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

3) Le plan complexe compactifié $\tilde{\mathbb{C}}$. On sait que $\mathbb{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ par :

$$z = x_1 + ix_2 \longmapsto (x_1, x_2)$$

Dans $\mathbb{C}$, $d(z, z') = |z - z'|$. $\mathbb{C}$ est localement compact, il admet un compactifié $\tilde{\mathbb{C}}$ et $\tilde{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à la sphère unité S_2 de $\mathbb{R}^3$.



Pour tout M de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x_1, x_2, 0)$ on associe $M' \in S_2 \cap PM$, par l'application :

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S_2 - \{P\}$ est une inversion $\text{Inv}(P, 2)$. Ainsi f est homéomorphe de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow S_2 - \{P\}$ et donc $\tilde{\mathbb{R}^2} = \tilde{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à $S_2 - \{P\} = S_2$. Notons que la fonction f ci-dessus peut également être définie par :

$$z = x_1 + ix_2 \mapsto \left(\frac{2x_1}{|z|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Construction de $\overline{\mathbb{R}}$ (la droite achevée)

Soit $(x_n)_n$ une suite réelle : elle n'a pas forcément de limite, ni même de valeur d'adhérence (dans $\mathbb{R}$), par exemple si $x_n \longrightarrow +\infty$. On va "ajouter" deux points supplémentaires à $\mathbb{R}$ notés $-\infty$ et $+\infty$, où $\{-\infty; +\infty\} \cap \mathbb{R} = \emptyset$ et $-\infty \neq +\infty$, et ainsi définir :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre total, prolongeant l'ordre connu sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, -\infty \prec x$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, y \prec +\infty$$

On pose :

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}, d(x, y) = |\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)|$$

où par convention $\text{Arctan}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ et $\text{Arctan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

Remarque 3.2.1 prolongée ainsi, la fonction Arctan est injective sur $\overline{\mathbb{R}}$

Proposition 3.2.2 d est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$, et la topologie induite par d sur $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Preuve. - d est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$; elle est symétrique ($\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}; d(x, y) = d(y, x)$). De plus $d(x, y) = d(y, x) \iff \text{Arctan}x = \text{Arctan}y \iff x = y$ puisque Arctan est injective. Enfin, si $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$d(x, y) \leq |\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(z)| + |\text{Arctan}(z) - \text{Arctan}(y)| = d(x, z) + d(z, y)$$

Donc d est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$; en particulier, elle induit une distance sur $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$.

- $\text{Arctan} : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow \left(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot| \right)$ est un homéomorphisme : en effet, $\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est bijective, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| = d(x, y)$$

Ainsi $\text{Arctan} : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow \left(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot| \right)$ et sa réciproque $\tan : \left(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot| \right) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$ sont 1-lipschitziennes donc continues. Il reste à vérifier que $\left(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot| \right)$ et $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont homéomorphes : or $\tan : \left(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot| \right) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est bijective, et on sait que $\tan$ et Arctan sont continues pour la topologie usuelle. Finalement, $(\mathbb{R}, d)$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. $\square$

Remarque 3.2.2 *en particulier, dire qu'une suite réelle $(x_n)_n$ converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ signifie selon les cas qu'elle converge vers un réel, que $x_n \longrightarrow +\infty$, ou que $x_n \longrightarrow -\infty$ (au sens usuel).*

Proposition 3.2.3 $\overline{\mathbb{R}}$ est compact.

Preuve. Puisque c'est un espace métrique, il s'agit de montrer que toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une sous-suite qui converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- premier cas : si les termes de la suite sont réels à partir d'un certain rang

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \succeq n_0, x_n \in \mathbb{R}$$

Alors ou bien $(x_n)_{n \succeq n_0}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et donc admet une sous-suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$, ou bien $(x_n)_{n \succeq n_0}$ est non bornée dans $\mathbb{R}$ et dans ce cas soit elle admet une sous-suite qui converge vers $+\infty$ soit elle admet une sous-suite qui converge vers $-\infty$. Dans tous les cas, on a trouvé une sous-suite $x_{\varphi(n)} \longrightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$.

- deuxième cas : sinon

$$\forall n, \exists k \succeq n \mid x_k \in \{-\infty; +\infty\}$$

i.e $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \{-\infty; +\infty\}\}$ est infini. Donc l'un des deux ensembles $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k = +\infty\}$ ou $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k = -\infty\}$ est infini, ce qui permet de construire une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ constante égale à $+\infty$ ou constante égale à $-\infty$: en particulier $x_{\varphi(n)} \longrightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. $\square$

3.3 Espaces localement compacts dans les espaces vectoriels normés de dimension finie

3.3.1 Théorème de F.Riesz

Proposition 3.3.1 *Soit X un espace vectoriel normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) X est localement compact ;
- (b) X est de dimension finie ;
- (c) Toute partie fermée et bornée de X est compacte.

Preuve.

(a) $\implies$ (b) Supposons que X est localement compact. Alors, il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ compact.

Comme $V \in \mathcal{V}(0)$, il existe $r \succ 0$ tel que $B_f(0, r) \subset V$.

$B_f(0, r)$ est fermée dans V compact, donc compacte.

Or $x \mapsto r^{-1}x$ est continue, donc $B = B_f(0, 1)$ est compacte .

$$B \subset \bigcup_{x \in B} B_o(x, \frac{1}{2}) \implies \exists x_1, x_2, \dots, x_n \text{ tel que } B \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_o(x_i, \frac{1}{2})$$

Montrons que $x_1, x_2, \dots, x_n$ engendrent X :

Soit $F = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ le sous espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$\dim F \prec +\infty$, donc $F \simeq \mathbb{K}^n$ qui est complet, ce que entraîne que F est complet, Par conséquent F est fermé.

$E = F$, en effet :

Supposons qu'il existe $A \in E \setminus F$. Soit $r' = d(a, F)$.

Donc $(\exists x \in F)$, tel que $r' \preceq \|x - a\| \prec r' + \frac{r'}{2} = \frac{3r'}{2}$.

Soit $y = \frac{a-x}{\|a-x\|}$.

alors $y \in B$ et $a = y\|a-x\| + x \implies \exists i \leq n$ tel que $y \in B_o(x_i, \frac{1}{2}) \implies y = x_i + z$ où

$$\|z\| \prec \frac{1}{2} \implies a = x + \|a-x\| x_i + \|a-x\| z.$$

Posons $a' = x + \|a-x\| x_i$, comme $a' \in F$, on a :

$$r' = d(a, F) \leq \|a - a'\| = \|a - x\| \|z\| \frac{\|a-x\|}{2} \prec \frac{3r'}{4} \text{ (absurde).}$$

Donc $X = F \implies \dim X \prec +\infty$.

(b) $\implies$ (c) Si $\dim X \prec +\infty$ on pose, $\dim X = n$. Alors $X \simeq \mathbb{K}^n$.

Or dans $\mathbb{k}^n$ les fermés bornés sont les compacts $\implies$ les fermés bornés de X sont les compacts.

(c) $\implies$ (a) $\forall x \in X, B_f(x, 1)$ est fermée bornée. Donc, $B_f(x, 1)$ est compacte. Par conséquent, X est localement compact. $\square$

Théorème 3.3.1 (Généralisation du théorème de Riesz) *Soit X un espace vectoriel normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

Corollaire 3.3.1 (a) X est localement compact ;

(b) X est de dimension finie ;

(c) Toute partie fermée et bornée de X est compacte ;

(d) La boule unité fermée $B_f(0, 1)$ dans X est compacte.

Preuve. D'après la proposition 3.3.1 on a (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c), et d'après le théorème 2.8.2 on a (b) $\iff$ (d). Alors (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c) $\iff$ (d). $\square$

CONCLUSION

Nous avons vu à travers ce mémoire, que certains ensembles fondamentaux peuvent être construits par le principe de compactification, tel est le cas par exemple de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, et cela en ajoutant à l'espace des réels les deux points : $+\infty$ et $-\infty$; mais aussi le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$ qui est isomorphe à la sphère unité $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne.

Notons que nous n'avons pas abordé toutes les propriétés relatives à ces espaces, par exemple, nous avons mentionné que le produit de deux espaces compacts est bien un espace compact (le théorème de Tykonoff stipule même qu'un produit infini d'espaces compacts est aussi compact), mais le produit de deux espaces localement compacts est-il aussi un espace localement compact ? (la réponse est positive dans le cas de produit de deux espaces, et plus généralement d'un produit fini, mais cela n'est pas toujours vérifié dans le cas d'un produit infini, voir [[10]])

Quant la compactification, nous avons évoqué deux exemples : la compactification, celle d'Alexandroff et la droite achevée, mais en fait, il faut savoir qu'il existe d'autres types de compactifications, tels que : les plus connus étant la compactification de Stone-Čech et la compactification de Bohr.

Enfin, nous espérons que ce mémoire profitera aux lecteurs, notamment aux étudiants de deuxième année, que ce soit dans le système LMD ou dans mais aussi ceux de l'école normale supérieure ENS, et qu'il aidera tous ceux qui le souhaitent étudier la topologie et plus particulièrement tout ce qui est lié aux espaces localement compacts.

Bibliographie

- [1] **Bernardo M. Abrego**, *Compactness in the complex plane*, 15 Septembre 2003.
[http ://www.csun.edu/~ba70714/math455/compact.pdf](http://www.csun.edu/~ba70714/math455/compact.pdf)
- [2] **S K Berberian**, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*. 1974 by Springer-Verlag New York Inc.
- [3] **R. Bertrand**, *Cours 2 : compacité, complétude, connexité*, École Polytechnique, Université Paris Saclay, 2016. [https ://bremy.perso.math.cnrs.fr/MAT311-2016-SlidesAmphi2-Compacite%CC%81Comple%CC%81tudeConnexite%CC%81.pdf](https://bremy.perso.math.cnrs.fr/MAT311-2016-SlidesAmphi2-Compacite%CC%81Comple%CC%81tudeConnexite%CC%81.pdf)
- [4] **L. Blanc-Centi**, *Cours De Topologie (L3)*, Université Lille 1, 2013-2014.
[http ://math.univ-lille1.fr/~blanccen/Enseignement/td/1314/L3/Topologie_Cours.pdf](http://math.univ-lille1.fr/~blanccen/Enseignement/td/1314/L3/Topologie_Cours.pdf)
- [5] **N. Bourbaki**, *Topologie Générale*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007 (Réimpression inchangée de l'édition originale de 1971)
- [6] **L. Brandolese** *Espaces topologiques*, Université Claude Bernard Lyon 1, 2008.
[http ://math.univ-lyon1.fr/~brandolese/enseignement/L3topologie/poly2008.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~brandolese/enseignement/L3topologie/poly2008.pdf)
- [7] **P. Caldero**, *Compacite Locale, M1. Groupes classiques et Géométrie*, Université Lyon I.
[http ://math.univ-lyon1.fr/~caldero/compacite-locale.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~caldero/compacite-locale.pdf)
- [8] **J Dixmier**, *Topologie générale*, ISBN 2 13 03 6 647 3, 1ère édition : 1 er trimestre I981. Presses Universitaires de France,
- [9] **O Dovgoshey and O Martio**, *Product of metric spaces, covering numbers, packing numbers and characterizations of ultrametric spaces*. Revue Roumaine des Mathématiques Pures et Appliquées. April 2009, Source : arXiv

- <https://arxiv.org/pdf/0903.1526.pdf>
- [10] **A. El Jai**, *Eléments de topologie et espaces métriques*. Presses Universitaires de Perpignan, 2007, 9782354120078. hal-01267268
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01267268>
- [11] **Handout**, *Introduction To Normed Linear Spaces*, University College London, 2012–2013, TERM 2. <https://vdocuments.mx//3103-handout-3-university-college-london-ucacad03103handout3pdf-handout>
- [12] **H. Hennoune**, *Le compactifié d’Alexandrov*, Mémoire de Licence Spécialité probabilité et statistique, Université Dr Moulay Tahar de Saida, 2012/2013.
https://pmb.univ-saida.dz/buscopac/index.php?lvl=author_see&id=191920
- [13] **I. Khatchaturian** *Compactifications*, University of Toronto.
<http://www.math.toronto.edu/ivan/mat327/docs/notes/19-compactifications.pdf>
- [14] **H. Queffelec**, *Topologie cours et exercices corrigés 4e édition*, ISBN 978-2-10-057772-9, Dunod (Paris 2012)
- [15] **M. Rezgania**, *Théorie d’Arzela-Ascoli et Applications*, Mémoire de Master Option : Analyse Fonctionnelle et Applications, Université Dr. Moulay Tahar de Saida 2013/2014.
- [16] **F. B Richard**, *Real analysis for graduate students*, Version 2.1, ISBN-13 : 978-1502514455 ISBN-10 : 1502514451, 2014.
<https://www.math.wustl.edu/~victor/classes/ma5051/rags100514.pdf>
- [17] **H.L.Royden** et **P.M.Fitzpatrick**, *Real analysis*, Fourth Edition, Pearson Education Asia Limited and China Machine Press, 2010. <https://s2pnd-matematika.fkip.unpatti.ac.id/wp-content/uploads/2019/03/Real-Analysis-4th-Ed-Royden.pdf>
- [18] **J. Munkres**, Local Compactness, Faculty Websites in OU Campus, 2016.
<https://faculty.etsu.edu/gardnerr/5357/notes/Munkres-29.pdf>
- [19] **F. Nier** et **D. Iftimie**, Introduction à la Topologie, Licence de Mathématiques Université de Rennes 1.
<https://nraymond.perso.math.cnrs.fr/TopoPoly.pdf>

-
- [20] **Shiu-Tang Li**, Some Results For Locally Compact Hausdorff Spaces, 2013
[http ://www.math.utah.edu/~li/Locally%20compact%20Hausdorff%20spaces.pdf](http://www.math.utah.edu/~li/Locally%20compact%20Hausdorff%20spaces.pdf)
- [21] G Skandalis, *Topologie et Analyse 3e année* (licence 3e année - master) ISBN 2 10 048886 4, Dunod (2004)
- [22] **S. Talbi**, *Comparaison de quelques topologies sur les espaces de fonctions*, Mémoire de Master, Option : Mathématiques Fondamentales, Université Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijel 2016/2017
[http ://dspace.univ-jijel.dz :8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/1517/M.Mat.MF.%2030-17.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://dspace.univ-jijel.dz:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/1517/M.Mat.MF.%2030-17.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- [23] **A. Tajmouati**, Espaces localement compacts, Module de Topologie II, Filière SMA (Semestre6), Faculté des Sciences Dhar ElMahrez Fès, 2019-2020.
[https ://www.youtube.com/watch?v=9jgL7kuQHQI](https://www.youtube.com/watch?v=9jgL7kuQHQI)