

**Mémoire**

Présenté par

**Mr. DAOUD SidAhmed**

Pour l'obtention du

**Diplôme de Magister en Génie Mécanique**

Option

**Modélisation Et Simulation Des Transferts De Masse Et De Chaleur**

**Etude de l'influence de la forme géométrique d'un obstacle  
cylindrique soumis à un écoulement oscillatoire**

**Soutenu le:** Dimanche 04/03/2012 site 01 à 10h00. (salle des 18 bureaux).

Devant le Jury

Président	Prof. OUINAS Djamel	M.C.A.	Université de Mostaganem
Examineur	Dr. RETIEL Nouredine	M.C.A.	Université de Mostaganem
Examineur	Dr. BENZAZZA Abdel Ylah	M.C.A.	Université de Sidi Bel Abbès
Encadreur	Prof. NEHARI Driss	Prof.	Université d'Ain Témouchent

**ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2011 /2012**

## **Remerciements**

Mes sincères remerciements ainsi que ma reconnaissance vont directement au **Prof. NEHARI Driss** encadreur de ce thème de recherche, pour avoir partagé son savoir scientifique et pour l'attention et la patience avec laquelle il m'a constamment dirigé. Sans sa disponibilité et sa vigilance cette étude n'aurait pas aboutie à des résultats.

Ma profonde gratitude s'adresse également au **Dr. RETIEL Noureddine**, responsable de la poste-graduation « Modélisation et simulation des transferts de masse et de chaleur », pour sa bienveillance au bon déroulement des deux années de poste graduation.

Je tiens aussi à adresser, mes vifs remerciements aux membres du jury: **Dr. OUINAS Djamel, Dr. RETIEL Noureddine** et **Dr. BENZAZZA Abdel Ylah** d'avoir pris le temps d'examiner mon travail et de leur honorable présence.

# Références

---

Liste des tableaux.....	I
Liste des figures.....	I
Nomenclature.....	IV
Résumé.....	VI
Introduction.....	01
But du travail.....	02
Plan d'étude.....	02
<b>Chapitre -I- Revue bibliographique.....</b>	<b>04</b>
<b>Chapitre -II- Modélisation du problème</b>	
II.1- Présentation du problème à résoudre.....	13
II.2- les équations du mouvement.....	13
II.3- La phase d'adimensionnalisation .....	15
II.4- Les conditions aux limites.....	17
II.5- Paramétrisation.....	18
II.6- Algorithme de résolution.....	20
II.6.1- Utilisation de la méthode à pas fractionnel.....	21
II.6.2- L'équation de poisson pour la pression.....	22
II.6.3- Tactique de résolution.....	23
II.7- Condition de stabilité.....	24
II.8- Évaluation du champ de vortacité et des forces dépendantes de temps.....	26
II.8.1- Le champ de vortacité.....	26
II.8.2- Les forces .....	27
<b>Chapitre -III- Discrétisation</b>	
III.1- Présentation générale.....	29
III.2- Principe de la discrétisation géométrique.....	29
II.3-Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement.....	30
III.3.1-Évaluation du bilan de quantité de mouvement ( <i>RHS</i> ).....	30
a-Terms de convection.....	30
b-Terms de diffusions non-diagonales.....	31
c-Terms de diffusions diagonales.....	32
II.3.2- Évaluation de la vitesse.....	33
II.4- Discrétisation de l'équation de poisson de pression.....	35

---

# Références

---

## Chapitre -IV- Génération du maillage

IV.1- Introduction.....	37
IV.2- Adaptation du maillage .....	37
IV.3- Procédure de génération de maillage.....	40
IV.4- Génération du maillage .....	41

## Chapitre -V- Résultats et Discussions

V.1- Validation du code.....	43
V.2 -Résultats obtenues pour un écoulement en régime A autour d'un cylindre elliptique.....	44
V.2.1 -Le champ de vorticité et de pression.....	46
V.2.1.A- Le champ de vorticité et de pression pour $\varepsilon \in [0.8, 1]$ .....	47
V.2.1.B- Le champ de vorticité et de pression pour $\varepsilon \in [0.65, 0.75]$ .....	48
V.2.1.C- Le champ de vorticité et de pression pour $\varepsilon \in [0.4, 0.6]$ .....	51
V.2.1.D- Le champ de vorticité et de pression pour $\varepsilon = 0.35$ .....	54
V.2.1.E- Le champ de vorticité et de pression pour $\varepsilon \in [0.1, 0.3]$ .....	54
V.2.2-Analyse des forces .....	58
V.2.3-Les Coefficients de Morison.....	62

<b>Conclusion</b> .....	65
-------------------------	----

<b>Référence</b> .....	66
------------------------	----

---

---

## Liste des tableaux

<b>Tableau 5.1</b> : Les paramètres des simulations .....	Page 45
<b>Tableau 5.2</b> : Valeurs des coefficients de trainé et d'inertie ainsi que les forces totales transversale et longitudinale obtenues par simulation pour différent rapport elliptique .....	Page 63

## Liste des figures

<b>Fig.1.1</b> - Cartographie identifiant différents régimes dans le plan $Kc - \beta$ .....	Page 06
<b>Fig.1.2</b> - Mécanisme de séparation du régime A d'après Kuhtz .....	Page 07
<b>Fig. 1.3</b> - Instabilité de Honji à $\beta = 9956$ pour $Kc = 0.58$ -régime B.....	Page 08
<b>Fig. 1.4</b> - Détachement tourbillonnaire à $\beta = 42$ pour $Kc = 4.4$ -régime C.....	Page 08
<b>Fig. 1.5</b> - Détachement tourbillonnaire transverse à $\beta = 22.1$ pour $Kc = 6.28$ - régime D.....	Page 09
<b>Fig.2.1</b> - Schéma de la position du problème.....	Page 13
<b>Fig.2.2</b> - Transformation du domaine physique au domaine numérique.....	Page 18
<b>Fig-2.3</b> - Principe du maillage non entrelacé.....	Page 20
<b>Fig.2.4</b> - Domaine de dépendance et condition de stabilité CFL.....	Page 24
<b>Fig.2.5</b> - Organigramme de l'algorithme utilisé.....	Page 25
<b>Fig.3.1</b> - Grilles différences finies bidimensionnelles et tridimensionnelles.....	Page 29
<b>Fig.3.2</b> - Discrétisation en projection bidimensionnelle.....	Page 30
<b>Fig.4.1.a</b> - Schéma physique pour un rapport elliptique $\varepsilon = 0.9$ .....	Page 38
<b>Fig.4.1.b</b> - Schéma physique pour un rapport elliptique $\varepsilon = 0.5$ .....	Page 38
<b>Fig.4.1.c</b> - Schéma physique pour un rapport elliptique $\varepsilon = 0.3$ .....	Page 39
<b>Fig.4.2</b> - Maillage utilisé dans le calcul $\varepsilon = 0.3$ [plan (x-y)]. Vue complète et vue au voisinage de l'obstacle.....	Page 42
<b>Fig.5.1</b> - Une comparaison entre les composantes de la vitesse obtenus avec le modèle numérique et ceux mesuré dans les expériences de Deutsch et al. [17], à trois sections transversales, en régime A.....	Page 44

---

<b>Fig.5.2</b>	- Les iso-lignes de vorticité $\omega_z$ aux différentes phases de position significatives pour les rapports elliptiques $\varepsilon=1$ et $\varepsilon=0.8$ au 140ieme cycles d'oscillation.....	Page 47
<b>Fig.5.3</b>	- Les iso-lignes du champ de pression aux différentes phases de position significatives pour les rapports elliptiques $\varepsilon=1$ et $\varepsilon=0.8$ au 140ieme cycles d'oscillation.....	Page47
<b>Fig.5.4</b>	- Les iso-lignes de vorticité $\omega_z$ aux différentes phases de position pour les rapports elliptiques $\varepsilon=0,75$ et $\varepsilon=0.65$ .....	Page 49
<b>Fig.5.5</b>	- Les iso-lignes du champ de pression aux différentes phases de position significatives pour les rapports elliptiques $\varepsilon=0.75$ et $\varepsilon=0.65$ .....	Page 49
<b>Fig.5.6</b>	- Les différentes positions de la perte tourbillonnaire pour $\varepsilon=0.6$ .....	Page 50
<b>Fig.5.7</b>	- Evolution iso-lignes de la vorticité $\omega_z$ au cours du 35 <sup>ieme</sup> cycle pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.6$ .....	Page 51
<b>Fig.5.8</b>	- Evolution iso-lignes du champ de pression au cours du 35 <sup>ieme</sup> cycle pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.6$ .....	Page 51
<b>Fig.5.9</b>	- Evolution iso-lignes de la vorticité $\omega_z$ au cours du 65 <sup>ieme</sup> cycle pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.4$ .....	Page 51
<b>Fig.5.10</b>	- Evolution iso-lignes du champ de pression au cours du 65 <sup>ieme</sup> cycle pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.4$ .....	Page 51
<b>Fig.5.11</b>	- Comparaison entre les pertes tourbillonnaires des différents rapports elliptiques.....	Page 52
<b>Fig.5.12</b>	- Les différentes directions et positions de la perte tourbillonnaire pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.6$ . ....	Page 52
<b>Fig.5.13</b>	- Les différentes directions et de positions de la perte tourbillonnaire pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.4$ .....	Page 52
<b>Fig.5.14</b>	- Evolution iso-lignes de la vorticité $\omega_z$ au cours d'un cycle intermittent (148 <sup>ieme</sup> cycle) pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.6$ .....	Page 53
<b>Fig.5.15</b>	- Evolution iso-lignes de la vorticité $\omega_z$ au cours d'un cycle intermittent (99 <sup>ieme</sup> cycle) pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.4$ .....	Page 53
<b>Fig.5.16</b>	- Historique des différentes formes de la vorticité $\omega_z$ au cours de 200 cycles d'écoulement pour $\varepsilon = 0.6$ .....	Page 54
<b>Fig.5.17</b>	- Historique des différentes formes de la vorticité $\omega_z$ au cours de 200 cycles d'écoulement pour $\varepsilon = 0.5$ .....	Page 54
<b>Fig.5.18</b>	- Historique des différentes formes de la vorticité $\omega_z$ au cours de 200 cycles d'écoulement pour $\varepsilon = 0.4$ .....	Page 54

---

---

<b>Fig.5.19</b>	- Evolution iso-lignes de la vorticité $\omega_z$ au cours du 65 <sup>ieme</sup> cycle pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.35$ .....	Page54
<b>Fig.5.20</b>	- Evolution iso-lignes du champ de pression au cours du 65 <sup>ieme</sup> cycle pour le rapport elliptique $\varepsilon=0.35$ .....	Page54
<b>Fig.5.21</b>	- Comparaison entre les pertes tourbillonnaires de types double-paires pour les rapports elliptiques $\varepsilon=0,3$ et $\varepsilon=0,1$ .....	Page55
<b>Fig.5.22</b>	- Comparaison entre les pertes tourbillonnaires de types mono-paires pour les rapports elliptiques $\varepsilon=0,3$ et $\varepsilon=0,1$ .....	Page55
<b>Fig.5.23</b>	- Evolution de la vorticité au cours de deux cycles d'intermittence consécutifs (197ieme et 198ieme cycle) pour le cas du rapport $\varepsilon=0.3$ .....	Page55
<b>Fig.5.24</b>	- Historique des différentes formes de la vorticité $\omega_z$ apparues au cours de 200 cycles d'écoulement pour $\varepsilon = 0.3$ .....	Page57
<b>Fig.5.25</b>	- Historique des différentes formes de la vorticité $\omega_z$ apparues au cours de 200 cycles d'écoulement pour $\varepsilon = 0.25$ .....	Page57
<b>Fig.5.26</b>	- Historique des différentes formes de la vorticité $\omega_z$ apparues au cours de 200 cycles d'écoulement pour $\varepsilon = 0.2$ .....	Page57
<b>Fig.5.27</b>	- Historique des différentes formes de la vorticité $\omega_z$ apparues au cours de 200 cycles d'écoulement pour $\varepsilon = 0.1$ .....	Page57
<b>Fig.5.28</b>	- Historique de la force transversale totale adimensionnelle en régime A pour différents rapports elliptiques.....	Page59
<b>Fig. 5.29</b>	- Historique de la force longitudinale totale adimensionnelle en régime A pour différents rapports elliptiques.....	Page60
<b>Fig.5.30</b>	-Evolution temporelle de la force longitudinale de pression adimensionnelle durant le 90ieme cycle pour différentes valeurs du rapport elliptique $\varepsilon$ dans le régime A .....	Page61
<b>Fig.5.31</b>	-Evolution temporelle de la force longitudinale de cisaillement adimensionnelle durant le 90ieme cycle pour différentes valeurs du rapport elliptique $\varepsilon$ dans le régime A.....	Page62
<b>Fig. 5.32</b>	- L'influence du rapport elliptique sur l'écart type de la force longitudinale et transversale. ....	Page64
<b>Fig. 5.33</b>	- L'influence du rapport elliptique sur les coefficients de Morison.....	Page64

---

## Nomenclature

$D$	: Diamètre du cylindre circulaire
$a ; b$	: Respectivement l'axe longitudinal et transversal du cylindre elliptique
$\epsilon$	: Rapport elliptique (a/b)
$x_i(x, y, z)$	: Respectivement coordonnée cartésienne longitudinale, transversale et axiale.
$\xi_i(\xi, \eta, \zeta)$	: Respectivement coordonnée curviligne longitudinale, transversale et axiale.
$u_i(u, v, w)$	: Respectivement la vitesse suivant la direction longitudinale, transversale et axiale.
$T$	: Période d'oscillation de l'écoulement externe
$t$	: Temps
$U(t)$	: Vitesse oscillante de l'écoulement externe
$U_{max}$	: La vitesse d'oscillation maximale de l'écoulement externe
$U_m(U, V, W)$	: Flux de volume
$\omega$	: Fréquence d'oscillation de l'écoulement externe
$P ; \phi$	: Pression.
$\rho$	: Masse volumique
$\vartheta$	: Viscosité cinématique
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	: La dérivée par rapport à $x_i$
Opérateur $\nabla$	: Gradient
Opérateur $\Delta$	: Laplacien
L'indice ( * )	: Grandeur adimensionnelle
L'indice ( a )	: Grandeur dimensionnelle
L'indice ( i, j, k )	: Cordonné suivant les directions longitudinale, transversale et axiale d'un repère.
$B_i$	: Force de volume généré par l'écoulement oscillatoire suivant la direction i.
$Re$	: Nombre adimensionnel de Reynolds
$Kc$	: Nombre adimensionnel de Keulegan-Karpenter
$\beta$	: Nombre de Stokes
$\delta_{i,j}$	: Symbole de Kronecker
$J^{-1}$	: Jacobien de la transformation
$g^{mn}$	: Tenseur métrique contravariant
$G^{mn}$	: Tenseur d'inclinaison de maille
$F_x ; F_y$	: Respectivement force totale longitudinale et transversale
$F_{x,rms} ; F_{y,rms}$	: Respectivement force totale longitudinale et transversale en RMS

## Nomenclature

---

$F_{x,p}$ ; $F_{y,p}$	: Respectivement force de pression longitudinale et transversale
$F_{x,s}$ ; $F_{y,s}$	: Respectivement force de cisaillement longitudinale et transversale
$F_x^S$ ; $F_y^S$	: Respectivement force surfacique longitudinale et transversale
$C_d$ ; $C_m$	: Respectivement coefficients de traînée et d'inertie
$C_d^S$ ; $C_d^S$	: Respectivement coefficients surfaciques de traînée et d'inertie
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	: Pas d'espace.
$\Delta t$	: Pas du temps.
$\omega_x$ ; $\omega_y$ ; $\omega_z$	: Respectivement la vorticité suivant la direction longitudinale, transversale et axiale.
$\omega_\theta$	: Vorticité circonférentielle

## **Résumé**

Généralement les éléments cylindriques (circulaires ou non circulaires) ; sont les éléments les plus essentiels d'une structure maritime (offshores et pipes), et les plus fréquemment employés. Ces structures sont soumises à des écoulements oscillatoires induits par les forces d'environnement (houle, courant...etc.) qui peuvent être réguliers ou irréguliers.

L'objectif principal de cette étude est d'investiguer l'influence de la forme géométrique sur le champ d'écoulement et les forces hydrodynamiques agissants sur l'élément cylindrique soumis à un écoulement oscillatoire en régime A.

Pour réaliser ces objectifs, on a étudié l'écoulement oscillatoire en régime A autour d'une forme cylindrique de différents sections allant de la forme circulaire jusqu'à la forme elliptique en résolvant les équations qui régissent l'écoulement en deux dimensions (2D) à l'aide d'un code développé au laboratoire de « Modélisation Numériques Des Phénomènes Mécaniques » à l'université de Mostaganem.

**Mots clés :** *écoulement oscillatoire autour d'un cylindrique, régime A, nombre de Reynolds ( $Re$ ), nombre de Keulegan-Carpenter ( $Kc$ ), détachement tourbillonnaire ( $VIV$ ), forces transversales, forces longitudinales, coefficients de Morison,*

## **Abstract**

Generally cylindrical (circular or non circular) are the most essential elements of a marine structure (pipes and offshore), and most frequently used. These structures are subjected to oscillatory flow induced by environmental forces (wave, current etc ....)

The main objective of this study is to investigate the influence of geometry on the flow field and hydrodynamic forces acting on the cylinder subjected to an oscillatory flow in regime A.

To realize these objectives, we studied the oscillatory flow in regime A around a form cylindrical with different sections ranging from circular to the elliptical form by solving the equations governing the flow two-dimensional (2D) using a code developed in the laboratory of « Numerical Modélisation Of Mechanical Phenomena » at the University of Mostaganem.

**Keywords:** *oscillatory flow around a cylindrical, regime A, Reynolds number ( $Re$ ), Keulegan-Carpenter number ( $Kc$ ), vortex shedding ( $VIV$ ), transversal forces, longitudinal forces, coefficients of Morison*

## ملخص

عموما الاسطوانية (دائرية أو غير دائرية) هي أكثر العناصر الأساسية لهيكل في عرض البحر (البحرية والأنابيب)، وتستخدم في معظم الأحيان. تخضع هذه الهياكل لتدفق متذبذبة بفعل القوى البيئية (موجة، الخ....) الحالية التي قد تكون منتظمة أو غير منتظمة.

والهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو دراسة تأثير الهندسة الشكلية في مجال التدفق وقوات الهيدروديناميكية بناء على اسطوانة تخضع لتدفق تذبذبي من صنف A.

لتحقيق هذه الأهداف، درسنا نظام تدفق تذبذبي وحول شكل الاسطوانية من الأقسام المختلفة بدءا من الشكل الدائري إلى شكل بيضاوي الشكل من خلال حل المعادلات التي تحكم تدفق في بعدين (D2) باستخدام برنامج طور في مختبر "النمذجة العددية للظواهر الميكانيكية" في جامعة مستغانم

**كلمات البحث :** تذبذبي تدفق حول الاسطوانية , *regime A* ، عدد رينولدز (*Re*)، وعدد *Keulegan-Carpenter (Kc)*، دوامة سفك (*VIV*) ، قوات الجانبية، قوات الطولية، معاملات موريسون

# **Introduction**

### **1- Introduction**

La science est la base de développement de toute nation, et la nécessité pousse l'homme à découvrir des choses nouvelles pour lui offrir la facilité de vie. L'Algérie est parmi les pays en voie de développement, elle a investit de grandes ressources humaines dans le domaine de la science et elle a parût avec puissance dans les sciences de l'ingénierie en particulier la mécanique des fluides et les produits énergétiques (pétrole et gaz). L'Algérie est parmi les premiers pays à exporter ces richesses et pour rester toujours dans les premiers rangs dans ce domaine, il ne faut pas chercher toujours au Sahara, mais aussi au fond de la mer méditerranéen puisqu'elle occupe une longue côte qu'on peut exploiter à l'aide des plates formes pétrolières pour découvrir des champs et concurrencer avec les marchés européens et américains.

Généralement les éléments cylindriques (circulaires ou non circulaires) ; sont les éléments les plus essentiels d'une structure maritime (offshores et pipes), et les plus fréquemment employés. Il existe dans le sillage de certaines structures des lâchers périodiques de tourbillons qui peuvent entrer en résonance avec la structure. On parle dans ce cas de Vibrations Induites par Vortex (VIV en anglais pour Vortex-Induced Vibrations).

Les vibrations engendrées par le détachement de tourbillons alternés (les tourbillons de Bénard - Von Karman du nom de leurs premiers découvreurs), sont rarement dommageables même en cas de résonance. En effet, les amplitudes de vibrations atteintes sont très fortement dépendantes du rapport de masse entre la structure et le fluide qui l'entoure. Plus ce rapport est grand, plus les amplitudes sont faibles et en aéroélasticité les rapports de masse entre la structure et l'air sont évidemment très grands. Ce n'est pas le cas pour l'exploitation des champs pétrolifères offshore où des structures très élancées utilisées pour assurer les liaisons entre les têtes de puits au fond de l'océan et le support flottant, plate-forme ou navire en surface, tels que les câbles d'ancrage et les conduites, risers et pipelines, sont soumises aux courants marins et pour lesquelles les vibrations induites par vortex constituent un problème majeur.

Ces nouveaux problèmes dus aux VIV apparaissent et intéressent à la fois la recherche fondamentale et appliquée en mécanique des fluides, en mécanique des solides et en interaction fluide-structure. Une meilleure connaissance du comportement vibratoire d'une structure soumise au courant et à la houle, est nécessaire à cause de trois problèmes causés par les VIV : l'accroissement de la fatigue de la structure, ce qui limite sa durée de vie, l'augmentation de la traînée, donc de tous les efforts auxquels sont soumises les structures, et enfin la possibilité de collision entre liaisons proches. Des ruptures du matériel dues aux VIV, pouvant amener à la perte de la liaison, sont décrites dans la littérature : cela explique l'intérêt porté à ce phénomène physique dès la conception de ces structures. Il est donc primordial de pouvoir disposer d'outils permettant la modélisation des VIV, voir leur prédiction.

L'étude des écoulements oscillatoires autour d'un cylindre a fait l'objet de large investigations tant sur le plan expérimentale que numérique, et cela est dû aux multiples applications pratiques de ce type d'écoulement, citant à titre d'exemple la conception des plates formes offshore soumises à l'action de la houle simulée a un mouvement oscillatoire. La conception de telles structures nécessite une compréhension profonde du champ d'écoulement, une évaluation précise des forces et des coefficients hydrodynamiques ainsi qu'une étude sur l'influence de la forme géométrique de l'obstacle cylindrique qui s'avèrent indispensables pour mieux maîtriser les paramètres principaux de conception des structures marines.

Le champ d'écoulement induit par les vagues autour des structures marines est extrêmement complexe et le problème peut être idéalisé en considérant un cylindre exposé à un écoulement bidimensionnel, harmonique et oscillant. Cette idéalisation reproduit les caractéristiques les plus importantes du corps implanté dans une mer houleuse.

### **2- But du travail**

L'objectif principal de cette étude est d'investiguer l'influence de la forme géométrique sur le champ d'écoulement et les forces hydrodynamiques agissants sur l'élément cylindrique. Parmi les objectifs aussi de cette recherche est de trouver des formes cylindriques qui permettent d'éviter les problèmes de vibrations induites et qui menacent la construction maritime.

Parmi les paramètres qui motivent dans ce thème, son caractère scientifique qui coordonne entre le domaine théorique (numérique) et expérimental (réel) sans oublier l'aspect technique et son impact sur l'économie et l'environnement.

Nous présenterons, dans ce thème les résultats obtenus numériquement par un code développé au laboratoire de « modélisation numériques des phénomènes mécaniques » à l'université de Mostaganem. Les équations de Navier Stokes sont résolues d'une manière bidimensionnelle et instationnaire en second ordre de précision pour l'espace et le temps.

Pour réaliser les différents objectifs signalés précédemment, nous avons étudié l'écoulement oscillatoire en régime (A) autour d'une forme cylindrique de différents sections allant de la forme circulaire jusqu'au la forme elliptique ayant un rapport elliptique égale à 0.1. Pour cela, nous avons :

- a)- Reproduit le champ d'écoulement autour des différentes formes elliptiques ;
- b)-Étudié les effets du rapport elliptique sur le champ d'écoulement et sur le détachement tourbillonnaire ;
- c)-Évalué l'effet du rapport elliptique sur les forces hydrodynamiques et sur leurs coefficients;

Parmi les avantages de cette étude est de comprendre les phénomènes physiques liés à ce genre de problème et même les procédures d'une résolution numérique, consolider et développer des connaissances de conception des installations maritimes.

### **3- Plan d'étude**

Notre étude comprend cinq chapitres. Dans le :

#### **Chapitre I :**

Une recherche Bibliographique montre les différents travaux réalisés pour les écoulements oscillatoires soit expérimentalement soit numériquement.

#### **Chapitre II :**

Présente la formulation du problème ou bien la modélisation du problème physique, en mettant les équations de Navier Stokes sous une forme conservative.

#### **Chapitre III :**

Présente la discrétisation du problème continue, les équations de Navier Stokes sont discrétisées par la méthode de différences finis. Cette partie est une étape qui nous aide à préparer et comprendre le code de calcul.

#### **Chapitre IV :**

C'est une partie qui a été consacré à la génération du maillage et la méthode utilisée est basée sur les équations de poisson en cordonnées généralisées permettant d' avoir une bonne obéissance géométrique au schéma numérique utilisé. La génération du maillage est une étape nécessaire pour entamer les calculs de l'écoulement.

#### **Chapitre V :**

Nous présenterons les résultats obtenus et leurs discussions pour l'écoulement laminaire sinusoïdal en régime (A) «régime symétrique et bidimensionnel » autour d'un obstacle et l'influence de la forme de la section cylindrique sur ce type d'écoulement.

Nous analyserons le cas de la variation du rapport diamètre elliptique et nous étudierons son effet sur la grandeur des forces, et pour chaque analyse nous calculerons les coefficients des forces qui agissant sur l'obstacle, et l'effet de champ d'écoulement sur ces coefficients.

Nous terminerons finalement par une conclusion générale qui indique les différentes étapes de cette étude et des recommandations proposées.

**Chapitre -I-  
Revue bibliographique**

---

### Revue bibliographique

Les pipelines sous-marins et les piliers des structures marines (offshore) sont l'un des sujets les plus importants dans le génie maritime. Afin de s'assurer que ces structures cylindriques sont stables et fonctionnelles au cours de leur vie de projet, une attention doit être accordée à leur conception. Dans la phase de conception, il faut tenir compte de tous les paramètres qui peuvent influencer sur leur stabilité. Dans le cas contraire, ces cylindres peuvent être détruits, partiellement ou totalement. Le type de la section transversale du cylindre est l'un des paramètres clé de son stabilité, la section circulaire est largement utilisée, mais les cylindres non circulaires comme les cylindres elliptiques et rectangulaires sont parfois préférés pour des applications spéciales.

Dans le domaine du génie maritime, pour évaluer la charge sur les structures marines sous l'action d'ondes, les analyses sont généralement effectuées en vertu d'un état simplifié d'un écoulement sinusoïdal uniforme autour d'un cylindre. Ainsi, l'étude de l'écoulement oscillatoire autour d'un cylindre est de grand intérêt puisque c'est une représentation idéalisée des structures cylindriques implanté dans une mer souvent houleuse. Le champ d'écoulement résultant est complexe et caractérisé par une allée-tourbillonnaire (vortex shedding) qui est généralement asymétrique. Par suite, l'étude des écoulements oscillatoires autour d'un cylindre a fait l'objet de large investigations tant sur le plan expérimental que numérique.

Physiquement, au moment où un écoulement traverse un cylindre avec une forme non-profilée, la séparation se produit généralement en raison de l'effet des gradients de pression négative. Les lignes de séparation peuvent se rouler et former des tourbillons. Dans le cas d'un écoulement oscillant, le mécanisme des tourbillons générés peuvent être affectés par l'action d'accélération et de décélération de l'écoulement, et en outre conduire à un changement de la force résultante sur le corps. Plus grave, comme la variation de l'écoulement est périodique, la mesure du changement peut devenir significative que la fréquence d'écoulement est proche de la fréquence de séparation (shedding frequency). Sous ces conditions, l'amplitude de la charge moyenne et l'amplitude des fluctuations peuvent être haussées en raison de l'effet de la résonance [1].

Le phénomène d'écoulement de séparation et le sillage des corps non profilés ont longtemps été intensément étudiées en raison de leur importance fondamentale dans la physique des écoulements et de leur importance pratique dans les applications aérodynamiques et hydrodynamiques. Les analyses des écoulements oscillatoires visqueux sont données à la première fois par **Stokes** [2] pour le cas des sphères et des cylindres circulaires. Leurs solution est donnée par une série de puissance du paramètre  $\beta^{-1/2}$  (ou  $\beta$  est le nombre de Stokes). Les analyses de Stokes sont valables seulement pour les grandes valeurs de  $\beta$  et ces résultats tiennent compte uniquement des efforts visqueux.

D'autre part, pour mieux estimer cette force, **Morison** [3] a mené des études expérimentales et a trouvé que la force longitudinale est la somme linéaire de la force de traînée qui est en phase avec la vitesse et de la force d'inertie qui est en phase avec l'accélération:

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot D \cdot C_D \cdot U \cdot |U| + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \rho \cdot D^2 \cdot C_m \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \quad [\text{N/m}] \quad (1.1)$$

Cette équation est largement utilisée pour la prédiction des forces appliquées sur le cylindre pour différents régimes d'écoulement. Dans l'équation de Morison (1),  $x$  est le long de la direction de l'écoulement (longitudinale),  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $U(t) = U_{max} \sin(2\pi t/T)$  est la vitesse d'écoulement du fluide,  $t$  est le temps,  $C_D$  et  $C_m$  sont respectivement les coefficients de traînée et d'inertie. Toutes les études numériques et expérimentales se font alors sur le modèle général de MORISON. Bien que la force soit supposé symétrique et périodique ce modèle donne une bonne évaluation des charges longitudinales appliquées sur les cylindres dans un écoulement oscillatoire.

Dans un Bassin d'essai, **Keulegan et Carpenter** [4] ont placé un cylindre vertical au dessous d'une vague verticale, et ont découvert que l'écoulement et les coefficients de Morison dépendaient d'un certain nombre sans dimension  $KC$  (appelé nombre de Keulegan-Carpenter) :

$$KC = \frac{U_{max} T}{D} \quad (1.2)$$

Dans le cas d'un écoulement sinusoïdal nous aurons  $KC=2\pi A/D$ , dans ces conditions  $KC$  est proportionnelle à l'amplitude d'écoulement  $A$ .

L'utilisation du tube  $U$  dans les essais expérimentaux produits la fermeture unidirectionnelle de l'écoulement sinusoïdale à l'arrière du corps, ces essais identifient les paramètres les plus importants qui influencent l'écoulement et qui gouvernent les forces. **Sarpkaya** [5] a découvert par l'utilisation de cette technique (tube  $U$ ), que l'écoulement et les coefficients de Morison dépendent pas seulement de  $KC$  mais dépendent aussi du nombre de Stokes  $\beta$  :

$$\beta = \frac{Re}{KC} = \frac{D^2}{T \cdot \vartheta} \quad (1.3)$$

$$\text{Avec } Re = \frac{U_{max} \cdot D}{\vartheta} \quad \text{le nombre de Reynolds.}$$

L'analyse et la paramétrisation des forces transversales sont très difficiles, par ailleurs elles sont très influencées par le sillage qui est formé et mobilisé par les tourbillons asymétriques (vortex shedding). **Maul et Milliner** [6] ont définie l'utilité de l'expression de Blasius pour la force transversale et la force longitudinale. Ils ont exprimé ces forces en deux termes : le premier c'est le terme lié à la contribution du mouvement irrotationnel et l'autre terme revient aux forces et aux mouvements tourbillonnaires dans le sillage. L'équation de Blasius est appliquée seulement dans

l'écoulement visqueux, mais peut être utilisée d'une manière approximative pour relier les forces produites avec les mouvements principaux du tracé tourbillonnaire (vortex shedding). Bearman et al [7] ont fait un essai pour paramétrer la force transversale au moyen d'un modèle générale mais celui-ci n'a pas eu un caractère universelle car sa validité est limitée sur certain nombre "KC".

Par la visualisation du champ d'écoulement d'un cylindre circulaire oscillant dans un réservoir d'eau, Tatsuno & Bearman [8] et Sarpkaya [9] (ci-après désigné sous le nom de **TB90**) ont montré l'existence potentielle de dix régimes d'écoulement (A\*, A, B, C, D, E, F, G, H et I). Ces différentes zones de A\*, A jusqu'à H sont étudiés dans la partie « pseudo-stationnaire » de l'écoulement, c'est-à-dire dans le cas ou le cylindre a déjà réalisé plusieurs cycle (à partir d'une vingtaine environ). La plupart d'entre eux ont une structure tridimensionnelle, et dépendent des deux paramètres  $KC$  et  $\beta$  (voir fig.1.1) ou, d'une manière équivalente, sur  $KC$  et  $Re$ .

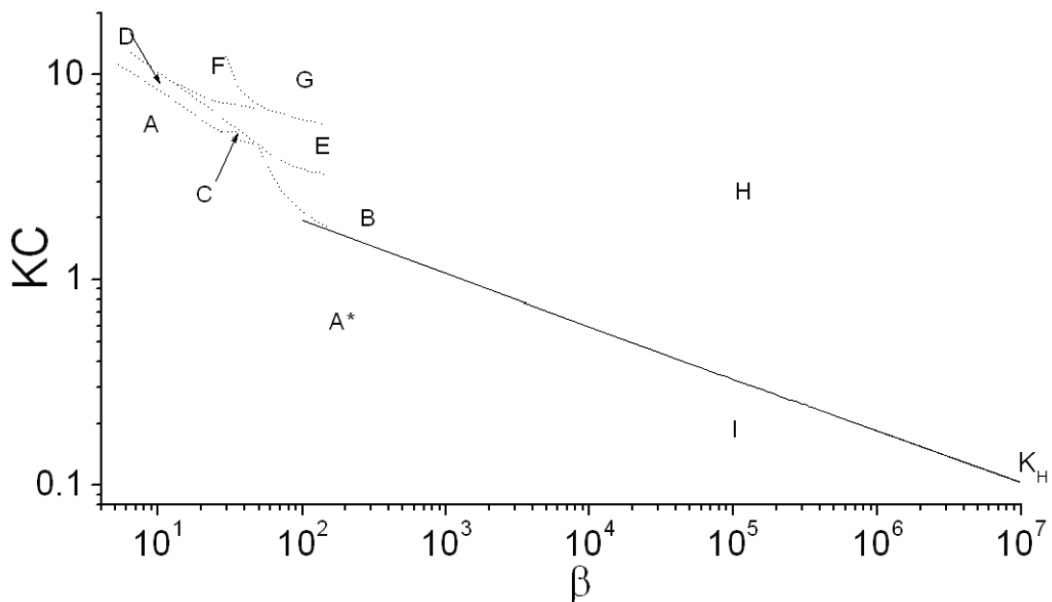


Fig.1.1 – cartographie identifiant différents régimes dans le plan  $KC - \beta$  [27]

Des régimes bidimensionnels et symétriques ont été identifiés à savoir A\* et A qui se trouvent respectivement dans la gamme du ( $KC$  très petit et du grand  $\beta$ ) et (grand  $KC$  et petit  $\beta$ ). Pour les valeurs intermédiaires du nombre de Stokes, une augmentation du nombre  $KC$  rend le vortex-shedding asymétrique et amplifie la force transversale (régimes B, C, D, E, F et G). Ces régimes sont également accompagnés par des effets tridimensionnels de l'écoulement du fluide, du fait qu'on observe des tourbillons de grandes structures se développer le long de la direction de l'axe du cylindre.

Il existe très peu d'études concernant la partie instationnaire. Badr et al. [10] ont étudié la phase du démarrage pour un cylindre entre le deuxième et troisième cycle et pour un nombre de  $\beta$  égal à 1000 et  $KC$  égal à 2 et à 4.

**Topologie de l'écoulement**

▪ **Régime A\*:**

L'écoulement est bidimensionnel (invariant suivant z) et symétrique par rapport aux axes longitudinaux (Ox) et transversaux (Oy).

▪ **Régime A:**

Des paires de tourbillons symétriques par rapport à l'axe longitudinal et de nature bidimensionnelle, se forment de part et d'autre du cylindre pendant chaque demi-cycle. Au demi-cycle suivant leur création, ces tourbillons se séparent et sont convectés vers l'autre côté du cylindre pendant que se créent de nouveaux tourbillons, comme le montre la fig.1.2. Les tourbillons séparés sont ensuite convectés loin du cylindre et disparaissent progressivement.

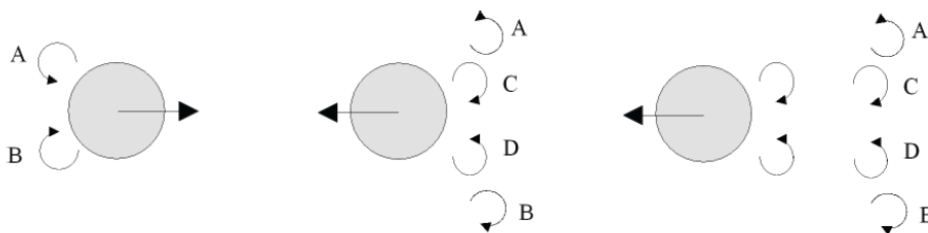


Fig.1.2 – Mécanisme de séparation du régime A d'après **Kuhtz** [11].

▪ **Régimes B,I,H:**

Aucun tourbillon ne se crée dans le plan 2D pour les régimes B et I, des structures 3D dues à l'instabilité de la couche limite apparaissent, l'écoulement proche de la paroi est cette fois-ci tridimensionnel. **Honji** [12] a détaillé expérimentalement cet écoulement (régime B) pour une gamme de  $\beta$  allant de 70 et 700 et des nombres de KC de 0 à 4. Ce dernier a visualisé la création alternative de paires de tourbillons contrarotatifs longitudinaux (Ox) (figure 1.3). Selon **Honji**, l'origine de ces tourbillons est due à une instabilité de type centrifuge. Ces observations ont été relevées par **Tatsuno & Bearman** [8] et confirmées théoriquement par **Hall** [12] à l'aide d'une étude de stabilité. Ce dernier définit ainsi une ligne délimitant une région stable d'une région instable dans le plan KC –  $\beta$  selon l'équation [13]:

$$K_H = 5.78 \beta^{-0.25} (1 + 0.21 \beta^{-0.25} + \dots) \quad (1.4)$$

Sur cette ligne, les instabilités de type centrifuge sont auto-entretenues d'une oscillation à une autre. En dessous de cette ligne (régime I), des instabilités appelés "quasi-cohérentes structures" par **Sarpkaya** [5][9] apparaissent. Ces dernières sont celles décrites sur la ligne de Hall mais apparaissent de manière intermittente et prennent des formes irrégulières. **Sarpkaya** décrit notamment les limites entre la région A\* et I. Au dessus de la ligne de Hall (régime H), l'écoulement est turbulent résultant d'interactions entre le mécanisme bidimensionnel de séparation et les instabilités tridimensionnelles.

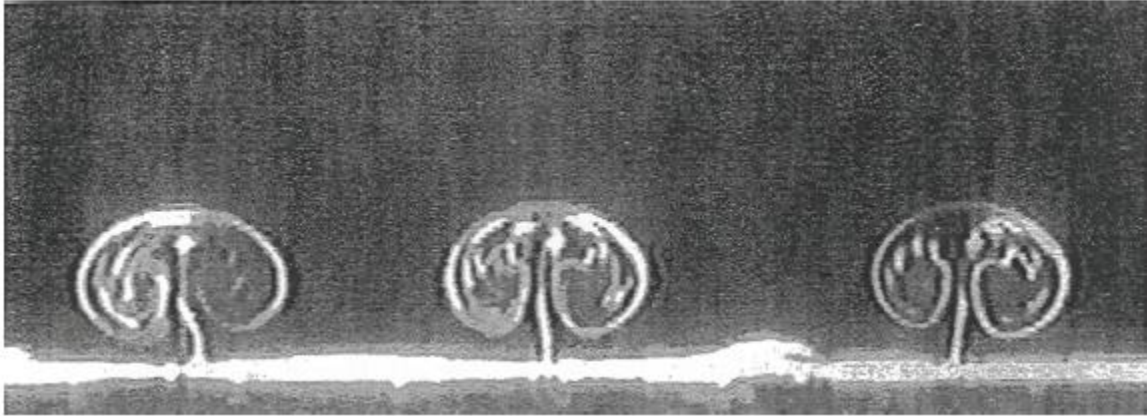


Fig. 1.3 – Instabilité de Honji à  $\beta = 9956$  pour  $Kc = 0.58$  -régime B. [9]

▪ **Régime C :**

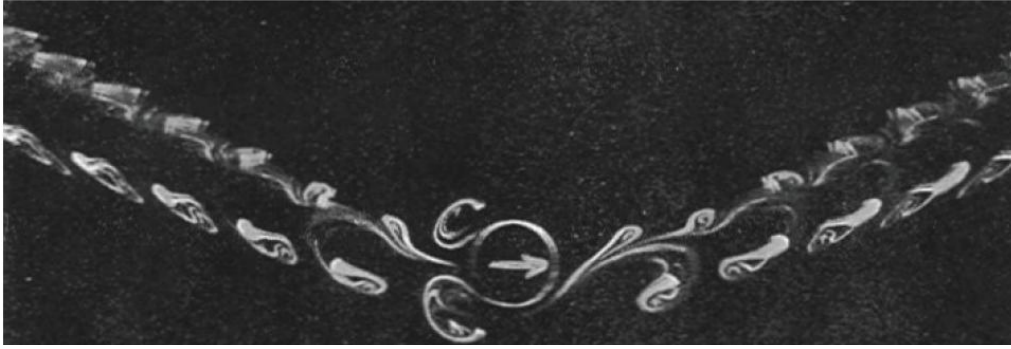
Ce régime est en sorte un mélange entre les zones A et B. En effet, le mécanisme de création de tourbillons est le même que dans le régime A. Les tourbillons créés sont cette fois-ci de plus grande taille et au demi-cycle suivant, ils se détachent de manière dissymétrique à la façon d'une allée de Benard-Von Karman dans un écoulement uniforme (figure 1.4). Cependant, les sens de rotations des tourbillons ont des signes opposés à ceux de l'allée [14]. D'autre part, il apparaît dans la direction de l'axe de révolution, des structures très perturbées à la manière du régime B.



Fig. 1.4 – Détachement tourbillonnaire à  $\beta = 42$  pour  $Kc = 4.4$  -régime C. [8]

▪ **Régimes D,E :**

La dynamique des phénomènes est identique à celle du régime précédent mais cette fois-ci, l'allée provoquée par les oscillations du cylindre est inclinée par rapport au mouvement (figure 1.5). Ces tourbillons créent des structures tridimensionnelles en forme de tubes déformés [15]. Le régime E est identique au régime D à ceci près que l'allée transverse est dans ce cas tantôt au dessus de l'axe longitudinal et tantôt en dessous.



**Fig. 1.5** – Détachement tourbillonnaire transverse à  $\beta = 22.1$  pour  $Kc = 6.28$  -régime D [8]

▪ **Régimes F,G :**

Les régimes F,G présentent des allées de plus en plus complexes munies de plusieurs tourbillons oscillant dans différentes directions ajoutés à des structures placées selon l'axe de révolution du cylindre [8].

Les structures bidimensionnelles ainsi que tridimensionnelles du vortex ont été clairement visualisées et identifiées dans **TB90**, bien que leur quantification a été faite par **Nehari et al** [15] pour deux régimes tridimensionnels à savoir D et F en utilisant un code basé sur la méthode des différences finies de second ordre de précision pour le temps et l'espace. Les résultats obtenus montrent que la modulation tridimensionnelle de l'écoulement n'est pas significative et qu'un code de calcul en 2D mode peut prédire assez correctement tels écoulements.

Effectuer une analyse d'un écoulement instationnaire autour d'un cylindre n'est expérimentalement pas facile, ceci est principalement dû au fait que la variation de l'écoulement est difficile à contrôler avec précision. En revanche, l'application des simulations numériques ne souffre pas de ces difficultés techniques. En conséquence, les analyses numériques sont réalisées pour étudier le problème d'écoulement.

Les investigations, basées sur la simulation numérique bidimensionnelle du champ d'écoulement, ont été récemment effectuées par **Justesen** [16] et par **Dutsch et al.** [17]. Ces travaux ont été basés sur la capture des caractéristiques principales du vortex-shedding qui se produit dans les régimes d'écoulement mentionnés ci-dessus et pour évaluer les forces agissant sur le cylindre dans le temps.

**Justesen** [16] a résolu numériquement la formulation de fonction de courant vorticité des équations bidimensionnelles de Navier-Stokes à faibles nombres de  $KC$  et à grandes valeurs de  $\beta$ . La plupart des régimes d'écoulement définis par **Williamson** [18] ont été reproduits par les simulations numériques. En général un bon accord entre les résultats numériques et les données expérimentales a été trouvé.

**Dutsch et al.** [17] ont résolu les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes et ont réalisé des expériences au laboratoire pour trois différents régimes d'écoulement de la carte de TB90. Spécifiquement, ils ont étudié les régimes A (symétrique), le régime F (diagonal, double pair vortex-shedding) et le régime E (allée transversale). Généralement un bon accord a été bien obtenu entre les prédictions numériques et les résultats expérimentaux correspondants pour le champ de vitesse et les coefficients des forces. D'autres calculs pour le nombre de Stokes  $\beta=35$  ont été effectués principalement pour comparer les coefficients de force aux résultats expérimentaux de **Kuhtz** [11]. Les coefficients obtenus des prévisions numériques se sont avérés en bon accord avec ceux des expériences bien que quelques petites différences, attribuées aux effets tridimensionnels, aient été trouvées.

Plusieurs études à savoir numériques et expérimentales ont été faites pour le cas d'écoulement oscillatoire autour d'obstacles à arêtes vifs. **Okajima et al.** [19] a mesuré les forces sur des cylindres circulaires et carrés à un angle de zéro attaque dans un réservoir d'eau du tube en U avec un large éventail de variation KC (1-90). **Zheng et Dalton** [20] ont adopté une méthode numérique pour simuler les écoulement oscillants autour d'un cylindre carré à des valeurs de KC faible (jusqu'à 5) à deux angles d'attaque (0 et 45 °) et ils ont comparé les prédictions numériques avec les résultats des mesures de **Bearman et al.** [7]. Il a été constaté que l'historique de la force longitudinale pourrait être expliqué par les équations de Morison. Cependant, puisque le champ d'écoulement instantané n'a pas été mesuré dans l'étude, son effet sur l'historique de la force longitudinale résultante n'a pas été examiné plus en détail.

**Sumner et al.** [21] ont étudié expérimentalement l'écoulement oscillant autour de cylindre à section circulaire, carrée, et diamant dans un fluide au repos en utilisant la vélocimétrie par images de particules (PIV). Les mesures du champ de vitesse ont été obtenus pour plusieurs phase de postions du cycle d'oscillation. Les expériences ont été réalisées de faible nombre Keulegan-Carpenter,  $KC = 1$  à 3,5, et pour des nombres de Stokes modérées,  $\beta=250$  à 376. Dans cette gamme de KC, l'écoulement reste symétrique autour des cylindres. Pour  $KC = 1$ , l'écoulement reste attaché à la surface des cylindres durant tout le cycle d'oscillation. Pour  $KC = 1,5$  à 3,5, une paire de vortex attachée se forme derrière les cylindres circulaires et carrés à la position maximum d'amplitude. D'autre part, le cylindre diamant a deux points de séparation fixe et a un tracé tourbillonnaire unique mais toujours symétrique.

**Bearman et al** [7] ont investigué expérimentalement l'écoulement oscillatoire autour des cylindres à section carrée et diamant pour une large gamme du nombre de  $K=1$  à 100 et des nombre de Reynolds  $Re=200$  à  $2 \times 10^4$ . Les mesures ont été faites pour étudier l'effet du rayon de courbure sur les forces hydrodynamiques agissant sur les cylindres. Le Coefficients de traînée pour l'écoulement oscillatoire paraît être plus sensible au rayon de courbure que dans cas d'écoulement stationnaire. À un nombre fixe de KC le coefficient de traînée de la section diamant décroît avec l'augmentation du rayon de courbure, cette réduction est plus significative au faible nombre KC. Le

Coefficients de trainé pour une section carrée ne suit pas une tendance consistante avec le rayon de courbure et les nombres de KC élevés. La section carrée arrondie avec un rayon de courbure égale à  $0.265D$  (où  $D$  est la largeur du modèle normal à la direction de l'écoulement) peut avoir un coefficient de traînée égale à la moitié de la valeur pour un cylindre circulaire.

L'écoulement autour des corps elliptiques dépend de KC, Re et du rapport elliptique  $\varepsilon=B/A$ , ou A et B sont respectivement les longueurs de l'ellipse suivant la direction longitudinale et transversale de l'écoulement.

L'écoulement à travers un cylindre elliptique partage de nombreuses caractéristiques communes avec l'écoulement à travers des corps profilés (tel que les hydrofoils et les airfoils) ainsi que les corps non-profilés (bluff bodies) tels que les cylindres circulaires. D'un point de vue mathématique, il représente une configuration plus générale d'un cylindre de section circulaire, car elle permet l'étude d'un large éventail de configurations allant d'un cylindre circulaire à une plaque plane en faisant varier le rapport des axes [22]. Cependant, malgré le grand nombre d'applications techniques qui comportent des écoulements à travers les corps profilés semblables aux cylindres elliptiques (par exemple, les ailes, sous-marins, etc) et les arguments mentionnés ci-dessus, il apparaît que la géométrie elliptique a attiré beaucoup moins d'attention que l'écoulement à travers des cylindres circulaires, qui reste encore la géométrie standard pour étudier caractéristiques du sillage ou le détachement tourbillonnaire (vortex shedding).

Au début, les recherches expérimentales se sont concentrées sur les caractéristiques aérodynamiques du sillage d'un cylindre elliptique à travers un écoulement uniforme. Le nombre de Strouhal et les caractéristiques du sillage de l'écoulement qui traverse des cylindres elliptiques ont été déterminées à partir des mesures du champ de pression fluctuante en fonction du rapport des axes, de l'angle d'attaque et le nombre de Reynolds [23].

Il y a beaucoup d'auteurs se sont intéressés à l'étude théorique et expérimentale de l'écoulement incompressible visqueux autour d'une ellipse. Plusieurs régimes d'écoulement selon l'allongement géométrique, le nombre de Reynolds et le type d'écoulement (stationnaire, instationnaire, périodique,...) ont été analysés.

Pour les écoulements générés par un cylindre elliptique en mouvement d'oscillation et translation, les références peuvent être faites que pour les travaux de **Davidson & Riley** [24], **Taneda** [25] et **Badr & Kocabiyik** [26]. Ces investigations concernent l'écoulement purement oscillatoire ou la direction d'oscillation coïncide soit avec le grand axe ou le petit axe de l'obstacle elliptique. Pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds convenablement définis, un tel écoulement induit un courant stationnaire dans le fluide et qui sera confiné à la région de la couche limite mince sur la surface du cylindre.

Une collision de ces couches limites en courant permanent a été pour la première fois prédite et visualisée par **Davidson & Riley** [24], résultant dans les jets du fluide d'éruption symétrique de la surface elliptique du cylindre long de l'axe de la vibration. La stabilité d'une classe d'écoulement que présente un courant stationnaire a été considérée par **Hall** [13]. En particulier, il a examiné en détail la stabilité de l'écoulement induit par les oscillations transversales d'un cylindre circulaire et d'un cylindre elliptique incliné dans un fluide visqueux au repos. Dans le cas des cylindres de section elliptique, Hall a constaté que, pour toute excentricité donnée, la configuration la plus instable est lorsque le cylindre oscille parallèlement à son petit axe.

**Badr & Kocabiyik** [26] ont effectué une étude numérique pour calculer les propriétés d'écoulement symétrique pour un rapport des axes du cylindre 0,6 lorsque le nombre de Reynolds est compris entre 500 et  $10^3$ . Leurs calculs ont été effectués dans la gamme des amplitudes d'oscillation suffisamment grande pour induire la séparation. Il est à noter que les écoulements générés par les oscillations des cylindres elliptiques partagent certaines caractéristiques communes avec ceux des corps non-profilés tels que les cylindres circulaires.

**Gus'luwa et al.** [27] ont étudié expérimentalement les forces hydrodynamiques agissant sur des cylindres elliptiques oscillant dans l'eau au repos pour le nombre de Reynolds se situant dans la gamme  $0.3$  à  $9.5 \cdot 10^4$  et pour  $KC$  entre  $0.6$  et  $12$ . Les expériences réalisées sur des cylindres elliptiques ont permis de montrer que le paramètre de contrôle pour les forces hydrodynamiques est le nombre  $KC$ . Les coefficients des forces hydrodynamiques, à savoir, la force d'inertie et la force de traînée, dépendent fortement de l'épaisseur du cylindre et le rapport des axes du cylindre (longitudinale et en transversale). À de faibles valeurs du  $KC$ , le coefficient d'inertie est le même pour tous les cylindres et égale à celui d'une plaque de même rapport d'aspect dans un fluide parfait, cette valeur est conservée sur une certaine gamme de  $KC$ . Pour toutes les  $KC$ , le plus mince cylindre a le plus grand coefficient de traînée.

**Chapitre -II-  
Modélisation du problème**

---

### II.1- Présentation du problème à résoudre

L'étude consiste à résoudre numériquement par la méthode des différences finis les équations de Navier Stokes pour un écoulement externe ayant une fréquence harmonique  $\omega=2\pi/T$  autour d'une forme cylindrique de différent rapport de diamètre.

$$\text{La vitesse est : } U(t) = U_{max} \times \sin \omega t \quad (2.1)$$

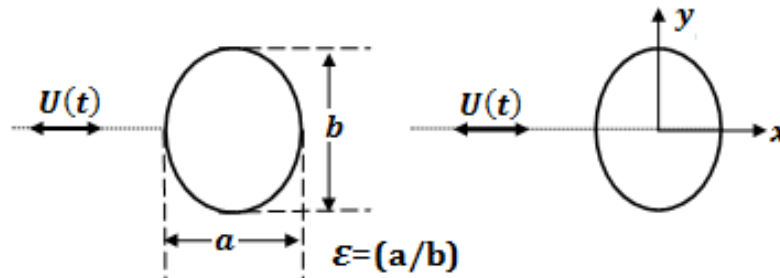


Fig.2.1-Schéma de la position du problème.

Les efforts induits par un écoulement oscillatoire sur un cylindre horizontal vont être influencés par le nombre de Keulegan-Carpenter  $Kc$ , le nombre de Reynolds  $Re$ , et les différents rapports des axes  $\epsilon=(a/b)$  qui définit la forme du cylindre. Les calculs se feront dans les conditions d'un régime (A) (à savoir pour  $Re = 100$  et  $Kc = 5$ ).

$$\text{Rappelons que : } \begin{cases} Kc = \frac{U_{max} \times T}{D} \\ Re = \frac{U_{max} \times D}{\nu} \end{cases} \quad (2.2)$$

Le régime A dans le cas d'un cylindre circulaire est exceptionnelle un régime symétrique et bidimensionnel.

### II.2- les équations du mouvement

Dans le présent travail, l'écoulement considéré est bidimensionnel, instationnaire et celui d'un fluide incompressible. Dans ce qui suit, seront décrites les équations traduisant le transport de masse et de quantité de mouvement régissant un tel écoulement avec les simplifications nécessaires.

Dans le cas d'un fluide visqueux, incompressible, le fluide est modélisable par les équations de Navier-Stokes. Ces équations dans le cas 3D et instationnaire sont écrites dans un système de coordonnées cartésiennes lié au cylindre pour formuler les variables primitives et analyser les paramètres hydrodynamiques qui agissent sur le cylindre au cours du temps et dans l'espace.

Les équations s'écrivent alors sous cette forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \vartheta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - B_x \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(wv)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \vartheta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - B_y \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \vartheta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - B_z \quad (2.6)$$

- $u, v$  et  $w$  les composantes de la vitesse suivant les directions  $x, y, z$  ;
- $\rho$  et  $\vartheta$  sont respectivement la masse volumique du fluide et la viscosité cinématique ;
- $B_x, B_y, B_z$  sont respectivement les composantes du gradient de pression (force de masse) qui génère l'écoulement oscillatoire suivant les directions  $x, y, z$ .

L'écoulement est harmonique et est dirigé suivant la direction longitudinale ( $x$ ), par suite :

$$B_x = -B_0 \cos(2. \pi. t/T) \quad (2.7)$$

Ce terme représente la force de volume qui doit être ajoutée en étudiant le mouvement oscillant autour d'une forme géométriquement cylindrique.

**Remarque :**

- Pour un fluide au repos, nous pouvons utiliser un repère de référence fixe au cylindre, qui correspond au terme de forcing de l'équation (2.6) de DDBL98 [17].

- le gradient imposé de  $B_x = -B_0 \cos(2. \pi. t/T)$  de pression donne un fluide qui oscille avec une vitesse externe  $U(t) = U_{max} \times \sin \omega t$

$$\text{Avec : } \begin{cases} B_y = B_z = 0 \\ B_0 = \omega U_{max} \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous pouvons écrire les équations précédentes sous la forme indicielle suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \vartheta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - B_i \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Ecrit dans ce formalisme, ce système est difficilement interprétable. Il est préférable d'utiliser l'analyse dimensionnelle permettant d'estimer l'influence de chaque terme et de dégager alors les termes dominants.

### **II.3-La phase d'adimensionnalisation**

L'expression mathématique d'une loi physique doit être indépendante du système cohérent d'unités choisi pour l'écrire. Tous les termes qui figurent doivent être dimensionnellement homogènes c'est-à-dire qu'ils doivent tous posséder la même dimension. Nous adimensionnerons donc notre système afin d'assurer la globalité des résultats et assortir les nombres qui guident l'écoulement.

En considérant un cylindre de diamètre caractéristique  $D$  évoluant selon un mouvement contrôlé par la vitesse  $V^*$  et le temps  $t^*$ , il est alors possible d'adimensionner les variables principales du système NS, soit :

$$\begin{cases} u = U_{max} \cdot u^* \\ v = U_{max} \cdot v^* \\ w = U_{max} \cdot w^* \end{cases} \quad \begin{cases} x = D \cdot x^* \\ y = D \cdot y^* \\ z = D \cdot z^* \end{cases} \quad \begin{cases} P = \rho \cdot P^* \cdot U_{max}^2 \\ t = t^* \cdot T \end{cases} \quad (2.11)$$

En remplaçant les variables réduites dans les équations de conservation de quantité de mouvement de Navier stokes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial U_{max} u^*}{\partial T t^*} + U_{max} u^* \frac{\partial U_{max} u^*}{\partial D x^*} + U_{max} v^* \frac{\partial U_{max} u^*}{\partial D y^*} + U_{max} w^* \frac{\partial U_{max} u^*}{\partial D z^*} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^* U_{max}^2}{\partial D x^*} + \vartheta \left( \frac{\partial^2 U_{max} u^*}{\partial (D x^*)^2} + \frac{\partial^2 U_{max} u^*}{\partial (D y^*)^2} + \frac{\partial^2 U_{max} u^*}{\partial (D z^*)^2} \right) - B_x \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial U_{max} v^*}{\partial T t^*} + U_{max} u^* \frac{\partial U_{max} v^*}{\partial D x^*} + U_{max} v^* \frac{\partial U_{max} v^*}{\partial D y^*} + U_{max} w^* \frac{\partial U_{max} v^*}{\partial D z^*} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^* U_{max}^2}{\partial D y^*} + \vartheta \left( \frac{\partial^2 U_{max} v^*}{\partial (D x^*)^2} + \frac{\partial^2 U_{max} v^*}{\partial (D y^*)^2} + \frac{\partial^2 U_{max} v^*}{\partial (D z^*)^2} \right) - B_y \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial U_{max} w^*}{\partial T t^*} + U_{max} u^* \frac{\partial U_{max} w^*}{\partial D x^*} + U_{max} v^* \frac{\partial U_{max} w^*}{\partial D y^*} + U_{max} w^* \frac{\partial U_{max} w^*}{\partial D z^*} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^* U_{max}^2}{\partial D z^*} + \vartheta \left( \frac{\partial^2 U_{max} w^*}{\partial (D x^*)^2} + \frac{\partial^2 U_{max} w^*}{\partial (D y^*)^2} + \frac{\partial^2 U_{max} w^*}{\partial (D z^*)^2} \right) - B_z \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{U_{max} \partial u^*}{T \partial t^*} + \frac{U_{max} U_{max}}{D} \frac{\partial u^* u^*}{\partial D x^*} + \frac{U_{max} U_{max}}{D} \frac{\partial v^* u^*}{\partial D y^*} + \frac{U_{max} U_{max}}{D} \frac{\partial w^* u^*}{\partial D z^*} \\ &= -\frac{\rho U_{max}^2 \partial P^*}{D \rho \partial x^*} + \frac{\vartheta U_{max}}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - B_x \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} &= \frac{U_{max} \partial v^*}{T \partial t^*} + \frac{U_{max} U_{max}}{D} \frac{\partial u^* v^*}{\partial x^*} + \frac{U_{max} U_{max}}{D} \frac{\partial v^* v^*}{\partial y^*} + \frac{U_{max} U_{max}}{D} \frac{\partial w^* v^*}{\partial z^*} \\ &= -\frac{\rho U_{max}^2}{D \rho} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{\vartheta U_{max}}{D^2} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) - B_y \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{Dt} &= \frac{U_{max} \partial w^*}{T \partial t^*} + \frac{U_{max} U_{max}}{D} \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{U_{max} U_{max}}{D} \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{U_{max} U_{max}}{D} \frac{\partial w^* w^*}{\partial z^*} \\ &= -\frac{\rho U_{max}^2}{D \rho} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{\vartheta U_{max}}{D^2} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - B_z \end{aligned} \quad (2.17)$$

En multipliant les équations (2.15), (2.16), (2.17) par  $\left( \frac{D}{U_{max}^2} \right)$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{D \partial u^*}{T U_{max} \partial t^*} + \frac{\partial u^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^* u^*}{\partial z^*} \\ &= -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\vartheta}{D U_{max}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - B_x^* \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} &= \frac{D \partial v^*}{T U_{max} \partial t^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^* v^*}{\partial z^*} \\ &= -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{\vartheta}{D U_{max}} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) - B_y^* \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{Dt} &= \frac{D \partial w^*}{T U_{max} \partial t^*} + \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^* w^*}{\partial z^*} \\ &= -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{\vartheta}{D U_{max}} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - B_z^* \end{aligned} \quad (2.20)$$

Où apparaissent dans ces équations, deux nombres adimensionnels :

- le nombre de Reynolds  $Re$  qui représente physiquement le rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses.
- le nombre de Keulegan & Carpenter  $KC$  décrivant l'importance relative des forces de traînée sur l'inertie des forces exercées sur le cylindre.

Nous obtenons finalement d'une forme générale :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = 0 \end{array} \right| \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{Kc} \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (u_j^* u_i^*) = \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - B_i^* \end{array} \right| \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Où } B_i^* = -\frac{2\pi}{Kc} \delta_{i,j} \cos(2\pi t^*) \end{array} \right| \quad (2.23)$$

Avec  $\delta_{i,j}$  le symbole de Kronecker, tandis que la vitesse externe adimensionnelle sera par suite :

$$U^*(t) = \sin 2\pi t^* \quad (2.24)$$

#### **II.4- Les conditions aux limites**

Les équations de Navier Stokes suffisent en principe à déterminer le champ de vitesse et le champ de pression. Encore faut-il préciser les conditions aux limites auxquelles obéisse la vitesse ou les contraintes.

Toutes les observations expérimentales et les simulations numériques s'accordent pour affirmer que la vitesse d'un fluide s'annule au voisinage immédiat d'une paroi solide. Le fait que la composante de la vitesse normale à la paroi soit nulle est simplement lié au fait que le fluide ne pénètre pas dans le solide. En revanche, la nullité de la composante de vitesse tangente à la paroi est liée à l'existence de la viscosité.

Dans ce présent travail, l'étude numérique d'écoulement autour d'un cylindre s'effectue dans un domaine numérique fini en utilisant des conditions périodiques dans la direction d'écoulement.

Les différentes formes géométriques de l'obstacle étudié exigent une simple modification du domaine physique.

Les expériences TB90 [8] pour un cylindre en mouvement oscillatoire ont montré que tous les régimes observés ont un vortex qui se répète périodiquement le long de la direction axiale.

Donc nous pouvons poser pour :

- Les conditions de frontière : la périodicité dans la direction d'écoulement.
- Les conditions d'adhérence sur la paroi de l'obstacle.
- Les conditions initiales : dans chaque cas étudié, le fluide commence à partir du repos et est conduit par le gradient imposé de pression de l'équation (2.7)

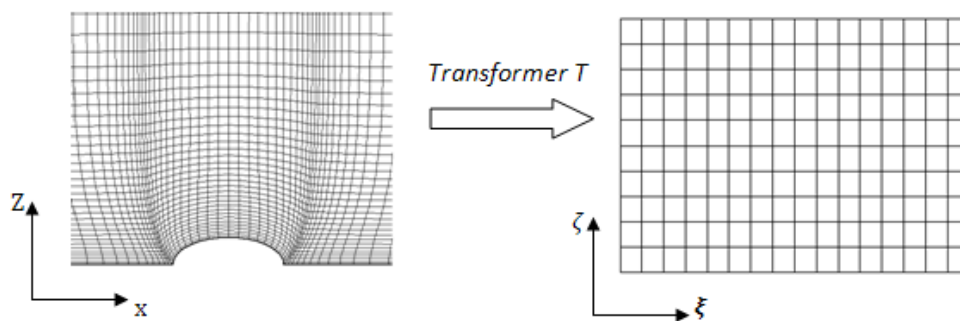
### II.5- Paramétrisation

La simulation par différences finies sur des maillages cartésiens ne permet pas aisément d'étudier des objets de géométries quelconques. En effet le traitement d'une frontière non confondue avec une ligne de maillage, bien que possible, est peu pratique et souvent peu précis. Le recours à l'utilisation de techniques d'extrapolation peut engendrer des instabilités difficiles à contrôler, et rendre problématique l'établissement d'une condition de paroi robuste.

L'utilisation de coordonnées curvilignes permet d'éviter ce problème. Un maillage structuré de forme curviligne, épousant la géométrie de la forme à simuler, est d'abord construit. Une transformation mathématique est ensuite utilisée pour passer du domaine curviligne (le domaine physique) à un domaine cartésien parfaitement régulier dans lequel se fait la résolution des équations. La paroi de l'objet est ainsi représentée par une ligne de maillage dont une des coordonnées transformées.

Il s'agit donc d'effectuer un changement de variables sur les équations que l'on cherche à résoudre. Cette approche permet de bénéficier à la fois des avantages d'un maillage parallèle à la paroi, et de ceux de la résolution sur un maillage cartésien.

On appelle paramétrisation l'ensemble des variables indépendantes d'un problème. En général la paramétrisation d'un problème n'est pas unique : penser aux différentes façons de décrire un cercle en polaire, en cartésiennes, mais aussi en donnant une spline, deux splines, etc. ou plutôt un ensemble de points reliés entre eux (formant des segments). Aussi dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle de géométrie curviligne, il est nécessaire de faire un changement de coordonnées appropriées, qui sert un passage ou bien une transformation(T) qui lie le domaine physique au domaine numérique.



**Fig.2.2-**Transformation du domaine physique au domaine numérique.

Nous définissons les nouvelles coordonnées curvilignes :  $\xi_i$  (avec  $i = 1, 2, 3$ )

$(\xi, \eta, \zeta)$  Sont en fonction des coordonnées cartésiennes :  $\xi_i = \xi_i(x_i)$

Et inversement :  $x_i = x_i(\xi_i)$

Donc les dérivées premières par rapport à  $x_i$  s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (2.25)$$

Les termes  $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}$  sont données par la transformation établie entre la carte numérique et la carte physique de sorte :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J^{-1}} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{J^{-1}} \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{J^{-1}} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \end{array} \right. \quad (2.26a) \quad (2.26b) \quad (2.26c)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{J^{-1}} \left( \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J^{-1}} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{J^{-1}} \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) \end{array} \right. \quad (2.27a) \quad (2.27b) \quad (2.27c)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{J^{-1}} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{J^{-1}} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{J^{-1}} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{array} \right. \quad (2.28a) \quad (2.28b) \quad (2.28c)$$

Avec  $J^{-1}$  Jacobien de la transformation et qui est égal au volume de la cellule

Les termes de la matrice jacobienne traduisent les variations des coordonnées transformées en fonction de celles des coordonnées physiques. Or, par construction, on ne peut calculer directement que l'inverse, c'est-à-dire les termes de la matrice inverse donnant la variation des coordonnées physiques par rapport aux coordonnées transformées. Il faut donc reconstituer la matrice jacobienne à partir des termes de la matrice inverse.

$$J^{-1} = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

$$J^{-1} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.30)$$

Concernant les dérivées du second ordre et plus précisément le Laplacien d'une quantité  $q$  est en coordonnées généralisées de la forme :

$$\Delta q = g^{mn} \frac{\partial^2 q}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \quad (2.31)$$

$$\text{avec } g^{mn} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \quad (\text{appelé Tenseur métrique contravariant}) \quad (2.32)$$

Zang et al.[28] ont utilisé les composantes de flux de volume :

$$U_m = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad (2.33)$$

Dans le même sens les auteurs on définit le tenseur d'inclinaison de maille :

$$G^{mn} = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \quad (2.34)$$

Par suite on obtient un système différentiel des équations de Navier-Stokes sous forme conservatives :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \end{array} \right. \quad (2.35)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial (J^{-1} u_i)}{\partial t} + \frac{\partial F_{im}}{\partial \xi_m} = 0 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

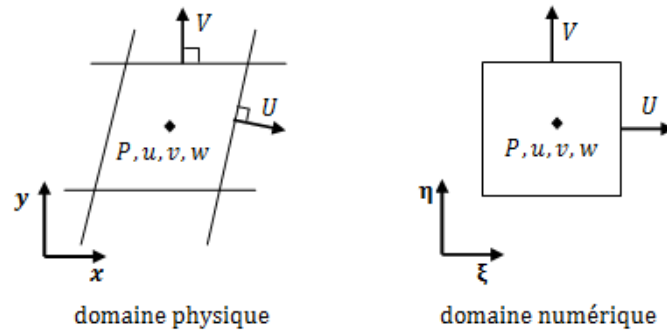
$$\left| \begin{array}{l} \text{avec } F_{im} = U_m u_i + J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} P + J^{-1} B_i - \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \end{array} \right. \quad (2.37)$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{et } \begin{cases} B_\xi = B_x \\ B_\eta = B_\zeta = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Formellement ces équations ont la même structure que celle des équations de Navier-Stocks d'origine, et peuvent donc être résolues par les mêmes techniques numériques que celles développées pour un maillage cartésien.

### **II.6- Algorithme de résolution**

D'après Zang et al.[29] toutes les vitesses cartésiennes sont posées et définies au centre du volume de contrôle, tandis que le flux de volume sont stockés au centre des facettes du volume de contrôle, cette technique est le principe du maillage non-entrelacé utilisé pour la présent méthode.



**Fig-2.3.** Principe du maillage non entrelacé.

Les termes de convection, de diffusion et le gradient de pression tous se trouve dans l'équation (2.37). Donc on peut écrire le système d'équations (2.35) et (2.36) sous la forme :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \\ J^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial t} = C_i + D_I(u_i) + D_E(u_i) + R_i(P) \end{array} \right. \quad (2.39)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \\ J^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial t} = C_i + D_I(u_i) + D_E(u_i) + R_i(P) \end{array} \right. \quad (2.40)$$

$$avec \quad \left\{ \begin{array}{l} C_i = -\frac{\partial(U_m u_i)}{\partial \xi_m} \\ D_I = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad \text{Avec } m = n \\ D_E = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad \text{Avec } m \neq n \\ R_i(P) = -\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} P + J^{-1} B_i \right) \end{array} \right. \quad (2.41a)$$

$$D_I = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad \text{Avec } m = n \quad (2.41b)$$

$$D_E = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad \text{Avec } m \neq n \quad (2.41c)$$

$$R_i(P) = -\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} P + J^{-1} B_i \right) \quad (2.41d)$$

En utilisant le schéma classique d'Adams-Bashforth/Crank-Nicolson [35] du second ordre ou :

- La méthode d'Adams-Bashforth est utilisée pour les termes explicites. [30]
- le schéma de Crank-Nicolson est employé pour les termes implicites. [31]

Ce raisonnement de Kim et Moin [32] donne :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \\ J^{-1} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} (C_i^n + D_E(u_i^n)) - \frac{1}{2} (C_i^{n-1} + D_E(u_i^{n-1})) + R_i(P^{n+1}) + \frac{1}{2} D_i(u_i^{n+1} + u_i^n) \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \\ J^{-1} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} (C_i^n + D_E(u_i^n)) - \frac{1}{2} (C_i^{n-1} + D_E(u_i^{n-1})) + R_i(P^{n+1}) + \frac{1}{2} D_i(u_i^{n+1} + u_i^n) \end{array} \right. \quad (2.43)$$

ou  $n$  représente le temps  $t \quad n = n \cdot \Delta t$

Cette technique est employée pour :

- temps d'avancement des termes convectifs ;
- temps d'avancement des termes diffusifs non-diagonales qui apparaissent dans les mailles non-orthogonales ( $G^{mn} \neq 0$  pour  $m \neq n$ ).

### **II.6.1- Utilisation de la méthode à pas fractionnel**

L'équation (2.43) est décomposée et gouvernée par deux critères de calcul prédiction et correction :

#### **a-prédiction :**

Kim et moin [32] ont proposé le calcul des vitesses intermédiaire  $u_i^*$  à partir des termes de convection et diffusion, et appliquée par Zang et al [28] ainsi que par Zang et Streets [33].

$$\left( 1 - \frac{\Delta t}{2J^{-1}} D_I \right) (u_i^* - u_i^n) = \frac{\Delta t}{J^{-1}} \left[ \frac{3}{2} (C_i^n + D_E(u_i^n)) - \frac{1}{2} (C_i^{n-1} + D_E(u_i^{n-1})) + D_i(u_i^n) \right] \quad (2.44)$$

**b-correction :**

Le champ de vitesse est corrigé par la contribution du champ de pression :

$$(u_i^{n+1} - u_i^*) = \frac{\Delta t}{J-1} R_i(\phi^{n+1}) \quad (2.45)$$

$$R_i(P) = \left(1 - \frac{\Delta t}{2J-1} D_I\right) R_i(\phi) \quad (2.46)$$

Remarque : L'équation (2.46) relie la variable  $\phi$  et pression P.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\Delta t}{2J-1} (D_1 + D_2 + D_3)\right) (u_i^* - u_i^n) \\ &= \frac{\Delta t}{J-1} \left[ \frac{3}{2} (C_i^n + D_E(u_i^n)) - \frac{1}{2} (C_i^{n-1} + D_E(u_i^{n-1})) + D_i(u_i^n) \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial \xi_k} (v G^{kk} \frac{\partial U_i}{\partial \xi_k}) \quad (2.48)$$

Avec k=1, 2, 3, donc le côté gauche de l'équation (2.47) peut être approché en utilisant la technique de factorisation qui donne :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\Delta t}{2J-1} D_1\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2J-1} D_2\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2J-1} D_3\right) (u_i^* - u_i^n) \\ &= \frac{\Delta t}{J-1} \left[ \frac{3}{2} (C_i^n + D_E(u_i^n)) - \frac{1}{2} (C_i^{n-1} + D_E(u_i^{n-1})) + D_i(u_i^n) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

L'erreur de la ci - dessus factorisation est de l'ordre  $O(\Delta t^3)$ .

La résolution de l'équation (2.49) nécessite la résolution de trois matrices tri-diagonales. Concernant la condition de frontière pour la vitesse intermédiaire on utilise l'approche de Kim et Moin [32].

$$u_i^* = u_i^n \frac{\Delta t}{J-1} R_i(\phi^n) + o(\Delta t^2) \quad (2.50)$$

**II.6.2- L'équation de poisson pour la pression**

La pression  $\phi$  est obtenue en résolvant l'équation de pression de type poisson qui est obtenue en suivant la procédure ci-dessous :

En premier, le champ des vitesses cartésiennes de l'étape de prédiction est corrigé à l'aide de l'équation (2.45) aux faces du volume de contrôle, nous aurons donc :

$$(u_i^{n+1})_{face} = (u_i^*)_{face} - \Delta t \left( \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \xi_m} \right)_{face} \quad (2.51)$$

En combinant l'équation (2.51) avec l'équation (2.33) nous obtenons ainsi :

$$U_m^{n+1} = U_m^* - \Delta t \left( G^{mn} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \xi_m} \right) \quad (2.52)$$

avec  $U_m^* = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} U_j^*$  ; appelée vitesse contravariante intermédiaire

En substituant l'équation (2.52) dans l'équation de continuité (2.42) nous obtenons l'équation de pression de poisson :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{m n} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \xi_m} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial U_m^*}{\partial x_m} \quad (2.53)$$

Cette équation est résolue par la technique de multigrid, cette technique a une procédure de résolution itérative efficace pour les équations elliptiques [35].

### **II.6.3- Tactique de résolution**

Ainsi les équations qui permettent la résolution du problème en question sont :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Delta t}{2J^{-1}} D_1\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2J^{-1}} D_2\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2J^{-1}} D_3\right) (u_i^* - u_i^n) \\ = \frac{\Delta t}{J^{-1}} \left[ \frac{3}{2} (C_i^n + D_E(u_i^n)) - \frac{1}{2} (C_i^{n-1} + D_E(u_i^{n-1})) + D_I(u_i^n) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{m n} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \xi_m} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial U_m^*}{\partial x_m} \quad (2.55)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^* + \frac{\Delta t}{J^{-1}} R_i(\phi^{n+1}) \quad (2.56)$$

$$U_m^{n+1} = U_m^* - \Delta t \left( G^{m n} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \xi_m} \right) \quad (2.57)$$

#### **1<sup>ère</sup> étape :**

Détermination de la vitesse cartésienne intermédiaire  $u_i^*$  au centre du volume de contrôle en utilisant l'équation (2.54).

#### **2<sup>ème</sup> étape :**

Interpolation de  $u_i^*$  aux facettes du volume de contrôle et calcul du côté droit de l'équation (2.55).

#### **3<sup>ème</sup> étape :**

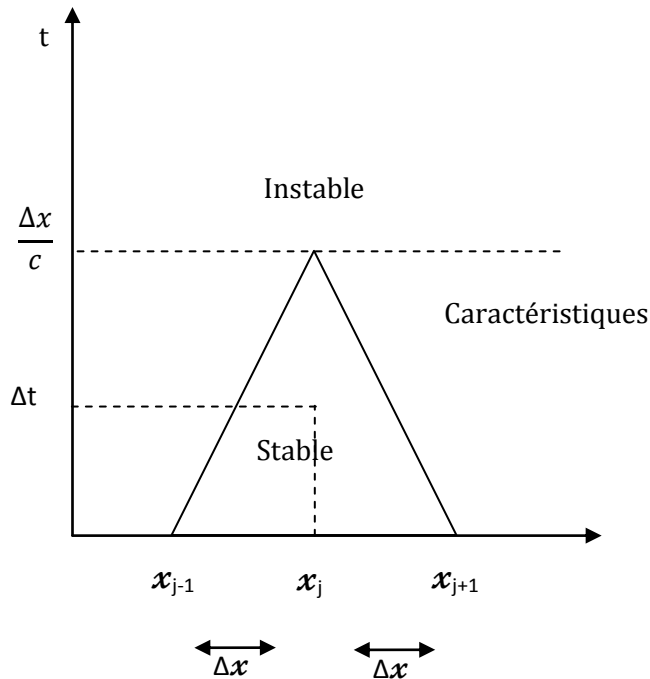
Résolvant l'équation (2.55) par une technique de multigrid pour l'obtention de  $\phi^{(n+1)}$

#### **4<sup>ème</sup> étape :**

obtenir  $\begin{cases} u_i^{n+1} \text{ à partir de l'équation (2.56)} \\ U_m^{n+1} \text{ à partir de l'équation (2.57)} \end{cases}$

**II.7- Condition de stabilité**

La condition de courant-Friedrich-Lewy souvent mentionnée exprime la compatibilité nécessaire entre domaine de dépendance théorique et domaine de dépendance numérique.



**Fig.2.4-** Domaine de dépendance et condition de stabilité CFL.

Le pas de temps  $\Delta t$  doit rester inférieur à la valeur limite au-delà de laquelle des parties du domaine de dépendance théorique ne seraient pas prises en compte dans le schéma numérique. Autrement dit le domaine de dépendance numérique issue du point  $(x_j, t_{n+1})$ , le triangle  $\{(x_{j-1}, t_n), (x_{j+1}, t_n), (x_j, t_{n+1})\}$  doit inclure le domaine de dépendance théorique correspondant.

La présente méthode est régie par la condition de CFL.

$$CFL = \left( \frac{|u|}{\Delta x} \frac{|v|}{\Delta y} \frac{|w|}{\Delta z} \right) \Delta t \tag{2.58. a}$$

$$CFL = (|U||V||W|) \frac{\Delta t}{J^{-1}} \tag{2.58. b}$$

La condition de stabilité pour la présente méthode numérique nécessite que :

$$\text{Max \{CFL\} < C \approx 1 \tag{2.59}}$$

Ou C est le nombre de courant.

L'organigramme schématisé dans la figure (2.5) résume l'algorithme utilisé.

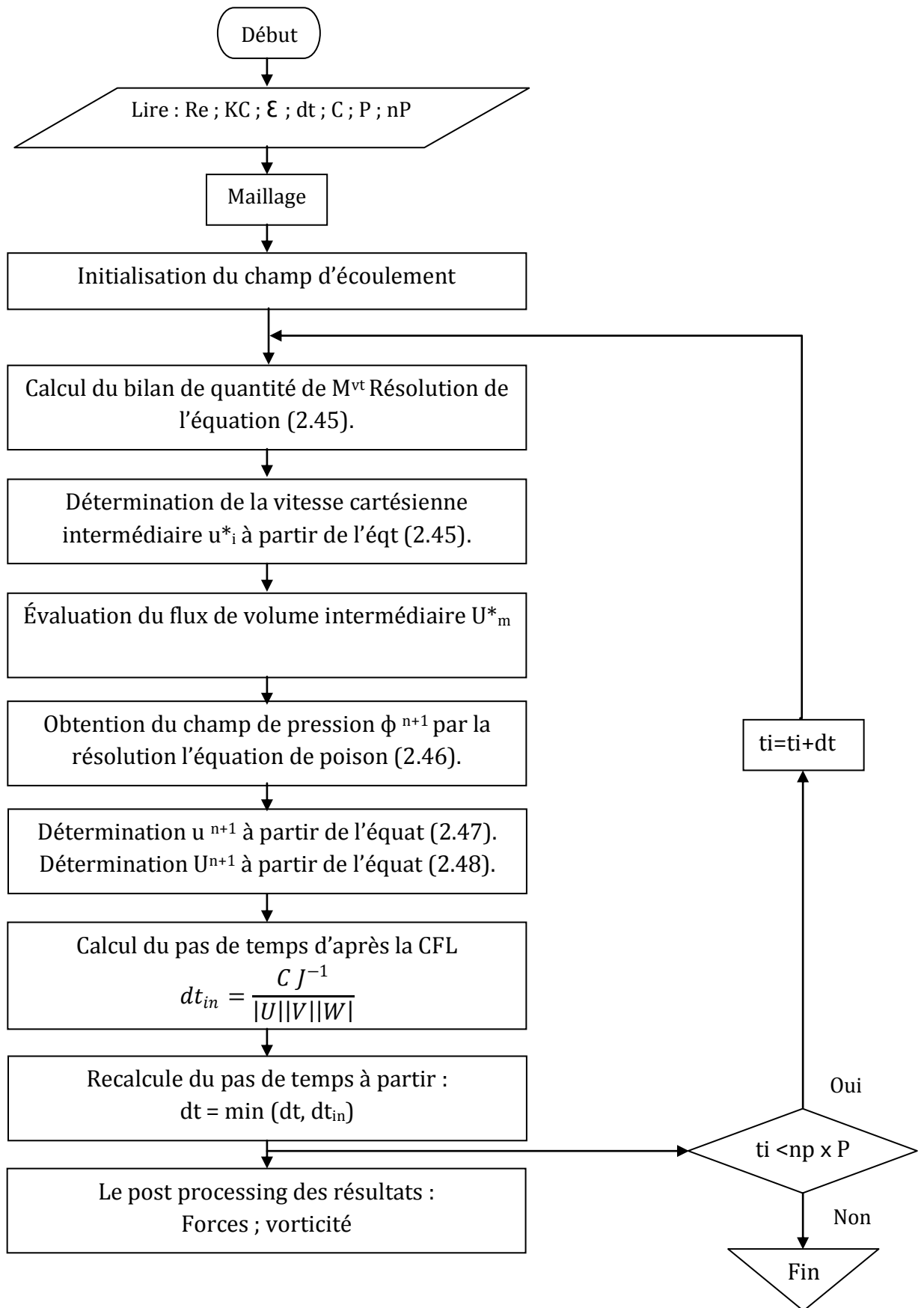


Fig.2.5- Organigramme de l'algorithme utilisé.

## **II.8- Évaluation du champ de vorticité et des forces dépendantes du temps**

Toutes les investigations expérimentales montrent que la plus part des régimes des écoulements sont tridimensionnelles. L'analyse du champ instantané de vorticité est utile pour identifier les structures à grande échelle qui évoluent dans le domaine d'écoulement. Les forces qui agissent sur l'obstacle sont strictement liées au champ de vorticité évoluant dans le domaine environnant l'écoulement.

### **II.8.1- Le champ de vorticité**

Dans certaines circonstances, il est utile de décrire le champ de vitesse par l'intermédiaire de la vorticité  $\omega = \nabla \wedge u$ . Le champ est exprimé par des composantes cartésiennes :

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (2.60)$$

Les dérivées des équations (2.60) sont évaluées au centre des cellules du maillage en utilisant :

- un schéma aux différences centrées de second ordre ;
- des transformations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées généralisées.

Pour décrire le tracé tourbillonnaire nous utiliserons la vorticité circonférentielle suivantes :

$$\omega_\theta = \omega_z \cos \theta - \omega_x \sin \theta \quad (2.61)$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} & (2.62. a) \\ \cos \theta = \frac{x}{a} & (2.62. b) \\ \sin \theta = \frac{y}{b} & (2.62. c) \\ R = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} & (2.62. d) \end{cases}$$

Les composantes non-dimensionnels du champ de vorticité seront présentées dans des figures et discutées ou :

$$\omega_i = \frac{\omega_{d,i} D}{U_{max}} \quad (2.63)$$

L'indice 'd' : indique que la grandeur est dimensionnelle.

**II.8.2- Les forces**

La force totale sont décomposé par des composantes longitudinale  $F_{(A/B),X}$  (suivant l'axe x) ; et des composantes transversale  $F_{(A/B),Y}$  (suivant l'axe des y) ; quant à la force de long du l'obstacle  $F_{(A/B),Z}$ , cette dernière n'est pas utile est négligeable.

Ces forces résultent respectivement de la contribution des tensions de pression et de cisaillements le long des axes x et y, ainsi nous évaluerons séparément les quatre contributions comme suite :

$$F_{(d), x, p} = - \int_{Sc} P_{(d)} n \cdot i \, ds \quad (2.64a)$$

$$F_{(d), x, s} = - \int_{Sc} \rho \vartheta \frac{\partial U_{\tau}}{\partial n} S \cdot i \, ds \quad (2.64b)$$

$$F_{(d), y, p} = - \int_{Sc} P_{(d)} n \cdot j \, ds \quad (2.64c)$$

$$F_{(d), y, s} = - \int_{Sc} \rho \vartheta \frac{\partial U_{\tau}}{\partial n} S \cdot j \, ds \quad (2.64d)$$

Ou :

- i et j : sont respectivement des vecteurs d'unité suivant l'axe x et y ;
- n et s : vecteurs d'unité suivant la direction normale et tangentielle de la surface d'obstacle ;
- ds : est la surface élémentaire ;
- Sc : la surface d'obstacle (cylindrique) ;
- $(\partial U_{\tau} / \partial n)$  : la contrainte de cisaillement sur la surface cylindrique.
- $P_{(d)}$  : pression dimensionnelle ;
- $\vartheta$  : viscosité cinématique du fluide.

Remarque : nous évaluerons à chaque instant les composantes des forces pendant le temps de calcul.

Ci après les composantes des forces seront rendues sans dimensions avec :  $\rho U^2 \max D L_z$ .

Les forces surfaciques à savoir longitudinales  $F_x^S$  et transversales  $F_y^S$  qui agissent au-dessus d'un cylindre de longueur  $\Delta z$  sont définit comme suite :

$$F_{(d), x}^S = - \int_z^{z+\Delta z} \int_C (P_{(d)} n + \rho \vartheta \frac{\partial U_{\tau}^d}{\partial n} S) i \, dl \, dz \quad (2.65a)$$

$$F_{(d), y}^S = - \int_z^{z+\Delta z} \int_C (P_{(d)} n + \rho \vartheta \frac{\partial U_{\tau}^d}{\partial n} S) j \, dl \, dz \quad (2.65b)$$

- c : le périmètre.
- dl : pas élémentaire curviligne le long du périmètre.
- dz : pas élémentaire le long de direction axiale du cylindre.

Les forces surfaciques non-dimensionnelles longitudinales et transversales sont utilisées pour décrire les effets 3D le long de la direction axiale et elles sont de la forme :

$$F_x^s = \frac{F_{d,x}^s}{U_{max}^2 \Delta Z} \quad (2.66a)$$

$$F_y^s = \frac{F_{d,y}^s}{U_{max}^2 \Delta Z} \quad (2.66b)$$

A fin de calculer le coefficient de traîné  $C_D$  et le coefficient d'inertie  $C_m$  de l'équation de Morrison, la force totale  $F_{x,t}$  a été considéré composé par la somme de :

La contribution non-dimensionnelle de Froude-Krylov :

$$\left( \frac{\pi^2}{2Kc} \right) \cos(2\pi t) \quad (2.67)$$

La force longitudinale non-dimensionnelle :

$$F_x = F_{x,p} + F_{x,s} \quad (2.68)$$

Pour les écoulements purement périodiques la force longitudinale totale prend la forme de l'équation de Morrison. Parce que le champ d'écoulement régie par un mouvement sinusoïdal de l'équation (2.1), les coefficients de traîné et d'inertie se calculent par l'analyse de fourrier de la force comme suite :

$$C_D = \frac{2 \int_0^T F_x \sin \omega t \, dt}{\int_0^T |\sin \omega t| \sin \omega t^2 \, dt} \quad (2.69a)$$

$$C_m = \frac{2 \int_0^T F_x \cos \omega t \, dt}{\frac{\pi D \omega}{U_{max}} \int_0^T \cos \omega t^2 \, dt} \quad (2.69b)$$

Le même procédé est employé pour le calcul des coefficients de Morrison surfacique  $C_m^s$  et  $C_D^s$  à partir de la force longitudinale surfacique  $F_x^s$ .

**Chapitre -III-  
Discrétisation**

---

### III.1- Présentation générale

En vue de passage d'un problème exacte (continue) au problème approché (discret), nous disposons de plusieurs techniques concurrentes et complémentaires concernant les DF, VF, EF. La méthode utilisée pour résoudre ce problème est celle des différences finies du second ordre de précision, cette méthode correspond à la formulation des équations de la physique suivant un équilibre des forces en chaque point.

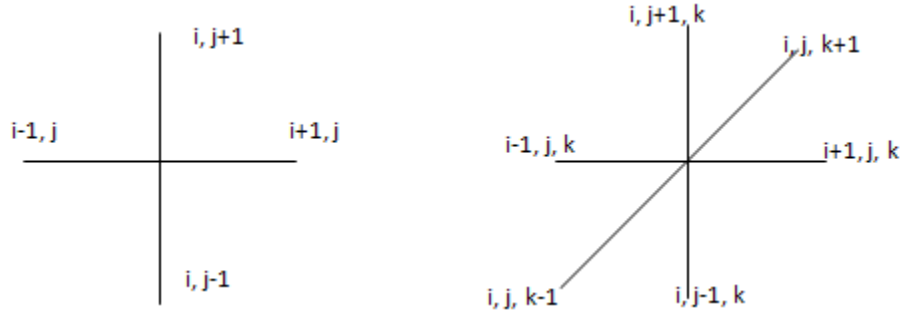


Fig.3.1 – Grilles différences finies bidimensionnelles et tridimensionnelles.

### III.2- Principe de la discrétisation géométrique

Dans notre cas, en un domaine parallélépipédique en 3 dimensions de côtés parallèles aux axes, nous construirons une grille de discrétisation en différence finies par quadrillage selon les directions des axes. Cette discrétisation est faite à l'aide d'un schéma centrées et un maillage non-entrelacé.

La pression et les composantes des vitesses cartésiennes sont définis au centre et le flux de volume sont définis aux centres des facettes correspondantes du volume de control.

Le principe de la méthode des différences finies en coordonnées généralisées est :

Soit les quantités différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} qi = \frac{\partial q}{\partial \xi} \\ qj = \frac{\partial q}{\partial \eta} \\ qk = \frac{\partial q}{\partial \zeta} \end{array} \right. \text{ ces equations deviendront } \left\{ \begin{array}{l} q\xi = \frac{1}{\Delta \xi} \left( q_{i+\frac{1}{2},j,k} - q_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) \\ q\eta = \frac{1}{\Delta \eta} \left( q_{i,j+\frac{1}{2},k} - q_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) \\ q\zeta = \frac{1}{\Delta \zeta} \left( q_{i,j,k+\frac{1}{2}} - q_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) \end{array} \right. \quad (3.1. a)$$

$$(3.1. a)$$

$$(3.1. b)$$

$$(3.1. c)$$

pour le maillage numérique  $\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$  (3.2)

on obtient par suite  $q\xi = q_{i+\frac{1}{2},j,k} - q_{i-\frac{1}{2},j,k}$  (3.3. a)

$$(3.3. a)$$

$q\eta = q_{i,j+\frac{1}{2},k} - q_{i,j-\frac{1}{2},k}$  (3.3. b)

$$(3.3. b)$$

$q\zeta = q_{i,j,k+\frac{1}{2}} - q_{i,j,k-\frac{1}{2}}$  (3.3. c)

$$(3.3. c)$$

### III.3-Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

Les équations des quantités du mouvement sont résolues d'après la tactique précédente, et le champ de vitesse sera évalué à partir de l'équation (3.4) suivantes :

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2J-1} D_1\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2J-1} D_2\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2J-1} D_3\right) \delta u_i = RHS \quad (3.4)$$

avec :  $\delta u_i = u_i^* - u_i^n$  (3.5. a)

$$RHS = \frac{\Delta t}{J-1} \left[ \frac{3}{2} (C_i^n + D_E(u_i^n)) - \frac{1}{2} (C_i^{n-1} + D_E(u_i^{n-1})) + D_I(u_i^n) \right] \quad (3.5. b)$$

- $\delta u_i$ : Incrément de vitesses cartésiennes
- $RHS$  : Bilan de quantité de mouvement.
- $C_i, D_I$  avec  $m=n$ ,  $D_E$  avec  $m \neq n$  et  $Ri(P)$  sont définit par les équations (2.41)

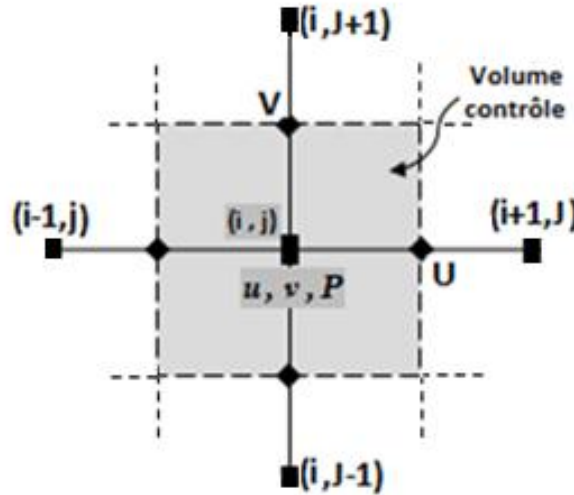


Fig.3.2 – Discrétisation en projection bidimensionnelle.

#### III.3.1-Évaluation du bilan de quantité de mouvement (RHS)

En premier lieu, nous évaluerons le bilan de la première équation de la quantité du mouvement suivant la direction x puis les autres ultérieurement par le même principe :

##### a-Terms de convection

Le terme de convection pour la 1<sup>ère</sup> équation de quantité de mouvement est :

$$C_i = -\frac{\partial(U_1 u_1)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial(U_2 u_1)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial(U_3 u_1)}{\partial \xi_3} \quad (3.6. a)$$

ou simplement  $C_i = -\frac{\partial(Uu)}{\partial \xi} - \frac{\partial(Vu)}{\partial \eta} - \frac{\partial(Wu)}{\partial \zeta}$  (3.6. b)

Nous aurons donc :

$$C_i = - \left( U_{i+\frac{1}{2},j,k} u_{i+\frac{1}{2},j,k} - U_{i-\frac{1}{2},j,k} u_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) - \left( V_{i,j+\frac{1}{2},k} u_{i,j+\frac{1}{2},k} - V_{i,j-\frac{1}{2},k} u_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) - \left( W_{i,j,k+\frac{1}{2}} u_{i,j,k+\frac{1}{2}} - W_{i,j,k-\frac{1}{2}} u_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.7)$$

Nous savons que les composantes cartésiennes de la vitesse  $(u,v,w)$  sont définies aux point  $(i,j,k)$ , tandis que les composantes du flux de volume  $U,V$  et  $W$  sont définit respectivement aux point  $(i + \frac{1}{2}, j, k), (i, j + \frac{1}{2}, k), (i, j, k + \frac{1}{2})$ . une interpolation linéaire est utilisé pour définir la composante de vitesse  $u$  aux points  $(i+ \frac{1}{2},j,k),(i, j+ \frac{1}{2},k),(i,j,k+ \frac{1}{2})$ .

$$u_{i+\frac{1}{2},j,k} = 0.5(u_{i+1,j,k} + u_{i,j,k}) \quad (3.8. a)$$

$$u_{i,j+\frac{1}{2},k} = 0.5(u_{i,j+1,k} + u_{i,j,k}) \quad (3.8. b)$$

$$u_{i,j,k+\frac{1}{2}} = 0.5(u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k}) \quad (3.8. c)$$

Le même raisonnement et le même principe d'interpolation est appliquée pour la variable  $u$  exprimé aux points  $(i- \frac{1}{2}, j, k), (i, j- \frac{1}{2}, k), (i, j, k- \frac{1}{2})$  dans l'équation (3.7).

Les équations (3.8) sont remplacées dans l'équation (3.7) pour l'obtention du terme de convection.

### **b-Terms de diffusions non-diagonales**

$$D_E = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad \text{Avec } m \neq n$$

$$D_E = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \nu G^{1n} \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \nu G^{2n} \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \nu G^{3n} \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right) \quad \text{Avec } m \neq n$$

$$D_E = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \nu G^{12} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \nu G^{13} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \nu G^{21} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \nu G^{23} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \nu G^{31} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \nu G^{32} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)$$

Cette quantité est évaluée par schéma aux différences centrées au point  $(i, j, k)$  :

$$D_E = + \left( \nu G^{12} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \nu G^{13} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} - \left( \nu G^{12} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \nu G^{13} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)_{i-\frac{1}{2},j,k} + \left( \nu G^{21} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \nu G^{23} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k} - \left( \nu G^{21} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \nu G^{23} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)_{i,j-\frac{1}{2},k} + \left( \nu G^{31} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \nu G^{32} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \left( \nu G^{31} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \nu G^{32} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

Pour l'évaluation de cette équation on doit exprimer les dérivées partielles de la vitesse :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} = u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \quad (3.10. a)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} = u_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \quad (3.10. b)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k} = u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \quad (3.10. c)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} = u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \quad (3.10. d)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \quad (3.10. e)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (3.10. f)$$

La composante de vitesse  $u$  exprimée aux points  $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)$  est évaluée par une double interpolation linéaire :

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = 0.25(u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i+1,j,k} + u_{i+1,j+1,k}) \quad (3.11)$$

Le même principe d'interpolation est appliqué la variable  $u$  exprimée aux points  $(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})$  et  $(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})$ .

### **c-Terms de diffusions diagonales**

Le terme s'écrit sous la forme suivante :  $D_l = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right)$  Avec  $m = n$

Par suit nous aurons :  $D_l = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \nu G^{11} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \nu G^{22} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \nu G^{33} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)$

En utilisant un schéma aux différences centrées nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_l = & \left( \nu G^{11} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} - \left( \nu G^{11} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right)_{i-\frac{1}{2},j,k} + \left( \nu G^{22} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k} - \left( \nu G^{22} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ & + \left( \nu G^{33} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \left( \nu G^{33} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous remarquons bien que pour évaluer cette quantité il suffise de déterminer les dérivées partielles de la vitesse cartésienne.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} = u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k} \quad (3.13a)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k} = u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k} \quad (3.13b)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k} \quad (3.13c)$$

**Remarque :**

Le même principe de discrétisation est appliqué les deux autres équations de quantité de mouvement.

**II.3.2- Évaluation de la vitesse**

Une fois que le bilan de quantité de mouvement (*RHS*) est déterminé selon l'équation (3.5), nous devons déterminer en suite le champ de vitesse selon l'équation (3.4). La technique pour résoudre telle équation se résume comme suit :

- Premièrement nous résoudrons l'équation suivante:

$$RHS = \left( 1 - \frac{\Delta t}{2J^{-1}} D_1 \right) X^a \quad (3.14)$$

- Après avoir déterminé le champ  $X^a$  dérivant de l'équation (3.14), en second lieu nous évaluerons le champ  $X^b$  dérivant de l'équation suivante :

$$X^a = \left( 1 - \frac{\Delta t}{2J^{-1}} D_2 \right) X^b \quad (3.15)$$

- En dernier étape nous déterminerons le champ  $X$  à partir de l'équation suivante :

$$X = \left( 1 - \frac{\Delta t}{2J^{-1}} D_3 \right) X^b \quad (3.16)$$

L'équation (3.14) peut être écrite sous la forme suivante :

$$X^a - \frac{\Delta t}{2J^{-1}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( v_{G^{11}} \frac{\partial X^a}{\partial \xi_1} \right) = RHS$$

Cette équation est écrite sous sa forme discrète en utilisant un schéma aux différences centrées au point (i, j, k) :

$$X^a_{i,j,k} - \frac{\Delta t}{2J^{-1}} \left[ \left( v_{G^{11}} \frac{\partial X^a}{\partial \xi_1} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} - \left( v_{G^{11}} \frac{\partial X^a}{\partial \xi_1} \right)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right] = RHS \quad (3.17)$$

Les termes de la dernière équation sont évalués de la même manière faite dans le précédent paragraphe, sachant que la quantité  $X^a$  est défini aux point  $(i, j, k)$  puisqu'elle est relative à  $\delta u$ , nous obtenons par suite :

$$\alpha^a_{i,j,k} X^a_{i+1,j,k} + \beta^a_{i,j,k} X^a_{i,j,k} + \gamma^a_{i,j,k} X^a_{i-1,j,k} = Y^a_{i,j,k} \quad (3.18)$$

Avec

$$\alpha^a_{i,j,k} = \frac{-\frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu G^{11}_{i-\frac{1}{2},j,k}}{1 + \frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu (G^{11}_{i+\frac{1}{2},j,k} + G^{11}_{i-\frac{1}{2},j,k})} \quad (3.19a)$$

$$\beta^a_{i,j,k} = 1 \quad (3.19b)$$

$$\gamma^a_{i,j,k} = \frac{-\frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu G^{11}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{1 + \frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu (G^{11}_{i+\frac{1}{2},j,k} + G^{11}_{i-\frac{1}{2},j,k})} \quad (3.19c)$$

$$Y^a_{i,j,k} = \frac{RHS}{1 + \frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu (G^{11}_{i-\frac{1}{2},j,k} + G^{11}_{i+\frac{1}{2},j,k})} \quad (3.19d)$$

Ainsi pour tout le domaine de calcul  $(i=l, j_x; j=l, j_y; k=l, j_z)$  on obtient un système d'équations algébriques tridiagonal qui est facile à résoudre en utilisant la méthode Gauss.

Le même principe de calcul précédent est appliqué pour les équations (3.15) et nous obtenons donc :

$$\alpha^b_{i,j,k} X^b_{i,j+1,k} + \beta^b_{i,j,k} X^b_{i,j,k} + \gamma^b_{i,j,k} X^b_{i,j-1,k} = Y^b_{i,j,k} \quad (3.20)$$

avec

$$\alpha^b_{i,j,k} = \frac{-\frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu G^{22}_{i,j-\frac{1}{2},k}}{1 + \frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu (G^{22}_{i,j+\frac{1}{2},k} + G^{22}_{i,j-\frac{1}{2},k})} \quad (3.21a)$$

$$\beta^b_{i,j,k} = 1 \quad (3.21b)$$

$$\gamma^b_{i,j,k} = \frac{-\frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu G^{22}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{1 + \frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu (G^{22}_{i,j+\frac{1}{2},k} + G^{22}_{i,j-\frac{1}{2},k})} \quad (3.21c)$$

$$Y^a_{i,j,k} = \frac{X^a_{i,j,k}}{1 + \frac{\Delta t}{2J^{-1}} \nu (G^{22}_{i,j+\frac{1}{2},k} + G^{22}_{i,j-\frac{1}{2},k})} \quad (3.21d)$$

Finalement nous obtenons l'incrément du champ de vitesse  $\delta u$  comme suite:

$$\alpha_{i,j,k} \delta u_{i,j,k} + \beta_{i,j,k} \delta u_{i,j,k} + \gamma_{i,j,k} \delta u_{i,j,k} = Y_{i,j,k} \quad (3.22)$$

$$\alpha_{i,j,k} = \frac{-\frac{\Delta t}{2J^1} v G_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{33}}{1 + \frac{\Delta t}{2J^1} v \left( G_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{33} + G_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{33} \right)} \quad (3.23a)$$

$$\beta_{i,j,k}^a = 1 \quad (3.23b)$$

Avec

$$\gamma_{i,j,k}^b = \frac{-\frac{\Delta t}{2J^1} v G_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{33}}{1 + \frac{\Delta t}{2J^1} v \left( G_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{33} + G_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{33} \right)} \quad (3.23c)$$

$$Y_{i,j,k} = \frac{X_{i,j,k}^b}{1 + \frac{\Delta t}{2J^1} v \left( G_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{33} + G_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{33} \right)} \quad (3.23d)$$

**Remarque :**

Les incréments du champ de vitesse ( $\delta v$  et  $\delta w$ ) sont calculés par le même principe et même procédure utilisé pour  $\delta u$ .

#### **II.4- Discrétisation de l'équation de poisson de pression**

Selon Zang et al.[28] le champ de pression est déterminé à partir de l'équation de poisson qui est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( G^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + G^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + G^{13} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( G^{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + G^{22} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + G^{23} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( G^{31} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + G^{32} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + G^{33} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} \right) = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial U_1^*}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U_1^*}{\partial \xi_2} + \frac{\partial U_1^*}{\partial \xi_3} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\text{Cette équation est de la forme} \quad \mathbf{L}\phi = \mathbf{S} \quad (3.25)$$

Ou  $S$  est le terme source de l'équation de poisson tandis que  $L$  est l'opérateur différentiel qui est :

$$\begin{aligned} L\phi = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( G^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + G^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + G^{13} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( G^{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + G^{22} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + G^{23} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( G^{31} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + G^{32} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + G^{33} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

L'équation de poisson (3.24) c'est une équation du type elliptique ou ces coefficient sont seulement les tenseur métriques du maillage, elle est résolue par la technique de multigrid.

La technique de multigrid basée sur un schéma aux différences centrées et une procédure itérative de sous-relaxation (S.O.R) donne :

$$\phi_{i,j,k}^{m+1} = \phi_{i,j,k}^m + \omega \left( \frac{L\phi_{i,j,k}^m - S_{i,j,k}}{|L|} \right) \quad (3.27)$$

- m : indique la m<sup>ème</sup> tération réalisée au cours du processus itératif de la pression.
- $\omega$  : est le facteur de relaxation (choisi ici ( $\omega < 1$ ))
- |L| : module de l'opérateur aux différences L  $\phi_{i,j,k}^m$  au point (i, j, k) :

$$|L| = G_{i+\frac{1}{2},j,k}^{11} + G_{i-\frac{1}{2},j,k}^{11} + G_{i,j+\frac{1}{2}}^{22} + G_{i,j-\frac{1}{2},k}^{22} + G_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{33} + G_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{33} \quad (3.28)$$

**Chapitre -IV-  
Génération du maillage**

---

### **IV.1- Introduction**

La génération du maillage exige pour un numéricien des connaissances approfondies en mathématique, informatique, et des phénomènes physiques. La mécanique des fluides conduit à des exigences sur la finesse de la discrétisation utilisée pour le calcul (différence finie, volume fini). La nécessité d'une bonne représentation du domaine physique dans le cas d'un problème extérieur (écoulement autour d'un obstacle) problème qui, théoriquement, se pose en milieu infini lorsqu'ils sont modélisés sur un ordinateur.

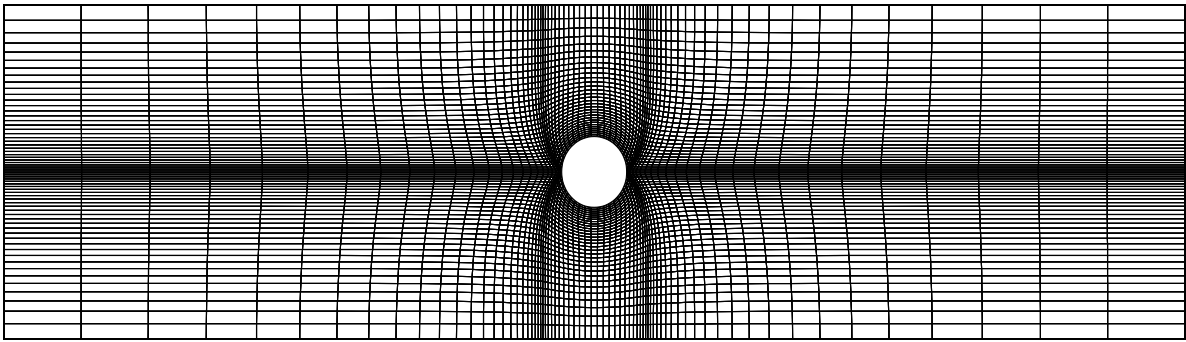
Dans les méthodes de différences finies la bonne traduction sur un ordinateur des modèles théoriques (numérique, analytique, algébrique) d'un espace physique à un espace numérique représente la base de la génération du maillage.

L'expérience montre que la qualité du maillage est cruciale pour avoir de bons résultats (lignes en 2D). Les conditions aux limites et la géométrie sont les paramètres qui permettent de choisir la bonne topologie du maillage. Il y a différents types de maillage du type O, type H, type C...etc.

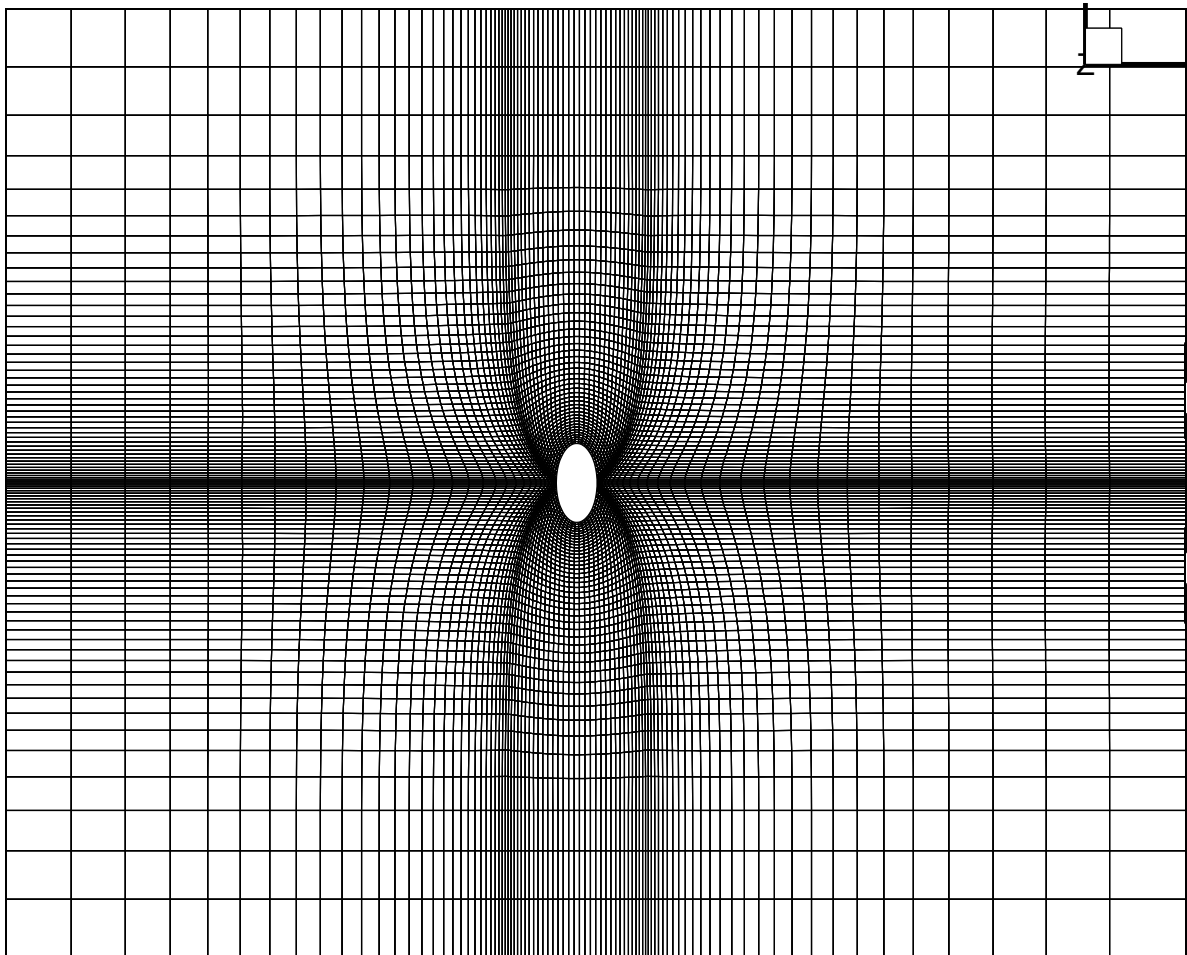
### **IV.2- Adaptation du maillage**

Le code source utilise une topologie d'un maillage type H créé pour répondre aux besoins d'une étude de régime infini du cylindre (l'analyse des rangées de cylindre). Cependant, la présente étude appréhende un écoulement oscillatoire autour d'un cylindre solitaire ayant une forme elliptique variable (diamètre), ce qui nous a amené à faire une modification de certains paramètres liés à la forme et à la mise des conditions périodiques sur les frontières en suivant ces étapes pour adapter le maillage :

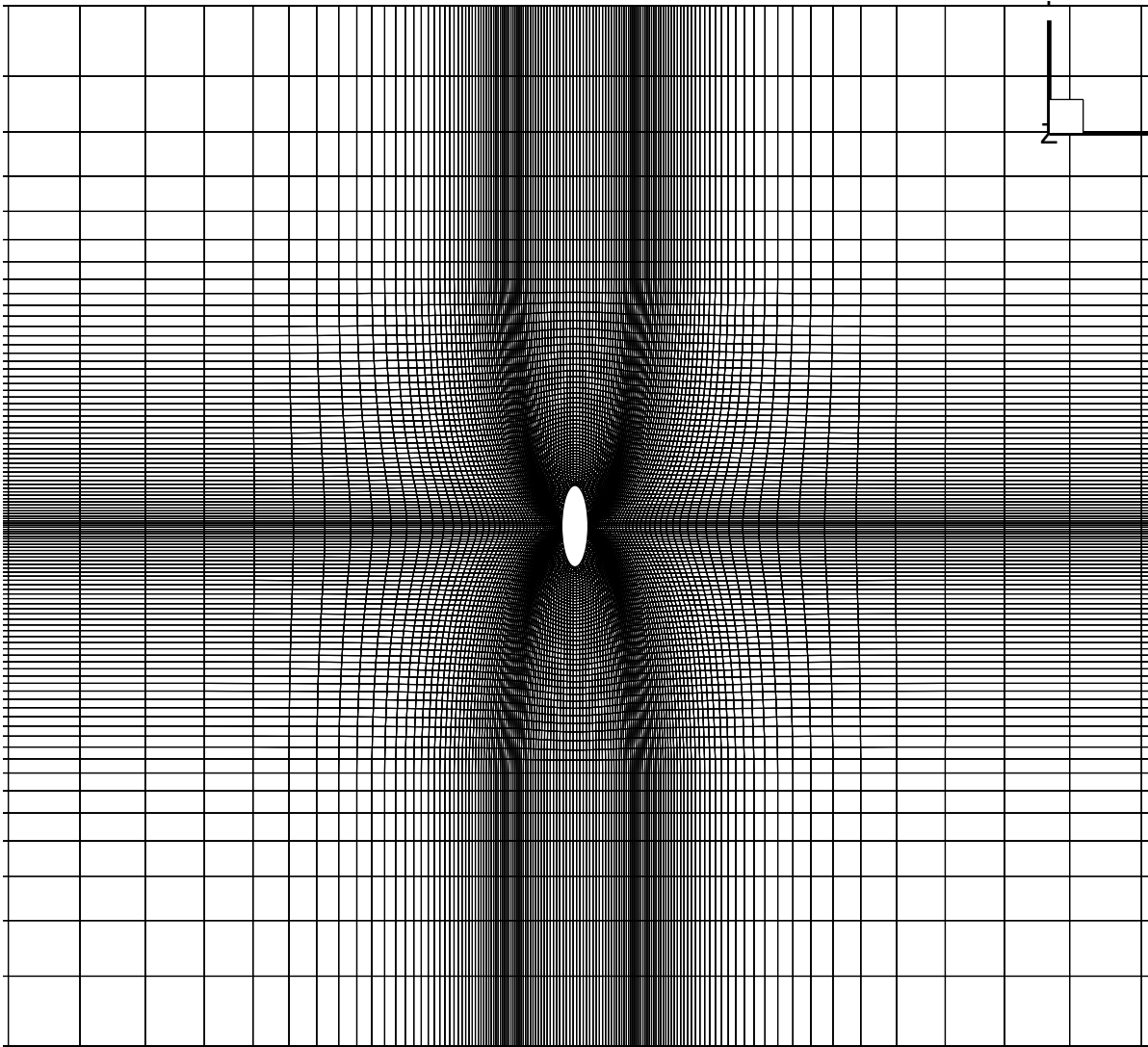
- Garder la même topologie du maillage type H avec une discrétisation de façon régulière sur la frontière du solide et faire un raffinement sur la paroi physique.
- Éliminer les segments qui se trouvent hors de la forme et du domaine, puis relier les segments extérieurs entre eux.
- Répartition régulière des segments.
- Le domaine est choisi symétrique par rapport au plan longitudinale  $y=0$ , et au plan transversal  $x=0$ .



**Fig.4.1.a** - schéma physique pour un rapport elliptique  $\varepsilon = 0.9$   
(Ce type de maillage est utilisé pour les  
calculs avec  $\varepsilon \in [1, 0.7]$ )



**Fig.4.1.b**- schéma physique pour un rapport elliptique  $\varepsilon = 0.5$   
Ce maillage est utilisé pour  $\varepsilon \in [0.65, 0.45]$  et est  
plus élargi et plus raffiné que celui qui précède



**Fig.4.1.c-** schéma physique pour un rapport elliptique =0.3  
Ce maillage est aussi utilisé pour  $\varepsilon \in [0.4, 0.1]$  et est  
plus élargi et plus raffiné que ceux utilisé  
précédemment

### IV.3- Procédure de génération de maillage

Le maillage est généré à partir des équations qui relient le domaine physique au domaine numérique :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \end{array} \right. \quad (4.1a)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \end{array} \right. \quad (4.1b)$$

Où P et Q sont les fonctions qui permettent le contrôle de l'orientation de la courbure et le pas d'espace ( $\Delta x, \Delta y$ ).

Les équations (4.1) sont transformées au domaine numérique en interchangeant les rôles des variables indépendantes et dépendantes, ceci donnera deux équations elliptiques de la forme :

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \beta \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = S_x \quad (4.2a)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = S_y \quad (4.2b)$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \end{array} \right. \quad (4.3a)$$

$$\left| \begin{array}{l} \beta = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \end{array} \right. \quad (4.3b)$$

$$\left| \begin{array}{l} \gamma = -2 \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \end{array} \right. \quad (4.3c)$$

$$\left| \begin{array}{l} J = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{array} \right. \quad (4.3d)$$

$$\left| \begin{array}{l} S_x = -J^2 \left( P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{array} \right. \quad (4.3e)$$

$$\left| \begin{array}{l} S_y = -J^2 \left( P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \end{array} \right. \quad (4.3f)$$

Pour résoudre l'équation de poisson nous utiliserons la technique de Sorenson [33], qui permet de générer le maillage dans l'espace numérique voir l'équation (4.2).

Pour la précision et pour accélérer la convergence, nous utiliserons un schéma aux différences centrées et une méthode itérative de (S.O.R) qui donne :

$$x_{i,j}^{m+1} = x_{i,j}^m + w \left( \frac{\alpha(x_{i,j}^m + x_{i-1,j}^m) + \gamma x_{\xi\eta}^m + \beta(x_{i,j+1}^m + x_{i,j-1}^m) - S_x}{2(\alpha + \beta)} - x_{i,j}^m \right) \quad (4.4a)$$

$$y_{i,j}^{m+1} = y_{i,j}^m + w \left( \frac{\alpha(y_{i,j}^m + y_{i-1,j}^m) + \gamma y_{\xi\eta}^m + \beta(y_{i,j+1}^m + y_{i,j-1}^m) - S_y}{2(\alpha + \beta)} - y_{i,j}^m \right) \quad (4.4b)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} x_{\xi\eta}^m = 0.25(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}) & (4.5a) \\ y_{\xi\eta}^m = 0.25(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}) & (4.5b) \end{cases}$$

Pour orienter la courbure des lignes du maillage et l'espacement des grilles nous utiliserons des fonctions de contrôle dans la technique de Sorenson [33] et qui sont de forme suivantes :

$$P_{i,j} = P_{i,j \min} e^{c_1 \frac{j}{Nm}} + P_{i,j \max} e^{c_2 \frac{j_{\max}}{Nm}} \quad (4.6a)$$

$$Q_{i,j} = Q_{i,j \min} e^{c_1 \frac{j}{Nm}} + Q_{i,j \max} e^{c_2 \frac{j_{\max}}{Nm}} \quad (4.6b)$$

Avec  $P_{i,j \min}$  ,  $Q_{i,j \min}$  ,  $P_{i,j \max}$ ,  $Q_{i,j \max}$  : fonctions de contrôle estimées aux frontières, pour assurer l'orthogonalité avec les parois solide et indiquer l'espacement entre les lignes.

Les fonctions P et Q aux frontières sont de la forme :

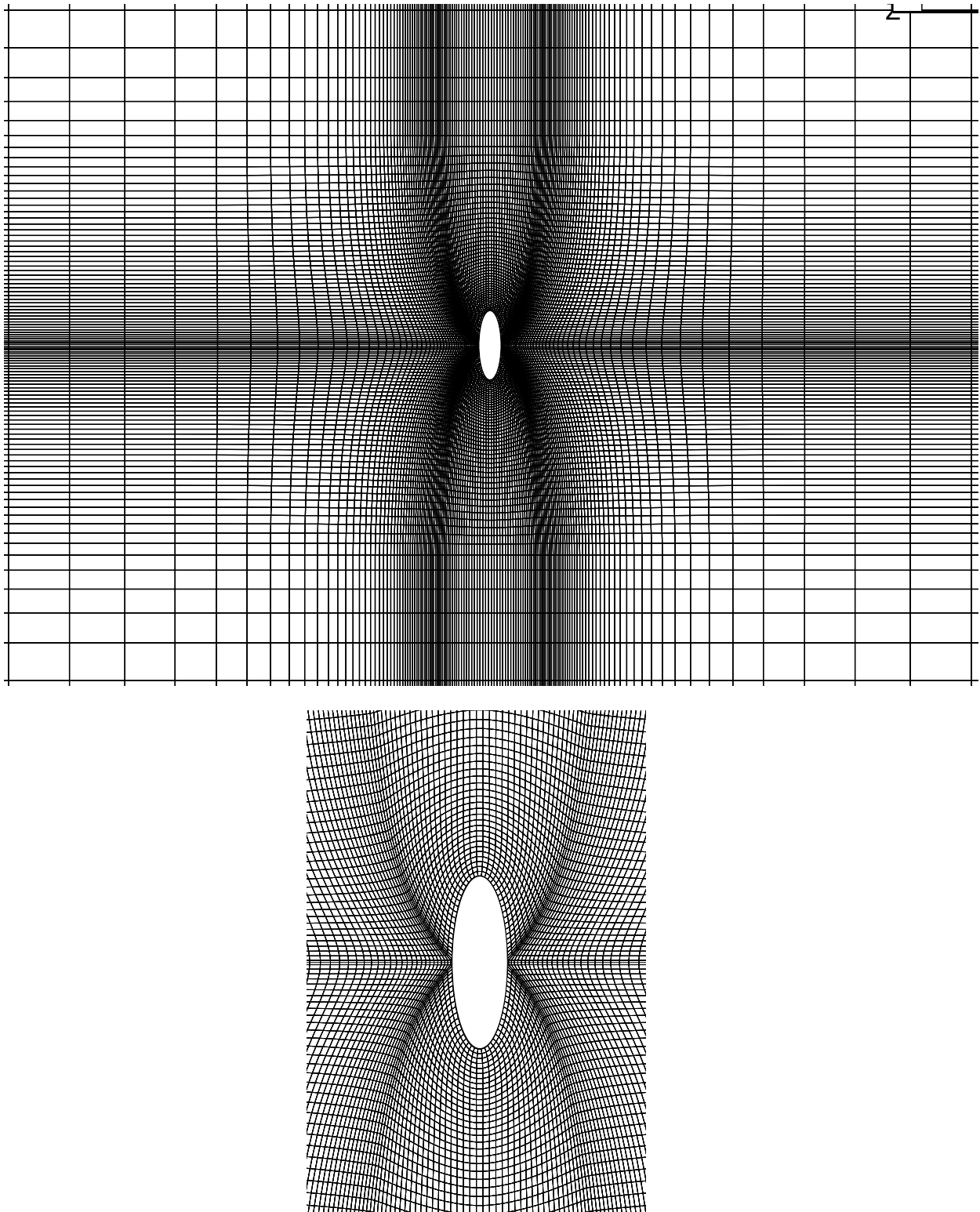
$$P = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} - \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \quad (4.7a)$$

$$Q = \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} - \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} \quad (4.7b)$$

Ces fonctions de contrôle de Sorenson [34] assurent l'orthogonalité du maillage aux frontières et laissent indiquer l'espacement entre les lignes.

#### **IV.4- Génération du maillage**

La technique utilisé dans la présent étude, permet de généré des maillages de haute qualité, avec les lignes orthogonales à la frontière solide, y compris la surface de corps, et très sérées de la surface de l'obstacle. Le maillage est uniforme dans la direction axiale. Un exemple de la topologie de maillage utilisé pour les plans  $z=cts$  est montré dans la figure 4.2



**Fig.4.2-** Maillage utilisé dans le calcul  $\varepsilon = 0.3$ [plan  $(x-y)$ ]  
Vue complète et vue au voisinage de l'obstacle

**Chapitre -V-**  
**Résultats et Discussions**

---

La simulation numérique des écoulements est un formidable outil aussi bien pour essayer de mieux comprendre les mécanismes physiques que pour la conception et le développement dans l'industrie. Son utilisation courante a été rendue possible par les progrès réalisés dans le domaine de la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides et surtout par l'explosion des moyens de calcul. Aujourd'hui, la simulation numérique est un véritable complément aux études expérimentales et permet de limiter le nombre d'essais, entraînant une réduction des coûts et des délais de conception, et constitue ainsi un enjeu économique majeur.

Dans cette étude la simulation a été faite par un code développé au laboratoire de « modélisation numériques des phénomènes mécaniques » à l'université de Mostaganem. Cette méthode numérique a été largement utilisée pour l'analyse des écoulements laminaires oscillatoires autour des cylindres circulaires [15].

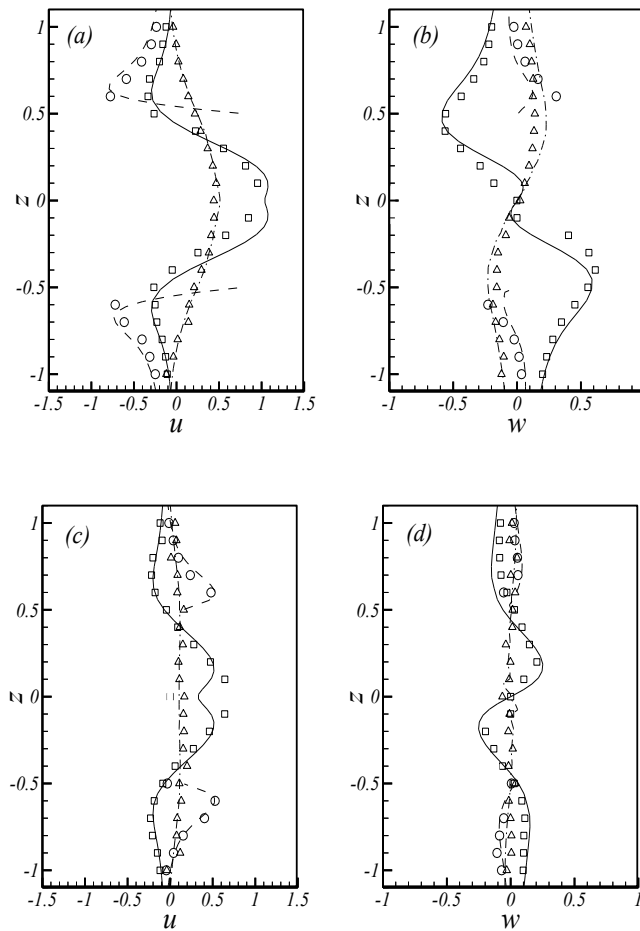
Les calculs des écoulements ont été effectués sur un PC Core2Duo avec 4Gb de RAM.

### **V.1- Validation du code [15]**

La version originale du code a été largement utilisée pour simuler les écoulements oscillatoires autour des cylindres circulaires. Dans cette section, les résultats de la validation effectuée par Nehari et al. [15] pour le problème du cylindre circulaire seront présentés. La validation a été effectuée avec les données expérimentales fournies par DDBL98.

Ci-après, nous montrons les composantes de la vitesse et les forces aux différentes phases de position  $(t_p=(t-N_cT)/T$  avec  $N_cT < t < (N_c+1)T$  et  $N_c$  est un nombre entier indiquant le nombre du cycle) le long d'une période.

La figure 5.1 montre une comparaison entre les composantes longitudinales et transversales du champ de vitesse mesuré dans les expériences de DDBL98 et ceux calculés avec le présent model 3D. La comparaison est effectuée à différentes phases de position du cycle près de la surface du cylindre. Il s'avère que le champ de vitesse est bien prédit par la présente méthode numérique.



**Fig.5.1-** Une comparaison entre les composantes de la vitesse obtenus avec notre modèle numérique et ceux mesuré dans les expériences de Deutsch et al. [17], à trois sections transversales, en régime A:

- a) composante longitudinale pour  $t_p=0.75$ ;
- b) composante transversale pour  $t_p=0.75$ ;
- c) composante longitudinale pour  $t_p=1.0$ ;
- d) composante transversale pour  $t_p=1.0$ .

Les symboles et les lignes référant respectivement aux résultats expérimentaux et numériques.

( $\Delta$ ,  $x=-0.8$ ;  $\circ$ ,  $x=0$ ;  $\square$ ,  $x=0.8$ ).

## V.2 -Résultats obtenues pour un écoulement en régime A autour d'un cylindre elliptique

L'effet du rapport elliptique a été étudié pour  $Re=100$  et  $Kc=5$  ce qui nous donne un nombre de Stokes  $\beta = 20$ . Ce cas appartient au régime A de la carte TB90 [8] qui a la particularité d'être symétrique et bidimensionnel. Le rapport elliptique  $\mathcal{E} = (a/b)$  a été changé dans une large gamme (de 1 jusqu'à 0.1) allant du cas d'un cylindre circulaire au cas du cylindre à section elliptique très effilé.

Les simulations ont été exécutées pour **200 cycles**. Le tableau 5.1 montre les cas examinés, ainsi que les dimensions du domaine physique et les paramètres numériques.

**Tableau 5.1** : Les paramètres des simulations, ou :

- $D$  dénote le diamètre (égale à 2)
- $L_x; L_y; L_z$  : dénotent respectivement les dimensions du domaine physique suivant les directions  $x; y; z$
- $n_x; n_y; n_z$  : dénotent respectivement les nombres de point suivant les directions  $x; y; z$
- $n_{cir}$  : dénote le nombre de cellules de grille distribuées le long de la circonférence du cylindre.

$\varepsilon(a/b)$	$L_x/D$	$L_y/D$	$L_z/D$	$n_x; n_y; n_z$	$n_{cir}$
1	18	5	1/2	72 ; 64 ; 8	48
0.95	18	5	1/2	72 ; 64 ; 8	48
0.9	18	5	1/2	72 ; 64 ; 8	48
0.85	18	5	1/2	72 ; 64 ; 8	48
0.8	18	5	1/2	72 ; 64 ; 8	48
0.75	18	5	1/2	72 ; 64 ; 8	48
0.7	18	5	1/2	72 ; 64 ; 8	48
0.65	16	13	1	80 ; 88 ; 4	64
0.6	16	13	1	80 ; 88 ; 4	64
0.55	16	13	1	80 ; 88 ; 4	64
0.5	16	13	1	80 ; 88 ; 4	64
0.45	16	13	1	80 ; 88 ; 4	64
0.4	22	14	2/3	136 ; 104 ; 4	80
0.35	22	14	2/3	136 ; 104 ; 4	80
0.3	22	14	2/3	136 ; 104 ; 4	80
0.25	22	14	2/3	136 ; 104 ; 4	80
0.2	22	14	2/3	136 ; 104 ; 4	80
0.15	22	14	2/3	136 ; 104 ; 4	80
0.1	22	14	2/3	136 ; 104 ; 4	80

Les résultats qui concernent le tracé tourbillonnaire, le champ de pression et les forces hydrodynamiques pour le régime A seront discutées à la lumière de leur dépendance à l'égard du rapport elliptique.

### V.2.1 -Le champ de vorticité et de pression

Dans cette partie, les tracés tourbillonnaires aux différents phases de position  $t_p$  :  $0 < \left[ t_p = \frac{t_d}{T} \right] < 1$  (où  $t_d$  est le temps écoule durant le  $n^{i\text{eme}}$  cycle) pour des valeurs du rapport elliptique  $\varepsilon \in [0.1, 1]$  ainsi que la carte du champ de pression correspondant seront présentés et discutés.

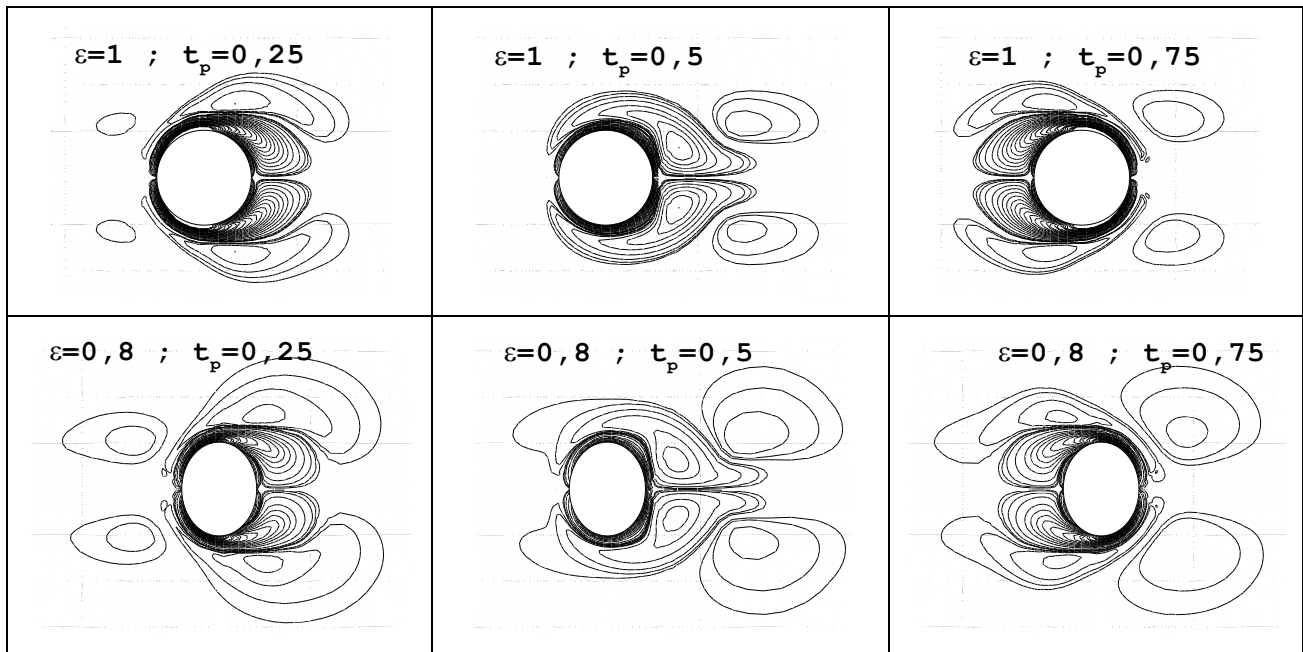
L'analyse du champ de vorticité a permis de regrouper les différentes valeurs du rapport elliptique  $\varepsilon$  en cinq domaines à savoir  $\varepsilon \in [0.1, 0.3]$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $\varepsilon \in [0.4, 0.6]$ ,  $\varepsilon \in [0.65, 0.75]$  et  $\varepsilon \in [0.8, 1]$ , chaque domaine se caractérise par des vortex-perles de même structure.

Ci-après l'angle de phase ( $2\pi t_p$ ) est référé à l'évolution du gradient externe de pression de l'équation (2.7). Spécifiquement à :

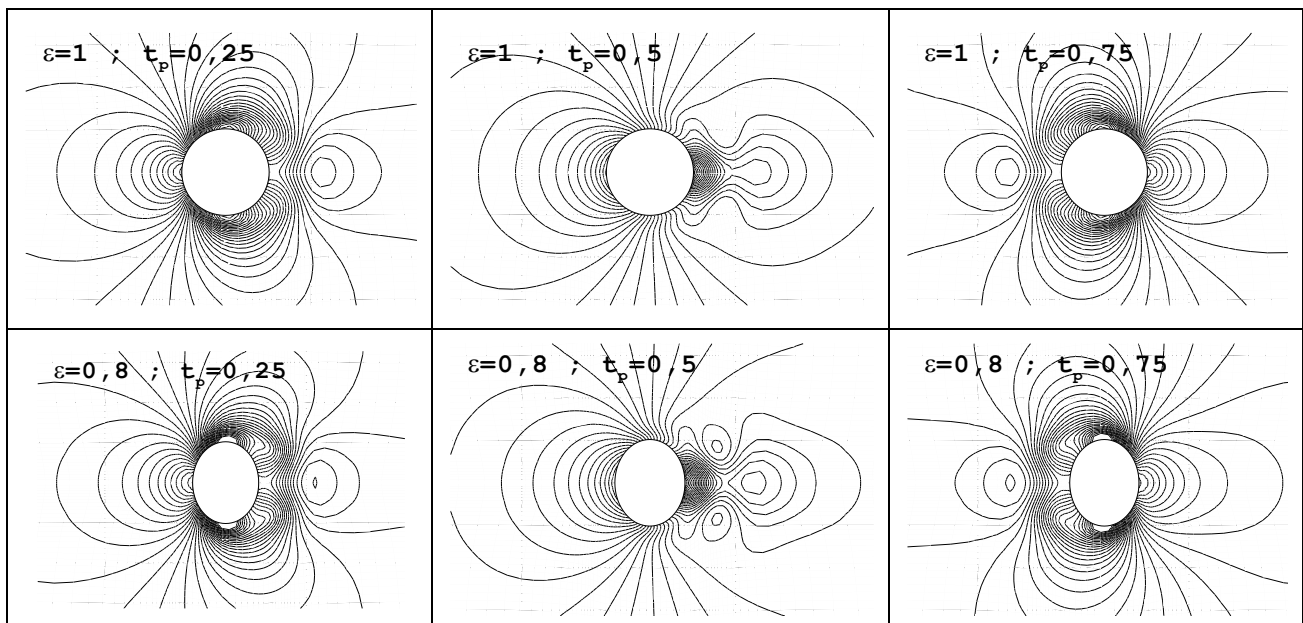
- $t_p = 0$  le gradient de pression est maximum négatif  $B_x = -\omega U_{max}$  et le champ des vitesses externes de l'écoulement de l'équation (2.1) est nulle  $U = 0$ .
- Pour  $0 < t_p < 0.25$  vitesse externe augmente avec la phase de position, tandis que le gradient imposé de pression diminue.
-    $t_p = 0.25$  correspondant à un angle de phase de **90** degrés, le gradient imposé de pression est nul  $B_x = 0$  donnant une vitesse externe maximum  $U = U_{max}$ .
- Pour  $0.25 < t_p < 0.5$ , augmente, le champ de vitesse diminue d  à une augmentation d'un gradient positif de pression qui agit contre le champ de vitesse.
-    $t_p = 0.5$  (angle de phase égal à **180** degrés), le gradient de pression atteint la valeur maximale dans la direction positive  $B_x = \omega U_{max}$  et la vitesse externe est nulle  $U = 0$ .
- Pour  $0.5 < t_p < 0.75$  (angle de phase entre **180** et **270** degrés) le gradient imposé de pression diminue et la vitesse augmente dans la direction  $x$  négative,
-    $t_p = 0.75$  (angle de phase **270** degrés) le gradient imposé de pression est nul  $B_x = 0$  donnant une vitesse externe maximum dans la direction longitudinale négative  $U = -U_{max}$ .
- Successivement, la vitesse diminue pour  $0.75 < t_p < 1$  pour une augmentation correspondante de la valeur absolue du gradient imposé de pression de la direction  $x$  négative.
- Finalement, à  $t_p = 0.1$  les conditions de  $t_p = 0$  sont récupérées. Le cycle est symétrique par rapport à  $t_p = 0.5$ , de ce fait le second demi-cycle ( $0.5 < t_p < 1$ ) est l'image- miroir du premier demi-cycle.

**V.2.1.A- Le champ de vorticité et de pression pour  $\varepsilon \in [0.8, 1]$**

Pour les rapports elliptiques  $\varepsilon \in [0.8, 1]$ , des paires de tourbillons symétriques par rapport à l'axe longitudinal, se forment de part et d'autre du cylindre pendant chaque demi-cycle et se séparent au demi-cycle suivant, ceci est clairement illustré sur la figure (5.2). Les tourbillons séparés disparaissent progressivement.



**Fig.5.2-** Les iso-lignes de la vorticité  $\omega_z$  aux différentes phases de position significatives pour les rapports elliptiques  $\varepsilon=1$  et  $\varepsilon=0.8$  au 140i me cycles d'oscillation.



**Fig.5.3 -** Les iso-lignes du champ de pression aux différentes phases de position significatives pour les rapports elliptiques  $\varepsilon=1$  et  $\varepsilon=0.8$  au 140i me cycles d'oscillation.

D'abord le champ de vorticité (fig.5.2) est discuté en se rapportant à la moitié supérieure du domaine ( $y>0$ ). Pour  $t_p = 0,25$  le champ externe de vitesse est égal à  $U_{max}$ . A cette phase, le champ de vorticité montre une couche limite s'étendant du point de stagnation coté gauche jusqu'au point de la partie arrière du cylindre, au-delà duquel l'écoulement se sépare se caractérisant par un changement du signe de la vorticité tout près du cylindre.   mesure que  $t_p$  augmente, le champ de vitesse externe diminue d  à un gradient positif de pression ; l'épaisseur de l'écoulement séparé et sa prolongation le long de la surface du cylindre augmentent progressivement, en causant de ce fait, la réduction de la longueur de la couche limite en aval.

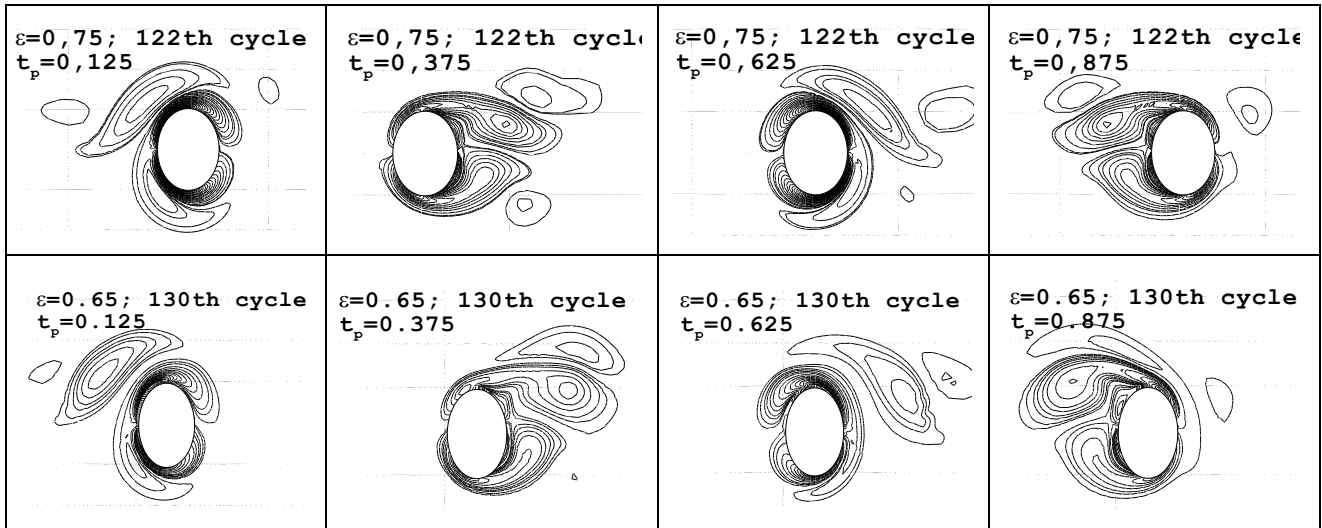
A  $t_p = 0,5$ , le champ externe de vitesse est nul et le gradient positif de pression atteint la valeur maximale. A cette phase la vorticité dans le sens contraire des aiguilles d'une montre forme une couche limite s'écoulant dans la direction  $x$  négative et s'étend sur toute la surface du cylindre. La vorticité près de la frontière solide dans le sens des aiguilles d'une montre a été décalée vers le haut autour de celle de la vorticité près de la frontière solide et dans le sens est contraire à celui des aiguilles d'une montre.   mesure que le temps augmente la couche limite se développe plus loin et se sépare finalement du coté gauche. L'évolution du champ de vorticité pour  $0,5 < t_p < 1$  est semblable à celui du premier demi-cycle mais elle se développe dans la direction opposée avec le signe opposé.

Le champ de pression correspondant est montré sur la figure (5.3).    $t_p = 0,25$  la pression est grande au point de stagnation en amont du cylindre, tandis que les iso-lignes en aval montrent clairement l'écoulement séparé. Le champ de pression tend à être moins asymétrique par rapport au plan  $x=0$     $t_p = 0,5$  où le champ externe de vitesse est nul. A  $t_p = 0,75$  le champ de pression est l'image-miroir de celui à  $t_p = 0,25$ , et le champ de pression à  $t_p = 1$  est l'image-miroir de celui à  $t_p = 0,5$ .

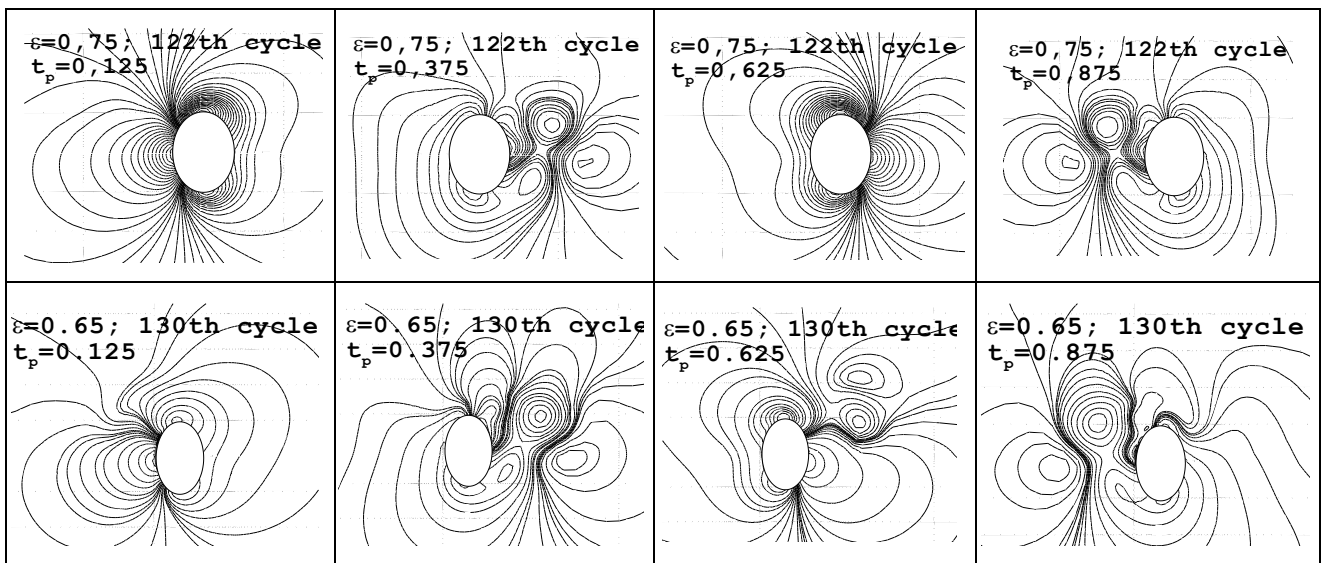
### **V.2.1.B- Le champ de vorticité et de pression pour $\varepsilon \in [0.65, 0.75]$**

Pour ces valeurs du rapport  $\varepsilon$ , le mécanisme de création de tourbillons est le même que celui décrit précédemment. Cependant les tourbillons crées sont cette fois-ci de plus grande taille et se forment de manière dissymétrique par rapport à l'axe de l'écoulement.

Les figures (5.4) et (5.5) montrent respectivement les iso-lignes de la composante de vorticité  $\omega_z$  et de la pression  $p$  aux phases de position significatives. Ces figures se rapportent à des  tats entièrement développés de l'écoulement car il faut noter que l'asymétrie ne se manifeste pas dès les premiers cycles. En effet, au démarrage, les détachements tourbillonnaires se forment de façon parfaitement symétrique et le restent pendant un certain nombre de cycle, ce nombre diminue avec la réduction du rapport elliptique  $\varepsilon$  (soit on compte 70 cycles pour  $\varepsilon = 0.75$ , 40 cycles pour  $\varepsilon = 0.7$  et 18 cycles pour  $\varepsilon = 0.65$  avant l'apparition de l'asymétrie). Au-delà de ce seuil, l'asymétrie s'installe.



**Fig.5.4-** Les iso-lignes de vorticité  $\omega_z$  aux différentes phases de position significatives pour les rapports elliptiques  $\varepsilon=0.75$  et  $\varepsilon=0.65$ .



**Fig.5.5 -** Les iso-lignes du champ de pression aux différentes phases de position significatives pour les rapports elliptiques  $\varepsilon=0.75$  et  $\varepsilon=0.65$ .

Pour mettre en évidence les caractéristiques d'une telle asymétrie, nous nous proposons de discuter le comportement de la vorticité pour le rapport elliptique  $\varepsilon = 0.65$  en se référant aux figures (5.4) ci-dessus et (5.6) ci-dessous.

A  $t_p = 0,375$  (voir figure 5.4), nous percevons une couche limite s'étendant de manière plus importante dans le domaine  $y > 0$  que celle du domaine  $y < 0$  ce qui favorisera une séparation asymétrique de l'écoulement et la création par la suite d'un vortex-perde plus grand dans la partie haute du cylindre (domaine  $y > 0$ ) et un autre moins important dans l'autre.

Au demi-cycle suivant ( $t_p \geq 0,5$ ), l'écoulement change de direction et le mécanisme cité ci-dessus se répète dans la direction opposée (voir figure 5.4,  $t_p = 0,875$ ). Entretemps le grand vortex-perde (domaine  $y > 0$ ) créé auparavant, se retrouve entrainer vers le coté

gauche du cylindre (voir figure 5.4,  $t_p = 0.625$ ) et sera dissipé au prochain changement de direction (à  $t_p = 1$ ) contrairement au petit détachement (domaine  $y \leq 0$ ) qui s'est dissipé à  $t_p = 0,5$ .

Cependant, la perte tourbillonnaire ne se situe pas seulement sur le domaine  $y > 0$ , ceci est clairement montré sur la figure (5.6). En effet les détachements asymétriques se manifestent durant quelques cycles successifs, par la suite, l'écoulement retrouve sa symétrie pour redevenir asymétrique à nouveau avec cette fois-ci, des vortex-pertes se manifestant dans le domaine opposé au précédent ( $y \leq 0$ ). On parle dès lors, d'une stabilité interprétant les changements intervenus sur toute la durée de l'écoulement (soit 200 cycles dans notre cas) et d'une régularité indiquant une quelconque périodicité dans ces changements (une sorte de motifs se répétant à un nombre de cycle bien défini) et qui permettra par la suite de prédire les prochaines formes du vortex-perte.

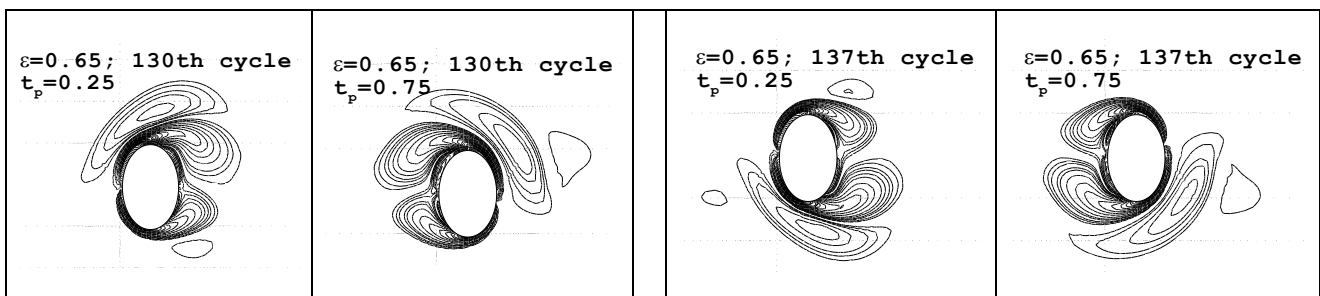


Fig.5.6- les différentes positions de la perte tourbillonnaire pour  $\varepsilon=0.65$ .

Dans notre cas, nous pouvons dire que l'écoulement est instable car le changement est assai fréquent, mais régulier car il est tout à fait possible de prédire le prochain changement du fait que l'analyse de la vorticité effectuée sur 200 cycles révèle une régularité se caractérisant dans l'ordre par :

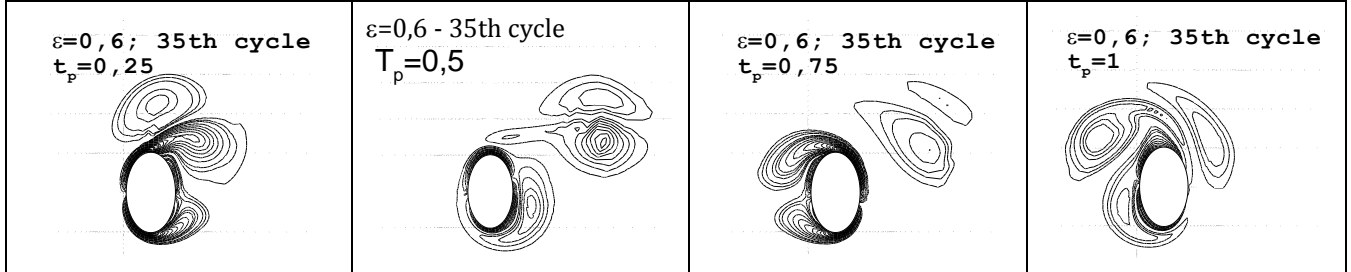
- Pour  $\varepsilon = 0.75$  : 6 cycles de vortex-pertes dans le domaine  $y > 0$ , 2 cycles d'écoulement symétrique suivi de 6 cycles de vortex-pertes dans le domaine  $y \leq 0$  et 2 cycles d'écoulement symétrique. Ainsi, cet ensemble de changement se r p tera en boucle.
- Pour  $\varepsilon = 0.7$  : 5 cycles de vortex-pertes dans le domaine  $y > 0$ , 1 cycles d'écoulement symétrique, 5 cycles de vortex-pertes dans le domaine  $y \leq 0$  et 1 cycles d'écoulement symétrique.
- Pour  $\varepsilon = 0.65$  : 6 cycles de vortex-pertes dans le domaine  $y > 0$ , 1 cycles d'écoulement symétrique, 6 cycles de vortex-pertes dans le domaine  $y \leq 0$  et 1 cycle d'écoulement symétrique.

Ce comportement aura une influence sur la force transversale qui sera discutée plus tard dans ce chapitre.

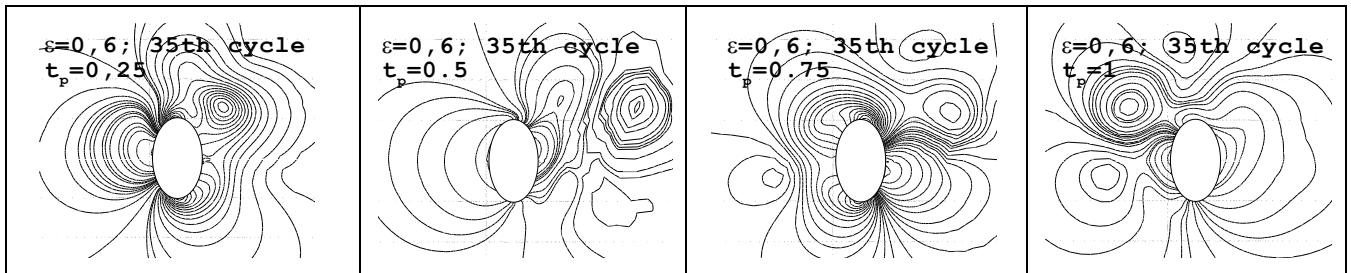
Pour ce qui est du champ de pression représenté sur la figure (5.5), ce dernier est asymétrique et correspond parfaitement aux changements de vorticité observés au cours du cycle visualisé sur la figure (5.4).

**V.2.1.C- Le champ de vorticité et de pression pour  $\varepsilon \in [0.4, 0.6]$**

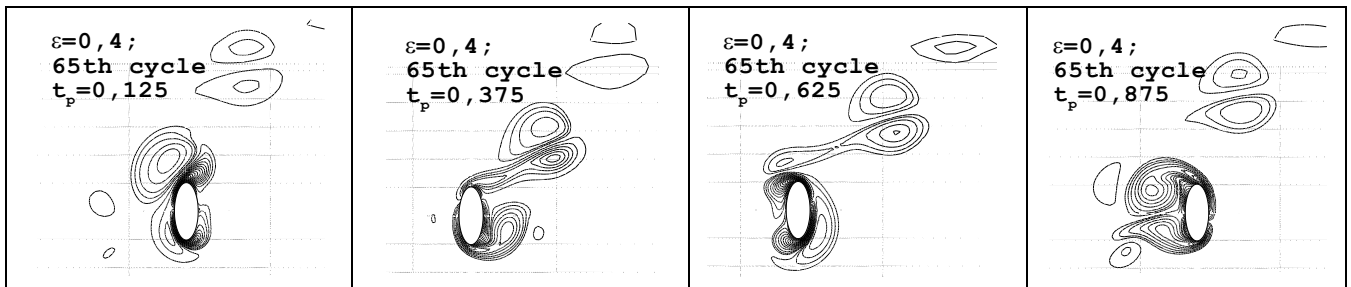
Dans le cas d'écoulement oscillant autour d'un cylindre ayant un rapport elliptique  $\varepsilon=0.6$  et après quelques cycles qui constituent une phase de démarrage, nous observons la création d'un détachement tourbillonnaire dans le domaine  $y>0$  constitué de deux vortex contrarotatifs s'élançant parallèlement à l'axe d'écoulement mais ce dernier ne s'éloigne pas trop du cylindre et est très vite ramener par l'écoulement changeant de direction et se dissipe par la suite au contact de la paroi du cylindre (voir figure 5.7).



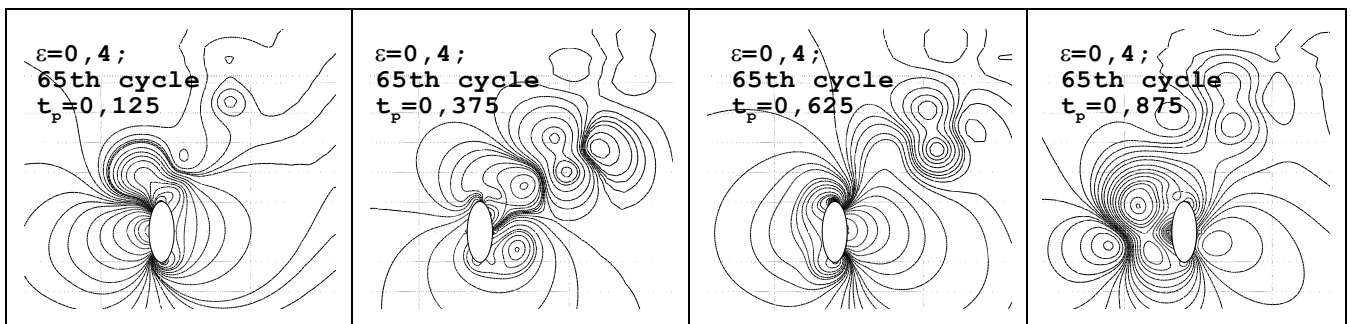
**Fig.5.7- Evolution iso-lignes de la vorticité  $\omega_z$  au cours du 35<sup>ième</sup> cycle pour le rapport elliptique  $\varepsilon=0.6$ .**



**Fig.5.8- Evolution iso-lignes du champ de pression au cours du 35<sup>ième</sup> cycle pour le rapport elliptique  $\varepsilon=0.6$ .**

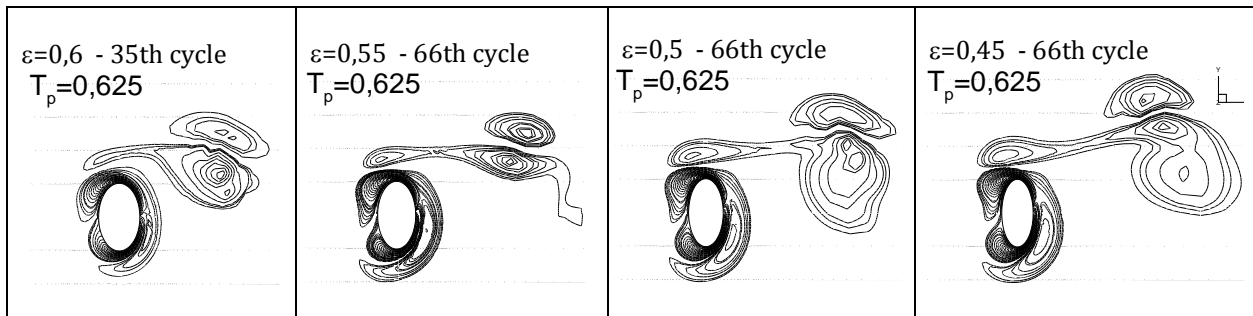


**Fig.5.9- Evolution iso-lignes de la vorticité  $\omega_z$  au cours du 65<sup>ième</sup> cycle pour le rapport elliptique  $\varepsilon=0.4$**



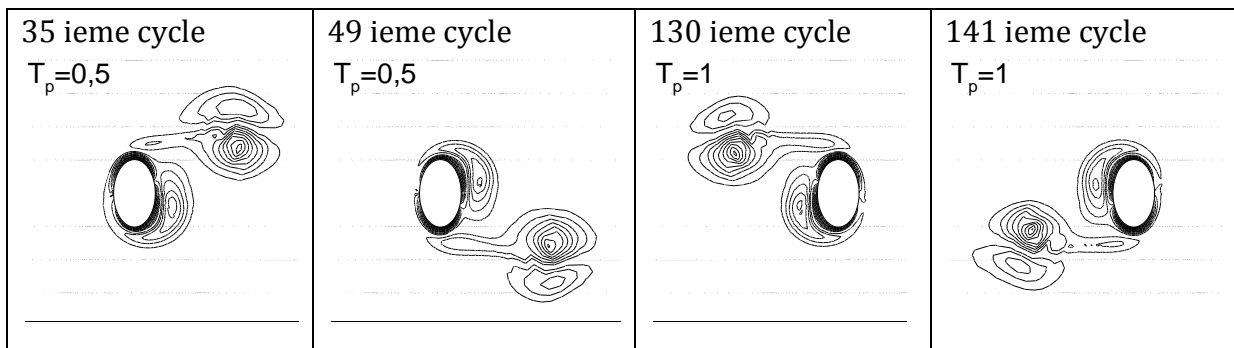
**Fig. 5.10.- Evolution iso-lignes du champ de pression au cours du 65<sup>ième</sup> cycle pour le rapport elliptique  $\varepsilon=0.4$ .**

Au fur et à mesure que ce rapport diminue ( $0,6 < \varepsilon \leq 0,4$ ) la trajectoire devient de plus en plus diagonal et les vortex-perdes convectent de plus en plus loin, ceci est clairement illustré sur la figure 5.11 ci-dessous.

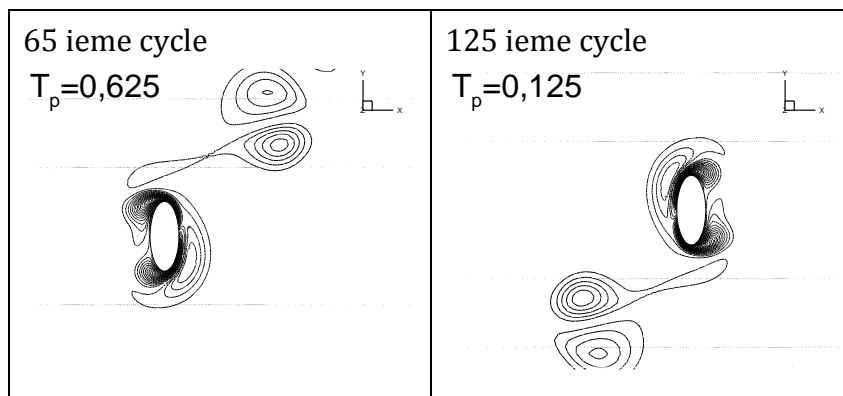


**Fig. 5.11-** Comparaison entre les pertes tourbillonnaires des différents rapports elliptiques.

A noter que cette perte tourbillonnaire change de direction et de position par rapport au cylindre. Les figures (5.12) et (5.13) montrent ces différents changements. A constaté aussi que le changement de direction ce fait avec un décalage d'angle de phase  $\Delta t_p = 0,5$ .

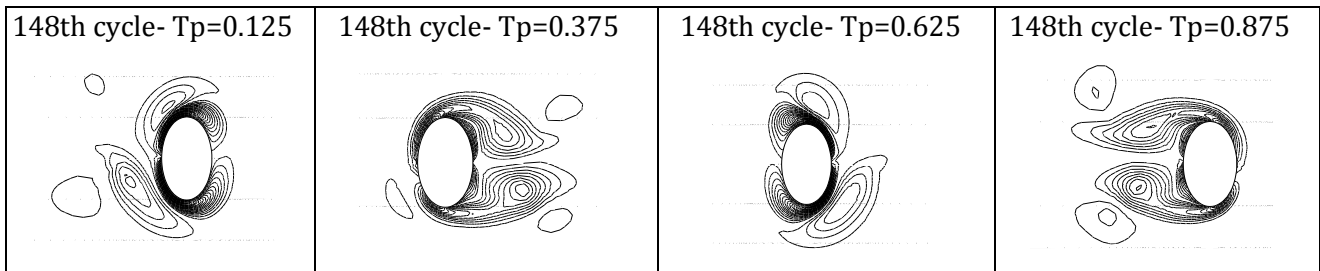


**Fig.5.12-** les différentes directions et positions de la perte tourbillonnaire pour le rapport elliptique  $\varepsilon=0.6$ .

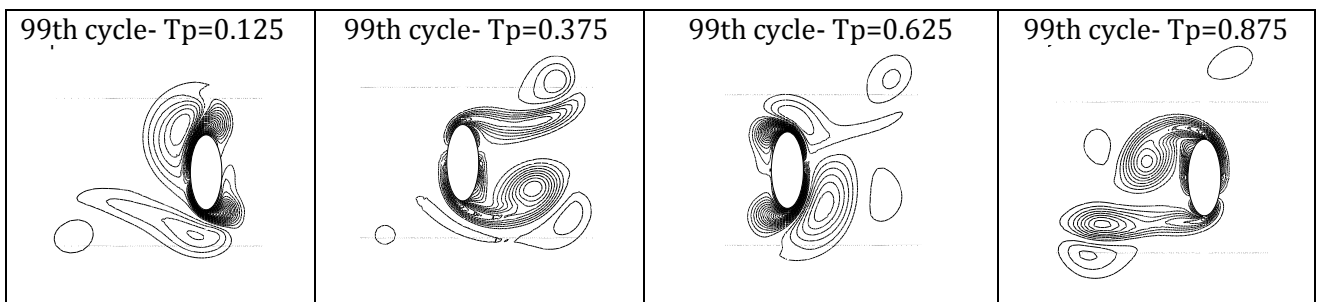


**Fig.5.13-** les différentes directions et positions de la perte tourbillonnaire pour le rapport elliptique  $\varepsilon=0.4$

Ceci dit, le changement de direction ou de position des pertes tourbillonnaires ne se fait pas de manière directe mais en passant par une phase intermittente durant quelques cycles ou l'écoulement tente à retrouver sa symétrie. Les figures (5.14) et (5.15) visualisent l'évolution de la vorticité au cours d'un cycle intermittent pour  $\varepsilon=0.6$  et  $\varepsilon=0.4$ .



**Fig. 5.14-** Evolution iso-lignes de la vorticité  $\omega_z$  au cours d'un cycle intermittent (**148**<sup>ieme</sup> cycle) pour le rapport elliptique  $\varepsilon=0.6$





**Fig. 5.15-** Evolution iso-lignes de la vorticité  $\omega_z$  au cours d'un cycle intermittent (**99**<sup>ieme</sup> cycle) pour le rapport elliptique  $\varepsilon=0.4$

L'analyse de la vorticité pour un rapport elliptique  $\varepsilon \in [0.6, 0.4]$  permet de discuter la stabilité et la régularité des détachements tourbillonnaires qui se sont manifestés durant le temps d'écoulement simulé. Les figures (5.16), (5.17) et (5.18) ci-après représentent l'historique de ces détachements durant 200 cycles pour les valeurs du rapport elliptique  $\varepsilon=0,6$  ;  $\varepsilon=0,5$  et  $\varepsilon=0,4$ .

En se référant à la figure (5.16), nous constatons que pour un rapport  $\varepsilon=0,6$  les pertes tourbillonnaires sont très instables car elles changent très souvent de direction et de position. Concernant la régularité pour ce rapport, nous remarquons que les phases intermittentes durent 3 cycles et que cette durée reste constante, on remarque aussi que les cas de figure (5.16.-Ci-Di-) se succèdent à un rythme régulier et semblent être parfaitement identiques en nombre de cycles contrairement aux figures (5.16.-Ai-Bi-) qui présentent des différences dans la durée à laquelle se succèdent les vortex-perte.

L'ensemble des historiques analysés indique qu'au fur que le rapport  $\varepsilon$  diminue, les vortex-pertes sont plus stables et durent plus longtemps, comme c'est le cas pour  $\varepsilon=0,4$  montré sur la figure (5.18). Cependant, nous ne pouvons pas dire autant pour ce qui est de la régularité, car les différents détachements se manifestent à un rythme non-régulier et les prochains changements de vorticité sont difficiles à prédire. Quant aux périodes intermittentes, elles ne durent que quelques cycles soit entre 2 et 4 cycles sur tout l'ensemble  $\varepsilon \in [0.4, 0.6]$ .

 : Représente un cycle développant une paires de tourbillons contrarotatifs à la position et dans la direction indiqué par la flèche.  
 : Représente un cycle intermittent.

















N° cycle	35	48	71	99	127	136	145	154	163	199							
																	-C3-D3-C4-D4- Avec C4=C3=C2=C1 D4=D3=D2=D1
	10cycles 3cycles		20cycles 3cycles		25cycles 3cycles		25cycles 3cycles		6cycles 3cycles		6cycles 3cycles		6cycles 3cycles		6cycles 3cycles		
	-A1-		-B1-		-A2-		-B2-		-C1-		-D1-		-C2-		-D2-		

Fig.5.16- historique des différentes formes de la vorticité  $\omega_z$  au cours de 200 cycles d'écoulement pour  $\epsilon = 0.6$

















N° cycle	20	58	79	99	108	145	153	162	200...								
																	
		4cycles 17cycles		2cycles 18cycles		2cycles 7cycles		2cycles 35cycles		2cycles 6cycles		2cycles 7cycles		2cycles .....			
	-A1-	-B1-		-C1-		-D1-		-C2-		-D2-		-C3-		-B2-			

Fig.5.17- historique des différentes formes de la vorticité  $\omega_z$  au cours de 200 cycles d'écoulement pour  $\epsilon = 0.5$

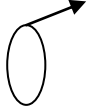



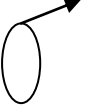
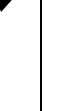
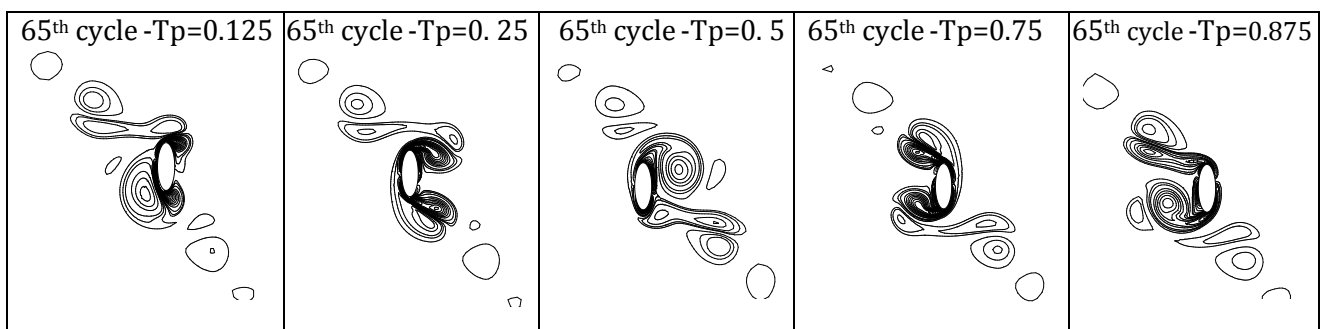
N° cycles	10	98	101	156	159	200...
						

Fig.5.18- historique des différentes formes de la vorticité  $\omega_z$  au cours de 200 cycles d'écoulement pour  $\epsilon = 0.4$

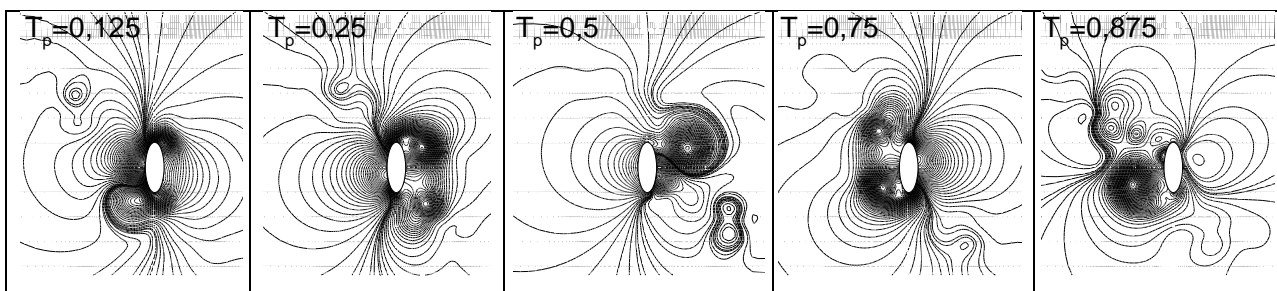
**V.2.1.D- Le champ de vorticité et de pression pour  $\epsilon = 0.35$**

Les résultats de vorticité obtenus pour l'écoulement oscillant autour d'un cylindre ayant un rapport  $\epsilon = 0.35$  montrent un comportement qui se caractérise par la création d'une paire de tourbillons qui se détache du cylindre à chaque demi-cycle et convecte loin du cylindre en une allée diagonale à l'axe longitudinal. Ce comportement est typique à celui observé sur un écoulement en régime F au tour d'un cylindre circulaire. La figure (5.19) montre la présence des deux tracés diagonaux qui se produisent au cours du 65<sup>ie</sup>me cycle pour ce même rapport elliptique. Le champ de pression associé est également visualisé sur la figure (5.20).

A noté aussi qu'au cours des 200 cycles simulés aucune commutation n'est observée, nous déduisons donc que cet écoulement est stable et régulier.



**Fig.5.19-** Evolution iso-lignes de la vorticité  $\omega_z$  pour le rapport elliptique  $\epsilon=0.35$ .



**Fig.5.20-** Evolution iso-lignes du champ de pression au cours du 65<sup>ie</sup>me cycle pour le rapport elliptique  $\epsilon=0.35$ .

**V.2.1.E- Le champ de vorticité et de pression pour  $\epsilon \in [0.1, 0.3]$**

L'écoulement dans le cas d'un rapport elliptique  $\epsilon \in [0.1, 0.3]$  présente un mélange des différentes formes identifiées auparavant, à savoir des mono-paires contrarotatives diagonaux observés dans les cas de  $\epsilon \in [0.4, 0.6]$ , des doubles paires semblables à ceux rencontrés dans le cas  $\epsilon = 0.3$  et des périodes de commutation assez difficiles à décrire.

Les figures (5.21) et (5.22) ci dessous illustrent respectivement les détachements double paires et mono-paires pour les rapports elliptiques  $\epsilon=0,3$  et  $\epsilon=0,1$ .

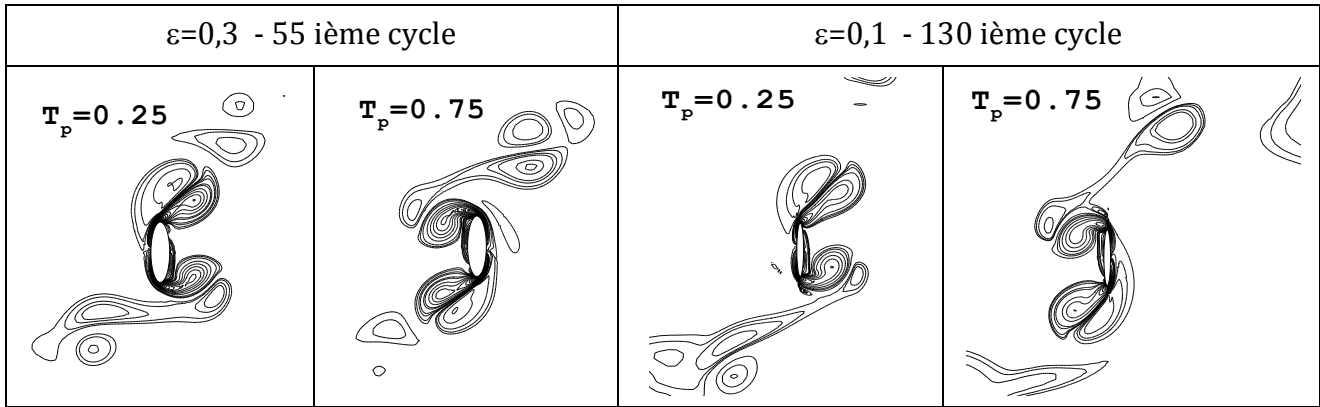


Fig.5.21 - Comparaison entre les pertes tourbillonnaires de types double-paires pour les rapports elliptique  $\varepsilon=0,3$  et  $\varepsilon=0,1$ .

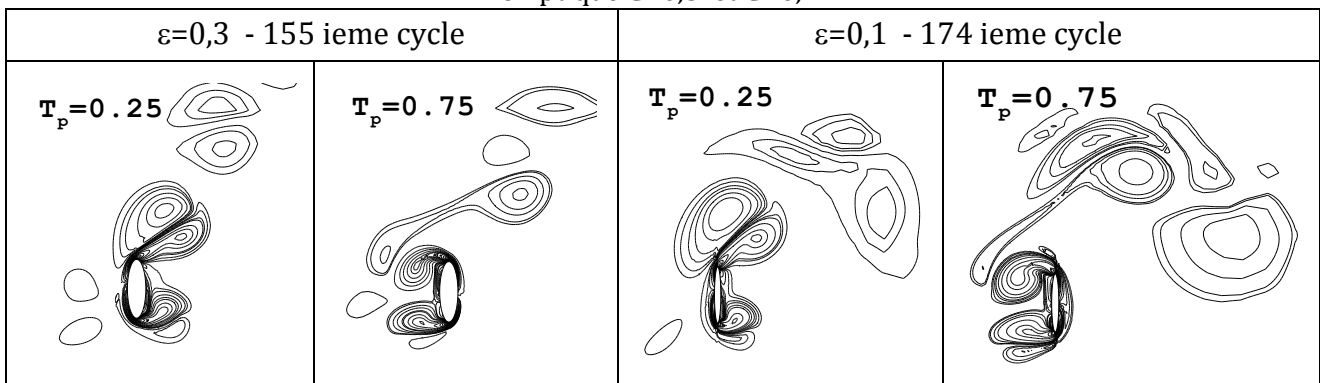


Fig.5.22 - Comparaison entre les pertes tourbillonnaires de types mono-paires pour les rapports elliptique  $\varepsilon=0,3$  et  $\varepsilon=0,1$ .

Quant aux périodes intermittentes, la figure (5.23) représentant la vorticité pour le rapport  $\varepsilon=0.3$  au cours de deux cycles consécutifs (198 et 197<sup>ème</sup> cycle) à différentes phases de position donne un aperçu de leurs complexités.

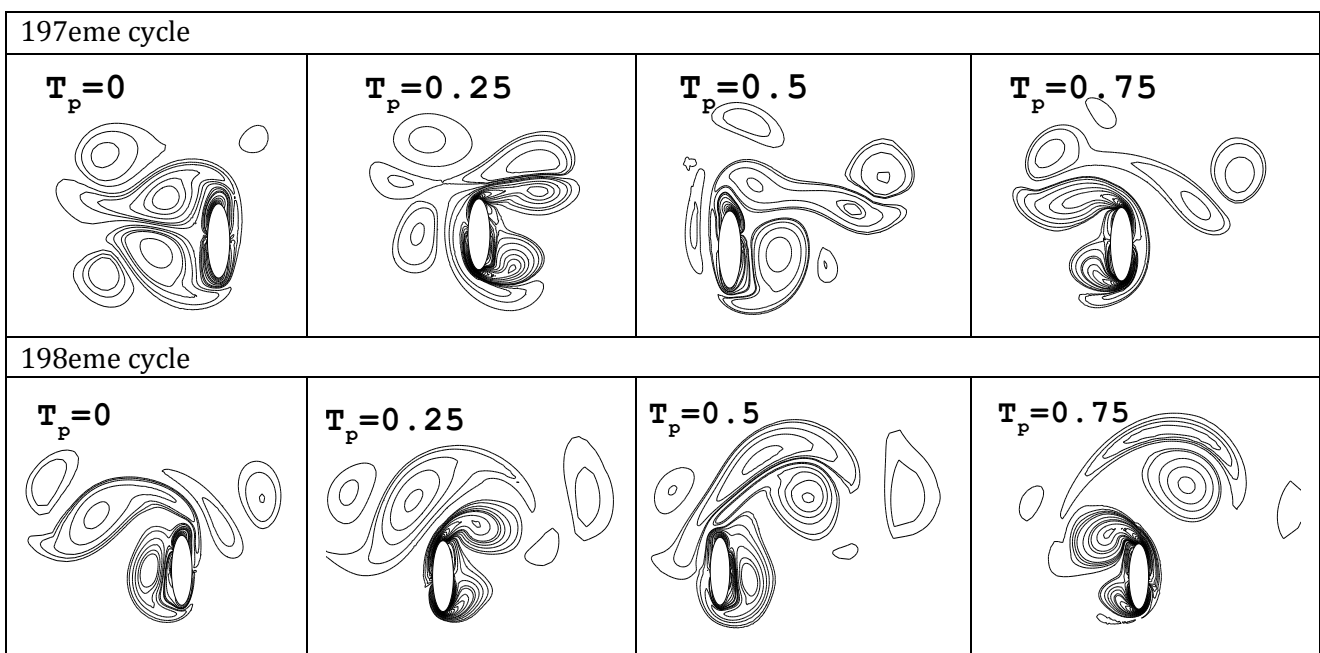


Fig.5.23- Evolution de la vorticité au cours de deux cycles d'intermittence consécutifs (197ième et 198ième cycle) pour le cas du rapport  $\varepsilon=0.3$

Les figures (5.24), (5.25), (5.26) et (5.27) schématisent respectivement les historiques des différents détachements tourbillonnaires observés durant les 200 cycles de simulations pour les valeurs du rapport elliptique  $\varepsilon = 0.3$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $\varepsilon = 0.2$  et  $\varepsilon = 0.1$  et nous permettent ainsi de discuter leur stabilité et leur régularité.

La figure (5.24) montre que les 200 cycles d'écoulement pour  $\varepsilon = 0.3$  sont réparti en 3 tranches de temps se distinguant chacune par l'apparition d'une seule forme de vortex-perte. A cet effet, nous déduisons donc que cet écoulement est pratiquement stable.

En observant les différents historique, nous remarquons qu'au-delà de ce rapport elliptique ( $\varepsilon < 0.3$ ), l'écoulement devient de plus en plus instable, car il admet un changement de forme des détachements tourbillonnaire de plus en plus fréquent. A noter aussi que ces changements sont assez difficile à prédire vue qu'aucune régularité dans leurs succession n'a été décelé au cours de ces 200 cycles étudiés.

**Remarque :** dans les figures (5.24), (5.25), (5.26) et (5.27) représentant les historiques ci-dessous, les différentes formes des détachements tourbillonnaires sont schématisées comme suite :



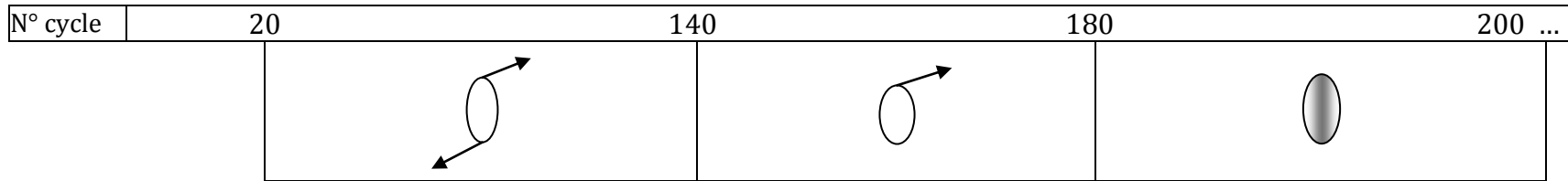
: Représente un cycle développant une paires de tourbillons contrarotatifs à la position et dans la direction indiqué par la flèche.



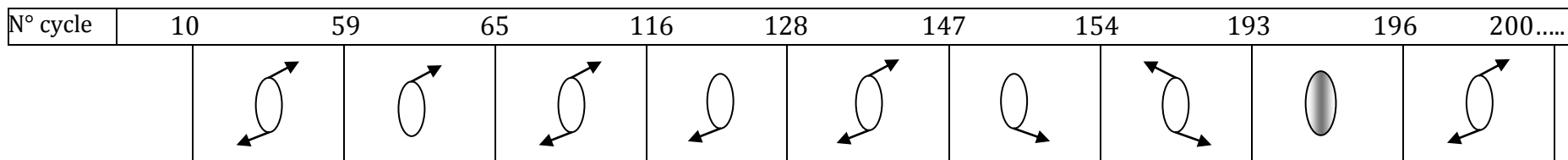
: Représente un cycle développant deux paires de tourbillons contrarotatifs aux positions et dans les directions indiquées par les flèches.



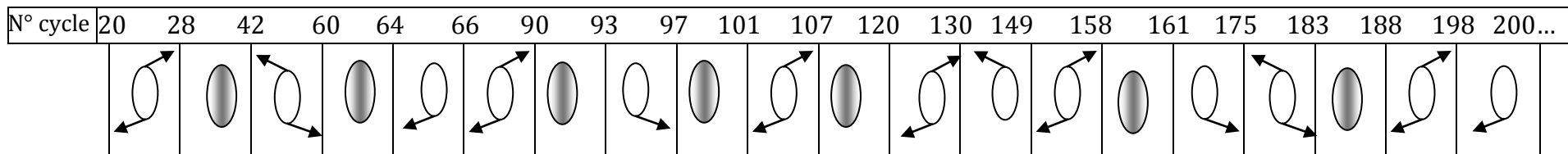
: Représente un cycle intermittent développant des détachements tourbillonnaire très complexes.



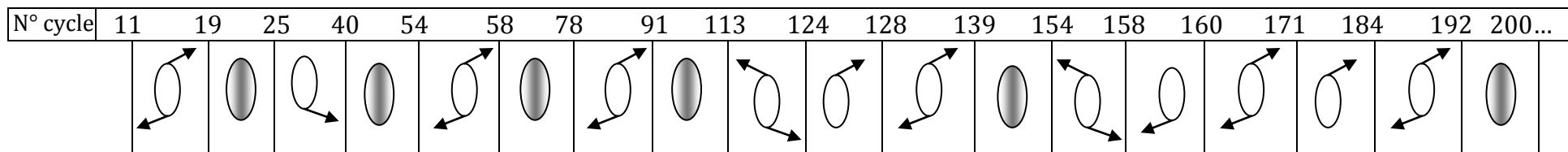
**Fig.5.24-** Historique des différentes formes de la vorticité  $\omega_z$  apparues au cours de 200 cycles d'écoulement pour  $\varepsilon = 0.3$



**Fig.5.25-** Historique des différentes formes de la vorticité  $\omega_z$  apparues au cours de 200 cycles d'écoulement pour  $\varepsilon = 0.25$



**Fig.5.26-** Historique des différentes formes de la vorticité  $\omega_z$  apparues au cours de 200 cycles d'écoulement pour  $\varepsilon = 0.2$



**Fig.5.27-** Historique des différentes formes de la vorticité  $\omega_z$  apparues au cours de 200 cycles d'écoulement pour  $\varepsilon = 0.1$

### V.2.2-Analyse des forces

Comme il est bien connu, la distribution du champ de vorticité affecte nettement les forces agissantes sur le cylindre. Dans cette partie du chapitre, nous explorons l'évolution au cours du temps des forces agissant sur le cylindre et l'effet du rapport elliptique sur leur grandeur.

Les figures (5.28) et (5.29) montrent respectivement l'évolution au cours du temps de la force transversale et la force longitudinale pour plusieurs valeurs du rapport elliptique. Nous constatons en premier lieu que la force longitudinale est beaucoup plus importante que la force transversale.

La figure (5.28) montre aussi que la variation du rapport elliptique affecte de façon considérable la force transversale. Les modulations de cette dernière semblent correspondre à l'instabilité provoquée par les tracés asymétriques des écoulements et dont les historiques ont été établis au cours de l'étude de la vorticité. La réduction du rapport elliptique a un effet double sur l'évolution de cette force en produisant en premier lieu une variation de l'amplitude de la force et favorisant l'asymétrie de l'écoulement en second.

Pour les rapports elliptiques  $\epsilon \in [0.8, 1]$  la force transversale résultante agissant sur le cylindre est nulle, cela est dû à la symétrie au plan  $y=0$  du champ de vorticité et de pression correspondant. En effet, ceci a été précédemment observé dans des investigations (TB90 et DDBL98).

Les modulations la force transversale apparaissent à partir d'un rapport elliptique de  $\epsilon=0.75$  et s'amplifient avec la réduction de ce dernier jusqu'à la valeur  $\epsilon=0.4$ . Au-delà de cette valeur (pour  $\epsilon \leq 0.4$ ), Ces dernières s'atténuent et décroissent au fur que le rapport diminue, cela s'explique du faite qu'un cylindre ayant un tel rapport d'axes offre un faible support dans la direction transversale sur lequel s'exercent les perturbations transversal crées par l'asymétrie de l'écoulement.

Concernant la force longitudinale (fig.5.29) et pour des rapports elliptiques  $1 \geq \epsilon \geq 0.6$  aucune modulation n'apparaît vue que l'écoulement reste à peut près symétrique. Par contre au fur et à mesure que le rapport  $\epsilon$  diminue ( $\epsilon \leq 0.6$ ), nous notons l'apparition de faibles modulations suivi d'une forte augmentation de l'amplitude de cette force.

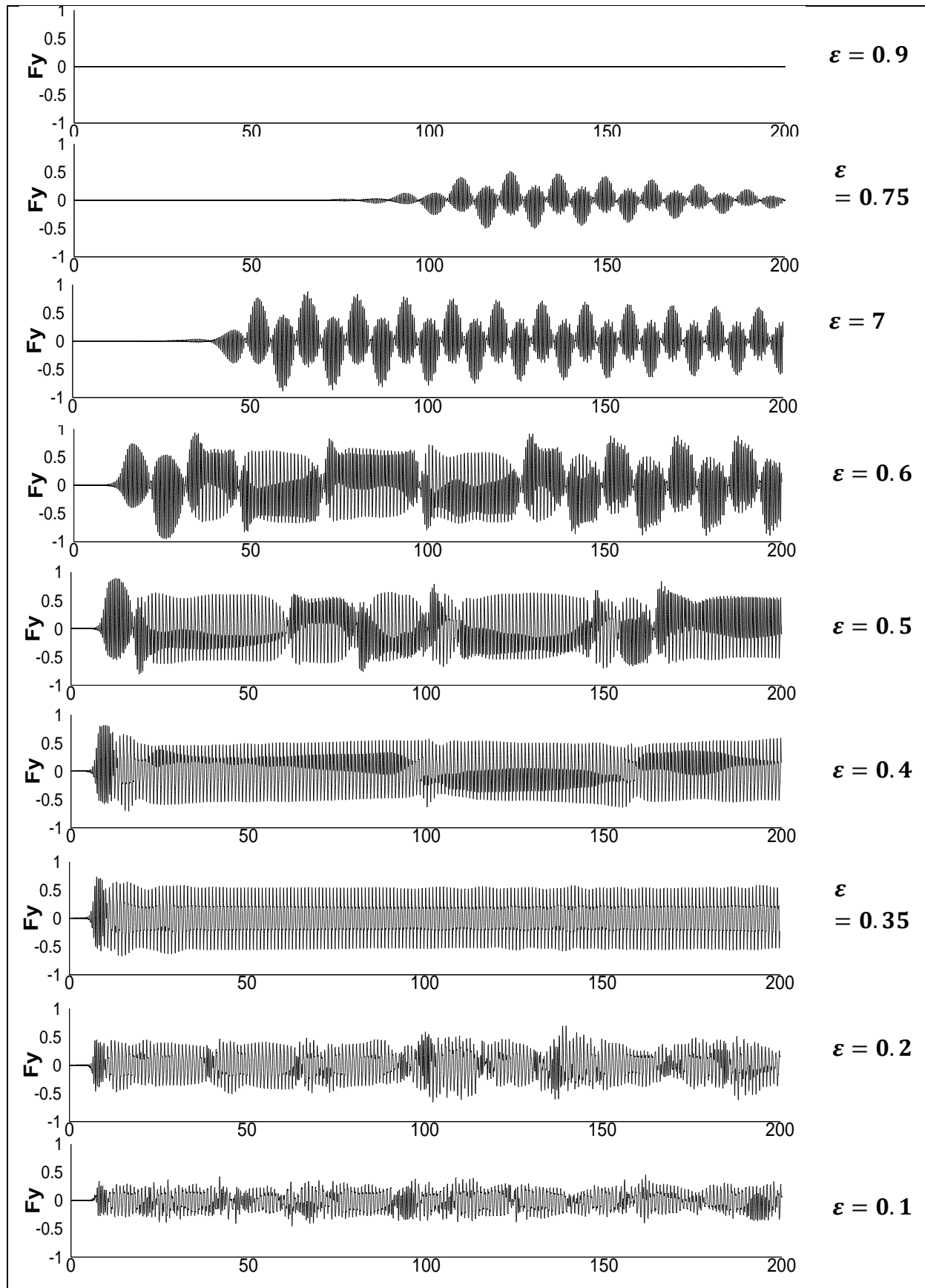
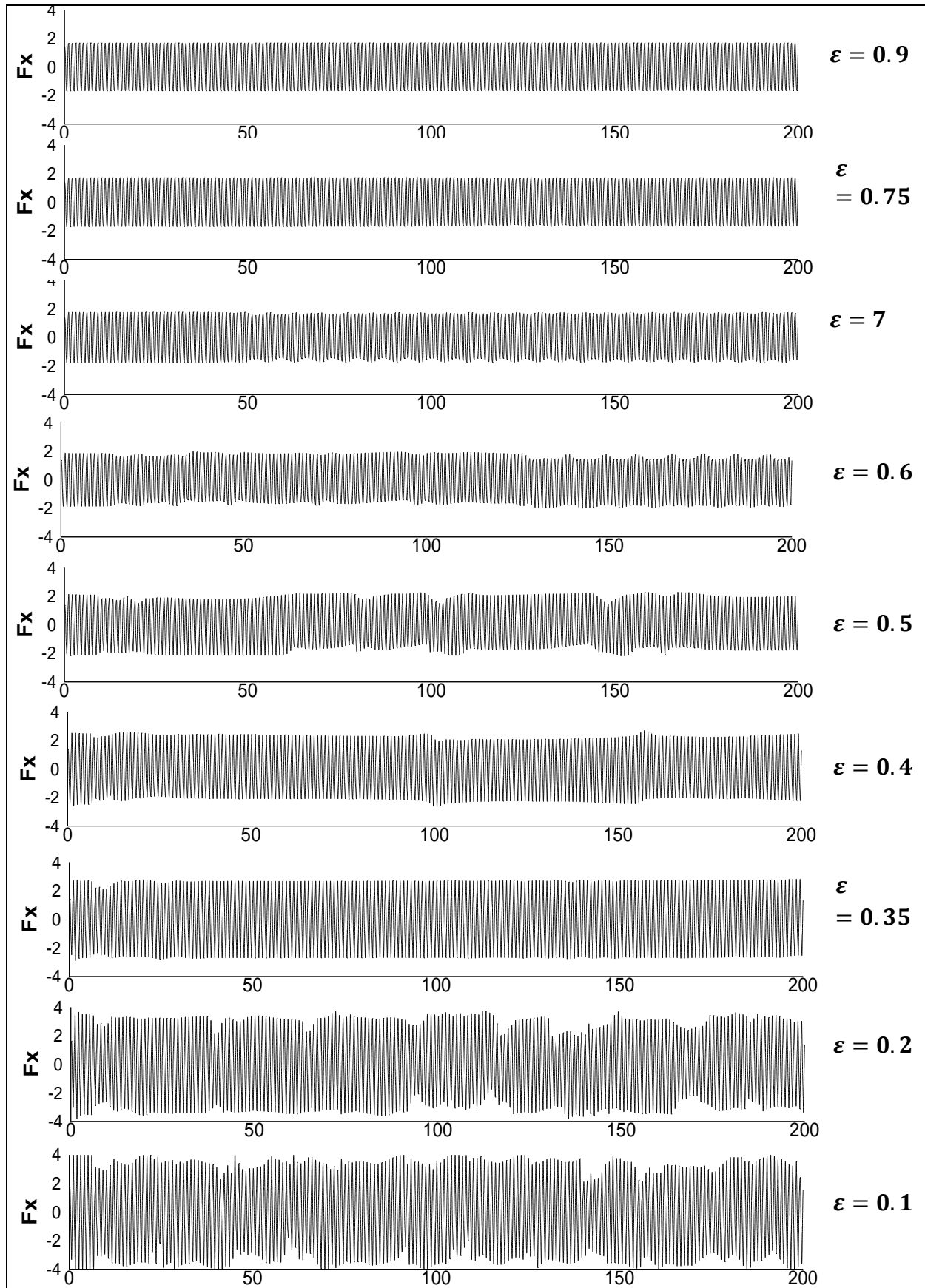


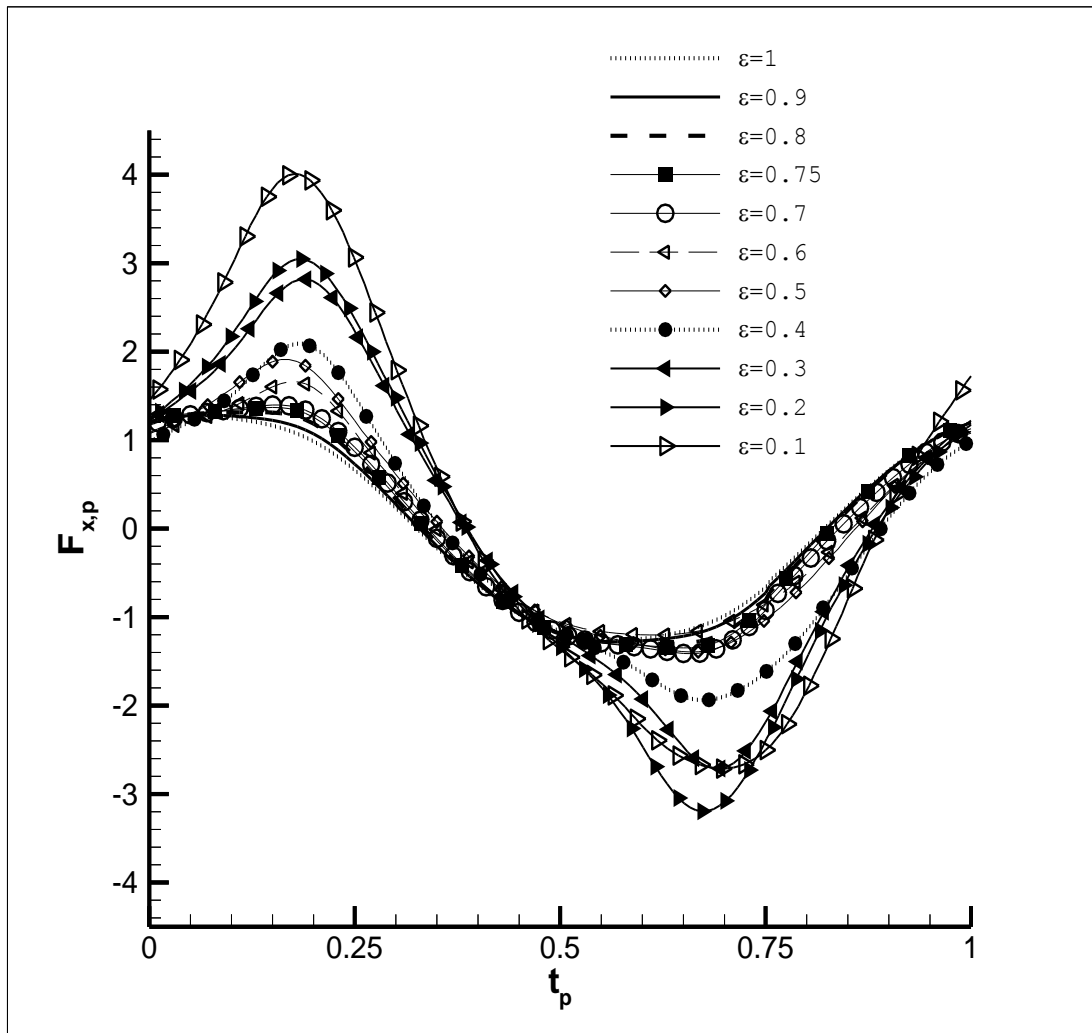
Fig.5.28- Historique de la force transversale totale adimensionnelle en régime A pour différents rapports elliptiques



**Fig.5.29-** Historique de la force longitudinale totale adimensionnelle en régime A pour différents rapports elliptiques

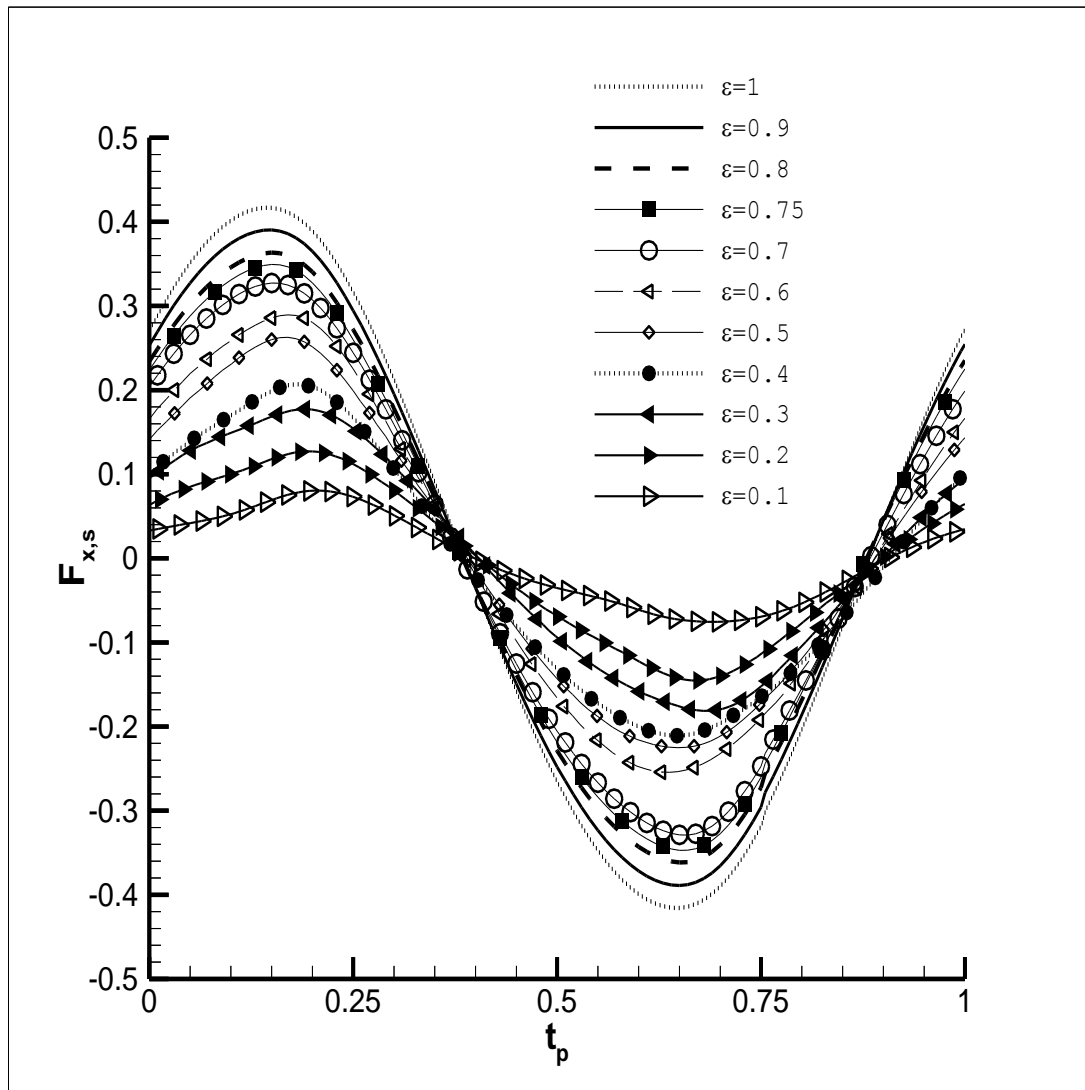
Les figures (5.30) et (5.31) illustrent respectivement la force longitudinale, de pression et de cisaillement qui agissent sur le cylindre pour plusieurs valeurs du rapport elliptique dans le cas du régime A.

La figure (5.30) prouve que la forme géométrique du cylindre influe énormément sur la force de pression, cette dernière augmente de façon considérable avec la réduction du rapport elliptique.



**Fig.5.30** - évolution temporelle de la force longitudinale adimensionnelle de pression durant le 90ieme cycle pour différentes valeurs du rapport elliptique  $\epsilon$  dans le régime A

Pour ce qui est de la force longitudinale de cisaillement représenté dans la figure (5.31), nous remarquons que celle-ci décroît avec la réduction du rapport elliptique et que cela est dû au faible support qu'offre l'obstacle pour cette force.



**Fig.5.31** - évolution temporelle de la force longitudinale adimensionnelle de cisaillement durant le 90ieme cycle pour différentes valeurs du rapport elliptique  $\mathcal{E}$  dans le régime A

### V.2.3-Les Coefficients de Morison

Comme il a été cité auparavant, la force longitudinale augmente avec la réduction du rapport elliptique. Ceci est clairement indiqué par Tableau (5.2) qui montre l'écart type (r.m.s) de la force longitudinale pour différent configurations géométriques en régime A. Cette augmentation est justifiée par le faite qu'un cylindre non-profilé (bluff body) manifeste une résistance d'avancement plus grande que celle d'un cylindre circulaire.

**Tableau 5.2-** Valeurs des coefficients de trainé et d'inertie ainsi que les forces totales transversale et longitudinale obtenues par simulation pour différent rapport elliptique

$\varepsilon(a/b)$	$C_d$	$C_m$	$F_{X,RMS}$	$F_{Y,RMS}$
1	2,135979	2,469449	1,322444	0
0.95	2,176954	2,462987	1,438257	0
0.9	2,225610	2,457829	1,435407	0
0.85	2.283334	2.454392	1.478578	0
0.8	2,351518	2,453188	1,594846	0
0.75	2,433087	2,442341	1,635844	0,2100795
0.7	2,548785	2,377667	1,667758	0,4905853
0.65	2,555239	2,318769	1,798138	0,6174034
0.6	2,727448	2,275393	1,979327	0,7013016
0.55	2,884988	2,258422	2,283679	0,6923050
0.5	3,088056	2,272116	2,407621	0,6563589
0.45	3,274404	2,312964	2,431617	0,5994699
0.4	3,611527	2,340739	2,689333	0,5488809
0.35	4,388152	2,436933	2,788132	0,5043852
0.3	4,622568	2,463940	2,940855	0,5624241
0.25	5,061966	2,530440	3,041387	0,3673795
0.2	5,290255	2,570223	3,508766	0,4180008
0.15	5.610051	2.684711	3.654495	0.3426593
0.1	5,807214	2,748950	3,793476	0,3014531

Les figures (5.32) et (5.33) interprètent respectivement les valeurs des coefficients de Morison et celles des forces totales transversale et longitudinale rapportés dans le tableau (5.2) et permettent ainsi de mettre en évidence l'influence du rapport elliptique sur ces grandeurs.

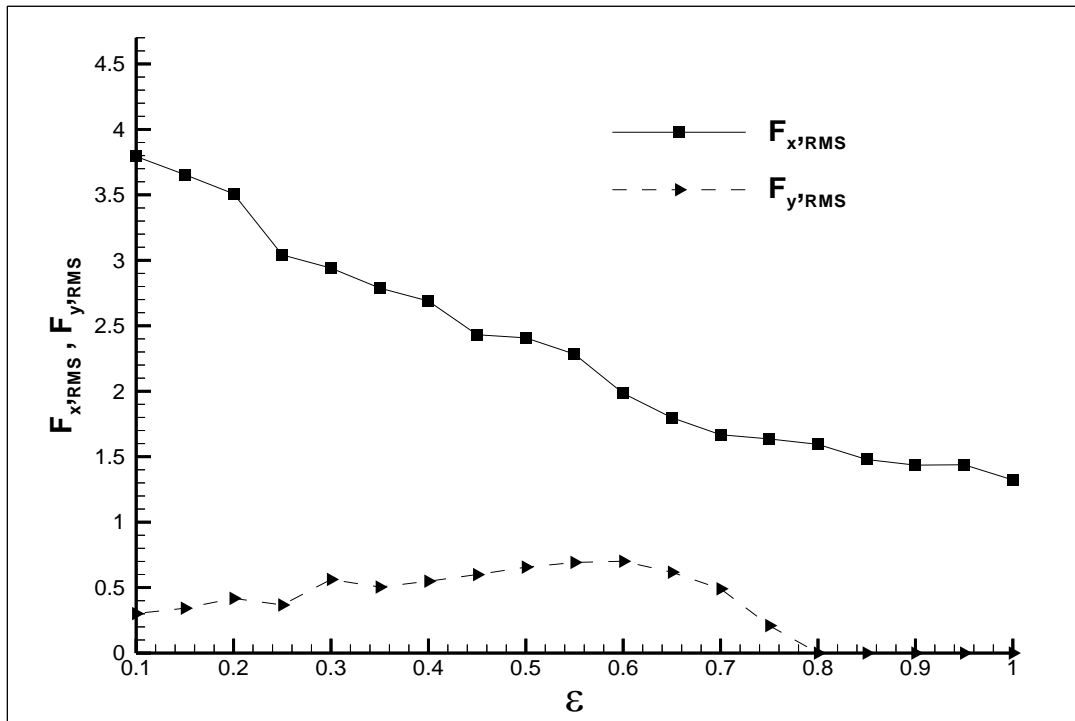


Fig. 5.32- L'influence du rapport elliptique sur l'écart type de la force longitudinale et transversale.

L'augmentation de la force longitudinale se répercute sur les coefficients de Morison. La figure (5.33) visualise ce comportement du coefficient d'inertie et du coefficient de traîné. D'après cette figure nous remarquons que le coefficient de traîné augmente fortement avec la réduction du rapport elliptique cela est dû à la forme de l'obstacle qui devient de plus en plus non-profilé, par contre nous notons que le coefficient d'inertie ne varie pas beaucoup au cours de l'évolution de ce rapport, ce qui prouve que l'évolution du rapport elliptique dans la direction longitudinal n'influe pas sur lui.

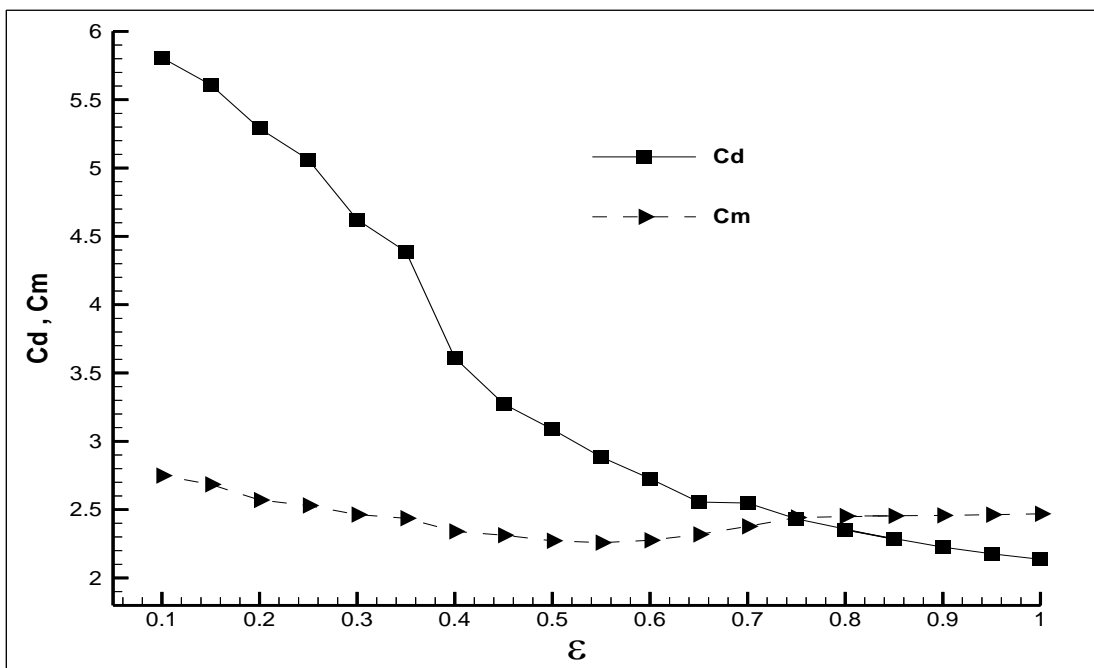


Fig. 5.33- L'influence du rapport elliptique sur les coefficients de Morison.

***Conclusion***

---

## **Conclusion**

L'écoulement sinusoïdal oscillant autour d'un obstacle cylindrique a été étudié numériquement, en résolvant les équations instationnaires bidimensionnelles de Navier-Stokes à l'aide d'un code source validé par des données expérimentales disponibles.

Ceci est la première recherche dans laquelle l'effet de la forme géométrique elliptique d'un cylindre sur le tracé tourbillonnaire et sur les coefficients de Morison est évalué pour le régime A.

Plusieurs valeurs du rapport elliptique ont été considérées, traversant un large éventail ; du cas du cylindre circulaire au cas d'un cylindre elliptique non-profilé. La direction de l'écoulement est orientée le long du petit axe.

Une présentation des structures du champ d'écoulement ainsi que le calcul des coefficients de Morison et les écarts types (r.m.s) des forces longitudinales et transversales en fonction du rapport elliptique ont été effectués.

Le champ de vorticité et de pression pour le cas des cylindres de section faiblement elliptique ( $1 < \epsilon < 0.8$ ) se montre très comparable à celui d'un cylindre circulaire. D'autre part, au fur à mesure que ce rapport diminue l'écoulement devient plus asymétrique en développant des différentes structures du vortex-pertes.

Nous constatons aussi que la composante longitudinale prédite de la force agissant sur le cylindre augmente avec la réduction de ce rapport. En ce qui concerne la force transversale, elle ne se manifeste qu'à partir du rapport elliptique  $\epsilon = 0.75$  et augmente avec la réduction de ce rapport jusqu'à une certaine limite ( $\epsilon = 0.4$ )   partir de la quelle cette force décroit en raison du faible support géométrique apporté par l'obstacle dans la direction transversal.

La présente étude nous a montré que le coefficient de traîné est sensible au tracé tourbillonnaire contrairement au coefficient d'inertie qui ne semble pas évolué.

*Références*

---

## Références

- [1]-Chu-Chang Chen, Fuh-Min Fang, Yi-Chao Li, Long-Ming Huang (2009) « Fluid forces on a square cylinder in oscillating flows with non-zero-mean velocities » INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS, 2009; 60:79–93
- [2]-Stokes, G. G. (1851). On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 9, 8.
- [3]-Morison, J. R., O'Brien, M. P., Johnson, J. W., & Schaff, S. A. (1950). The force exerted by surface waves on piles. Petroleum Transactions, 189, 149–154.
- [4]-Keulegan, G. H. & Carpenter, L. H. (1958). Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. Journal of Research of the National Bureau of Standard, 60 (5), 423–440.
- [5]-Sarpkaya, T. (1986). Forces on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter. Journal of Fluid Mechanics, 165, 61–71.
- [6]-Maull, D.J., and Milliner, M.G. (1978) Sinusoidal Flow Past a Circular Cylinder. *Coastal Engineering*, 2, 149-168.
- [7]-Bearman PW, Graham JMR, Obasaju ED, Drossopoulos GM. (1984)The influence of corner radius on the forces experienced by cylindrical bluff bodies in oscillatory flow. *Applied Ocean Research* 1984; 6:83–89.
- [8]-Tatsuno, M. & Bearman, P. W. (1990). A virtual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers and low Stokes numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 211, 157–182.
- [9]-Sarpkaya, T. (2002). Experiments on the stability of sinusoidal flow over a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 457, 157–180.
- [10]-Badr, H. M., Dennis, S. C. R., Kocabiyik, S., & Nguyen, P. (1995). Viscous oscillatory flow about a circular cylinder at small to moderate Strouhal number. *Journal of Fluid Mechanics*, 303, 215–232.
- [11]-Kuhtz, S. (1996). Experimental investigation of oscillatory flow around circular cylinder at low  $\beta$  numbers. Thèse de Doctorat, University of London - United Kingdom.
- [12]-Honji, H. (1981). Streaked flow around an oscillating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 107, 509–520.

- [13]-Hall, P. (1984). On the stability of unsteady boundary layer on a circular cylinder oscillating transversely in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 146, 347–367.
- [14]-Williamson, C. H. K. (1992). The natural and forced formation of spot like vortex dislocations in the transition wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 243, 393–441.
- [15]-Nehari, D., Armenio, V., & Ballio, F. (2004). Three-dimensional analysis of the unidirectional oscillatory flow around a circular cylinder at low Keulegan Carpenter and  $\beta$  numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 520, 157–186.
- [16]-Justesen, P. (1990). An numerical study of oscillating flow around a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 222, 157–196.
- [17]-Dutsch, H., Durst, F., Becker, S., & Lienhart, H. (1998). Low Reynolds number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 360, 249–271.
- [18]-Williamson C.H.K. (1985). Evolution of single wake behind a pair of bluff bodies. *J.Fluid Mech.*, Vol.159, pp.1-18.
- [19]-OKAJIMA, A., TAKATA, H.&ASANUMA, T. 1975 Viscous flow around a transversally oscillating elliptic cylinder. Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Report No. 533.
- [20]-Zheng W, Dalton C. (1999) Numerical prediction of force on rectangular cylinders in oscillating viscous flow. *Journal of Fluids and Structures* 1999; 13:225–249.
- [21]-Sumner D., Hemingson H. B., Deutscher D. M. and Barth J. E. (2007) « PIV Measurements of the Flow Around Oscillating Cylinders at Low KC Numbers » *Proceeding of IUTAM Symposium on 'Unsteady Separated Flows and their Control »* Volume 14, I, pp. 3-13, Corfu, Greece, 18-22 June 2007.
- [22]-CHOI J.-H. and LEE S.-J. (2000) « Ground effect of flow around an elliptic cylinder in a turbulent boundary layer » *Journal of Fluids and Structures*, vol. 14, 697-709
- [23]-Castiglia D., Balabani S., Papadakis G. and Yianneskis M. (2001) « An experimental and numerical study of the flow past elliptic cylinder arrays » *Proc Instn Mech Engrs Vol 215 Part C*, pp 1287-1301
- [24]-DAVIDSON, B. J.&RILEY, N. 1972 Jets induced by oscillatory motion. *Journal of Fluid Mechanics* 53, 287-303.
- [25]-TANEDA, S. 1977 Visual study of unsteady separated flows around bodies. *Progress in Aerospace Sciences* 17, 287-348.

- [26]-Badr, H. M., Dennis, S. C. R., Kocabiyik, S., & Nguyen, P. (1995). Viscous oscillatory flow about a circular cylinder at small to moderate Strouhal number. *Journal of Fluid Mechanics*, 303, 215–232.
- [27]-Gus'luwa N. Yu., Makhorty G. V., and Shcheglova M. G. (1998) « INERTIA AND DRAG OF ELLIPTIC CYLINDERS OSCILLATING IN A FLUID » *Fluid dynamics* Vol. 33, N°1, 1998, pp-91
- [28]-Vincent MELOT. (2006). Thèse de doctorat « Hydrodynamique instationnaire d'un cylindre sous choc ». Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes
- [29]-Zang, Street, R.L. Koseff, (1994). A non-staggered grid, fractional step methods for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear co-ordinates. *J. Comput. Phys.*, 114, 18.
- [30]-Jean-Christophe Robinet. (2011). « Méthodes numériques : Résolution numérique des équations différentielles ordinaires ». Laboratoire DynFluid, Arts & Métiers – ParisTech
- [31]-Gilles Leborgne. (2005). « Interpolation polynomiale, intégration numérique, résolution numérique d'équations différentielles ». Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année. <http://www.isima.fr/leborgne>
- [32]-Kim J. Moin P. (1985) Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 59, 308.
- [33]-Zang et Streets (1995). « Numerical simulation of coastal upwelling and interfacial instability of a rotation and stratified fluid ». *Journal of Fluid Mechanics* , 305: 47-75
- [34]-Sorenson, R.L. 1980 « A computer program to generate two-dimensional grids about airfoils and other shapes by the use of Poisson's equations ». *NASA Ames Research Center, NASA TM 81198*.
- [35]-Patrick Le Quéré et Bérengère Podvin. (2010). « Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles ».