



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHESCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BENBADIS DE MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

par

Kheira LIMAM

**ÉTUDE DE PROBLÈMES DE TRANSMISSION
RÉGÉS PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
ABSTRAITES DE TYPE ELLIPTIQUE**

Soutenue le 29 / 04 / 2012

Devant le Jury

Président Belaïdi Benharrat, Professeur, UMAB, Mostaganem

Examineurs Lemrabet Keddour, Professeur, USTHB, Alger

Sadallah Boubaker Khaled, Professeur, ENS de Kouba, Alger

Dogbé Christian, Maître de Conférences, Habilité, Université de Caen, France

Directeurs Medeghri Ahmed, Professeur, UMAB, Mostaganem

Labbas Rabah, Professeur, Université du Havre, France

Table des matières

Introduction	i
0.1 Objectif et description du problème	i
0.2 Motivation et exemple modèle	ii
0.3 Travaux effectués sur le même sujet	iii
0.4 Description des chapitres et résultats obtenus	iii
0.5 Perspectives	ix
1 Rappels	1
1.1 Les opérateurs fermés	1
1.2 L'intégrale de Dunford	2
1.3 Les semi-groupes	2
1.3.1 Les semi-groupes fortement continus (C_0 semi-groupe)	2
1.3.2 Les semi-groupes analytiques	4
1.4 Les espaces fonctionnels	4
1.4.1 Les espaces d'interpolation	5
1.4.2 Les espaces de Sobolev et de Besov	7
1.4.3 Les espaces de Hölder et les espaces BUC	8
1.4.4 Les espaces UMD	8
1.5 Les puissances fractionnaires, classe $\text{Bip}(\theta; E)$	9
1.6 Sommes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach	11
1.6.1 Sommes commutatives	11
1.6.2 Sommes non commutatives	14
2 Problème de transmission dans un domaine non borné dans le cadre L^p	15
2.1 Position du problème	15
2.2 Lemmes techniques	16
2.3 Utilisation des intégrales de Dunford	28
2.3.1 Représentation de la solution	29
2.3.2 Solution stricte	36
2.3.3 Régularité Maximale	43
2.4 Utilisation des semi-groupes	46

2.4.1	Représentation de la solution	50
2.4.2	Solution stricte	51
2.4.3	Problème limite	54
3	Problème de transmission dans un domaine non borné dans le cadre continu	60
3.1	Position du problème	60
3.2	Conditions nécessaires	62
3.3	Solution stricte	70
3.4	Régularité maximale	82
4	Problème de transmission avec conditions aux limites de type Robin dans le cadre L^p	94
4.1	Position du problème et hypothèses	94
4.2	Lemmes techniques	97
4.3	Résolution du problème P_ω^δ	105
4.3.1	Résolution du problème $P_+^{\delta,\omega}$	105
4.3.2	Résolution du problème $P_-^{\delta,\omega}$	107
4.3.3	Solution complète	109
4.4	Solutions strictes	112
4.5	Cas Particuliers	117
4.5.1	Le cas $H = 0$	118
4.5.2	Le cas $H = \alpha I$ avec $\alpha > 0$	119
4.5.3	Le cas $H = \sqrt{-A_\omega}$	120
4.5.4	Le cas $H = (-A_\omega)^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1/2$	121
5	Exemples	122
5.1	Exemples sur le premier modèle	122
5.2	Exemples sur le second modèle	130

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire de Mathématiques pures et appliquées de l'université de Mostaganem Abdelhamid Benbadis.

J'exprime ma profonde reconnaissance à mes directeurs de thèse, Messieurs les Professeurs Rabah Labbas et Ahmed Medeghri pour leurs aides précieuses, leurs encouragements permanents et leurs conseils judicieux.

J'ai le plaisir de remercier infiniment le Professeur Belaïdi Benharrat qui a bien voulu présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur le Professeur Keddour Lemrabet pour m'avoir inspiré ce thème de recherche, pour ses conseils précieux et pour avoir accepté d'être membre de ce jury.

Monsieur Boubaker Khaled Sadalah, Professeur à l'ENS de Kouba et Monsieur Christian Dogbé, Maître de conférences habilité à l'université de Caen ont accepté de faire partie du jury de cette thèse ; je leur exprime ma gratitude et mes remerciements.

Je remercie également l'ensemble de mes collègues et particulièrement les membres de l'équipe de recherche « Equations différentielles abstraits (EDA) et théorie des sommes d'opérateurs » qui m'ont accompagné durant la préparation de cette thèse.

Je voudrai aussi exprimer ma grande affection à toute ma famille, en particulier, mes parents, mes sœurs et mon frère, pour leur présence continue et leur soutien indéfectible.

Enfin, je remercie infiniment toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et qui m'ont soutenue.

Introduction

0.1 Objectif et description du problème

Cette thèse est consacrée à l'étude d'une classe d'équations différentielles opérationnelles du second ordre de la forme

$$(u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) - \omega u^\delta(x) = g^\delta(x), \quad \text{pour } \omega \geq 0, \quad (0.1.1)$$

posée dans un espace de Banach complexe E , sur un domaine Ω^δ constitué par deux milieux différents, l'un est fixe (par exemple $] \beta, 0[$ avec $\beta < 0$) et l'autre est une couche mince d'épaisseur $\delta \in]0, 1]$ (i.e. $\Omega^\delta =] \beta, 0[\cup]0, \delta[$). Sur les bords on impose des conditions aux limites non homogènes à coefficients opérateurs de type

$$\mathbf{k} (u^\delta)'(\beta) + \mathbf{h} u^\delta(\beta) = f_-, \quad K (u^\delta)'(\delta) + H u^\delta(\delta) = f_+, \quad (0.1.2)$$

avec des conditions de transmission sur l'interface (entre les deux milieux)

$$\mu_- (u^\delta)'(0_-) = \mu_+ (u^\delta)'(0_+), \quad u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+), \quad (0.1.3)$$

tels que f_+^δ, f_- sont deux éléments de E . Ici, $A, \mathbf{k}, \mathbf{h}, K$ et H sont des opérateurs linéaires fermés à valeurs dans E , μ_-, μ_+ sont deux constantes réelles positives non nulles et distinctes exprimant la conductivité des deux milieux.

L'objectif de cette thèse est l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte de l'équation (0.1.1) avec les conditions (0.1.2) et (0.1.3) pour deux modèles et sous certaines hypothèses sur les opérateurs.

Le premier modèle :

$$\beta = -\infty, \quad \omega = 0, \quad \mathbf{k} = H = 0, \quad K = \mathbf{h} = I \quad \text{et} \quad f_- = 0.$$

On développe dans ce modèle deux cadres d'études :

- a) Lorsque le second membre est $L^p(\Omega^\delta)$: ici, on utilisera la méthode de calcul fonctionnel de Dunford lorsque E est quelconque et celle des semi-groupes analytiques lorsque E est UMD.

b) Lorsque le second membre est höldérien par morceaux : ici, les techniques utilisées reposent sur le calcul fonctionnel de Dunford et la théorie de Sinestrari.

Le second modèle :

$$\beta = -1, \quad \mathbf{h} = 0, \quad K = \mathbf{k} = I.$$

On utilisera, ici, la méthode de réduction de l'ordre de Krein [22] et le célèbre Théorème de Dore et Venni.

0.2 Motivation et exemple modèle

Beaucoup de phénomènes physiques et biologiques sont modélisés par des problèmes de transmissions. A titre d'exemple, on considère, dans une bande avec une couche mince

$$\Omega^\delta \times \mathbb{R} := (]-1, 0[\cup]0, \delta]) \times \mathbb{R},$$

le problème de propagation de la chaleur u^δ en régime permanent avec une source interne de chaleur $g^\delta \in L^p(\Omega^\delta \times \mathbb{R})$, pour $1 < p < \infty$. Il est modélisé par l'équation

$$\Delta u^\delta(x, y) = g^\delta(x, y), \quad (x, y) \in \Omega^\delta \times \mathbb{R}. \quad (0.2.1)$$

A l'interface $\{0\} \times \mathbb{R}$ des deux milieux possédant des conductivités différentes μ_- et μ_+ , la conservation des flux s'écrit

$$\mu_- \frac{\partial u^\delta}{\partial x}(0_-, y) = \mu_+ \frac{\partial u^\delta}{\partial x}(0_+, y), \quad (0.2.2)$$

avec la continuité de la chaleur

$$u^\delta(0_-, y) = u^\delta(0_+, y). \quad (0.2.3)$$

Enfin, sur les bords $\{-1\} \times \mathbb{R}$ et $\{\delta\} \times \mathbb{R}$, on peut considérer les conditions aux limites suivantes

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial x}(-1, y) = f_-(y), \quad \frac{\partial u^\delta}{\partial x}(\delta, y) - \frac{\partial u^\delta}{\partial y}(\delta, y) = f_+(y). \quad (0.2.4)$$

Considérons, dans l'espace $E := L^p(\mathbb{R})$, les opérateurs A et H définis par

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}) \\ A\psi = \psi'' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D(H) = W^{1,p}(\mathbb{R}) \\ H\psi = -\psi' \end{cases}$$

Grâce au Théorème de Fubini ; on a

$$L^p(\Omega^\delta \times \mathbb{R}) \simeq L^p(\Omega^\delta; L^p(\mathbb{R})),$$

et utiliser les notations vectorielles usuelles

$$u^\delta(x, y) := u^\delta(x)(y) \quad \text{et} \quad g^\delta(x, y) := g^\delta(x)(y),$$

le problème (0.2.1)–(0.2.4) s’écrit de la manière opérationnelle suivante

$$\begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x), & x \in \Omega^\delta \\ (u^\delta)'(-1) = f_-, & (u^\delta)'(\delta) + Hu^\delta(\delta) = f_+, \\ u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+), & \mu_-(u^\delta)'(0_-) = \mu_+(u^\delta)'(0_+). \end{cases}$$

C’est ce dernier problème qui sera étudié dans un cadre général (A, H peuvent être d’autres opérateurs).

0.3 Travaux effectués sur le même sujet

Plusieurs travaux ont traité ce genre de problèmes dans différents cadres fonctionnels, par exemple, dans le cadre hilbertien on cite les travaux de Caloz *et al.* [9] et de Nicaise [31]. La technique utilisée par ces auteurs est celle des développements asymptotiques. Favini *et al.* [17] ont étudié un problème aux limites et de transmission posé dans un domaine borné composé de deux corps homogènes par morceaux dans le cadre L^p ($1 < p < \infty$). Ces auteurs ont utilisé la théorie des sommes d’opérateurs linéaires de Da-Prato et Grisvard et les résultats sont obtenus pour un second membre dans un espace d’interpolation. Dans [3], Belhamiti *et al.* ont étudié une famille de problèmes de transmission pour une équation différentielle abstraite dans le cadre höldérien. Ils ont obtenu des conditions nécessaires et suffisantes sur les données pour avoir un résultat optimal pour la solution stricte.

Plus récemment, Bouziani *et al.* [6] ont montré, dans les espaces de Hölder, l’existence, l’unicité et la régularité maximale de la solution stricte d’une famille de problèmes aux limites et de transmission régis par des équations différentielles abstraites de type elliptique à coefficients opérateurs variables $(A(x))_{x \in [-1, \delta]}$. L’hypothèse essentielle dans ce travail sur la famille $(A(x))_{x \in [-1, \delta]}$ est celle qui a été utilisée dans la thèse de Labbas [23]. Cette dernière s’inspire sur le commutateur de Labbas-Terreni, voir [25].

Dans le cadre L^p ($1 < p < \infty$) et β fini, E est UMD, un travail très fin et complet (voir Dore *et al.* [15]) a été publié récemment. Ici, les principaux outils utilisés pour montrer l’existence, l’unicité et la régularité maximale sont les opérateurs d’impédance et le calcul fonctionnel H^∞ .

0.4 Description des chapitres et résultats obtenus

Cette thèse est composée de cinq chapitres.

Dans le **premier chapitre**, on donne des rappels sur quelques notions de base d’analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans ce travail. En particulier, le calcul fonctionnel de Dunford, la théorie des semi-groupes [32], la théorie des sommes d’opérateurs linéaires [13], [12], [25], [26] et [30], les espaces d’interpolation [21], [36], les puissances fractionnaires d’opérateurs [33].

Le deuxième chapitre est composé de deux parties. La première est consacrée à l'étude du problème suivant (pour $\delta \in]0, 1[$ fixé)

$$\begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x) & p. p. x \in (-\infty, 0) \cup (0, \delta) \\ (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \\ u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+), \quad \mu_-(u^\delta)'(0_-) = \mu_+(u^\delta)'(0_+), \end{cases} \quad (\text{P}_0^\delta)$$

tel que A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset E$ vérifiant l'unique hypothèse d'ellipticité

$$\begin{cases} \rho(A) \supset [0, +\infty[\text{ et } \exists C > 0 \text{ tel que} \\ \forall \lambda \in [0, +\infty[: \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + \lambda}, \end{cases} \quad (\text{H.1})$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A . Ici

$$g^\delta(x) = \begin{cases} g_-(x) & p. p. x \in (-\infty, 0) \\ g_+^\delta(x) & p. p. x \in (0, \delta), \end{cases}$$

avec

$$g_- \in L^p(-\infty, 0; E); \quad g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E).$$

Il est connu que l'hypothèse (H.1) n'implique pas que A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique mais nous permet de définir l'opérateur $B := -(-A)^{1/2}$ qui est générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique noté $(e^{tB})_{t \geq 0}$ (voir Balakrishnan [1] page 419). De plus, il existe deux constantes positives a et M telles que, pour tout $t > 0$ on a

$$\|e^{tB}\|_E \leq Me^{-at} \quad \text{et} \quad \|B^m e^{tB}\|_E \leq Mt^{-m} e^{-at}, \quad (0.4.1)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ (pour plus de détail voir Pazy [32] Théorème 6.13 page 74). Sous la même hypothèse, on déduit qu'il existe $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ et $r_0 > 0$ tels que

$$\rho(A) \supset S_{\theta_0, r_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta_0\} \cup \overline{B(0, r_0)},$$

et l'estimation dans (H.1) reste vraie dans S_{θ_0, r_0} .

On décompose (P_0^δ) en deux problèmes, l'un sans second membre mais avec des conditions aux limites non homogènes et l'autre avec second membre et des conditions aux limites homogènes. Pour ce dernier on applique la théorie des sommes d'opérateurs.

Les résultats obtenus, dans cette partie, sont donnés par

Théorème 0.4.1 *Sous l'hypothèse (H.1) et pour $g^\delta \in L^p(-\infty, \delta; D_A(\theta, p))$ où $0 < \theta < 1$ et $1 < p \leq \infty$, le problème (P_0^δ) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si*

$$f_+^\delta \in D_A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p\right).$$

Théorème 0.4.2 *Supposons (H.1). Soient $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$, $g^\delta \in L^p(-\infty, \delta; D_A(\theta, p))$ avec $1 < p \leq \infty$ et $0 < 2\theta < 1$. Alors*

$$(u^\delta)'' \text{ , } Au^\delta \in L^p(-\infty, \delta; D_A(\theta, p)),$$

si et seulement si

$$f_+^\delta \in D_A\left(\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p\right).$$

Remarque 0.4.1 Si u^δ est une solution stricte du problème (P_0^δ) , alors

$$\begin{cases} u_+^\delta \in W^{2,p}(0, \delta; E) \cap L^p(0, \delta; D(A)) \\ u_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)), \end{cases}$$

on a nécessairement

$$u_-^\delta(-\infty) = 0,$$

(selon Brezis [8], corollaire VIII. 8 page 130.) et

$$f_+^\delta \in (D(A); E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

En effet, comme dans la remarque 1 de [18], page 197. Posons

$$\tilde{u}_+^\delta(x) = \begin{cases} u_+^\delta(x) & \text{si } x \in (0, \delta) \\ 0 & \text{si } x \in (\delta, \infty), \end{cases}$$

donc, on peut voir facilement que

$$\tilde{u}_+^\delta(\cdot) \in W^{2,p}(0, +\infty; E) \cap L^p(0, +\infty; D(A)).$$

En utilisant les notations de Lions-Peetre [28] chapitre VI, il vient

$$\tilde{u}_+^\delta(\cdot) \in V_2(p, 0, D(A); p, 0, E),$$

d'après la définition (1.1) dans [28] page 40, on obtient

$$(\tilde{u}_+^\delta)'(0) \in T_1^2(p, 0, D(A); p, 0, E),$$

et grâce aux Théorème (2.1) page 43 et Théorème (5.2) page 15 de [28], il vient

$$\begin{aligned} & T_1^2(p, 0, D(A); p, 0, E) \\ &= S\left(p, \frac{1}{p} + 1, D(A); p, \frac{1}{p} - 1, E\right) \\ &= S\left(p, \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, D(A); p, \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}, E\right) \\ &= T_0^1\left(p, -\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, D(A); p, -\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, E\right) \\ &= \left\{u(0) : t^{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}}u \in L^p(0, \infty; D(A)), t^{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}}u' \in L^p(0, \infty; E)\right\} \\ &= (D(A); E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(\tilde{u}_+^\delta)'(0) \in (D(A); E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

De plus $\tilde{u}_+^\delta \in C^1\left([0, \infty[; (D(A); E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}\right)$, alors

$$(\tilde{u}_+^\delta)'(\delta) = (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \in (D(A); E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

Dans la **seconde partie** de ce chapitre, qui a fait l'objet d'une publication au journal Applied Mathematics and computation (Voir [27]), on étudie le même problème mais on ne supposera pas que le second membre est à valeurs dans un espace d'interpolation. On ajoute alors deux hypothèses, l'une sur l'espace E

$$E \text{ est un espace } UMD, \quad (\text{H.0})$$

et l'autre sur l'opérateur A

$$\exists C > 1, \theta \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} : \|(-A)^{is}\| \leq C e^{\theta|s|}. \quad (\text{H.2})$$

(i.e. A est de classe $\text{Bip}(\theta, E)$.)

L'hypothèse (H.0) entraîne la réflexivité de E , cependant l'opérateur A est sectoriel, donc, le domaine $D(A)$ est dense dans E (pour plus de détail voir Haase [21] Proposition 2.1.1 pages 18-19).

D'autre part, l'hypothèse (H.2) implique que

$$\exists C > 1, \theta \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \left\| \left(\sqrt{-A} \right)^{is} \right\| \leq C e^{\frac{\theta}{2}|s|},$$

ce qui signifie que $\sqrt{-A}$ est $\text{Bip}(\theta/2; E)$ (voir Haase [21], Proposition 3.2.1, pages 62-63).

Les techniques employées, ici, sont basées sur la théorie des semi-groupes et le célèbre Théorème de Dore et Venni. Le résultat obtenu dans cette partie est donné par

Théorème 0.4.3 *On suppose (H.0), (H.1) et (H.2). Soient*

$$g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E), \quad g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$$

avec $1 < p < \infty$. Alors le problème (P_0^δ) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si

$$f_+^\delta \in (D(A); E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}.$$

On termine cette partie par étudier le problème limite de (P_0^δ) quand δ tend vers zéro, dans le cas particulier $\mu = \mu_+/\mu_- = 1/\delta$. Le résultat est

Théorème 0.4.4 *On suppose (H.0), (H.1) et (H.2). Soient $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$, $1 < p < \infty$. S'ils existent l et L tels que*

$$l = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f_+^\delta}{\delta} \quad \text{et} \quad L = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(s) ds.$$

Alors le problème

$$(P_-) \quad \begin{cases} u''_-(x) + Au_-(x) = g_-(x), & p.p. x \in (-\infty, 0) \\ u'_-(0) - Au_-(0) = l - L, \end{cases}$$

admet une unique solution stricte.

Le **troisième chapitre** est consacré à l'étude du problème (P_0^δ) sous l'unique hypothèse (H.1) mais cette fois le second membre est höldérien par morceaux i.e.,

$$g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}(0, \delta; E), \quad g_- \in BUC^{2\alpha_0}(-\infty, 0; E),$$

avec E quelconque et $0 < 2\alpha_0 < 1$.

Notons que, dans ce chapitre, l'hypothèse (H.1) implique que $B := -(-A)^{1/2}$ est générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique généralisé non fortement continu en zéro car $D(A)$ n'est pas nécessairement dense dans E .

La représentation de la solution est donnée sous forme d'une intégrale de Dunford et les résultats obtenus sont donnés par

Théorème 0.4.5 *On suppose (H.1). Soient*

$$g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E), \quad g_- \in BUC^{\alpha_0}(]-\infty, 0]; E)$$

et $f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$. Alors le problème (P_0^δ) admet une unique solution stricte si et seulement si

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}, \quad (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}.$$

Théorème 0.4.6 *On suppose (H.1). Soient*

$$g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}(0, \delta; E), \quad g_- \in BUC^{2\alpha_0}(-\infty, 0; E)$$

avec $0 < 2\alpha_0 < 1$ et $f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$. Alors

$$(u_+^\delta)'' , Au_+^\delta \in C^{2\alpha_0}(0, \delta; E), \quad (u_-^\delta)'' , Au_-^\delta \in BUC^{2\alpha_0}(-\infty, 0; E),$$

si et seulement si

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty), \quad (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty).$$

Les techniques employées ici reposent sur le calcul fonctionnel de Dunford et le travail de Sinestrari [34].

Dans le **chapitre quatre**, on considère, dans le cadre L^p , le problème suivant

$$(P_\omega^\delta) \quad \begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) - \omega u^\delta(x) = g^\delta(x), & \omega > 0 \\ p. p. x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[\\ (u^\delta)'(-1) = f_-, \quad (u^\delta)'(\delta) + Hu^\delta(\delta) = f_+, \\ u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+), \quad \mu_-(u^\delta)'(0_-) = \mu_+(u^\delta)'(0_+). \end{cases}$$

sous les hypothèses suivantes

(H.0) E est un espace UMD ,

(H.1) il existe ω_0 fixé et positif tel que $\rho(A_{\omega_0}) \supset \mathbb{R}_+$ et

$$\exists C > 0, \forall \lambda \geq 0 \quad \|(A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1 + \lambda},$$

$$(H.2) \quad \exists C > 1, \exists \theta_A \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \|(-A_{\omega_0})^{is}\| \leq C e^{\theta_A |s|},$$

L'hypothèse (H.1) implique que l'opérateur $Q_\omega := -\sqrt{\omega I - A}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(e^{xQ_\omega})_{x \geq 0}$. De plus, l'hypothèse (H.2) implique que $\sqrt{\omega I - A}$ est de classe $Bip(\theta_A/2, E)$.

On utilise, par la suite, les hypothèses suivantes

$$(H.3) \quad \exists C > 0 : \rho(-H) \supset]0, +\infty[$$

$$\forall \xi \geq 0 \quad \|(H + \xi I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1 + \xi},$$

$$(H.4) \quad \exists C > 1, \exists \theta_H \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \|H^{is}\| \leq C e^{\theta_H |s|},$$

$$(H.5) \quad \frac{\theta_A}{2} + \theta_H < \pi,$$

$$(H.6) \quad \forall \lambda \geq \omega_0, \forall \xi \geq 0 :$$

$$(A - \lambda I)^{-1} (H + \xi I)^{-1} = (H + \xi I)^{-1} (A - \lambda I)^{-1},$$

afin de montrer que l'opérateur $H - Q_\omega$ est fermé et inversible, en appliquant les résultats de la théorie des sommes de Dore et Venni [13]. On peut étudier, alors, le problème (P_ω^δ) dans un cas plus général, en remplaçant les hypothèses (H.3) \sim (H.6) par l'unique hypothèse

$$H - Q_\omega \text{ est fermé et inversible.}$$

On utilise la méthode de réduction de l'ordre de Krein [22] afin de trouver une représentation explicite de la solution. Le résultat obtenu, ici, est

Théorème 0.4.7 *Supposons (H.0) \sim (H.6). Soit $g^\delta \in L^p(-1, \delta; E)$ avec $1 < p < \infty$. Alors pour tout $\omega \geq \omega^*$ les assertions suivantes sont équivalentes*

$$1. f_+^\delta \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}} \text{ et } f_- \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}.$$

2. Le problème (P_ω^δ) admet une unique solution stricte u^δ i.e.,

$$u^\delta = \begin{cases} u_+^\delta \in W^{2,p}(0, \delta; E) \cap L^p(0, \delta; D(A)) \\ u_-^\delta \in W^{2,p}(-1, 0; E) \cap L^p(-1, 0; D(A)), \end{cases}$$

avec $u_+^\delta(\delta) \in D(H)$ et u^δ vérifie (P_ω^δ) .

On termine ce chapitre par l'étude de quelques cas particuliers, en remplaçant l'opérateur H par l'opérateur nul ou par l'opérateur $(\omega I - A)^\alpha$ avec $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

Le **dernier chapitre** est consacré aux exemples concrets pour illustrer notre théorie abstraite.

0.5 Perspectives

Voici ci-dessous quelques perspectives de poursuite de recherche dans la thématique de ce travail :

- ▶ Pour le premier modèle (le cas des domaines non bornés)
 - Etudier le même problème dans les petit Hölder,
 - Etudier un problème concret de transmission dans une cellule Biologique,
- ▶ Pour le deuxième modèle,
 - Faire le passage à la limite (quand $\delta \rightarrow 0$),
 - Considérer le même problème dans d'autres cadres fonctionnels, par exemple, le cadre continu,
 - Traiter aussi le cas non commutatif,
- ▶ Etudier des problèmes de transmission avec l'équation complète,
- ▶ Etudier des cas assez généraux lorsque les opérateurs sont variables.....

Rappels

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base concernant les outils d'analyse fonctionnelle comme les opérateurs linéaires fermés, les intégrales de Dunford, les espaces fonctionnels, les espaces d'interpolation, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires (pour plus de détails voir [8], [5], [7], [21], [29], [32]). On donnera aussi quelques résultats sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cadre commutatif et non commutatif (voir [13], [20], [25], [26]).

Soit E un espace de Banach complexe, Λ un opérateur linéaire de domaine $D(\Lambda)$ de E à valeurs dans E , $\rho(\Lambda)$ est l'ensemble résolvant de Λ .

1.1 Les opérateurs fermés

Définition 1.1.1 On dit que l'opérateur Λ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset D(\Lambda)$ telle que x_n converge vers x et Λx_n converge vers y , alors $x \in D(\Lambda)$ et $\Lambda x = y$.

Définition 1.1.2 L'opérateur Λ est dit fermable si et seulement si Λ admet une extension fermée i.e.

$$\forall (x_n) \subset D(\Lambda) : \begin{cases} x_n \rightarrow 0 \\ \Lambda x_n \rightarrow y \end{cases} \implies y = 0.$$

La plus petite extension fermée de Λ est notée $\bar{\Lambda}$ et s'appelle la fermeture de Λ .

Définition 1.1.3 L'opérateur Λ est dit positif si $\rho(\Lambda) \supset]-\infty, 0[$ et

$$\exists C > 0, \forall t \leq 0 : \|(\Lambda - tI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1 + |t|}.$$

Définition 1.1.4 On dit que Λ est sectoriel si

- i) $D(\Lambda)$ et $\text{Im}(\Lambda)$ sont denses dans E ,
- ii) $\ker(\Lambda) = \{0\}$ et $\rho(\Lambda) \supset]-\infty, 0[$ et $\exists M \geq 1$ telle que

$$\|t(\Lambda - tI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M.$$

1.2 L'intégrale de Dunford

Notons par $H(\Lambda)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de Λ . La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définie par l'intégrale de Dunford suivante

$$f(\Lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) (zI - \Lambda)^{-1} dz$$

où γ est une courbe simple incluse dans $\rho(\Lambda)$ et $f \in H(\Lambda)$. L'opérateur $f(\Lambda) \in \mathcal{L}(E)$ et ne dépend pas du choix de γ .

1.3 Les semi-groupes

1.3.1 Les semi-groupes fortement continus (C_0 semi-groupe)

Définition 1.3.1 On appelle semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach E toute famille $(G(t))_{t \geq 0}$ dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant les axiomes suivants

(i) Pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ t &\mapsto G(t)x \end{aligned}$$

est continue.

(ii) $G(0) = I$

(iii) $\forall s \geq 0, \forall t \geq 0 : G(t+s) = G(t)G(s)$.

On dit aussi que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Remarques

i) On dit que $G(t)$ est un groupe fortement continu si (i) et (iii) sont vérifiées pour s, t de signes quelconques.

ii) On dit que $G(t)$ est un semi-groupe de contraction si

$$\|G(t)\| \leq 1.$$

Exemples

1) Soit Λ un opérateur borné dans E , alors la famille d'opérateurs

$$G(t) = e^{t\Lambda}, \quad t \in \mathbb{R}$$

est un groupe sur E .

2) Soit $E = L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < \infty$ et

$$(G(t)f)(x) = f(x-t),$$

dans ce cas $(G(t))_{t \geq 0}$ est un groupe appelé groupe des translations.

Théorème 1.3.1 Soit G un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que

$$\forall t \geq 0 \quad \|G(t)\| \leq Me^{-\omega t}.$$

Définition 1.3.2 On appelle *générateur infinitésimal* d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur A défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\Lambda) = \left\{ x \in E : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \\ \Lambda x := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t}. \end{array} \right.$$

Remarques

- 1) Si Λ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$, alors Λ est fermé à domaine dense.
- 2) Le semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal Λ .
- 3) Le semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il est de la forme $(e^{t\Lambda})_{t \geq 0}$ où Λ est un opérateur borné dans E .
- 4) Si Λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ tel que pour $\lambda > \omega$,

$$\|G(t)\| \leq Me^{-\omega t},$$

alors l'opérateur

$$(\lambda I - \Lambda)^{-1} x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} G(t) x dt,$$

est borné et pour tout $\lambda \in \rho(\Lambda)$

$$\|(\lambda I - \Lambda)^{-1} x\| \leq M(\lambda - \omega)^{-1}.$$

- 5) Si Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geq 0}$, alors

i) Si $x \in D(\Lambda)$ et $t \geq 0$ alors

$$G(t)x \in D(\Lambda).$$

ii) La fonction $t \mapsto G(t)x$ est continûment dérivable sur \mathbb{R}_+ si et seulement si $x \in D(\Lambda)$.

De plus

$$\forall t \geq 0, \frac{d}{dt} G(t)x = \Lambda G(t)x = G(t)\Lambda x.$$

iii) Pour tout $x \in E$ et tout $t \geq 0$

$$\int_0^t G(s)x ds \in D(\Lambda) \text{ et } \Lambda \int_0^t G(s)x ds = G(t)x - x,$$

et si de plus $x \in D(\Lambda)$

$$\Lambda \int_0^t G(s)x ds = \int_0^t G(s)\Lambda x ds = G(t)x - x.$$

Théorème 1.3.2 (Hille-Yosida) *L'opérateur Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu si et seulement si*

i) Le domaine $D(\Lambda)$ est dense dans E .

ii) $\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\}$ et $(\lambda I - \Lambda)$ surjectif pour $\lambda > \omega$ et pour $k \in \mathbb{N}^$ on a*

$$\left\| (\lambda I - \Lambda)^{-k} \right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^k}.$$

1.3.2 Les semi-groupes analytiques

Définition 1.3.3 *On appelle semi-groupe analytique de type $\alpha \in]0, \pi/2[$ toute application G définie sur l'ensemble*

$$\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\}$$

à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ telle que

(1) $z \mapsto G(z)$ est analytique sur Σ_α .

(2) $\forall x \in E, G(0) = I$ et

$$\lim_{z \in \Sigma_\alpha, z \rightarrow 0} G(z)x = x$$

(3) $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha, G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$.

De plus

$$G(t)x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{tz} (zI - \Lambda)^{-1} x dz = e^{t\Lambda}x.$$

Théorème 1.3.3 (de Kato) *Soit $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire vérifiant*

(1) Λ fermé de domaine $D(\Lambda)$ dense dans E .

(2) $\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ et $\exists M > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (\lambda I - \Lambda)^{-1} \right\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}.$$

Alors Λ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique G vérifiant

(1) $\exists C > 0, \forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C$.

(2) $\forall t > 0, G(t) \in \mathcal{L}(E, D(\Lambda))$ et $\|\Lambda G(t)\| \leq \frac{M}{t}$.

1.4 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert de \mathbb{R}^n (non nécessairement borné) et on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice, avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ et on utilise la notation

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

1.4.1 Les espaces d'interpolation

On désigne par X_0 et X_1 deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé E (c'est à dire $X_0 \hookrightarrow E$, $X_1 \hookrightarrow E$). Considérons les espaces de Banach

$$X_0 \cap X_1 \text{ et } X_0 + X_1$$

munis des normes

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1},$$

et

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{x=x_0+x_1, x_i \in X_i} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}).$$

Le couple $\{X_0, X_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.4.1 Soit $\{X_0, X_1\}$ un couple d'interpolation. On appelle espace intermédiaire entre X_0 et X_1 tout espace de Banach X tel que

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

Les espaces $X_i, i = 0, 1$ sont des espaces intermédiaires.

Définition 1.4.2 Soient $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$. On appelle espace d'interpolation entre X_0, X_1 l'espace $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ tel que $x \in (X_0, X_1)_{\theta, p}$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \forall t > 0, \exists u_i(t) \in X_i \quad (i = 0, 1) : x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii) t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1) \end{array} \right.$$

où

$$L_*^p(E) = \left\{ f :]0, \infty[\rightarrow E : \int_0^{+\infty} \|f(t)\|_E^p \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

Propriétés

On donne maintenant quelques propriétés fondamentales de ces espaces, pour tout $\omega, \theta, t \in]0, 1[$ et $p, q, r \in [1, +\infty[$:

1) Si $0 < \theta \leq \omega < 1$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} \subset (X_0, X_1)_{\omega, q}.$$

2) Si $p \leq q$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} \subset (X_0, X_1)_{\theta, q}.$$

3) Si $X_0 = X_1$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} = X_0 = X_1.$$

4) Si $0 < \omega < \theta < 1$, alors on a

$$((X_0, X_1)_{\theta, p}, (X_0, X_1)_{\omega, q})_{t, r} = (X_0, X_1)_{\alpha, r},$$

avec

$$\alpha = (1-t)\theta + t\omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}.$$

Cas Particulier $(D(\Lambda), E)_{\theta, p}$

Soient E un espace de Banach, Λ un opérateur linéaire fermé de domaine $D(\Lambda)$ inclus dans E . Posons

$$X_0 = D(\Lambda) \text{ et } X_1 = E,$$

alors

$$X_0 \cap X_1 = D(\Lambda) \text{ et } X_0 + X_1 = E,$$

donc, pour tout $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty]$ on a

$$D(\Lambda) \subset (D(\Lambda), E)_{\theta, p} \subset E.$$

Si $\rho(\Lambda) \supset \mathbb{R}_+$ et s'il existe une constante $C_\Lambda > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \|(\Lambda - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C_\Lambda}{\lambda},$$

alors

$$\begin{aligned} (D(\Lambda), E)_{\theta, p} &= D_\Lambda(1 - \theta, p) \\ &= \{x \in E : \|t^{1-\theta} \Lambda (\Lambda - t)^{-1} x\|_E \in L_*^p\}. \end{aligned}$$

Définition 1.4.3 Pour tout $\theta \in]0, 1[$, $p \in [1, +\infty]$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$D_\Lambda(\theta + k, p) = \{x \in D(\Lambda^k) : \Lambda^k x \in D_\Lambda(\theta, p)\},$$

avec la norme

$$\|x\|_{D_\Lambda(\theta+k, p)} = \|x\|_E + \|\Lambda^k x\|_{D_\Lambda(\theta, p)}.$$

Théorème 1.4.1 (de Lions) Si Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geq 0}$, alors pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$

$$(D(\Lambda), E)_{\theta, p} = \{x \in E : \|t^{\theta-1} (G(t) - I)x\|_E \in L_*^p\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{(D(\Lambda), E)_{\theta, p}} = \|x\|_E + \left(\int_0^{+\infty} \|t^{\theta-1} (G(t) - I)x\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

avec les modifications usuelles si $p = \infty$.

Théorème 1.4.2 (de Marcel Riez) Soit $K : L^{p_0}(\Omega_0) + L^{p_1}(\Omega_0) \longrightarrow L^{q_0}(\Omega_1) + L^{q_1}(\Omega_1)$ une opérateur linéaire, $p_i, q_i \in [1, +\infty]$ et Ω_i sont des ouverts de \mathbb{R}^n , avec $i = 0, 1$ telle que

$$K|_{L^{p_0}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_0}, L^{q_0}) \text{ et } K|_{L^{p_1}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_1}, L^{q_1})$$

alors

$$K|_{L^{q_\theta}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_\theta}, L^{q_\theta})$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$ et

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Lemme 1.4.1 (de Schur) Soit $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que

$$i) \exists a > 0, p.p \ x_2 \in \Omega_2 : \int_{\Omega_1} |K(x_1, x_2)| dx_1 \leq a,$$

$$ii) \exists b > 0, p.p \ x_1 \in \Omega_1 : \int_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)| dx_2 \leq b.$$

On définit l'opérateur K par

$$(Kf)(x_2) = \int_{\Omega_1} K(x_1, x_2) f(x_1) dx_1,$$

$p.p. \ x_2 \in \Omega_2$. Alors pour tout $p \in [1, +\infty]$

$$K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1), L^p(\Omega_2)).$$

Preuve. Ce lemme est une conséquence directe du Théorème de Marcel Riez.

1.4.2 Les espaces de Sobolev et de Besov

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$:

On note $W^{m,p}(\Omega, E)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \rightarrow E$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, E)$ pour tout $|\alpha| \leq m$. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega, E)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega, E)}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega, E)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $s \in]0, 1[$ et $1 \leq p < \infty$:

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy < \infty \right\}.$$

Les espaces de Sobolev ne sont pas stables complètement par interpolation, on est amené à définir les espaces de Besov $B_{p,q}^m(\Omega, E)$. Pour $s \in]0, 1[$ et $1 \leq p, q \leq \infty$, on définit

$$B_{p,q}^s(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E^p}{|x - y|^{sq+n}} dx \right)^{q/p} dy < \infty \right\}.$$

avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.

Dans le cas où $p = q$ on a

$$B_{p,p}^s(\Omega, E) = W^{s,p}(\Omega, E).$$

1.4.3 Les espaces de Hölder et les espaces BUC

Soit $m \in \mathbb{N}$:

L'ensemble $C^m(\Omega, E)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \rightarrow E$ telles que la fonction $x \mapsto \partial^\alpha f(x)$ existe et est continue pour tout $|\alpha| \leq m$.

L'ensemble $C_b^m(\Omega, E)$ est un sous espace vectoriel de $C^m(\Omega, E)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont bornées sur Ω . C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{C_b^m(\Omega, E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \|\partial^\alpha f(x)\|_E.$$

L'ensemble $BUC^m(\Omega, E)$ désigne l'espace vectoriel des éléments de $C^m(\Omega, E)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont uniformément continues et bornées sur Ω , muni de la norme naturelle

$$\|f\|_{BUC^m(\Omega, E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \|\partial^\alpha f(x)\|_E.$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$:

L'ensemble $C^\alpha(\Omega, E)$ est l'espace de Hölder d'exposant α des fonctions $f : \Omega \rightarrow E$ telles que

$$\begin{cases} \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E < \infty, \\ \exists C > 0, \forall x, y \in \Omega : \|f(x) - f(y)\|_E \leq C |x - y|^\alpha. \end{cases}$$

Muni de la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^\alpha(\Omega, E)} &= \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E + \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{|x - y|^\alpha} \\ &= \|f\|_\infty + [f]_{C^\alpha(\Omega, E)}, \end{aligned}$$

$C^\alpha(\Omega, E)$ est un espace de Banach.

1.4.4 Les espaces UMD

On présente ici, une propriété géométrique des espaces de Banach E , connue sous le nom UMD (Unconditional Martingale difference property, pour plus détails voir [5] et [30].)

Définition 1.4.4 On dit que E est UMD si la transformation de Hilbert H définie sur $L^p(\mathbb{R}, E)$, $1 < p < \infty$ par

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon \leq |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$$

est bornée.

Définition 1.4.5 E est ξ -convexe s'il existe une fonction $\xi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que

i) $\xi(0,0) > 0$

ii) $\xi(x,y) \leq \|x+y\|$ avec

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad \forall x, y \in E.$$

Théorème 1.4.3 Soit E un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes

i) E est UMD.

ii) Il existe une fonction ξ symétrique et biconvexe vérifie $\xi(0,0) > 0$ et

$$\xi(x,y) \leq \|x+y\|,$$

tel que $\|x\| \leq 1 \leq \|y\|, \forall x, y \in E$.

Les **exemples** les plus utilisés de tels espaces sont

- ▶ Les espaces de Hilbert (On choisit $\xi(x,y) = 1 + \langle x, y \rangle$ où le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indique le produit scalaire).
- ▶ Les sous espaces fermés d'un espace UMD.
- ▶ Les espaces construits sur $L^p(\Omega, E)$, $1 < p < \infty$ tel que E est UMD.

Les espaces $C^\alpha(\Omega; E)$ ne sont pas UMD.

1.5 Les puissances fractionnaires, classe $\mathbf{Bip}(\theta; E)$

Dans cette sous section, on donne la définition des puissances complexes d'un opérateur sectoriel. Si $\mathbf{A} : E \rightarrow E$ est un opérateur **borné** positif, la puissance complexe de l'opérateur \mathbf{A} est définie par

$$\mathbf{A}^z x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt,$$

où z est un nombre complexe arbitraire.

Si \mathbf{A} est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance fractionnaire de partie réelle positive (pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$) par la représentation de Balakrishnan suivante

$$\mathbf{A}^z x = \frac{\sin z\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{z-1} (tI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} x dt,$$

pour tout $x \in D(\mathbf{A})$ (voir Haase [21], Proposition 3.1.12, page 67).

Si $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, on écrit, pour $x \in D(\mathbf{A})$,

$$\mathbf{A}^z x = \mathbf{A}^{z+1} \mathbf{A}^{-1} x = \frac{\sin(z+1)\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt.$$

Le théorème suivant, rassemble quelques propriétés essentielles de \mathbf{A}^z (voir Dore et Venni [13])

Théorème 1.5.1 Soit \mathbf{A} un opérateur linéaire positif, alors on a les propriétés suivantes

1) Soit $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0$ et $m, n \in \mathbb{N} : m > n + \operatorname{Re} z > 0$ alors

$$\forall x \in E \quad \mathbf{A}^z x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n+z)\Gamma(m-n-z)} \int_0^{+\infty} t^{z+n-1} (\mathbf{A}(tI - \mathbf{A}))^{-1} \mathbf{A}^{-n} x dt$$

est absolument convergente.

2) $z \rightarrow \mathbf{A}^z$ est holomorphe de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ dans $\mathcal{L}(E)$.

3) Si $m \in \mathbb{N} : m \geq 2$ et $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < m$ alors $D(\mathbf{A}^m)$ est dense dans $D(\mathbf{A}^z)$.

4) Soit $w, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0 < \operatorname{Re} z$ alors

$$\mathbf{A}^w \mathbf{A}^z \subseteq \mathbf{A}^{w+z} \subseteq \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

De plus, si $\operatorname{Re}(w+z) \neq 0$ alors

$$\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $x \in D(\mathbf{A}^\alpha)$ alors $z \rightarrow \mathbf{A}^z x$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} z < \alpha$.

6) Supposons que $\mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(E)$ pour $s \in \mathbb{R}$ donc

(a) Si $\operatorname{Re} w < 0$ et $w+z = is$ alors $\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^w \mathbf{A}^z = \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w$.

(b) Si $\operatorname{Re} w < 0$ alors $\mathbf{A}^{is} \mathbf{A}^w = \mathbf{A}^{w+is} = \mathbf{A}^w \mathbf{A}^{is}$.

(c) Si $\operatorname{Re} w \geq 0$ alors $\mathbf{A}^{is} \mathbf{A}^w \subseteq \mathbf{A}^{w+is} \subseteq \mathbf{A}^w \mathbf{A}^{is}$ et la seconde inclusion

est en fait une égalité si $\operatorname{Re} w > 0$.

7) Si $0 < \operatorname{Re} z < 1$ alors

$$\|\mathbf{A}^{-z}\| \leq M \left(\cosh(\pi \operatorname{Im} z) + \frac{\sinh(\pi \operatorname{Im} z)}{\sin(\pi \operatorname{Im} z)} \right).$$

8) Soit $\mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(E)$ avec $s \in \mathbb{R}$, pour $\varphi \in]0, \pi/2[$ fixé, on pose

$$\Sigma_\varphi = \{\rho e^{i\theta} : \rho > 0 \text{ et } \pi - \varphi < \theta < \pi + \varphi\},$$

alors $\mathbf{A}^{z+is} \rightarrow \mathbf{A}^{is}$ (dans la topologie forte de $\mathcal{L}(E)$).

9) Soit $\Delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ et $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap (i\mathbb{R}) \neq \emptyset$. On suppose que

$$\sup_{z \in \Delta} \|\mathbf{A}^z\| < +\infty,$$

alors $\forall w \in \Delta_1, \mathbf{A}^w \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathbf{A}^z \rightarrow \mathbf{A}^w$ où $z \rightarrow w, z \in \Delta$ (dans la topologie forte de $\mathcal{L}(E)$).

10) Si $T \in \mathcal{L}(E)$ alors

$$(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1} T = T (\mathbf{A} - \lambda I)^{-1},$$

pour $\lambda \in \rho(\mathbf{A})$, et

$$(a) T \mathbf{A}^z = \mathbf{A}^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z < 0.$$

$$(b) T \mathbf{A}^z \subseteq \mathbf{A}^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z \geq 0.$$

11) Si $(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}$ et $(\mathbf{B} - \mu I)^{-1}$ commutent alors

$$(a) \mathbf{A}^z \mathbf{B}^w = \mathbf{B}^w \mathbf{A}^z \text{ pour } \max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} < 0.$$

(b) si \mathbf{A}^{is} et $\mathbf{B}^{it} \in \mathcal{L}(X)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ alors $\mathbf{A}^z \mathbf{B}^w = \mathbf{B}^w \mathbf{A}^z$
pour $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} \leq 0$.

Définition 1.5.1 On note $Bip(\theta; E)$ (Bounded imaginary powers) l'ensemble des opérateurs sectoriels sur E qui admettent des puissances imaginaires bornées.

1.6 Sommes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach

On donne, ici, quelques rappels sur les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires. Soit X un espace de Banach complexe, \mathbf{A} et \mathbf{B} deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(\mathbf{A})$ et $D(\mathbf{B})$ respectivement dans X et leurs ensembles résolvants $\rho(\mathbf{A})$ et $\rho(\mathbf{B})$ non vides. La résolution du problème

$$\mathbf{A}u + \mathbf{B}u - \lambda u = f, \quad \lambda > 0 \tag{1.6.1}$$

repose sur la construction de l'inverse de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ sous des hypothèses correspondantes à des méthodes différentes, selon les deux cas suivants :

1- les résolvantes des opérateurs \mathbf{A} et \mathbf{B} commutent : i.e.,

$$[(\mathbf{A} - z)^{-1}; (\mathbf{B} - \mu)^{-1}] := (\mathbf{A} - z)^{-1} (\mathbf{B} - \mu)^{-1} - (\mathbf{B} - \mu)^{-1} (\mathbf{A} - z)^{-1} = 0$$

2- le cas non commutatif : i.e.

$$[(\mathbf{A} - z)^{-1}; (\mathbf{B} - \mu)^{-1}] \neq 0.$$

1.6.1 Sommes commutatives

Dans ce cas, il y a deux approches différentes.

Sommes de Da Prato et Grisvard

Da Prato et Grisvard ont étudié l'équation (1.6.1) sous les hypothèses suivantes

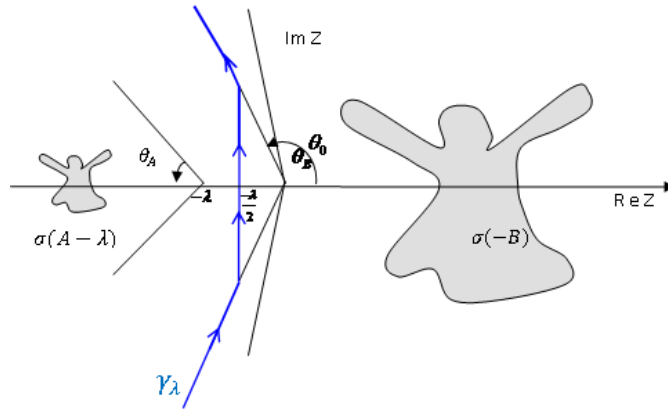
$$(DG.1) \left\{ \begin{array}{l} \exists C_{\mathbf{A}}, C_{\mathbf{B}} > 0, \theta_{\mathbf{A}}, \theta_{\mathbf{B}} \in [0, \pi[\text{ tels que} \\ i) \rho(\mathbf{A}) \supset \Sigma_{\mathbf{A}} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi - \theta_{\mathbf{A}}\}, \\ \forall z \in \Sigma_{\mathbf{A}}; \|(\mathbf{A} - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_{\mathbf{A}}(\theta)}{|z|}. \\ ii) \rho(\mathbf{B}) \supset \Sigma_{\mathbf{B}} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi - \theta_{\mathbf{B}}\}, \\ \forall z \in \Sigma_{\mathbf{B}}; \|(\mathbf{B} - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_{\mathbf{B}}(\theta)}{|z|}. \\ iii) \theta_{\mathbf{A}} + \theta_{\mathbf{B}} < \pi. \\ iv) \overline{D(\mathbf{A})} + \overline{D(\mathbf{B})} = X, \end{array} \right.$$

$$(DG.2) \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \rho(\mathbf{A}), \forall \mu \in \rho(\mathbf{B}) : \\ [(\mathbf{A} - \lambda)^{-1}; (\mathbf{B} - \mu)^{-1}] = 0. \end{array} \right.$$

Ces auteurs ont montré, pour $f \in D_{\mathbf{A}}(\theta, q) + D_{\mathbf{B}}(\theta, q)$, $\theta \in]0, 1[$ et $q \in [1, +\infty[$ que l'équation (1.6.1) admet une solution stricte et unique u donnée explicitement par l'intégrale de Dunford

$$u = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\lambda}} (\mathbf{A} - (z + \lambda)I)^{-1} (\mathbf{B} + zI)^{-1} f dz$$

où γ_{λ} est une courbe simple orientée de $\infty e^{-i\theta_0}$ à $\infty e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]\theta_{\mathbf{B}}, \pi - \theta_{\mathbf{A}}[$, demeurant dans $\Sigma_{\mathbf{A}-\lambda} \cap \Sigma_{-\mathbf{B}}$.



De plus, la solution a la régularité suivante

$$\mathbf{A}u, \mathbf{B}u \in D_{\mathbf{A}}(\theta, q) \text{ (resp. } D_{\mathbf{B}}(\theta, q)).$$

Sommes de Dore et Venni

Dore et Venni ont utilisé la théorie des opérateurs linéaires qui admettent des puissances imaginaires bornées pour étudier l'équation (1.6.1). Ils ont supposé que

(DV.0) X est un espace de Banach de type UMD ,

$$(DV.1) \begin{cases} i) \rho(\mathbf{A}) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_{\mathbf{A}} > 0 : \|(\mathbf{A} + tI)^{-1}\| \leq \frac{M_{\mathbf{A}}}{1+t}, \forall t \geq 0 \\ ii) \rho(\mathbf{B}) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_{\mathbf{B}} > 0 : \|(\mathbf{B} + tI)^{-1}\| \leq \frac{M_{\mathbf{B}}}{1+t}, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$(DV.2) \begin{cases} \forall \lambda \in \rho(\mathbf{A}), \mu \in \rho(\mathbf{B}), \\ (\lambda I - \mathbf{A})^{-1}(\mu I - \mathbf{B})^{-1} = (\mu I - \mathbf{B})^{-1}(\lambda I - \mathbf{A})^{-1}. \end{cases}$$

$$(DV.3) \begin{cases} i) \forall s \in \mathbb{R} : \mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(x) \text{ et} \\ \exists K_{\mathbf{A}} \geq 1, \theta_{\mathbf{A}} > 0, \forall s \in \mathbb{R} : \|\mathbf{A}^{is}\| \leq K_{\mathbf{A}} e^{\theta_{\mathbf{A}}|s|}, \\ ii) \forall s \in \mathbb{R} : \mathbf{B}^{is} \in \mathcal{L}(x) \text{ et} \\ \exists K_{\mathbf{B}} \geq 1, \theta_{\mathbf{B}} > 0, \forall s \in \mathbb{R} : \|\mathbf{B}^{is}\| < K_{\mathbf{B}} e^{\theta_{\mathbf{B}}|s|}, \\ iii) \theta_{\mathbf{A}} + \theta_{\mathbf{B}} < \pi. \end{cases}$$

Alors, la somme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est fermée, inversible et son inverse est défini par

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{\mathbf{A}^{-z} \mathbf{B}^{z-1}}{\sin \pi z} dz,$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\},$$

et orientée de $\infty e^{-i\pi/2}$ vers $\infty e^{i\pi/2}$.

Ce résultat a été généralisé par Prüss et Sohr [33], dans le cas où l'un des deux opérateurs (seulement) est inversible.

Comme application de cette théorie, on cite l'exemple de Dore et Venni [13] pages 196-197. Ils ont étudiés, dans le cadre $L^p(0, T, E)$ avec $1 < p < \infty$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + \mathbf{A}u(t) = f(t), & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (1.6.2)$$

lorsque

$$E \text{ est un espace } UMD, \quad (1.6.3)$$

\mathbf{A} est un opérateur linéaire fermé vérifie

$$\rho(\mathbf{A}) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M > 0 : \|(\mathbf{A} + t)^{-1}\| \leq \frac{M}{1+t}, \forall t \geq 0 \quad (1.6.4)$$

et

$$\exists K \geq 1, \theta > 0, \forall s \in \mathbb{R} : \|\mathbf{A}^{is}\| \leq K e^{\theta|s|}. \quad (1.6.5)$$

Le résultat est donné par le théorème suivant

Théorème 1.6.1 *Sous les hypothèses (1.6.3), (1.6.4), (1.6.5) et pour*

$$f \in L^p(0, T, E), \quad 1 < p < \infty,$$

le problème (1.6.2) admet une unique solution stricte

$$t \mapsto u(t) = \int_0^t e^{(s-t)\mathbf{A}} f(s) ds \in L^p(0, T, E),$$

de plus

$$t \mapsto \mathbf{A}u(t) = \mathbf{A} \int_0^t e^{(s-t)\mathbf{A}} f(s) ds \in L^p(0, T, E).$$

1.6.2 Sommes non commutatives

Ici, l'hypothèse de commutativité n'est plus vérifiée elle est remplacée par une nouvelle hypothèse sur le commutateur.

Méthode de Labbas et Terreni

L'idée fondamentale dans cette méthode est de construire la solution de l'équation (1.6.1) sous forme $u = (1 + \mathbf{T})^{-1} \mathbf{S}_\lambda f$ où \mathbf{T} est un opérateur linéaire assez petit et nul dans le cas commutatif et

$$\mathbf{S}_\lambda f = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (\mathbf{A} - z - \lambda)^{-1} (\mathbf{B} + z)^{-1} f dz.$$

Méthode de Monniaux et Prüss

Monniaux et Prüss [30], ont montré que le Théorème de Dore et Venni reste valable dans le cas où les résolvantes de \mathbf{A} et \mathbf{B} ne commutent pas, mais vérifient une condition sur le commutateur du type de Labbas-Terreni.

Problème de transmission dans un domaine non borné dans le cadre L^p

De nombreux problèmes de transmission sont modélisés par des équations différentielles dans des domaines non bornés (ou dans des domaines non cylindriques bornés et par des changements de variables on les transforme en des domaines non bornés, voir chapitre 5, exemple 5.1.1).

Ce chapitre est consacré à l'étude de ce type de problème dans le cadre L^p et sous certaines hypothèses sur l'opérateur A en utilisant plusieurs approches.

2.1 Position du problème

On considère le problème de transmission suivant

$$(P_0^\delta) \quad \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x), & p.p. \ x \in (0, \delta) \\ (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-(x), & p.p. \ x \in (-\infty, 0) \\ u_+^\delta(0) = u_-^\delta(0) \\ \mu_-(u_-^\delta)'(0) = \mu_+(u_+^\delta)'(0) \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

où μ_- , μ_+ sont deux constantes réelles positives non nulles, f_+^δ est un élément donné dans un espace de Banach complexe E . Ici, A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset E$ à valeurs dans E et

$$g_- \in L^p(-\infty, 0; E) \text{ et } g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E),$$

avec $p \in [1, \infty]$.

On se propose d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité de la solution

On donne maintenant quelques lemmes techniques utiles pour la suite de ce chapitre.

2.2 Lemmes techniques

Lemme 2.2.1 Soient z_1, z_2 deux nombres complexes, alors

$$|z_1 + z_2| \geq (|z_1| + |z_2|) \cos \left| \frac{\arg(z_1) - \arg(z_2)}{2} \right|.$$

Preuve. Voir par exemple, Dore et Yakubov [16] Lemme 2.3 page 98.

Lemme 2.2.2 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\arg z| \leq \theta < \pi/2$, on a

$$|\arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z})| \leq \theta.$$

Preuve. Voir par exemple, Dore et al. [15] Proposition 4.10 page 1880.

Lemme 2.2.3 Soit $b \in [0, 1]$ et $\theta_0 \in [0, \pi/2[$. Alors, il existe une constante

$$K_{\theta_0} = \min(1 - e^{-\varepsilon_0 \cos \theta_0}, 1 - e^{-\pi/2 \tan \theta_0}) > 0,$$

telle que

$$|1 \pm be^{-z}| \geq K_{\theta_0},$$

pour tout

$$z \in S_{\theta_0, \varepsilon_0} := \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta_0\} \cup \overline{B(0, \varepsilon_0)}.$$

Preuve. L'idée de la preuve est inspirée du travail [3]. Soit $z \in \partial S_{\theta_0, \varepsilon_0}$ (où $\partial S_{\theta_0, \varepsilon_0}$ est la frontière de $S_{\theta_0, \varepsilon_0}$).

Pour $|z| = \varepsilon_0$, on a

$$|1 - be^{-z}| \geq |1 - be^{-\operatorname{Re} z}| \geq 1 - be^{-\varepsilon_0 \cos(\arg z)} \geq 1 - e^{-\varepsilon_0 \cos \theta_0},$$

car

$$\arg z \in]-\theta_0, \theta_0[\quad \text{et} \quad b \in [0, 1].$$

Pour $|z| \geq \varepsilon_0$ et $\arg z = \theta_0$, on a

$$|1 - be^{-z}|^2 = 1 + b^2 e^{-2\operatorname{Re} z} - 2be^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z).$$

Si $\operatorname{Re} z \leq \pi/2 \tan \theta_0$, on trouve

$$|\operatorname{Im} z| = \operatorname{Re} z \tan \theta_0 \leq \frac{\pi}{2},$$

alors

$$0 \leq \cos(\operatorname{Im} z) \leq 1,$$

et

$$|1 - be^{-z}|^2 \geq 1 + b^2 e^{-2\operatorname{Re} z} - 2be^{-\operatorname{Re} z} = (1 - be^{-\operatorname{Re} z})^2,$$

et comme $0 \leq b \leq 1$, on obtient

$$|1 - be^{-z}| \geq 1 - be^{-\operatorname{Re} z} \geq 1 - e^{-\pi/2 \tan \theta_0}.$$

Si $\operatorname{Re} z \geq \pi/2 \tan \theta_0$, il vient

$$|1 - be^{-z}|^2 = 1 + b^2 e^{-2\operatorname{Re} z} - 2be^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) \geq 1,$$

ainsi

$$|1 - be^{-z}| \geq 1 \geq 1 - e^{-\pi/2 \tan \theta_0}.$$

On déduit donc

$$|1 - be^{-z}| \geq \min(1 - e^{-\varepsilon_0 \cos \theta_0}, 1 - e^{-\pi/2 \tan \theta_0}),$$

pour tout $z \in \partial S_{\theta_0, \varepsilon_0}$.

De la même manière, on montre que

$$|1 + be^{-z}| \geq \min(1 - e^{-\varepsilon_0 \cos \theta_0}, 1 - e^{-\pi/2 \tan \theta_0}).$$

Corollaire 2.2.1 *Pour tout $z \in S_{\theta_0, \varepsilon_0}$ et $b \in [0, 1]$, il existe une constante*

$$C_{\theta_0} = \min\left(1 - e^{-\varepsilon_0 \cos(\frac{\pi - \theta_0}{2})}, 1 - e^{-\pi/2 \tan(\frac{\pi - \theta_0}{2})}\right) > 0,$$

indépendante de $\delta \in]0, 1]$ telle que

$$|1 \pm be^{-2\sqrt{-z}\delta}| \geq C_{\theta_0}.$$

Lemme 2.2.4 *Soient $\mu > 0$, $\delta \in]0, 1]$ et $z \in S_{\theta_0}$ avec $\theta_0 \in [0, \pi/2[$. Alors il existe une constante C_{θ_0} positive telle que*

$$|\Delta_z(\delta, \mu)| \geq \frac{C_{\theta_0}}{2} \sin(\theta_0/2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta},$$

avec

$$\Delta_z(\delta, \mu) = \cosh(\sqrt{-z}\delta) + \mu \sinh(\sqrt{-z}\delta).$$

Preuve. Grâce au lemme 2.2.1, on trouve

$$\begin{aligned} |\Delta_z(\delta, \mu)| &\geq \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{2} \left| (1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}) + \mu(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta}) \right| \\ &\geq \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{2} \left(|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}| + \mu |1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta}| \right) \\ &\quad \cos\left(\frac{\arg(1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}) - \arg(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta})}{2}\right). \end{aligned}$$

Du lemme 2.2.2 et le fait que

$$\arg(2\sqrt{-z}\delta) = \arg(\sqrt{-z}) = \frac{\pi - \theta_0}{2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} &|\Delta_z(\delta, \mu)| \\ &\geq \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{2} \left(|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}| + \mu |1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta}| \right) \cos\left(\frac{\pi - \theta_0}{2}\right) \\ &\geq \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{2} |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}| \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right). \end{aligned}$$

En appliquant le corollaire 2.2.1, pour $b = 1$, on aura

$$|\Delta_z(\delta, \mu)| \geq \frac{C_{\theta_0}}{2} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}.$$

De même, il vient que

$$|\Delta_z(\delta, \mu)| \geq \mu \frac{C_{\theta_0}}{2} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}.$$

Lemme 2.2.5 Soient $\mu > 0$, $\delta \in]0, 1]$ et $z \in S_{\theta_0}$ avec $\theta_0 \in [0, \pi/2[$. Alors pour tout $x \in]-\infty, 0]$ on a

$$|\sinh(\sqrt{-zx}) + \mu \cosh(\sqrt{-zx})| \leq (1 + \mu) e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{-z}},$$

et

$$|\Delta_-(x, \delta, \mu)| \leq (1 + \mu) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)},$$

telle que

$$\Delta_-(x, \delta, \mu) = \cosh(\sqrt{-zx}) \cosh(\sqrt{-z\delta}) - \mu \sinh(\sqrt{-z\delta}) \sinh(\sqrt{-zx}).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} |\sinh(\sqrt{-zx}) + \mu \cosh(\sqrt{-zx})| &\leq (1 + \mu) \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-zx}) \\ &\leq (1 + \mu) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-zx}} \left(\frac{1 + e^{2 \operatorname{Re} \sqrt{-zx}}}{2} \right) \\ &\leq (1 + \mu) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-zx}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &|\Delta_-(x, \delta, \mu)| \\ &= |\cosh(\sqrt{-zx}) \cosh(\sqrt{-z\delta}) - \mu \sinh(\sqrt{-z\delta}) \sinh(\sqrt{-zx})| \\ &\leq (1 + \mu) \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-zx}) \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z\delta}) \\ &\leq (1 + \mu) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} \left(\frac{1 + e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z\delta}}}{2} \right) \left(\frac{1 + e^{2 \operatorname{Re} \sqrt{-zx}}}{2} \right) \\ &\leq (1 + \mu) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}. \end{aligned}$$

Lemme 2.2.6 Sous l'hypothèse (H.1), pour $\delta \in]0, 1]$ et $\mu \geq 0$, l'opérateur

$$D_\mu = I + e^{2\delta B} + \mu (I - e^{2\delta B}),$$

est inversible et son inverse est donné par

$$D_\mu^{-1} = \frac{1}{1 + \mu} \left(I - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{be^{2\delta z}}{1 + be^{2\delta z}} (zI - B)^{-1} dz \right),$$

où

$$b = \frac{1 - \mu}{1 + \mu}.$$

Preuve. Le cas $\mu = 0$ a été traité par Lunardi [29], page 59. L'opérateur $(I + e^{2\delta B})$ admet un inverse borné donné par

$$(I + e^{2\delta B})^{-1} = I - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{2\delta z}}{1 + e^{2\delta z}} (zI - B)^{-1} dz.$$

Pour $\mu > 0$, l'idée de la preuve est inspirée de la méthode de Lunardi. On écrit

$$\begin{aligned} D_{\mu} &= (1 + \mu)I + (1 - \mu)e^{2\delta B} \\ &= (1 + \mu)\left(I + \frac{1 - \mu}{1 + \mu}e^{2\delta B}\right) \\ &= (1 + \mu)(I + T), \end{aligned}$$

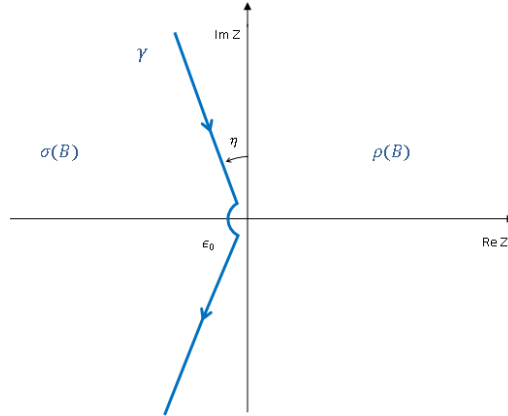
où

$$T = be^{2\delta B}.$$

Posons

$$U = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{be^{2\delta z}}{1 + be^{2\delta z}} (zI - B)^{-1} dz,$$

avec γ la courbe représentée par la figure



cette intégrale est absolument convergente grâce au Corollaire 2.2.1. D'autre part, on écrit

$$T = \frac{b}{2i\pi} \int_{\gamma'} e^{2\delta \lambda} (\lambda I - B)^{-1} d\lambda,$$

où γ' est la frontière de $S_{\pi/2+\eta', \varepsilon'_0}$ orientée comme γ avec $\eta' < \eta$ et $\varepsilon'_0 < \varepsilon_0$. Donc

$$TU = \left(\frac{b}{2i\pi}\right)^2 \int_{\gamma'} \int_{\gamma} \frac{e^{2\delta z} e^{2\delta \lambda}}{1 + be^{2\delta z}} (\lambda I - B)^{-1} (zI - B)^{-1} dz d\lambda.$$

En utilisant l'identité de la résolvante

$$(\lambda I - B)^{-1} (zI - B)^{-1} = \frac{(\lambda I - B)^{-1} - (zI - B)^{-1}}{z - \lambda},$$

et le Théorème de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned} TU &= \left(\frac{b}{2i\pi}\right)^2 \int_{\gamma'} (\lambda I - B)^{-1} e^{2\delta\lambda} \left(\int_{\gamma} \frac{e^{2\delta z}}{(1 + be^{2\delta z})(z - \lambda)} dz \right) d\lambda \\ &\quad - \left(\frac{b}{2i\pi}\right)^2 \int_{\gamma} \frac{e^{2\delta z}}{1 + be^{2\delta z}} \left(\int_{\gamma'} \frac{e^{2\delta\lambda}}{z - \lambda} d\lambda \right) (zI - B)^{-1} dz. \end{aligned}$$

On a

$$\int_{\gamma} \frac{e^{2\delta z}}{(1 + be^{2\delta z})(z - \lambda)} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{2\delta z}}{(1 + be^{2\delta z})(z - \lambda)} dz,$$

et

$$\int_{\gamma'} \frac{e^{2\delta\lambda}}{z - \lambda} d\lambda = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma'_R} \frac{e^{2\delta\lambda}}{z - \lambda} d\lambda,$$

avec

$$\gamma_R = \{z \in \gamma_R : |z| \leq R\} \text{ et } \gamma'_R = \{\lambda \in \gamma'_R : |\lambda| \leq R\}.$$

En fermant ces courbes par des arcs et en appliquant le Théorème de Cauchy et le lemme de Jordan, on obtient

$$TU = \frac{b^2}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{e^{4\delta\lambda}}{1 + be^{2\delta\lambda}} (\lambda I - B)^{-1} d\lambda.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} T &= \frac{b}{2i\pi} \int_{\gamma'} e^{2\delta\lambda} (\lambda I - B)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{b}{2i\pi} \int_{\gamma'} e^{2\delta\lambda} \frac{1 + be^{2\delta\lambda}}{1 + be^{2\delta\lambda}} (\lambda I - B)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{b}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{e^{2\delta\lambda}}{1 + be^{2\delta\lambda}} (\lambda I - B)^{-1} d\lambda \\ &\quad + \frac{b^2}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{e^{4\delta\lambda}}{1 + be^{2\delta\lambda}} (\lambda I - B)^{-1} d\lambda \\ &= U + TU, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$TU = T - U.$$

Similairement, on trouve

$$UT = T - U,$$

d'où $(I + T)^{-1} = I - U$.

Lemme 2.2.7 Sous l'hypothèse (H.1) et pour $p \in]1, \infty[$, on a

1. $\varphi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$ si et seulement si $x \mapsto \sqrt{-A}e^{-x\sqrt{-A}}\varphi \in L^p(0, \delta; E)$.

2. $\varphi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p}, p}$ si et seulement si $x \mapsto Ae^{-x\sqrt{-A}}\varphi \in L^p(0, \delta; E)$.

Preuve. Posons $B := -\sqrt{-A}$. Comme B gène un semi-groupe analytique, alors pour tout $\theta \in]0, 1[$, $m \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(D(B^m), E)_{\theta, p} = \left\{ \varphi \in E : \int_0^\infty \|t^{m\theta} B^m e^{tB} \varphi\|^p \frac{dt}{t} < +\infty \right\},$$

(voir Triebel [36] page 96). Soit $\varphi \in (D(B^m), E)_{\frac{1}{mp}, p}$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \|B^m e^{tB} \varphi\|^p dt &\leq \int_0^\infty \|t^{\frac{1}{p}} B^m e^{tB} \varphi\|^p \frac{dt}{t} \\ &\leq \int_0^\infty \|t^{m(\frac{1}{mp})} B^m e^{tB} \varphi\|^p \frac{dt}{t} \\ &\leq \|\varphi\|_{(D(B^m); E)_{\frac{1}{mp}, p}}^p. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $B^m e^{tB} \varphi \in L^p(0, \delta; E)$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|t^{m\frac{1}{mp}} B^m e^{tB} \varphi\|^p \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty \|t^{\frac{1}{p}} B^m e^{tB} \varphi\|^p \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\delta \|B^m e^{tB} \varphi\|^p dt + \int_\delta^\infty \|B^m e^{tB} \varphi\|^p dt \\ &= \|B^m e^{tB} \varphi\|_{L^p(0, \delta; E)}^p + \int_\delta^\infty \|B^m e^{tB} \varphi\|^p dt. \end{aligned}$$

Grâce aux propriétés des semi-groupes, il vient

$$\int_\delta^\infty \|B^m e^{tB} \varphi\|_E^p dt \leq M \int_\delta^\infty t^{-pm} e^{-tpa} dt \|\varphi\|_E^p \leq K(\delta) \|\varphi\|_E^p,$$

on en déduit que

$$\varphi \in (D(B^m), E)_{\frac{1}{mp}, p} \quad \text{si et seulement si} \quad x \mapsto B^m e^{xB} \varphi \in L^p(0, \delta; E).$$

En appliquant cette propriété pour $m = 1$, on obtient

$$\varphi \in (D(B), E)_{\frac{1}{p}, p} \quad \text{si et seulement si} \quad x \mapsto B e^{xB} \varphi \in L^p(0, \delta; E),$$

grâce à la propriété de réitération (Voir Lions et Peetre [28]), on trouve

$$(D(B), E)_{\frac{1}{p}, p} = (D(B^2), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} = (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p},$$

ce qui montre le premier point de ce Lemme.

Pour le deuxième point, il suffit de prendre $m = 2$.

Corollaire 2.2.2 *Sous l'hypothèse (H.1) et pour tout $p \in]1, \infty[$, on a $\varphi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$ si et seulement si $x \mapsto \sqrt{-A}e^{-x\sqrt{-A}}\varphi \in L^p(-\infty, 0; E)$.*

Proof. La preuve est similaire à celle utilisée dans le Lemme 2.2.7.

Lemme 2.2.8 *Sous les hypothèses (H.0), (H.1), (H.2) et pour*

$$g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E) \quad \text{avec } 1 < p < \infty,$$

on a

$$1. \quad x \mapsto L_+^\delta(x, g_+^\delta) := B \int_0^x e^{(x-s)B} g_+^\delta(s) ds \in L^p(0, \delta; E),$$

$$2. \quad x \mapsto L_+^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\delta - \cdot)) = B \int_x^\delta e^{(s-x)B} g_+^\delta(s) ds \in L^p(0, \delta; E),$$

$$3. \quad x \mapsto \mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta) := B \int_0^\delta e^{(x+s)B} g_+^\delta(s) ds \in L^p(0, \delta; E).$$

Preuve. Les deux premiers points sont des conséquences du Théorème de Dore et Venni [13].

Pour le troisième point, on a, pour presque tout $x \in (0, \delta)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta) &= B \int_0^x e^{(x+s)B} g_+^\delta(s) ds + B \int_x^\delta e^{(x+s)B} g_+^\delta(s) ds \\ &= B \int_0^x e^{(x-s)B} e^{2sB} g_+^\delta(s) ds + e^{2xB} B \int_x^\delta e^{(s-x)B} g_+^\delta(s) ds \\ &= L_+^\delta(x, e^{2 \cdot B} g_+^\delta) + e^{2xB} L_+^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\delta - \cdot)). \end{aligned}$$

Lemme 2.2.9 *Supposons (H.0), (H.1) et (H.2). Soit $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$ avec $1 < p < \infty$. Alors, les applications suivantes*

$$1. \quad x \mapsto L_0(x, g_-) = B \int_x^0 e^{(s-x)B} g_-(s) ds,$$

$$2. x \mapsto L_{-\infty}(x, g_-) = B \int_{-\infty}^x e^{(x-s)B} g_-(s) ds,$$

$$3. x \mapsto \mathcal{L}_{-\infty}(x, g_-) = B \int_{-\infty}^0 e^{-(x+s)B} g_-(s) ds,$$

sont bien définies pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$ et sont $L^p(-\infty, 0; E)$.

Preuve. 1. Soit $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$. On écrit, pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned} L_0(x, g_-) &= B \int_x^0 e^{(s-x)B} g_-(s) ds = B \int_0^{-x} e^{(-x-\tau)B} g_-(-\tau) d\tau \\ &= B \int_0^t e^{(t-\tau)B} g_-(-\tau) d\tau = K_0(t, g_-(-.)), \end{aligned}$$

avec $t \in (0, +\infty)$ et $g_-(-.) \in L^p(0, +\infty; E)$. Grâce au Théorème de Dore et Venni, on a

$$K_0(., g_-(-.)) \in L^p(0, T; E),$$

pour tout $T > 0$ et par le Théorème 2.4, page 28 dans [14], il vient que

$$K_0(., g_-(-.)) \in L^p(0, \infty; E),$$

donc, il est clair que

$$L_0(., g_-) \in L^p(-\infty, 0; E)$$

si et seulement si

$$K_0(., g_-(-.)) \in L^p(0, \infty; E).$$

2. L'idée de la preuve est inspirée de Dore [14] pages 28-29. On écrit, pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$

$$L_{-\infty}(x, g_-) = B \int_{-\infty}^{x-1} e^{(x-s)B} g_-(s) ds + B \int_{x-1}^x e^{(x-s)B} g_-(s) ds.$$

En utilisant l'estimation (0.4.1), pour la première intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 \left\| \int_{-\infty}^{x-1} B e^{(x-s)B} g_-(s) ds \right\|^p dx \\ &\leq M^p \int_{-\infty}^0 \left(\int_{-\infty}^{x-1} \frac{1}{x-s} e^{-(x-s)a} \|g_-(s)\| ds \right)^p dx \\ &\leq M^p \int_{-\infty}^0 \left(\int_{-\infty}^{x-1} e^{-(x-s)a} \|g_-(s)\| ds \right)^p dx. \end{aligned}$$

On écrit

$$\int_{-\infty}^{x-1} e^{-(x-s)a} \|g_-(s)\| ds = (h * \Psi)(x),$$

où

$$h(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \leq 1 \\ e^{-\xi a} & \text{si } \xi > 1, \end{cases}$$

et

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} \|g_-(\omega)\| & \text{si } \omega \leq 0 \\ 0 & \text{si } \omega > 0, \end{cases}$$

il est facile de voir que $\Psi \in L^p(\mathbb{R})$ et $h \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, l'inégalité de Young implique que $h * \Psi \in L^p(\mathbb{R})$, c'est à dire

$$\int_{-\infty}^0 \left\| B \int_{-\infty}^{x-1} e^{(x-s)B} g_-(s) ds \right\|^p dx < \infty.$$

Il reste à montrer que

$$\int_{-\infty}^0 \left\| B \int_{x-1}^x e^{(x-s)B} g_-(s) ds \right\|^p dx < \infty.$$

On considère, pour $j \in \mathbb{N}$, la fonction g_{-j} définie par

$$g_{-j} = \mathbb{I}_{[-j-1, -j[} g_-,$$

où $\mathbb{I}_{[-j-1, -j[}$ est la fonction caractéristique sur $[-j-1, -j[$. Il vient que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \left\| B \int_{x-1}^x e^{(x-s)B} g_-(s) ds \right\|^p dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-j-1}^{-j} \left\| B \int_{x-1}^{-j-1} e^{(x-s)B} g_{-j-1}(s) ds + B \int_{-j-1}^x e^{(x-s)B} g_{-j}(s) ds \right\|^p dx \\ &\leq 2^{p-1} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-j-1}^{-j} \left\| B \int_{x-1}^{-j-1} e^{(x-s)B} g_{-j-1}(s) ds \right\|^p dx + 2^{p-1} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-j-1}^{-j} \left\| B \int_{-j-1}^x e^{(x-s)B} g_{-j}(s) ds \right\|^p dx. \end{aligned}$$

Posons

$$I_j = \int_{-j-1}^{-j} \left\| B \int_{-j-1}^x e^{(x-s)B} g_{-j}(s) ds \right\|^p dx,$$

et

$$J_j = \int_{-j-1}^{-j} \left\| B \int_{x-1}^{-j-1} e^{(x-s)B} g_{-j-1}(s) ds \right\|^p dx.$$

Par le changement de variable

$$\tau = -1 - x - j \text{ et } \sigma = -s - j - 1,$$

il vient que

$$\begin{aligned} I_j &= \int_{-1}^0 \left\| B \int_{-1-j}^{-j-1-\tau} e^{(-1-j-\tau-s)B} g_{-j}(s) ds \right\|^p d\tau \\ &= \int_{-1}^0 \left\| B \int_{\tau}^0 e^{(\sigma-\tau)B} g_{-j}(-\sigma - j - 1) d\sigma \right\|^p d\tau \\ &= \|L_0(\sigma, g_{-j}(-1 - j - \cdot))\|_{L^p(-1,0;E)}^p, \end{aligned}$$

par conséquent, il existe $C_1 > 0$ tel que

$$I_j \leq C_1^p \|g_{-j}(-1 - j - \cdot)\|_{L^p(-1,0;E)}^p \leq C_1^p \|g_{-j}\|_{L^p(-j-1,-j;E)}^p. \quad (2.2.1)$$

Pour J_j , on utilise le changement de variable

$$\tau = -1 - x - j \text{ et } y = s + j + 1,$$

on trouve

$$\begin{aligned} J_j &= \int_{-1}^0 \left\| B \int_{-2-\tau-j}^{-j-1} e^{(-1-\tau-j-s)B} g_{-j-1}(s) ds \right\|^p d\tau \\ &= \int_{-1}^0 \left\| B \int_{-1-\tau}^0 e^{(-\tau-y)B} g_{-j-1}(y - i - 1) dy \right\|^p d\tau \\ &\leq \int_{-1}^0 \left(\int_{-1}^0 \|B e^{(-\tau-y)B} g_{-j-1}(y - i - 1)\| dy \right)^p d\tau \\ &\leq M^p \int_{-1}^0 \left(\int_{-1}^0 \frac{-1}{\tau + y} \|g_{-j-1}(y - i - 1)\| dy \right)^p d\tau. \end{aligned}$$

Le noyau $\frac{-1}{\tau + y}$ définit un opérateur borné sur $L^p(-1,0;\mathbb{R})$, c'est à dire, pour tout $f \in L^p(-1,0;E)$ la fonction F définit par

$$F(f)(t) := \int_{-1}^0 \frac{f(s)}{s+t} ds,$$

vérifie

$$F \in L(L^p(-1,0;E)).$$

En effet

$$F(f)(t) = \int_{-1}^0 \frac{f(s)}{s+t} ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(s)}{s+t} ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\tau-t)}{\tau} d\tau,$$

où $g = \mathbb{I}_{[-1,0]} f$. Ainsi

$$F(f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon \leq |\tau| \leq \frac{1}{\epsilon}} \frac{g(\tau-t)}{\tau} d\tau = V_p \left(\frac{1}{\tau} \right) * g(-\cdot) = H(g(-\cdot))(t),$$

tel que V_p est la valeur principale de Cauchy et H est la transformée de Hilbert, par conséquent, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$J_j \leq C_2 M^p \|g_{-j-1}(\cdot - j - 1)\|_{L^p(-1,0;E)}^p \leq C_2 M^p \|g_{-j-1}\|_{L^p(-j-2,-j-1;E)}^p. \quad (2.2.2)$$

De (2.2.1) et (2.2.2), on déduit que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \left\| B \int_{x-1}^x e^{(x-s)B} g_-(s) ds \right\|^p dx \\ & \leq C_2 2^{p-1} M^p \sum_{j=0}^{\infty} \|g_{-j-1}\|_{L^p(-j-2,-j-1;E)}^p + 2^{p-1} C_1^p \sum_{j=0}^{\infty} \|g_{-j}\|_{L^p(-j-1,-j;E)}^p. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|g_{-j}\|_{L^p(-j-1,-j;E)}^p = \|g_-\|_{L^p(-\infty,0;E)}^p,$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|g_{-j-1}\|_{L^p(-j-2,-j-1;E)}^p \leq \|g_-\|_{L^p(-\infty,0;E)}^p,$$

alors

$$\int_{-\infty}^0 \left\| B \int_{x-1}^x e^{(x-s)B} g_-(s) ds \right\|^p dx \leq 2^p \max(C_1^p, C_2 M^p) \|g_-\|_{L^p(-\infty,0;X)}^p.$$

3. Le dernier point est une conséquence des assertions 1. et 2. de ce lemme et le fait que

$$\mathcal{L}_{-\infty}(x, g_-) = e^{-2xB} L_{-\infty}(x, g_-) + L_0(x, e^{-.2B} g_-),$$

pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$.

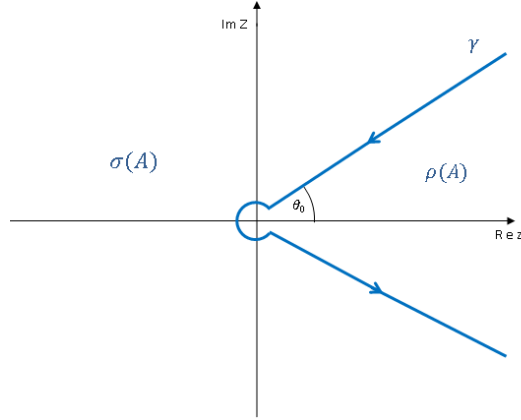
Lemme 2.2.10 *Supposons (H.1). Soient $\varphi \in E$ et $\theta \in]0, 1[$, alors on a*

$$\forall r > 0 : r^\theta \|A(A-r)^{-1} \varphi\|_E \leq K,$$

si et seulement si

$$\forall z \in \gamma : |z|^\theta \|A(A-z)^{-1} \varphi\|_E \leq K.$$

où γ est une courbe simple joignant $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]0, \pi/2[$.



Preuve. Supposons que

$$r^\theta \|A(A-r)^{-1}\varphi\|_E \leq K,$$

pour tout $r > 0$. Soit $z \in \gamma$, on a

$$A(A-z)^{-1}\varphi = A[(A-z)^{-1} - (A-|z|)^{-1}]\varphi + A(A-|z|)^{-1}\varphi.$$

En utilisant l'identité de la résolvante, il vient que

$$A(A-z)^{-1}\varphi = (z-|z|)(A-z)^{-1}A(A-|z|)^{-1}\varphi + A(A-|z|)^{-1}\varphi,$$

donc

$$\begin{aligned} & \|A(A-z)^{-1}\varphi\|_E \\ & \leq \|(z-|z|)(A-z)^{-1}A(A-|z|)^{-1}\varphi\|_E + \|A(A-|z|)^{-1}\varphi\|_E \\ & \leq 3\|A(A-|z|)^{-1}\varphi\|_E \leq K. \end{aligned}$$

Pour la réciproque, on a

$$A(A-r)^{-1}\varphi = A(A-z)^{-1}\varphi - (z-r)(A-r)^{-1}A(A-z)^{-1}\varphi,$$

donc

$$\begin{aligned} & \|A(A-r)^{-1}\varphi\|_E \\ & \leq \|A(A-z)^{-1}\varphi\|_E + \|(z-r)(A-r)^{-1}A(A-z)^{-1}\varphi\|_E \\ & \leq \|A(A-z)^{-1}\varphi\|_E + 2\|A(A-z)^{-1}\varphi\|_E \leq K. \end{aligned}$$

En conséquence

$$(D(A), E)_{1-\theta, p} = \left\{ \varphi \in E : \int_{\gamma} \|z^\theta A(A-z)^{-1}\varphi\|_E^p \frac{d|z|}{|z|} < \infty \right\}.$$

Lemme 2.2.11 *L'image de l'espace*

$$W_1 := \{u \in L^p(0, +\infty; D(A)) : u'', Au \in L^p(0, +\infty; D_A(\theta, p))\}$$

par $u \rightarrow u'(0)$ est

$$D_A(\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p).$$

Preuve. On raisonne comme Grisvard [20], Lemme 4.14, page 337. On écrit l'espace W_1 dans les notations de Lions-Peetre [28], par

$$V_2(p, 0, D_A(\theta + 1, p); p, 0, D_A(\theta, p)).$$

donc, lorsque u est dans W_1 , alors $u'(0)$ est dans

$$T_1^2(p, 0, D_A(\theta + 1, p); p, 0, D_A(\theta, p)),$$

comme

$$\begin{aligned} & T_1^2(p, 0, D_A(\theta + 1, p); p, 0, D_A(\theta, p)) \\ &= (D_A(\theta + 1, p); D_A(\theta, p))_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} \\ &= (D_A(\theta, p); D_A(\theta + 1, p))_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p}. \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que

$$(D_A(\theta, p); D_A(\theta + 1, p))_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p} = D_A(\alpha, p)$$

avec

$$\alpha = (1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}))\theta + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2p})(\theta + 1) = \theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}.$$

2.3 Utilisation des intégrales de Dunford

Dans cette section, on étudie le problème (P_0^δ) sous l'unique hypothèse

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0 \text{ tel que } \rho(A) \supset [0, +\infty[\\ \forall \lambda \in [0, +\infty[: \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |\lambda|}. \end{array} \right. \quad (\text{H.I})$$

Les techniques employées ici, sont basées sur une construction explicite de la solution

$$u^\delta(x) = \begin{cases} u_+^\delta(x), & p.p.x \in (0, \delta) \\ u_-^\delta(x), & p.p.x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

en utilisant le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation.

2.3.1 Représentation de la solution

La représentation de la solution du problème (P_0^δ) est donnée éventuellement sous la forme

$$u^\delta(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (A - z)^{-1} v^\delta(x) dz,$$

où γ est une courbe simple orienté de $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ et v^δ est la solution de problème (P_0^δ) dans le cas scalaire i.e., en remplaçant A par le nombre complexe z . La résolution de ce dernier est équivalente à la résolution de deux problèmes auxiliaires, le premier posé sur la couche mince $(0, \delta)$

$$(P_+^\delta) \begin{cases} (v_+^\delta)''(x) + z v_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \\ v_+^\delta(0) = \psi, \quad (v_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

et le deuxième posé dans un domaine fixe non borné $(-\infty, 0)$

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (v_-^\delta)''(x) + z v_-^\delta(x) = g_-(x) \\ (v_-^\delta)'(0) = \phi, \end{cases}$$

où ψ, ϕ sont deux éléments donnés dans E tels que

$$\psi := v_+^\delta(0) = v_-^\delta(0), \quad \phi := (v_-^\delta)'(0) = \mu (v_+^\delta)'(0) \text{ et } \mu = \frac{\mu_+}{\mu_-}.$$

On commence par résoudre le problème (P_+^δ) , il est connu que la solution de l'équation homogène est de la forme

$$v_+^\delta(x) = a e^{\sqrt{-z}x} + b e^{-\sqrt{-z}x}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ici, la détermination analytique de la racine carrée de $-z$ est choisie de telle sorte que

$$\operatorname{Re} \sqrt{-z} > 0,$$

et

$$\sqrt{-z} \in S_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq (\pi - \theta_0)/2\}.$$

Pour l'équation non homogène on utilise la méthode des variations des constantes i.e.,

$$v_+^\delta(x) = C_1(x) e^{\sqrt{-z}x} + C_2(x) e^{-\sqrt{-z}x},$$

telles que C_1 et C_2 sont deux fonctions à déterminer vérifiant le système suivant

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{\sqrt{-z}x} + C_2'(x) e^{-\sqrt{-z}x} = 0 \\ \sqrt{-z} C_1'(x) e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z} C_2'(x) e^{-\sqrt{-z}x} = g_+^\delta(x), \end{cases}$$

qui admet une solution unique donnée par

$$\begin{cases} C_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{e^{-\sqrt{-z}s}}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(s) ds + a \\ C_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{e^{\sqrt{-z}s}}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(s) ds + b, \end{cases}$$

par conséquent

$$v_+^\delta(x) = ae^{\sqrt{-z}x} + be^{-\sqrt{-z}x} + \int_0^x \frac{\sinh(\sqrt{-z}(x-s))}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(s) ds,$$

et sa dérivée

$$(v_+^\delta)'(x) = a\sqrt{-z}e^{\sqrt{-z}x} - b\sqrt{-z}e^{-\sqrt{-z}x} + \int_0^x \cosh(\sqrt{-z}(x-s)) g_+^\delta(s) ds.$$

donc, les conditions aux limites nous donnent

$$\begin{aligned} a &= \frac{e^{-\sqrt{-z}\delta}\psi}{2 \cosh(\sqrt{-z}\delta)} + \frac{f_+^\delta}{2\sqrt{-z} \cosh(\sqrt{-z}\delta)} - \int_0^\delta \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-s))}{2\sqrt{-z} \cosh(\sqrt{-z}\delta)} g_+^\delta(s) ds, \\ b &= \frac{e^{\sqrt{-z}\delta}\psi}{2 \cosh(\sqrt{-z}\delta)} - \frac{f_+^\delta}{2\sqrt{-z} \cosh(\sqrt{-z}\delta)} + \int_0^\delta \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-s))}{2\sqrt{-z} \cosh(\sqrt{-z}\delta)} g_+^\delta(s) ds, \end{aligned}$$

en reportant ces deux expressions dans $v_+^\delta(x)$ et après des simplifications, on obtient

$$\begin{aligned} v_+^\delta(x) &= \frac{\sinh(\sqrt{-z}x)}{\sqrt{-z} \cosh(\sqrt{-z}\delta)} f_+^\delta + \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-x))}{\cosh(\sqrt{-z}\delta)} \psi \\ &\quad - \int_0^x \frac{\sinh(\sqrt{-z}s) \cosh(\sqrt{-z}(\delta-x))}{\sqrt{-z} \cosh(\sqrt{-z}\delta)} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - \int_x^\delta \frac{\sinh(\sqrt{-z}x) \cosh(\sqrt{-z}(\delta-s))}{\sqrt{-z} \cosh(\sqrt{-z}\delta)} g_+^\delta(s) ds. \end{aligned}$$

D'une façon analogue, on trouve que la solution de l'équation non homogène du problème (P_-^δ) est donnée par

$$v_-^\delta(x) = \alpha e^{-\sqrt{-z}x} + \beta e^{\sqrt{-z}x} - \frac{1}{2} \int_x^0 \frac{e^{\sqrt{-z}(x-s)}}{\sqrt{-z}} g_-(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^0 \frac{e^{\sqrt{-z}(s-x)}}{\sqrt{-z}} g_-(s) ds,$$

où α et β sont deux constantes à déterminer. Une méthode permettant d'obtenir la condition $v_-^\delta(-\infty) = 0$ est de prendre

$$\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{-z}s} g_-(s) ds.$$

Pour déterminer β en utilisant la deuxième condition aux limites, en effet, pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$

$$(v_-^\delta)'(x) = \sqrt{-z}\beta e^{\sqrt{-z}x} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{\sqrt{-z}(s-x)} g_-(s) ds - \frac{1}{2} \int_x^0 e^{\sqrt{-z}(x-s)} g_-(s) ds,$$

donc

$$\phi = \sqrt{-z}\beta + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{-z}s} g_-(s) ds,$$

ce qui implique que

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{-z}}\phi - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\sqrt{-z}s}}{\sqrt{-z}} g_-(s) ds.$$

Par conséquent

$$v_-^\delta(x) = \frac{e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{-z}}\phi - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\sqrt{-z}s}}{\sqrt{-z}} \cosh(\sqrt{-z}x) g_-(s) ds + \int_x^0 \frac{\sinh(\sqrt{-z}(s-x))}{\sqrt{-z}} g_-(s) ds.$$

On construit maintenant la solution du problème (P_0^δ) dans le cas scalaire, en utilisant les solutions des problèmes auxiliaires et les conditions de transmission.

Pour presque tout $x \in (0, \delta)$, on a

$$\begin{aligned} (v_+^\delta)'(x) &= \frac{\cosh(\sqrt{-z}x)}{\cosh(\sqrt{-z}\delta)} f_+^\delta - \frac{\sqrt{-z} \sinh(\sqrt{-z}(\delta-x))}{\cosh(\sqrt{-z}\delta)} \psi \\ &+ \int_0^x \frac{\sinh(\sqrt{-z}s) \sinh(\sqrt{-z}(\delta-x))}{\cosh(\sqrt{-z}\delta)} g_+^\delta(s) ds \\ &- \int_x^\delta \frac{\cosh(\sqrt{-z}x) \cosh(\sqrt{-z}(\delta-s))}{\cosh(\sqrt{-z}\delta)} g_+^\delta(s) ds, \end{aligned}$$

alors

$$(v_+^\delta)'(0) = \frac{1}{\cosh(\sqrt{-z}\delta)} f_+^\delta - \frac{\sqrt{-z} \sinh(\sqrt{-z}\delta)}{\cosh(\sqrt{-z}\delta)} \psi - \int_0^\delta \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-s))}{\cosh(\sqrt{-z}\delta)} g_+^\delta(s) ds.$$

Il vient que

$$\phi - \sqrt{-z}\psi = \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{-z}s} g_-(s) ds,$$

et

$$\cosh(\sqrt{-z}\delta)\phi + \mu\sqrt{-z}\sinh(\sqrt{-z}\delta)\psi = \mu f_+^\delta - \mu \int_0^\delta \cosh(\sqrt{-z}(\delta-s)) g_+^\delta(s) ds.$$

Le déterminant de ce système est

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{-z} \\ \cosh(\sqrt{-z}\delta) & \mu\sqrt{-z}\sinh(\sqrt{-z}\delta) \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{-z}(\cosh(\sqrt{-z}\delta) + \mu\sinh(\sqrt{-z}\delta)) \\ &:= \sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mu\sinh(\sqrt{-z}\delta)}{\Delta_z(\delta, \mu)} \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{-z}s} g_-(s) ds + \frac{\mu f_+^\delta}{\Delta_z(\delta, \mu)} - \mu \int_0^\delta \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-s))}{\Delta_z(\delta, \mu)} g_+^\delta(s) ds, \\ \psi &= \frac{\mu}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} f_+^\delta - \mu \int_0^\delta \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-s))}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} g_+^\delta(s) ds - \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\sqrt{-z}\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} g_-(s) ds. \end{aligned}$$

En remplaçant ψ et ϕ par leur valeurs dans les expressions de v_+^δ , v_-^δ et après des simplifications, on trouve

$$\begin{aligned} v_+^\delta(x) &= \frac{\sinh(\sqrt{-z}x) + \mu\cosh(\sqrt{-z}x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} f_+^\delta - \int_0^\delta K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-x)) e^{\sqrt{-z}s}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} g_-(s) ds, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

où

$$K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) = \begin{cases} \frac{\sinh(\sqrt{-z}s) + \mu\cosh(\sqrt{-z}s)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh(\sqrt{-z}(\delta-x)) & \text{si } s \leq x \\ \frac{\sinh(\sqrt{-z}x) + \mu\cosh(\sqrt{-z}x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh\sqrt{-z}(\delta-s) & \text{si } x \leq s, \end{cases}$$

et

$$v_-^\delta(x) = \frac{\mu e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} f_+^\delta - \mu \int_0^\delta \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-s)) e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} g_+^\delta(s) ds \quad (2.3.2)$$

$$- \int_{-\infty}^0 K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) g_-(s) ds,$$

où

$$K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) = \begin{cases} \frac{\Delta_-(x, \delta, \mu)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} & \text{si } s \leq x \\ \frac{\Delta_-(s, \delta, \mu)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}x} & \text{si } x \leq s, \end{cases}$$

et

$$\Delta_-(s, \delta, \mu) = \cosh(\sqrt{-z}s) \cosh(\sqrt{-z}\delta) - \mu \sinh(\sqrt{-z}\delta) \sinh(\sqrt{-z}s).$$

Par conséquent, la solution du problème abstrait (P_0^δ) est donnée formellement par

$$u_+^\delta(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh(\sqrt{-z}x) + \mu \cosh(\sqrt{-z}x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-x)) e^{\sqrt{-z}s}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} g_-(s) ds dz$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz$$

$$= n_+^\delta(x, A) f_+^\delta + v_+^\delta(x, A, g_-) + w_+^\delta(x, A, g_+^\delta),$$

pour presque tout $x \in (0, \delta)$, et

$$u_-^\delta(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mu e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz$$

$$- \frac{\mu}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-s)) e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-\infty}^0 K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) (A - zI)^{-1} g_-(s) ds$$

$$= n_-^\delta(x, A) f_+^\delta + v_-^\delta(x, A, g_+^\delta) + w_-^\delta(x, A, g_-),$$

pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$.

On montre maintenant la convergence absolue des intégrales. Pour presque tout $x \in (0, \delta)$, on a

$$\|n_+^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E \leq \frac{1 + \mu}{2\pi} \int_\gamma \frac{\cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}x)}{|z|^{3/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} \|f_+^\delta\|_E |dz|.$$

du lemme 2.2.4, il vient que

$$\begin{aligned} & \|n_+^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E \\ & \leq \frac{1 + \mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} + e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{2 |z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\ & \leq \frac{1 + \mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\ & \leq \frac{1 + \mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E. \end{aligned}$$

De la convergence de $\int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{3/2}}$, on obtient

$$\|n_+^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E \leq K(\theta_0) \|f_+^\delta\|_E. \quad (2.3.3)$$

Grâce au lemme 2.2.4 et l'inégalité de Hölder, pour $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \|v_+^\delta(x, A, g_-)\|_E \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x))}{|z|^{3/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s} \|g_-(s)\|_E ds |dz| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x))}{|z|^{3/2+1/2q} |\Delta_z(\delta, \mu)|} |dz| \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)} \\ & \leq \frac{1}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}}{|z|^{3/2+1/2q} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}} |dz| \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)} \\ & \leq \frac{1}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2+1/2q}} |dz| \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|v_+^\delta(x, A, g_-)\|_E \leq K(\theta_0) \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)}. \quad (2.3.4)$$

Pour $w_+^\delta(x, A, g_+^\delta)$, on applique le lemme de Schur, en effet, pour presque tout $x \in (0, \delta)$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\delta \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) \right| ds \\
& \leq \frac{(1 + \mu) \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x))}{|z|^{1/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} \int_0^x \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}s) ds \\
& \quad + \frac{(1 + \mu) \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}x)}{|z|^{1/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} \int_x^\delta \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s)) ds \\
& \leq \frac{1 + \mu}{|z| |\Delta_z(\delta, \mu)|} \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)) \sinh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}x) \\
& \quad + \frac{1 + \mu}{|z| |\Delta_z(\delta, \mu)|} \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}x) \sinh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)) \\
& \leq \frac{1 + \mu}{|z| |\Delta_z(\delta, \mu)|} \sinh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta) \leq \frac{2(1 + \mu)}{C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2) |z|}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\max_{x \in (0, \delta)} \int_0^\delta \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) \right| ds \leq \frac{K(\theta_0)}{|z|} \quad (2.3.5)$$

et grâce à la symétrie du noyau, il vient que

$$\|w_+^\delta(x, A, g_+^\delta)\| \leq \int_\gamma \frac{K(\theta_0)}{|z|^2} dz \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)} \leq K(\theta_0) \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)}. \quad (2.3.6)$$

Pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$, on a

$$\begin{aligned}
\|n_-^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E & \leq \frac{\mu}{2\pi} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\
& \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\
& \leq K(\theta_0) \|f_+^\delta\|_E,
\end{aligned} \quad (2.3.7)$$

et

$$\begin{aligned}
\|v_-^\delta(x, A, g_+^\delta)\|_E & \leq \frac{\mu}{2\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{\cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s)) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} \|g_+^\delta(s)\|_E ds |dz| \\
& \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{3/2}} \|g_+^\delta(s)\|_E ds |dz|,
\end{aligned}$$

de l'inégalité de Hölder, il vient que

$$\begin{aligned} \|v_-^\delta(x, A, g_+^\delta)\| &\leq K(\theta_0) \left(\int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2q}}} d|z| \right) \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)} \\ &\leq K(\theta_0) \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Pour le terme $w_-^\delta(x, A, g_-)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) \right| ds &\leq \frac{(\mu + 1)}{|z|^{\frac{1}{2}} C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{-\infty}^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+x)} ds \\ &\quad + \frac{(\mu + 1)}{|z|^{\frac{1}{2}} C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_x^0 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+x)} ds \\ &\leq \frac{(\mu + 1)}{|z| C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Schur et le fait que

$$\max_{x \in (-\infty, 0)} \int_{-\infty}^0 \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) \right| ds \leq \frac{K(\theta_0)}{|z|}, \quad (2.3.9)$$

on trouve

$$\|w_-^\delta(x, A, g_-)\| \leq K(\theta_0) \int_\gamma \frac{dz}{|z|^2} \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)} \leq K(\theta_0) \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)}. \quad (2.3.10)$$

2.3.2 Solution stricte

Pour montrer que la solution obtenue est stricte, c'est à dire

$$\begin{cases} u_+^\delta \in W^{2,p}(0, \delta; E) \cap L^p(0, \delta; D(A)) \\ u_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)), \end{cases}$$

et vérifie (P_0^δ) , on écrit la solution du problème (P_0^δ) sous la forme

$$u^\delta = \bar{u}^\delta + \overline{\bar{u}}^\delta,$$

telles que $\bar{u}^\delta, \overline{\bar{u}}^\delta$ sont les solutions des deux problèmes suivants

$$(\overline{P}_0^\delta) \begin{cases} (\bar{u}_+^\delta)''(x) + A\bar{u}_+^\delta(x) = g_+^\delta(x), & p.p. x \in (0, \delta) \\ (\bar{u}_-^\delta)''(x) + A\bar{u}_-^\delta(x) = g_-(x), & p.p. x \in (-\infty, 0) \\ (\bar{u}_+^\delta)'(\delta) = 0, \quad \bar{u}_+^\delta(0) = \bar{u}_-^\delta(0) \\ \mu_- (\bar{u}_-^\delta)'(0) = \mu_+ (\bar{u}_+^\delta)'(0), \end{cases}$$

$$(\overline{P}_0^\delta) \begin{cases} (\overline{u}_+^\delta)''(x) + A\overline{u}_+^\delta(x) = 0, & p.p. x \in (0, \delta) \\ (\overline{u}_-^\delta)''(x) + A\overline{u}_-^\delta(x) = 0, & p.p. x \in (-\infty, 0) \\ (\overline{u}_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \overline{u}_+^\delta(0) = \overline{u}_-^\delta(0) \\ \mu_- (\overline{u}_-^\delta)'(0) = \mu_+ (\overline{u}_+^\delta)'(0). \end{cases}$$

La solution du problème (\overline{P}_0^δ) est donnée par

$$\overline{u}^\delta(x) = \begin{cases} \overline{u}_+^\delta(x) = v_+^\delta(x, A, g_-) + w_+^\delta(x, A, g_+^\delta) & p.p. x \in (0, \delta) \\ \overline{u}_-^\delta(x) = v_-^\delta(x, A, g_+^\delta) + w_-^\delta(x, A, g_-) & p.p. x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

On définit, dans l'espace $X := L^p(-\infty, \delta; E)$, les deux opérateurs suivants

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = L^p(-\infty, \delta; D(A)) \\ (\mathcal{A}\psi)(x) = A\psi(x), \quad p.p. x \in (-\infty, \delta), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(\mathcal{B}^\delta) = \left\{ \overline{u}_+^\delta \in W^{2,p}(0, \delta; E), \overline{u}_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty, 0; E), (\overline{u}_+^\delta)'(\delta) = 0 \right. \\ \left. \overline{u}_+^\delta(0) = \overline{u}_-^\delta(0), \mu_- (\overline{u}_-^\delta)'(0) = \mu_+ (\overline{u}_+^\delta)'(0) \right\}, \\ (\mathcal{B}^\delta \overline{u}^\delta)(x) = (\overline{u}^\delta)''(x), \end{cases}$$

de domaines denses dans X . Alors, le problème (\overline{P}_0^δ) s'écrit sous la forme

$$\mathcal{A}\overline{u}^\delta + \mathcal{B}^\delta \overline{u}^\delta = g^\delta.$$

La proposition suivante regroupe les propriétés spectrales des deux opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B}^δ .

Proposition 2.3.1 *Les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B}^δ sont linéaires fermés de domaines denses dans X et vérifient les hypothèses (DG.1) et (DG.2).*

Preuve. Soient $g^\delta \in X$ et $\lambda \geq 0$. L'équation

$$\mathcal{A}v^\delta - \lambda v^\delta = g^\delta,$$

avec $v^\delta \in D(\mathcal{A})$, s'écrit pour presque tout $x \in (-\infty, \delta)$, sous la forme

$$Av^\delta(x) - \lambda v^\delta(x) = g^\delta(x),$$

donc

$$v^\delta(x) = (A - \lambda I)^{-1} g^\delta(x)$$

pour presque tout $x \in (-\infty, \delta)$, ainsi

$$\|v^\delta(x)\|_E \leq \frac{C}{1 + \lambda} \|g^\delta(x)\|_E \quad p.p. x \in (-\infty, \delta),$$

qui implique que

$$\|v^\delta\|_X \leq \frac{C}{1 + \lambda} \|g^\delta\|_X.$$

D'autre part, on a pour tout $g^\delta \in X$ et pour $\lambda \geq 0$

$$\{(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} g^\delta\}(x) = (A - \lambda I)^{-1} g^\delta(x),$$

pour presque tout $x \in (-\infty, \delta)$.

L'étude de l'opérateur \mathcal{B}^δ repose sur la résolution de l'équation spectrale

$$\mathcal{B}^\delta v^\delta + z v^\delta = g^\delta,$$

pour $g^\delta \in X$, $z \in \mathbb{C}$ et $v^\delta \in D(\mathcal{B}^\delta)$. Cette équation s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} v^{\delta''}(x) + z v^\delta(x) = g^\delta(x) & p. p. x \in (-\infty, \delta), \\ v^\delta(0_+) = v^\delta(0_-), \quad \mu_- (v^\delta)'(0_-) = \mu_+ (v^\delta)'(0_+) \\ (v^\delta)'(\delta) = 0. \end{cases}$$

Son éventuelle solution est

$$\begin{aligned} v^\delta(x) &= \{(\mathcal{B}^\delta + zI)^{-1} g^\delta\}(x) \\ &= \begin{cases} v_+^\delta(x) & p. p. x \in (0, \delta) \\ v_-^\delta(x) & p. p. x \in (-\infty, 0), \end{cases} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} v_+^\delta(x) &= - \int_0^\delta K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) g_+^\delta(s) ds - \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} g_-(s) ds \\ &: = I_1^+(x) + I_2^+(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_-^\delta(x) &= - \int_{-\infty}^0 K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) g_-(s) ds - \mu \int_0^\delta \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta - s))}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}x} g_+^\delta(s) ds \\ &: = I_1^-(x) + I_2^-(x). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|v^\delta\|_{L^p(-\infty, \delta; E)} &\leq \|v_-^\delta\|_{L^p(-\infty, 0; E)} + \|v_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)} \\ &\leq \|I_1^-\|_{L^p(-\infty, 0; E)} + \|I_2^-\|_{L^p(-\infty, 0; E)} \\ &\quad + \|I_1^+\|_{L^p(0, \delta; E)} + \|I_2^+\|_{L^p(0, \delta; E)}. \end{aligned}$$

Pour I_1^- et I_1^+ , on utilise les deux estimations suivantes

$$\max_{x \in (-\infty, 0)} \int_{-\infty}^0 |K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s)| ds \leq \frac{K(\theta_0)}{|z|},$$

$$\max_{x \in (0, \delta)} \int_0^\delta \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) \right| ds \leq \frac{K(\theta_0)}{|z|}.$$

En appliquant le lemme de Schur, on trouve

$$\|I_1^-\|_{L^p(-\infty, 0; E)} \leq \frac{K(\theta_0)}{|z|} \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)}, \quad (2.3.11)$$

$$\|I_1^+\|_{L^p(0, \delta; E)} \leq \frac{K(\theta_0)}{|z|} \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)}. \quad (2.3.12)$$

Pour I_2^- , on a

$$\begin{aligned} \|I_2^-\|_{L^p(-\infty, 0; E)}^p &\leq \frac{K^p(\theta_0)}{|z|^{p/2}} \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-s)} \|g_+^\delta(s)\|_E ds \right)^p dx \\ &\leq \frac{K^p(\theta_0)}{|z|^{p/2}} \int_{-\infty}^0 e^{p \operatorname{Re} \sqrt{-z}x} dx \left(\int_0^\delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}s} \|g_+^\delta(s)\|_E ds \right)^p \\ &\leq \frac{K^p(\theta_0)}{|z|^{p/2+1/2+p/2q}} \left(1 - e^{-q \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}\right)^{\frac{p}{q}} \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)}^p \\ &\leq \frac{K^p(\theta_0)}{|z|^p} \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)}^p, \end{aligned}$$

donc

$$\|I_2^-\|_{L^p(-\infty, 0; E)} \leq \frac{K(\theta_0)}{|z|} \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)}. \quad (2.3.13)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|I_2^+\|_{L^p(0, \delta; E)}^p &\leq \frac{K^p(\theta_0)}{|z|^{p/2}} \int_0^\delta \left(\int_{-\infty}^0 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)} \|g_-(s)\|_E ds \right)^p dx \\ &\leq \frac{K^p(\theta_0)}{|z|^{p/2}} \int_0^\delta \left(\int_{-\infty}^0 e^{q \operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)} ds \right)^{\frac{p}{q}} dx \int_{-\infty}^0 \|g_-(s)\|_E^p ds \\ &\leq \frac{K^p(\theta_0)}{|z|^p} \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)}^p, \end{aligned}$$

ainsi

$$\|I_2^+\|_{L^p(0, \delta; E)} \leq \frac{K(\theta_0)}{|z|} \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)}. \quad (2.3.14)$$

De (2.3.11), (2.3.12), (2.3.13) et (2.3.14), il vient que

$$\|(\mathcal{B}^\delta + zI)^{-1} g^\delta\|_X \leq \frac{K(\theta_0)}{|z|} \|g^\delta\|_{L^p(-\infty, \delta; E)}.$$

Les résolvantes des opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B}^δ commutent, donc, les hypothèses (DG.1) et (DG.2) sont satisfaits.

D'autre part l'espace $D_{\mathcal{A}}(\theta, q)$ est le sous espace de X formé des u tels que

$$\int_0^{+\infty} \|t^\theta \mathcal{A}(\mathcal{A} - tI)^{-1} u\|_X^q \frac{dt}{t} < \infty,$$

c'est à dire

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\delta} \|t^\theta A(A - tI)^{-1} u(x)\|_E^p dx \right) \frac{dt}{t} < \infty.$$

Lorsque $p = q$, on applique le Théorème de Fubini, on obtient

$$D_{\mathcal{A}}(\theta, p) = L^p(-\infty, \delta; D_{\mathcal{A}}(\theta, p)).$$

Alors, pour $g^\delta \in L^p(-\infty, \delta; D_{\mathcal{A}}(\theta, p))$ avec $1 \leq p \leq \infty$, la solution \bar{u}^δ du problème (\bar{P}_0^δ) est stricte i.e.

$$\begin{cases} \bar{u}_+^\delta \in W^{2,p}(0, \delta; E) \cap L^p(0, \delta; D(A)) \\ \bar{u}_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)). \end{cases}$$

De plus, on a la régularité suivante

$$(\bar{u}^\delta)''(\cdot) \in L^p(-\infty, \delta; D_{\mathcal{A}}(\theta, p)),$$

et

$$\mathcal{A}\bar{u}^\delta = A\bar{u}^\delta(\cdot) \in L^p(-\infty, \delta; D_{\mathcal{A}}(\theta, p)).$$

Le résultat pour ce problème est résumé par

Proposition 2.3.2 *Supposons (H.1). Soit*

$$g^\delta \in L^p(-\infty, \delta; D_{\mathcal{A}}(\theta, p)),$$

avec $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. Alors le problème (\bar{P}_0^δ) admet une unique solution stricte vérifiant

$$(\bar{u}^\delta)''(\cdot), A\bar{u}^\delta(\cdot) \in L^p(-\infty, \delta; D_{\mathcal{A}}(\theta, p)).$$

La solution du problème $(\bar{\bar{P}}_0^\delta)$ est donnée par

$$\bar{\bar{u}}^\delta(x) = \begin{cases} \bar{\bar{u}}_+^\delta(x) = n_+^\delta(x, A) f_+^\delta & p. p. x \in (0, \delta) \\ \bar{\bar{u}}_-^\delta(x) = n_-^\delta(x, A) f_+^\delta & p. p. x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Proposition 2.3.3 *Sous l'hypothèse (H.1) et pour $1 < p \leq \infty$, le problème $(\bar{\bar{P}}_0^\delta)$ admet une unique solution stricte si et seulement si*

$$f_+^\delta \in D_A(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p).$$

Preuve. Pour presque tout $x \in (0, \delta)$, en effet

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^\delta \left\| \overline{\overline{u}}_+^\delta(x) \right\|_E^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^\delta \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh(\sqrt{-zx}) + \mu \cosh(\sqrt{-zx})}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \right\|_E^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \frac{1 + \mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\frac{\theta_0}{2})} \left(\int_0^\delta \left(\int_\gamma \frac{d|z|}{|z|^{3/2}} \right)^p dx \right)^{1/p} \|f_+^\delta\|_E \\
&\leq K(\theta_0) \|f_+^\delta\|_E.
\end{aligned}$$

Pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$, on a

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{-\infty}^0 \left\| \overline{\overline{u}}_-^\delta(x) \right\|_E^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{-\infty}^0 \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mu e^{\sqrt{-zx}}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \right\|_E^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \frac{\mu \|f_+^\delta\|_E}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \left(\int_{-\infty}^0 e^{p \sin(\theta_0/2) \sqrt{\epsilon_0} (x-\delta)} dx \right)^{1/p} \left(\int_\gamma \frac{d|z|}{|z|^{3/2}} \right) \\
&\leq K(\theta_0) \|f_+^\delta\|_E.
\end{aligned}$$

On suppose maintenant que $f_+^\delta \in D_A(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p)$, c'est à dire

$$\int_0^{+\infty} \left\| r^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} A(A - r)^{-1} f_+^\delta \right\|_E^p \frac{dr}{r} < \infty,$$

et grâce au lemme 2.2.10 il vient que

$$\int_\gamma \left\| z^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} A(A - z)^{-1} f_+^\delta \right\|_E^p \frac{d|z|}{|z|} < \infty.$$

On commence par examiner le cas $p = \infty$, en montrant que si

$$f_+^\delta \in D_A(1/2, \infty),$$

alors

$$A\overline{\overline{u}}_+^\delta \in L^\infty(0, \delta, E), \quad A\overline{\overline{u}}_-^\delta \in L^\infty(-\infty, 0, E).$$

On a, pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned}
& \left\| A\bar{u}_-^\delta(x) \right\|_E \\
& \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|} \left\| z^{1/2} A(A-zI)^{-1} f_+^\delta \right\|_E d|z| \\
& \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|} d|z| \left\| f_+^\delta \right\|_{D_A(1/2, \infty)} \\
& \leq K(\theta_0) \left\| f_+^\delta \right\|_{D_A(1/2, \infty)},
\end{aligned}$$

car

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-(\delta-x) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z| = 2 \int_{(\delta-x)\sqrt{\epsilon_0}}^{+\infty} \frac{e^{-\sin(\theta_0/2)\sigma}}{\sigma} d\sigma < \infty.$$

De plus, pour presque tout $x \in (0, \delta)$ on a

$$\begin{aligned}
& \left\| A\bar{u}_+^\delta(x) \right\|_E \\
& \leq \frac{1+\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{-(\delta-x) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} \left\| z^{1/2} A(A-zI)^{-1} f_+^\delta \right\|_E d|z|, \\
& \leq \frac{1+\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{-(\delta-x) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z| \left\| f_+^\delta \right\|_{D_A(1/2, \infty)},
\end{aligned}$$

donc

$$\left\| A\bar{u}_+^\delta(x) \right\|_E \leq K(\theta_0) \left\| f_+^\delta \right\|_{D_A(1/2, \infty)}.$$

Pour $1 < p < \infty$, en effet

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 \left\| A\bar{u}_-^\delta(x) \right\|_E^p dx \\
& \leq \left(\frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \right)^p \int_{-\infty}^0 \left(\int_{\gamma} \frac{e^{(x-\delta) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{-1/2p}} \left\| z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} A(A-zI)^{-1} f_+^\delta \right\|_E \frac{d|z|}{|z|} \right)^p dx
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 \left(\int_{\gamma} \frac{e^{(x-\delta) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{-1/2p}} \left\| z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} A(A-zI)^{-1} f_+^\delta \right\|_E \frac{d|z|}{|z|} \right)^p dx \\
& \leq \left(\int_{-\infty}^0 e^{x \sin(\theta_0/2)\sqrt{\epsilon_0}} dx \right) \left(\int_{\gamma} \frac{e^{-\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{-1/2p}} \left\| z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} A(A-zI)^{-1} f_+^\delta \right\|_E \frac{d|z|}{|z|} \right)^p,
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder, il vient

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\gamma} \frac{e^{-\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{-1/2p}} \left\| z^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} A (A - zI)^{-1} f_+^{\delta} \right\|_E \frac{d|z|}{|z|} \right)^p \\
& \leq \left(\int_{\gamma} \frac{e^{-q\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1-q/2p}} d|z| \right)^{p/q} \left(\int_{\gamma} \left\| z^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} A (A - zI)^{-1} f_+^{\delta} \right\|_E^p \frac{d|z|}{|z|} \right) \\
& \leq \left(\int_{\gamma} \frac{e^{-q\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1-q/2p}} d|z| \right)^{p/q} \|f_+^{\delta}\|_{D_A(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p)}
\end{aligned}$$

avec $1/p + 1/q = 1$. Posons $\delta |z|^{1/2} = \sigma$, on trouve

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-q\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1-q/2p}} d|z| = \int_{\gamma} \frac{e^{-q\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{(3-q)/2}} d|z| = \frac{2}{\delta^{q-1}} \int_{\delta\sqrt{\epsilon_0}}^{\infty} \frac{e^{-q \sin(\theta_0/2)\sigma}}{\sigma^{2-q}} d\sigma \leq C\Gamma(q-1),$$

par conséquent

$$\left(\int_{-\infty}^0 \left\| A \bar{u}_-^{\delta}(x) \right\|_E^p dx \right)^{1/p} \leq K(\theta_0) \|f_+^{\delta}\|_{(D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}}.$$

Idem pour \bar{u}_+^{δ} .

On peut alors établir le théorème suivant.

Théorème 2.3.1 *Sous l'hypothèse (H.1) et pour*

$$g^{\delta} \in L^p(-\infty, \delta; D_A(\theta, p))$$

avec $1 < p \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, le problème (P_0^{δ}) admet une unique solution stricte si et seulement si

$$f_+^{\delta} \in D_A(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p).$$

2.3.3 Régularité Maximale

Le but principal de cette sous section, est de montrer que

$$(u^{\delta})''(\cdot), Au^{\delta}(\cdot) \in L^p(-\infty, \delta; D_A(\theta, p)),$$

c'est à dire $(u^{\delta})''(\cdot)$ et $Au^{\delta}(\cdot)$ sont aussi régulier que g^{δ} . On a déjà vu que

$$(\bar{u}^{\delta})''(\cdot), A\bar{u}^{\delta}(\cdot) \in L^p(-\infty, \delta; D_A(\theta, p)).$$

D'autre part, si \bar{u}^δ a la régularité maximale alors

$$f_+^\delta \in D_A(\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p),$$

grâce au lemme 2.2.11.

Soit $f_+^\delta \in D_A(\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p)$, montrons que

$$(\bar{u}^\delta)''(\cdot), A\bar{u}^\delta(\cdot) \in L^p(-\infty, \delta; D_A(\theta, p)).$$

Pour presque tout $x \in (0, \delta)$, on a

$$\begin{aligned} & A(A - \lambda)^{-1} A\bar{u}_+^\delta(x) \\ &= A\bar{u}_+^\delta(x) + \lambda(A - \lambda)^{-1} A\bar{u}_+^\delta(x) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh(\sqrt{-zx}) + \mu \cosh \sqrt{-zx}}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ & \quad + \frac{\lambda}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh(\sqrt{-zx}) + \mu \cosh \sqrt{-zx}}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} (A - \lambda)^{-1} A(A - zI)^{-1} f_+^\delta dz. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de la résolvante

$$(A - zI)^{-1} - (A - \lambda I)^{-1} = (z - \lambda)(A - zI)^{-1}(A - \lambda I)^{-1},$$

on trouve

$$A(A - \lambda)^{-1} A\bar{u}_+^\delta(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z}{z - \lambda} \frac{\sinh(\sqrt{-zx}) + \mu \cosh(\sqrt{-zx})}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} f_+^\delta dz. \quad (2.3.15)$$

On traite le cas $p = \infty$, en supposant que $f_+^\delta \in D_A(\theta + \frac{1}{2}, \infty)$ avec $0 < \theta < 1/2$, alors

$$\begin{aligned} \left\| A(A - \lambda)^{-1} A\bar{u}_+^\delta(x) \right\|_E &\leq K \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^\theta |z - \lambda|} \left\| z^{\theta+1/2} A(A - zI)^{-1} f_+^\delta \right\|_E d|z| \\ &\leq K \|f_+^\delta\|_{D_A(\theta+\frac{1}{2}, \infty)} \int_\gamma \frac{d|z|}{|z|^\theta |z - \lambda|}, \end{aligned}$$

comme

$$\int_\gamma \frac{d|z|}{|z|^\theta |z - \lambda|} \leq \frac{K}{\lambda^\theta},$$

(voir, par exemple, [2] et [4]) alors

$$\left\| A(A - \lambda)^{-1} A\bar{u}_+^\delta(x) \right\|_E \leq \frac{K}{\lambda^\theta} \|f_+^\delta\|_{D_A(\theta+\frac{1}{2}, \infty)}.$$

Pour $1 < p < \infty$, on raisonne comme [12], dans la démonstration du Théorème 3.11 page 329, en effet

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^{+\infty} \left\| \lambda^\theta A(A-\lambda)^{-1} A\overline{u}_+^\delta(x) \right\|_E^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/p} \\
& \leq \left(\int_0^{+\infty} \left(K \int_\gamma \frac{\lambda^\theta |z|^{3/2} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z-\lambda|} \|A(A-zI)^{-1} f_+^\delta\|_E \frac{d|z|}{|z|} \right)^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/p} \\
& \leq \left(\int_0^{+\infty} \left(K \int_\gamma \frac{\lambda^\theta |z|^{3/2}}{|z-\lambda|} \|A(A-zI)^{-1} f_+^\delta\|_E \frac{d|z|}{|z|} \right)^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int_\gamma \frac{\lambda^\theta |z|^{3/2}}{|z-\lambda|} \|A(A-zI)^{-1} f_+^\delta\|_E \frac{d|z|}{|z|} \leq K \int_\gamma \frac{\lambda^\theta |z|^{3/2}}{|z-\lambda|} \varphi(|z|, f_+^\delta) \frac{d|z|}{|z|},$$

où

$$\varphi(|z|, f_+^\delta) = \sup \left\{ A(A-|z|e^{i\theta_0})^{-1} f_+^\delta, A(A-|z|e^{-i\theta_0})^{-1} f_+^\delta \right\},$$

et comme $f_+^\delta \in D_A(\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p)$ alors

$$|z|^{\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} \varphi(|z|, f_+^\delta) \in L_*^p.$$

En utilisant le Théorème de Young, il vient que

$$\left(\int_0^{+\infty} \left\| \lambda^\theta A(A-\lambda)^{-1} A\overline{u}_+^\delta(x) \right\|_E^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/p} \leq K \|f_+^\delta\|_{D_A(\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p)},$$

par conséquent

$$\left(\int_0^\delta \left\| A\overline{u}_+^\delta(x) \right\|_{D_A(\theta, p)}^p dx \right)^{1/p} \leq K \|f_+^\delta\|_{D_A(\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p)}.$$

Comme

$$A\overline{u}_+^\delta(x) = -(\overline{u}_+^\delta)''(x),$$

alors

$$(\overline{u}_+^\delta)''(\cdot) \in L^p(0, \delta; D_A(\theta, p)).$$

De même pour \overline{u}_-^δ . Ainsi, on peut établir le théorème suivant

Théorème 2.3.2 *Supposons (H.1). Soit $g^\delta \in L^p(-\infty, \delta; D_A(\theta, p))$ avec*

$$1 < p \leq \infty \text{ et } 0 < \theta < 1/2.$$

Alors, l'unique solution stricte du problème (P_0^δ) à la propriété suivante

$$(u^\delta)'' , Au^\delta \in L^p(-\infty, \delta; D_A(\theta, p)),$$

si et seulement si

$$f_+^\delta \in D_A(\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p).$$

2.4 Utilisation des semi-groupes

On étudie dans cette sous section le problème (P_0^δ) , pour δ fixé et quand $\delta \rightarrow 0$, sous les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} (H.0) \quad & E \text{ est un espace UMD,} \\ (H.1) \quad & \begin{cases} \rho(A) \supset [0, +\infty[\text{ et } \exists C > 0 \\ \forall \lambda \in [0, +\infty[: \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + \lambda}, \end{cases} \\ (H.2) \quad & \begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \quad (-A)^{is} \in L(E) \\ \exists C > 1, \quad \alpha \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R}, \|(-A)^{is}\| \leq C e^{\alpha|s|}. \end{cases} \end{aligned}$$

Notre approche consiste à résoudre les deux problèmes auxiliaires suivants, le premier est posé sur la couche mince $(0, \delta)$

$$(P_+^\delta) \quad \begin{cases} (v_+^\delta)''(x) + Av_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \\ v_+^\delta(0) = \psi, \quad (v_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

et le deuxième posé sur la demi-droite négative $(-\infty, 0)$

$$(P_-^\delta) \quad \begin{cases} (v_-^\delta)''(x) + Av_-^\delta(x) = g_-(x) \\ (v_-^\delta)'(0) = \phi, \end{cases}$$

tels que ψ, ϕ sont deux éléments donnés dans E .

On cherche maintenant les solutions strictes des deux problèmes (P_+^δ) et (P_-^δ) , c'est à dire les fonctions v_+^δ, v_-^δ vérifiant

$$\begin{cases} v_+^\delta \in W^{2,p}(0, \delta; E) \cap L^p(0, \delta; D(A)) \\ v_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)). \end{cases}$$

On construit maintenant la représentation explicite de v_+^δ . On sait que la solution de l'équation homogène

$$(v_+^\delta)''(x) + Av_+^\delta(x) = 0,$$

est de la forme

$$v_+^\delta(x) = e^{xB}\xi_0 + e^{(\delta-x)B}\xi_1,$$

pour presque tout $x \in (0, \delta)$ avec ξ_0, ξ_1 sont deux constantes dans E . Par la méthode de la variation des constantes, on trouve

$$v_+^\delta(x) = e^{xB}\xi_0 + e^{(\delta-x)B}\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)B}B^{-1}g_+^\delta(s)ds + \frac{1}{2}\int_x^\delta e^{(s-x)B}B^{-1}g_+^\delta(s)ds.$$

En utilisant les conditions aux limites, il vient que

$$\xi_0 = (I+Z)^{-1}B^{-1}e^{\delta B}f_+^\delta + (I+Z)^{-1}\psi - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}\int_0^\delta (I+e^{2(\delta-s)B})e^{sB}B^{-1}g_+^\delta(s)ds,$$

$$\xi_1 = -(I+Z)^{-1}B^{-1}f_+^\delta + (I+Z)^{-1}e^{\delta B}\psi + \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}\int_0^\delta (I-e^{2sB})e^{(\delta-s)B}B^{-1}g_+^\delta(s)ds,$$

avec

$$Z = e^{2\delta B}.$$

L'opérateur $(I+Z)^{-1}$ est inversible selon Lunardi (Voir aussi le lemme 2.2.6).

A l'aide des fonctions L_+^δ et \mathcal{L}_+^δ , qui sont définies dans le lemme 2.2.8, la solution s'écrit

$$v_+^\delta(x) = e^{xB}\xi_0 + e^{(\delta-x)B}\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-2}L_+^\delta(x, g_+^\delta) + \frac{1}{2}B^{-2}L_+^\delta(\delta-x, g_+^\delta(\delta-)),$$

où

$$\begin{aligned} e^{xB}\xi_0 &= (I+Z)^{-1}B^{-1}e^{(\delta+x)B}f_+^\delta + (I+Z)^{-1}e^{xB}\psi \\ &\quad - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B^{-2}\mathcal{L}_+^\delta(x, e^{2(\delta-\cdot)B}g_+^\delta) \\ &\quad - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B^{-2}\mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{(\delta-x)B}\xi_1 &= (I+Z)^{-1}e^{(2\delta-x)B}\psi - (I+Z)^{-1}B^{-1}e^{(\delta-x)B}f_+^\delta \\ &\quad + \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B^{-2}\mathcal{L}_+^\delta(\delta-x, g_+^\delta(\delta+)) \\ &\quad - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B^{-2}e^{2(\delta-x)B}\mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta). \end{aligned}$$

En appliquant A à v_+^δ ,

$$Av_+^\delta(x) = -B^2e^{xB}\xi_0 - B^2e^{(\delta-x)B}\xi_1 - \frac{1}{2}L_+^\delta(x, g_+^\delta) - \frac{1}{2}L_+^\delta(\delta-x, g_+^\delta(\delta-)),$$

avec

$$\begin{aligned} B^2e^{xB}\xi_0 &= (I+Z)^{-1}Be^{(\delta+x)B}f_+^\delta + (I+Z)^{-1}B^2e^{xB}\psi \\ &\quad - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}\mathcal{L}_+^\delta(x, e^{2(\delta-\cdot)B}g_+^\delta) \\ &\quad - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}\mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B^2 e^{(\delta-x)B} \xi_1 &= -(I+Z)^{-1} B e^{(\delta-x)B} f_+^\delta + (I+Z)^{-1} B^2 e^{(2\delta-x)B} \psi \\ &\quad + \frac{1}{2} (I+Z)^{-1} \mathcal{L}_+^\delta (\delta-x, g_+^\delta (\delta+\cdot)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (I+Z)^{-1} e^{2(\delta-x)B} \mathcal{L}_+^\delta (x, g_+^\delta). \end{aligned}$$

Grâce aux lemmes 2.2.8 et 2.2.7, on déduit que

$$v_+^\delta, Av_+^\delta \in L^p(0, \delta; E),$$

si et seulement si

$$\psi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad f_+^\delta \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

On obtient ainsi la Proposition suivante.

Proposition 2.4.1 *Supposons (H.0), (H.1) et (H.2). Pour $g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E)$ avec $1 < p < +\infty$. le problème (P_+^δ) admet une unique solution stricte si et seulement si*

$$f_+^\delta \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} \quad \text{et} \quad \psi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Par une méthode analogue, la solution du problème (P_-^δ) est représentée par

$$v_-^\delta(x) = e^{-xB} \xi_2 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x B^{-1} e^{(x-s)B} g_-(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^0 B^{-1} e^{(s-x)B} g_-(s) ds,$$

pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$, où

$$\xi_2 = -B^{-1} \phi + \frac{1}{2} B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds.$$

Toutes les intégrales parues dans v_-^δ et ξ_2 sont convergentes grâce à l'inégalité de Hölder et les propriétés des semi-groupes, par exemple, pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^x B^{-1} e^{(x-s)B} g_-(s) ds \right\| &\leq M \left(\int_{-\infty}^x e^{-qa(x-s)} ds \right)^{1/q} \left(\int_{-\infty}^x \|g_-(s)\|^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq C \|g_-\|_{L^p(-\infty, 0; E)}. \end{aligned}$$

D'autre part la condition $v_-^\delta(-\infty) = 0$ est vérifiée. En effet,

$$\begin{aligned} \|v_-^\delta(x)\|_E &\leq M e^{ax} \|\xi_2\|_E + \frac{M}{2} \int_{-\infty}^x e^{-(x-s)a} \|g_-(s)\|_E ds \\ &\quad + \frac{M}{2} \int_x^{\frac{x}{2}} e^{-(s-x)a} \|g_-(s)\|_E ds + \frac{M}{2} \int_{\frac{x}{2}}^0 e^{-(s-x)a} \|g_-(s)\|_E ds, \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient que

$$\begin{aligned} \|v_-^\delta(x)\|_E &\leq M e^{ax} \|\xi_2\|_E + C \left(\int_{-\infty}^x \|g_-(s)\|^p ds \right)^{1/p} \\ &\quad + \frac{M}{2} \left(\int_x^{x/2} e^{q(x-s)a} ds \right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{x/2} \|g_-(s)\|^p ds \right)^{1/p} \\ &\quad + \frac{M}{2} \left(\int_{x/2}^0 e^{q(x-s)a} ds \right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^0 \|g_-(s)\|^p ds \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|v_-^\delta(x)\| &\leq M e^{ax} \|\xi_2\|_E + C \left(\int_{-\infty}^x \|g_-(s)\|^p ds \right)^{1/p} \\ &\quad + \frac{M}{2} \left(\frac{1 - e^{xaq/2}}{aq} \right)^{1/q} \left(\int_{-\infty}^{x/2} \|g_-(s)\|^p ds \right)^{1/p} \\ &\quad + \frac{M}{2} e^{ax/2} \left(\frac{1 - e^{aqx/2}}{aq} \right)^{1/q} \|g_-\|_{L^p(0,\delta;E)}, \end{aligned}$$

quand $x \rightarrow -\infty$ on trouve que $v_-^\delta(x) \rightarrow 0$.

Proposition 2.4.2 *Sous les hypothèses (H.0), (H.1) (H.2) et pour $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$ avec $1 < p < \infty$, le problème (P_-^δ) admet une unique solution stricte si et seulement si*

$$\phi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

Preuve. Soient $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$, $1 < p < \infty$ et $\phi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$. Pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$, on écrit

$$v_-^\delta(x) = -B^{-1}e^{-xB}\phi + \frac{1}{2}B^{-2}\mathcal{L}_{-\infty,0}(x, g_-) + \frac{1}{2}B^{-2}L_{-\infty}(x, g_-) + \frac{1}{2}B^{-2}L_0(x, g_-),$$

et

$$Av_-^\delta(x) = Be^{-xB}\phi - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{-\infty,0}(x, g_-) - \frac{1}{2}L_{-\infty}(x, g_-) - \frac{1}{2}L_0(x, g_-).$$

Alors, d'après le lemme 2.2.9 et le corollaire 2.2.2, il vient que

$$v_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)).$$

2.4.1 Représentation de la solution

En utilisant les représentations de v_-^δ , v_+^δ et les conditions de transmission, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} B^{-1}\phi + \psi = B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds, \\ \phi - \mu B (I + Z)^{-1} (I - Z) \psi = 2\mu (I + Z)^{-1} e^{\delta B} f_+^\delta - \mu (I + Z)^{-1} \int_0^\delta (e^{sB} + e^{(2\delta-s)B}) g_+^\delta(s) ds, \end{cases}$$

tels que $\mu = \mu_+/\mu_-$ et $Z = e^{2\delta B}$. Le déterminant de ce système est

$$(I + Z)^{-1} (I + Z + \mu (I - Z)) := (I + Z)^{-1} D_\mu.$$

L'opérateur D_μ admet un inverse borné selon le lemme 2.2.6, alors l'unique solution (ψ, ϕ) est

$$\begin{aligned} \psi &= -2\mu B^{-1} D_\mu^{-1} e^{\delta B} f_+^\delta + \mu B^{-1} D_\mu^{-1} \int_0^\delta e^{sB} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + (1 + \mu) D_\mu^{-1} B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{(2\delta-s)B} g_-(s) ds + D_\mu^{-1} B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi &= 2\mu D_\mu^{-1} e^{\delta B} f_+^\delta - \mu D_\mu^{-1} \int_0^\delta e^{sB} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - \mu D_\mu^{-1} \int_0^\delta e^{(2\delta-s)B} g_+^\delta(s) ds + \mu D_\mu^{-1} (I - Z) \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds. \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 et après quelques simplifications on obtient une formule explicite de u^δ , donnée par

$$u_+^\delta(x) = e^{xB} \xi_0 + e^{(\delta-x)B} \xi_1 + \frac{1}{2} \int_0^x B^{-1} e^{(x-s)B} g_+^\delta(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^\delta B^{-1} e^{(s-x)B} g_+^\delta(s) ds,$$

pour presque tout $x \in (0, \delta)$ et

$$u_-^\delta(x) = e^{-xB} \xi_2 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x B^{-1} e^{(x-s)B} g_-(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^0 B^{-1} e^{(s-x)B} g_-(s) ds,$$

pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$ où

$$\begin{aligned}\xi_0 &= (1 - \mu) D_\mu^{-1} B^{-1} e^{\delta B} f_+^\delta + D_\mu^{-1} B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds \\ &\quad + \frac{\mu - 1}{2} D_\mu^{-1} B^{-1} \int_0^\delta (I + e^{2(\delta-s)B}) e^{sB} g_+^\delta(s) ds, \\ \xi_1 &= -(1 + \mu) D_\mu^{-1} B^{-1} f_+^\delta + \frac{1 + \mu}{2} D_\mu^{-1} B^{-1} \int_0^\delta e^{(\delta-s)B} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{\mu - 1}{2} D_\mu^{-1} B^{-1} \int_0^\delta e^{(\delta+s)B} g_+^\delta(s) ds + D_\mu^{-1} B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{(\delta-s)B} g_-(s) ds, \\ \xi_2 &= -2\mu D_\mu^{-1} B^{-1} e^{\delta B} f_+^\delta + \mu D_\mu^{-1} B^{-1} \int_0^\delta (I + e^{2(\delta-s)B}) e^{sB} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} D_\mu^{-1} B^{-1} (I + Z - \mu(I - Z)) \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds.\end{aligned}$$

2.4.2 Solution stricte

Pour montrer que la solution obtenue est stricte, on a besoin des Propositions suivantes

Proposition 2.4.3 *Sous les hypothèses (H.0), (H.1), (H.2) et pour $g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E)$ avec $1 < p < \infty$, on a*

1. $x \mapsto J_1(x, g_+^\delta) = B \int_0^\delta e^{(s-x)B} g_+^\delta(s) ds \in L^p(-\infty, 0; E)$,
2. $x \mapsto J_1(x - \delta, g_+^\delta(\delta - \cdot)) = B \int_0^\delta e^{(2\delta-s-x)B} g_+^\delta(s) ds \in L^p(-\infty, 0; E)$.

Preuve. Il suffit de montrer le premier point, en effet

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \|J_1(x, g_+^\delta)\|_E^p dx &= \int_0^\infty \left\| B \int_0^\delta e^{(s+t)B} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dt \\ &= \int_0^\delta \left\| B \int_0^\delta e^{(s+t)B} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dt + \int_\delta^\infty \left\| B \int_0^\delta e^{(s+t)B} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dt.\end{aligned}$$

La première intégrale converge car

$$B \int_0^\delta e^{(s+t)B} g_+^\delta(s) ds = \mathcal{L}_+^\delta(t, g_+^\delta),$$

et $t \mapsto \mathcal{L}_+^\delta(t, g_+^\delta) \in L^p(0, \delta; E)$. Pour la deuxième intégrale, on a

$$\begin{aligned} \int_\delta^\infty \left\| B \int_0^\delta e^{(s+t)B} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dt &\leq M \int_\delta^\infty \left(\int_0^\delta \frac{e^{-a(s+t)}}{s+t} \|g_+^\delta(s)\|_E ds \right)^p dt \\ &\leq \frac{1}{\delta^p} \int_\delta^\infty \left(\int_0^\delta e^{-qa(s+t)} ds \right)^{p/q} dt \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)}^p \\ &\leq K \|g_+^\delta\|_{L^p(0, \delta; E)}^p. \end{aligned}$$

Par un changement de variable on déduit le deuxième point.

Proposition 2.4.4 *Sous les hypothèses (H.0), (H.1), (H.2) et pour $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$ avec $1 < p < \infty$, on a*

1. $x \mapsto J_2(x, g_-) = B \int_{-\infty}^0 e^{(x-s)B} g_-(s) ds \in L^p(0, \delta; E)$,
2. $x \mapsto J_2(\delta - x, g_-(\cdot - \delta)) = B \int_{-\infty}^0 e^{(2\delta - s - x)B} g_-(s) ds \in L^p(0, \delta; E)$.

Preuve. Soit $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \left\| B \int_{-\infty}^0 e^{(x-s)B} g_-(s) ds \right\|^p dx &= \int_{-\delta}^0 \left\| B \int_{-\infty}^0 e^{(-t-s)B} g_-(s) ds \right\|^p dt \\ &\leq \int_{-\infty}^0 \left\| B \int_{-\infty}^0 e^{-(t+s)B} g_-(s) ds \right\|^p dt \\ &\leq \int_{-\infty}^0 \|\mathcal{L}_{-\infty}(x, g)\|^p dt < \infty, \end{aligned}$$

grâce au lemme 2.2.9.

Théorème 2.4.1 *Sous les hypothèses (H.0), (H.1), (H.2) et pour*

$$g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E), \quad g_- \in L^p(-\infty, 0; E),$$

avec $1 < p < \infty$, le problème (P_0^δ) admet une unique solution stricte si et seulement si

$$f_+^\delta \in (D(A); E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}.$$

Preuve. Soient $g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E)$, $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$ et $f_+^\delta \in (D(A); E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$. On écrit, pour presque tout $x \in (0, \delta)$

$$u_+^\delta(x) = e^{xB}\xi_0 + e^{(\delta-x)B}\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-2}L_+^\delta(x, g_+^\delta) + \frac{1}{2}B^{-2}L_+^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\delta - \cdot)),$$

avec

$$\begin{aligned} e^{xB}\xi_0 &= (1 - \mu)D_\mu^{-1}B^{-1}e^{(\delta+x)B}f_+^\delta + \frac{\mu - 1}{2}D_\mu^{-1}B^{-2}\mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta) \\ &\quad + \frac{\mu - 1}{2}D_\mu^{-1}B^{-2}\mathcal{L}_+^\delta(x, e^{2(\delta-\cdot)B}g_+^\delta) + D_\mu^{-1}B^{-2}J_2(x, g_-), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{(\delta-x)B}\xi_1 &= -(1 + \mu)D_\mu^{-1}B^{-1}e^{(\delta-x)B}f_+^\delta + \frac{\mu - 1}{2}D_\mu^{-1}B^{-2}e^{2(\delta-x)B}\mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta) \\ &\quad + \frac{1 + \mu}{2}D_\mu^{-1}B^{-2}\mathcal{L}_+^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\delta + \cdot)) + D_\mu^{-1}B^{-2}J_2(\delta - x, g_-(\cdot - \delta)). \end{aligned}$$

En appliquant A à u_+^δ , il vient que

$$Au_+^\delta(x) = -B^2e^{xB}\xi_0 - B^2e^{(\delta-x)B}\xi_1 - \frac{1}{2}L_+^\delta(x, g_+^\delta) - \frac{1}{2}L_+^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\delta - \cdot)),$$

où

$$\begin{aligned} B^2e^{xB}\xi_0 &= (1 - \mu)D_\mu^{-1}Be^{(\delta+x)B}f_+^\delta + \frac{\mu - 1}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta) \\ &\quad + \frac{\mu - 1}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{L}_+^\delta(x, e^{2(\delta-\cdot)B}g_+^\delta) + D_\mu^{-1}J_2(x, g_-), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B^2e^{(\delta-x)B}\xi_1 &= -(1 + \mu)D_\mu^{-1}Be^{(\delta-x)B}f_+^\delta + \frac{\mu - 1}{2}D_\mu^{-1}e^{2(\delta-x)B}\mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta) \\ &\quad + \frac{1 + \mu}{2}D_\mu^{-1}\mathcal{L}_+^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\delta + \cdot)) + D_\mu^{-1}J_2(\delta - x, g_-(\cdot - \delta)). \end{aligned}$$

Grâce aux lemmes 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8 et la Proposition 2.4.4, il vient que

$$u_+^\delta \in W^{2,p}(0, \delta; E) \cap L^p(0, \delta; D(A)).$$

De même, on représente u_-^δ par

$$u_-^\delta(x) = e^{-xB}\xi_2 - \frac{1}{2}B^{-2}L_0(x, g_-) - \frac{1}{2}B^{-2}L_{-\infty}(x, g_-),$$

où

$$\begin{aligned} e^{-xB}\xi_2 &= -2\mu D_\mu^{-1}B^{-1}e^{(\delta-x)B}f_+^\delta + \mu D_\mu^{-1}B^{-2}J_1(x, g_+^\delta) \\ &\quad + \mu D_\mu^{-1}B^{-2}J_1(x - \delta, g_+^\delta(\delta - \cdot)) \\ &\quad + \frac{1}{2}D_\mu^{-1}(I + Z - \mu(I - Z))B^{-2}e^{-2xB}L_{-\infty}(x, g_-) \\ &\quad + \frac{1}{2}D_\mu^{-1}(I + Z - \mu(I - Z))B^{-2}L_0(x, e^{-2.B}g_-). \end{aligned}$$

En appliquant A à u_-^δ , on obtient

$$Au_-^\delta(x) = -B^2 e^{-xB} \xi_2 + \frac{1}{2} L_{-\infty}(x, g_-) + \frac{1}{2} L_0(x, g_-),$$

avec

$$\begin{aligned} -B^2 e^{-xB} \xi_2 &= 2\mu D_\mu^{-1} B e^{(\delta-x)B} f_+^\delta - \mu D_\mu^{-1} J_1(x, g_+^\delta) - \mu D_\mu^{-1} J_1(x - \delta, g_+^\delta(\delta - \cdot)) \\ &\quad - \frac{1}{2} D_\mu^{-1} (I + Z - \mu(I - Z)) e^{-2xB} L_{-\infty}(x, g_-) \\ &\quad - \frac{1}{2} D_\mu^{-1} (I + Z - \mu(I - Z)) L_0(x, e^{-2B} g_-). \end{aligned}$$

Par les lemmes 2.2.9, 2.2.6, le Corollaire 2.2.2 et la Proposition 2.4.3, on déduit que

$$u_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)).$$

2.4.3 Problème limite

On se propose dans cette sous section d'étudier, sous des conditions naturelles sur les données f_+^δ et g_+^δ , le problème (P_0^δ) lorsque l'épaisseur de la couche mince δ tend vers 0. En supposant que g_- ne dépend pas de δ et que

$$g_+^\delta(x) = g_+^\delta(\delta t) = h_+^\delta(t) \text{ avec } t \in (0, 1).$$

On traite, ici, le cas particulier $\mu = 1/\delta$ sous les hypothèses suivantes

(1) $\exists C > 0$ (ne dépend pas de δ), $\forall \delta > 0 : \max_{t \in (0,1)} \|h_+^\delta(t)\|_E \leq C$ et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 h_+^\delta(t) dt \text{ existe et vaut } L,$$

(2) $\exists l_+ > 0; \forall \delta > 0 : \left\| \frac{f_+^\delta}{\delta} \right\|_E \leq l_+$ et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f_+^\delta}{\delta} \text{ existe et est égal à } l.$$

Il existe plusieurs méthodes pour faire le passage à la limite, par exemple, on calcule la limite de la solution u^δ en utilisant sa représentation et on cherche le problème que doit vérifier cette solution notée u_- .

On rappelle que, pour presque tout $x \in (-\infty, 0)$, on a

$$u_-^\delta(x) = e^{-xB} \xi_2 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x B^{-1} e^{(x-s)B} g_-(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^0 B^{-1} e^{(s-x)B} g_-(s) ds,$$

avec

$$\begin{aligned}\xi_2 &= -2D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\frac{e^{\delta B}}{\delta}f_+^\delta + D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (I + e^{2(\delta-s)B}) e^{sB}g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2}D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\left(I + Z - \frac{1}{\delta}(I - Z)\right)\int_{-\infty}^0 e^{-sB}g_-(s) ds,\end{aligned}$$

et pour presque tout $x \in (0, \delta)$

$$u_+^\delta(x) = e^{xB}\xi_0 + e^{(\delta-x)B}\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^x B^{-1}e^{(x-s)B}g_+^\delta(s) ds + \frac{1}{2}\int_x^\delta B^{-1}e^{(s-x)B}g_+^\delta(s) ds,$$

tels que

$$\begin{aligned}\xi_0 &= (\delta - 1)D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\frac{e^{\delta B}}{\delta}f_+^\delta + D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-sB}g_-(s) ds \\ &\quad + \frac{1-\delta}{2}D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (I + e^{2(\delta-s)B}) e^{sB}g_+^\delta(s) ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -(\delta + 1)D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\frac{f_+^\delta}{\delta} + \frac{\delta + 1}{2}D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B}g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{1-\delta}{2}D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{(\delta+s)B}g_+^\delta(s) ds + D_{1/\delta}^{-1}B^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{(\delta-s)B}g_-(s) ds,\end{aligned}$$

où

$$D_{1/\delta} = I + Z + \frac{1}{\delta}(I - Z) \quad \text{et} \quad Z = e^{2\delta B}.$$

Tout d'abord, on examine la limite de $D_{1/\delta}^{-1}$. D'après le lemme 2.2.6, on a

$$D_{1/\delta}^{-1} = \frac{\delta}{1+\delta}I - \frac{1}{2i\pi}\frac{\delta-1}{1+\delta}\int_\gamma \frac{\delta e^{2\delta z}}{1+\delta+(\delta-1)e^{2\delta z}}(B-zI)^{-1}dz,$$

et

$$\left| \frac{\delta e^{2\delta z}}{1+\delta+(\delta-1)e^{2\delta z}}(B-zI)^{-1} \right| \leq \frac{|\delta e^{2\delta z}|}{|z||1-e^{2\delta z}+\delta(1+e^{2\delta z})|},$$

pour $\delta \in]0, 1]$. Grâce aux lemmes 2.2.2, 2.2.1 et 2.2.3, il vient que

$$\begin{aligned}|1 - e^{2\delta z} + \delta(1 + e^{2\delta z})| &\geq (|1 - e^{2\delta z}| + \delta|1 + e^{2\delta z}|) \cos \frac{\theta_0}{2} \\ &\geq \delta|1 + e^{2\delta z}| \cos \frac{\theta_0}{2} \geq \delta K(\theta_0),\end{aligned}$$

ainsi

$$\left| \frac{\delta e^{2\delta z}}{1 + \delta + (\delta - 1) e^{2\delta z}} (B - zI)^{-1} \right| \leq K(\theta_0) \frac{e^{2\delta \operatorname{Re} z}}{|z|} \leq K(\theta_0) \frac{e^{2\operatorname{Re} z}}{|z|}.$$

De la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} K(\theta_0) \frac{e^{2\operatorname{Re} z}}{|z|} dz,$$

et

$$\frac{\delta e^{2\delta z}}{1 + \delta + (\delta - 1) e^{2\delta z}} = \frac{1 + 2z\delta + o(\delta)}{2 + 2\delta z - 2z + o(\delta)} \rightarrow \frac{1}{2 - 2z}, \quad \delta \rightarrow 0,$$

on trouve que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} D_{1/\delta}^{-1} = -\frac{1}{4i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z-1} (B - zI)^{-1} dz,$$

grâce au Théorème de la convergence dominée. Du Théorème des résidus, il vient que

$$\frac{1}{4i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{1-z} (B - zI)^{-1} dz = -\frac{1}{2} (B - I)^{-1} = -\frac{1}{2} \left(-\sqrt{-A} - I \right)^{-1}.$$

D'autre part, on sait que pour $\varphi \in D(B)$ on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\delta B} \varphi = \varphi \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^{\delta B} \varphi - \varphi}{\delta} = B\varphi, \quad (2.4.1)$$

car B génère un semi groupe analytique.

Comme

$$\left\| (e^{\delta B} - I) \frac{f_+^{\delta}}{\delta} \right\|_E \leq \|e^{\delta B} - I\| l_+,$$

alors $(e^{\delta B} - I) \frac{f_+^{\delta}}{\delta}$ tend vers 0 lorsque $\delta \rightarrow 0$, par conséquent

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\delta B} \frac{f_+^{\delta}}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left((e^{\delta B} - I) \frac{f_+^{\delta}}{\delta} + \frac{f_+^{\delta}}{\delta} \right) = l.$$

On écrit

$$\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} (I + e^{2(\delta-s)B}) e^{sB} g_+^{\delta}(s) ds = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} ((I + e^{2(\delta-s)B}) e^{sB} - 2I) g_+^{\delta}(t) dt + \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} g_+^{\delta}(t) dt,$$

la première intégrale tend vers 0 quand $\delta \rightarrow 0$ et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} (I + e^{2(\delta-s)B}) e^{sB} g_+^{\delta}(s) ds = 2L.$$

En utilisant (2.4.1) et le fait que $\int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds$ est indépendante de δ , on trouve

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(I + Z - \frac{1-Z}{\delta} \right) \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds = 2(I+B) \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds.$$

Ainsi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} u_-^\delta(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x B^{-1} e^{(x-s)B} g_-(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^0 B^{-1} e^{(s-x)B} g_-(s) ds + \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{-xB} \xi_2,$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \xi_2 &= -2 \lim_{\delta \rightarrow 0} D_{1/\delta}^{-1} B^{-1} e^{\delta B} \frac{f_+^\delta}{\delta} + \lim_{\delta \rightarrow 0} D_{1/\delta}^{-1} B^{-1} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (I + e^{2(\delta-s)B}) e^{sB} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} D_{1/\delta}^{-1} \left(I + Z - \frac{1-Z}{\delta} \right) B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds \\ &= (B-I)^{-1} B^{-1} (l-L) - \frac{1}{2} (B-I)^{-1} (I+B) B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds. \end{aligned}$$

Posons $\lim_{\delta \rightarrow 0} \xi_2 = \alpha$. On a $\alpha \in D(B^2) = D(A)$.

En revanche, on remarque que la couche mince coïncide avec le bord $\{0\}$ lorsque δ tend vers 0. On fait un changement d'échelle, il vient que

$$u_+^\delta(\delta t) = e^{\delta t B} \xi_0 + e^{\delta(1-t)B} \xi_1 + \frac{\delta}{2} \int_0^t B^{-1} e^{\delta(t-\tau)B} g_+^\delta(\delta\tau) d\tau + \frac{\delta}{2} \int_t^1 B^{-1} e^{\delta(\tau-t)B} g_+^\delta(\delta\tau) ds,$$

d'autre part, on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \xi_0 = \frac{1}{2} (B-I)^{-1} B^{-1} l - \frac{1}{2} (B-I)^{-1} B^{-1} L - \frac{1}{2} (B-I)^{-1} B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \xi_1 = \frac{1}{2} (B-I)^{-1} B^{-1} l - \frac{1}{2} (B-I)^{-1} B^{-1} L - \frac{1}{2} (B-I)^{-1} B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds,$$

par conséquent, pour tout $t \in (0,1)$, on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} u_+^\delta(\delta t) = (B-I)^{-1} B^{-1} (l-L) - (B-I)^{-1} B^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds.$$

On remarque que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} u_+^\delta(\delta t) \in D(B^2) = D(A).$$

On cherche maintenant quel problème vérifie u_- . On dérive

$$u_-(x) = e^{-xB} \alpha + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x B^{-1} e^{(x-s)B} g_-(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^0 B^{-1} e^{(s-x)B} g_-(s) ds,$$

il vient que

$$u'_-(x) = -B e^{-xB} \alpha + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{(x-s)B} g_-(s) ds - \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(s-x)B} g_-(s) ds,$$

et

$$u''_-(x) = g_-(x) + B^2 e^{-xB} \alpha + \frac{1}{2} B \int_{-\infty}^x e^{(x-s)B} g_-(s) ds + \frac{1}{2} B \int_x^0 e^{(s-x)B} g_-(s) ds,$$

donc

$$u''_-(x) = g_-(x) + B^2 u_-(x),$$

et comme $B := -\sqrt{-A}$ alors

$$u''_-(x) + A u_-(x) = g_-(x).$$

De plus, on a

$$u_-(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 B^{-1} e^{-sB} g_-(s) ds + \alpha.$$

En remplaçant α par sa valeur et après des simplifications, on trouve

$$u_-(0) = (B - I)^{-1} B^{-1} (l - L) - (B - I)^{-1} \int_{-\infty}^0 B^{-1} e^{-sB} g_-(s) ds,$$

pour presque tout $x \in (0, \delta)$, on a

$$u_-(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} u_+^\delta(x) \in D(A).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} u'_-(0) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds - B \alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds - (B - I)^{-1} l + (B - I)^{-1} L \\ &\quad + \frac{1}{2} (B - I)^{-1} (I + B) \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds \\ &= -(B - I)^{-1} (l - L) + (I + (B - I)^{-1}) \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds, \end{aligned}$$

il vient que u_- vérifie la condition suivante

$$\begin{aligned}
u'_-(0) &= l - L - B(B - I)^{-1}(l - L) + B(B - I)^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g_-(s) ds \\
&= l - L - B^2(B - I)^{-1} B^{-1}(l - L) + B^2(B - I)^{-1} \int_{-\infty}^0 B^{-1} e^{-sB} g_-(s) ds \\
&= l - L - B^2 u_-(0),
\end{aligned}$$

et comme $B^2 := -A$, alors

$$u'_-(0) - Au_-(0) = l - L.$$

Par conséquent, le problème limite de (P_-^δ) est

$$(P_-) \quad \begin{cases} (u_-)''(x) + Au_-(x) = g_-(x), & p.p. x \in (-\infty, 0) \\ u'_-(0) - Au_-(0) = l - L, \end{cases}$$

où

$$l = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f_+^\delta}{\delta},$$

avec

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 g_+^\delta(\delta t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(s) ds.$$

On écrit $u_-(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
u_-(x) &= (B - I)^{-1} B^{-1} e^{-xB} (l - L) - \frac{1}{2} (B - I)^{-1} (I + B) B^{-2} \mathcal{L}_{-\infty}(x, g_-) \\
&\quad + \frac{1}{2} B^{-2} L_{-\infty}(x, g_-) + \frac{1}{2} B^{-2} L_0(x, g_-).
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
Au_-(x) &= -B(B - I)^{-1} e^{-xB} (l - L) + \frac{1}{2} (B - I)^{-1} (I + B) \mathcal{L}_{-\infty}(x, g_-) \\
&\quad - \frac{1}{2} L_{-\infty}(x, g_-) - \frac{1}{2} L_0(x, g_-).
\end{aligned}$$

D'après le lemme (2.2.9), on trouve que

$$u_- \in W^{2,p}(-\infty, 0, E) \cap L^p(-\infty, 0, D(A)).$$

Le résultat est donné par

Théorème 2.4.2 Soient $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$ avec $1 < p < \infty$, s'il existe $l, L \in E$ tels que

$$l = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f_+^\delta}{\delta} \text{ et } L = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(t) dt,$$

alors le problème (P_-) admet une unique solution stricte.

Problème de transmission dans un domaine non borné dans le cadre continu

3.1 Position du problème

On reprend le problème

$$(P_0^\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x), & x \in]-\infty, 0[\cup]0, \delta[\\ u^\delta(0_+) = u^\delta(0_-) \\ \mu_+ (u^\delta)'(0_+) = \mu_- (u^\delta)'(0_-) \\ (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ à valeurs dans E , vérifiant l'unique hypothèse (H.1). On s'intéressera à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte

$$u^\delta(x) = \begin{cases} u_-^\delta(x) & \text{pour } x \in]-\infty, 0[\\ u_+^\delta(x) & \text{pour } x \in [0, \delta] \end{cases}$$

dans l'espace

$$BUC(]-\infty, 0[; E) \cup C([0, \delta]; E),$$

lorsque le second membre

$$g^\delta(x) = \begin{cases} g_-(x) & \text{pour } x \in]-\infty, 0[\\ g_+^\delta(x) & \text{pour } x \in [0, \delta], \end{cases}$$

est assez régulier i.e.,

$$g_- \in BUC^{2\alpha_0}(]-\infty, 0[; E) \text{ et } g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E),$$

avec $0 < 2\alpha_0 < 1$. On rappelle que la représentation de la solution est donnée, pour $x \in (0, \delta)$, par

$$\begin{aligned}
u_+^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh(\sqrt{-z}x) + \mu \cosh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} (A - zI)^{-1} g_-(s) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&= n_+^\delta(x, A) f_+^\delta + v_+^\delta(x, A, g_-) + w_+^\delta(x, A, g_+^\delta),
\end{aligned}$$

et pour $x \in (-\infty, 0)$, par

$$\begin{aligned}
u_-^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mu e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&\quad - \frac{\mu}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - s) e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-\infty}^0 K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) (A - zI)^{-1} g_-(s) ds \\
&= n_-^\delta(x, A) f_+^\delta + v_-^\delta(x, A, g_+^\delta) + w_-^\delta(x, A, g_-),
\end{aligned}$$

où γ est une courbe simple joignant $\infty e^{-i\theta_0}$ à $\infty e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]0, \pi/2[$,

$$\Delta_z(\delta, \mu) = \cosh \sqrt{-z}\delta + \mu \sinh \sqrt{-z}\delta,$$

$$\Delta_-(s, \delta, \mu) = \cosh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}\delta - \mu \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}s,$$

$$K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) = \begin{cases} \frac{\Delta_z(s, \mu)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh(\sqrt{-z}(\delta - x)) & \text{si } s \leq x \\ \frac{\Delta_z(x, \mu)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh \sqrt{-z}(\delta - s) & \text{si } x \leq s, \end{cases}$$

et

$$K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) = \begin{cases} \frac{\Delta_-(x, \delta, \mu)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} & \text{si } s \leq x \\ \frac{\Delta_-(s, \delta, \mu)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}x} & \text{si } x \leq s. \end{cases}$$

3.2 Conditions nécessaires

Proposition 3.2.1 *Si u^δ est une solution stricte du problème (P_0^δ) c'est à dire*

$$\begin{cases} u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A)), \\ u_-^\delta \in BUC^2(]-\infty, 0]; E) \cap BUC(]-\infty, 0]; D(A)). \end{cases}$$

Alors

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)},$$

et

$$g_+^\delta \in C([0, \delta]; E), \quad g_- \in BUC(]-\infty, 0]; E).$$

Preuve. On a

$$g_-(x) = (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x),$$

donc g_- est bornée et vérifie pour $x, \tau \in]-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} & \|g_-(x) - g_-(\tau)\|_E \\ & \leq \left\| (u_-^\delta)''(x) - (u_-^\delta)''(\tau) \right\|_E + \|Au_-^\delta(x) - Au_-^\delta(\tau)\|_E \\ & \leq \left\| (u_-^\delta)''(x) - (u_-^\delta)''(\tau) \right\|_E + \|u_-^\delta(x) - u_-^\delta(\tau)\|_{D(A)}, \end{aligned}$$

ce qui donne la continuité uniforme de g_- , donc

$$g_- \in BUC(]-\infty, 0]; E),$$

idem pour g_+^δ . D'autre part, on a

$$g_+^\delta(0) = (u_+^\delta)''(0) + Au_+^\delta(0), \quad g_-(0) = (u_-^\delta)''(0) + Au_-^\delta(0),$$

ensuite

$$\begin{aligned} g_+^\delta(0) - g_-(0) &= (u_+^\delta)''(0) - (u_-^\delta)''(0) + Au_+^\delta(0) - Au_-^\delta(0) \\ &= (u_+^\delta)''(0) - (u_-^\delta)''(0), \end{aligned}$$

car $u_+^\delta(0) = u_-^\delta(0)$ et comme

$$(u_+^\delta)''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(u_+^\delta)(2x) - 2(u_+^\delta)(x) + (u_+^\delta)(0)}{x^2} \in \overline{D(A)},$$

et

$$(u_-^\delta)''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(u_-^\delta)(2x) - 2(u_-^\delta)(x) + (u_-^\delta)(0)}{x^2} \in \overline{D(A)},$$

alors, $g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$.

Pour justifier la représentation de u^δ , on montre la convergence absolue de toutes les intégrales. Pour les termes en f_+^δ , le lemme suivant rassemble toutes les propriétés de n_+^δ .

Lemme 3.2.1 *Il existe une constante K indépendante de δ telle que*

1. *Pour tout $x \in [0, \delta]$ et $f_+^\delta \in E$, on a*

$$\|n_+^\delta(x, A, \cdot) f_+^\delta\|_E \leq K \|f_+^\delta\|_E.$$

2. *$n_+^\delta(x, A, \cdot) f_+^\delta \in D(A)$ pour chaque $f_+^\delta \in E$ et $x \in [0, \delta]$.*

3. *Si $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)$ avec $\alpha_0 \in]0, 1/2[$, alors pour tout $x \in [0, \delta]$ on a*

$$\|An_+^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E \leq K \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)}.$$

4. *Soit $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$. Alors, on a*

i) *$n_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta$ et $An_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in C([0, \delta], E)$ si et seulement si $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$.*

ii) *$An_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta], E)$ si et seulement si $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty)$.*

Preuve.

1. Soient $x \in [0, \delta]$ et $f_+^\delta \in E$. On a

$$\|n_+^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E \leq \frac{C(1+\mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin(\frac{\theta_0}{2})} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2}} d|z| \|f_+^\delta\|_E \leq K \|f_+^\delta\|_E.$$

2. Ce résultat découle, d'une part de la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh(\sqrt{-zx}) + \mu \cosh \sqrt{-zx}}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz$$

et d'autre part du fait que $(A - zI)^{-1} f_+^\delta \in D(A)$.

3. Soit $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)$. Pour $x \in [0, \delta]$, on a

$$\begin{aligned} \|An_+^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E &\leq \frac{C(1+\mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin(\frac{\theta_0}{2})} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{1+\alpha_0}} \|z^{1/2+\alpha_0} A (A - z)^{-1} f_+^\delta\|_E d|z| \\ &\leq \frac{C(1+\mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin(\frac{\theta_0}{2})} \int_\gamma \frac{d|z|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq K(\theta_0) \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

4. Soient $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$ et $0 \leq s < x \leq \delta$. On a

$$\begin{aligned} &n_+^\delta(x, A) f_+^\delta - n_+^\delta(s, A) f_+^\delta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh(\sqrt{-zx}) - \sinh(\sqrt{-zs}) + \mu (\cosh \sqrt{-zx} - \cosh \sqrt{-zs})}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_s^x \frac{\cosh(\sqrt{-z\tau}) + \mu \sinh \sqrt{-z\tau}}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta d\tau dz, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \|n_+^\delta(x, A) f_+^\delta - n_+^\delta(s, A) f_+^\delta\|_E \\
& \leq \frac{1 + \mu}{2\pi} \int_\gamma \int_s^x \frac{\cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau)}{|\Delta_z(\delta, \mu)|} \|(A - zI)^{-1} f_+^\delta\|_E d\tau d|z| \\
& \leq \frac{(1 + \mu)(x - s)}{\pi C_{\theta_0} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|} d|z| \|f_+^\delta\|_E \\
& \leq K(x - s) \|f_+^\delta\|_E,
\end{aligned}$$

d'où

$$n_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in C([0, \delta[; E).$$

A l'aide au calcul fonctionnel de Dunford, $n_+^\delta(x, A) f_+^\delta$ peut s'écrire sous la forme

$$n_+^\delta(x, A) f_+^\delta = D^{-1} \left(I - e^{-2\sqrt{-A}x} + \mu \left(I + e^{-2\sqrt{-zx}} \right) \right) (-A)^{-1/2} e^{-2\sqrt{-A}(x-\delta)} f_+^\delta,$$

où

$$D = I + e^{-2\sqrt{-A}\delta} + \mu \left(I - e^{-2\sqrt{-A}\delta} \right).$$

Cet opérateur est inversible grâce au lemme 2.2.6.

On utilise le travail de Sinestrari [34], la Proposition 1.2 page 20 et le Théorème 3.1 page 39, pour la continuité de $n_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta$ en δ .

ii) En appliquant A à $n_+^\delta(x, A) f_+^\delta$, on obtient

$$An_+^\delta(x, A) f_+^\delta = D^{-1} \left(I - e^{-2\sqrt{-A}x} + \mu \left(I + e^{-2\sqrt{-zx}} \right) \right) e^{-2\sqrt{-A}(x-\delta)} (-A)^{1/2} f_+^\delta.$$

Grâce au résultat de Sinestrari [34], il vient que

$$An_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in C([0, \delta], E) \iff (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D \left((-A)^{1/2} \right)},$$

et

$$An_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta], E) \iff (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{(-A)^{1/2}}(2\alpha_0, +\infty).$$

En outre, on a

$$\overline{D((-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$$

et

$$D_{(-A)^{1/2}}(2\alpha_0, +\infty) = D_A(\alpha_0, +\infty).$$

On donne, dans l'énoncé suivant, les propriétés de n_-^δ .

Lemme 3.2.2 Soient $x \in]-\infty, 0]$ et $f_+^\delta \in E$. Pour $\delta \in]0, 1]$ on a

$$n_-^\delta(\cdot, A) f_+^\delta, An_-^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in BUC(]-\infty, 0], E).$$

De plus, pour $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$, on a

$$An_-^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in BUC^{2\alpha_0}(]-\infty, 0], E),$$

si et seulement si $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)$.

Preuve. Pour $x \in]-\infty, 0]$, on a

$$\|n_-^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E \leq \frac{\mu}{2\pi} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} |dz| \|f_+^\delta\|_E.$$

Du lemme (2.2.4), il vient

$$\|n_-^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E \leq \frac{1}{\pi c_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \leq K(\theta_0) \|f_+^\delta\|_E.$$

De même, on obtient

$$\|An_-^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E \leq \frac{1}{\pi c_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{-\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \leq K(\theta_0) \|f_+^\delta\|_E.$$

Montrons maintenant la continuité uniforme de $n_-^\delta(\cdot, A) f_+^\delta$ et $An_-^\delta(\cdot, A) f_+^\delta$ sur $]-\infty, 0]$. En effet, pour $s \leq x \leq 0$

$$\|n_-^\delta(x, A) f_+^\delta - n_-^\delta(s, A) f_+^\delta\|_E \leq K(\theta_0) \int_\gamma \frac{|e^{\sqrt{-z}(x-\delta)} - e^{\sqrt{-z}(s-\delta)}|}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E,$$

et

$$\left| e^{\sqrt{-z}(x-\delta)} - e^{\sqrt{-z}(s-\delta)} \right| = \int_s^x |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau-\delta)} d\tau \leq (x-s) |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)},$$

alors

$$\begin{aligned} \|n_-^\delta(x, A) f_+^\delta - n_-^\delta(s, A) f_+^\delta\|_E &\leq K(\theta_0) (x-s) \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\ &\leq K(\theta_0) (x-s) \|f_+^\delta\|_E. \end{aligned}$$

De même, on trouve que

$$\begin{aligned} \|An_-^\delta(x, A) f_+^\delta - An_-^\delta(s, A) f_+^\delta\|_E &\leq (x-s) K(\theta_0) \int_\gamma e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\ &\leq K(\theta_0) (x-s) \|f_+^\delta\|_E. \end{aligned}$$

Ainsi

$$n_-^\delta(\cdot, A) f_+^\delta, An_-^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in BUC([-\infty, 0], E).$$

Soient $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)$, en effet, pour $s \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} An_-^\delta(x, A) f_+^\delta - An_-^\delta(s, A) f_+^\delta &= \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{\sqrt{-z}x} - e^{\sqrt{-z}s}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &= \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma^+} \frac{e^{\sqrt{-z}x} - e^{\sqrt{-z}s}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad + \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma^-} \frac{e^{\sqrt{-z}x} - e^{\sqrt{-z}s}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

telles que

$$\gamma^+ = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{(x-s)^2} \right\} \text{ et } \gamma^- = \left\{ z \in \gamma : |z| \leq \frac{1}{(x-s)^2} \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq \frac{1}{\pi c_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma^+} \frac{|e^{\sqrt{-z}(x-\delta)} - e^{\sqrt{-z}(s-\delta)}|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|z^{1/2+\alpha_0} A(A - zI)^{-1} f_+^\delta\|_E d|z| \\ &\leq \frac{1}{\pi c_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma^+} \frac{d|z|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

Posons $\sigma = (x-s)^2 |z|$, alors

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq \frac{1}{\pi c_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_1^{+\infty} \frac{(x-s)^{-2}}{(\sigma(x-s)^{-2})^{1+\alpha_0}} d\sigma \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq K(\theta_0) (x-s)^{2\alpha_0} \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

Pour I_2 , on a

$$\begin{aligned} \|I_2\| &\leq \frac{1}{\pi c_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma^-} \frac{|e^{\sqrt{-z}(x-\delta)} - e^{\sqrt{-z}(s-\delta)}|}{|z|^{1/2}} \|A(A - zI)^{-1} f_+^\delta\|_E d|z| \\ &\leq \frac{1}{\pi c_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma^-} \frac{|z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)} (x-s)}{|z|^{1+\alpha_0}} d|z| \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq K(\theta_0) (x-s) \int_{\gamma^-} \frac{d|z|}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq K(\theta_0) (x-s)^{2\alpha_0} \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|An_-^\delta(x, A)f_+^\delta - An_-^\delta(s, A)f_+^\delta\| \leq K(\theta_0)(x-s)^{2\alpha_0} \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)}.$$

D'où

$$An_-^\delta(\cdot, A)f_+^\delta \in BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0], E).$$

Pour la réciproque, on utilise le résultat de Sinestrari et le calcul fonctionnel de Dunford.

Lemme 3.2.3 *Pour $\alpha_0 \in]0, 1/2[$, on a*

$$\int_{-\infty}^0 |K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s)| |x-s|^{2\alpha_0} ds \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha_0}}.$$

Preuve. En effet

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 |K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s)| (x-s)^{2\alpha_0} ds \\ &= \int_{-\infty}^x \left| \frac{\Delta_z^-(x, \delta, \mu)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} \right| (x-s)^{2\alpha_0} ds + \int_x^0 \left| \frac{\Delta_z^-(s, \delta, \mu)}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} \right| (x-s)^{2\alpha_0} ds \\ &\leq \frac{4e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2) |z|^{1/2}} \left(\int_{-\infty}^x e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}s} (x-s)^{2\alpha_0} ds + \int_x^0 \cosh(\operatorname{Re}\sqrt{-z}s) (s-x)^{2\alpha_0} ds \right). \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}s} (x-s)^{2\alpha_0} ds &= \left(\int_{-\infty}^x e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}s} ds \right)^{1-2\alpha_0} \left(\int_{-\infty}^x e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}s} (x-s)^{2\alpha_0} ds \right)^{2\alpha_0} \\ &= \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{(\operatorname{Re}\sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_x^0 \cosh(\operatorname{Re}\sqrt{-z}s) (s-x)^{2\alpha_0} ds \\ &= \left(\int_x^0 \cosh(\operatorname{Re}\sqrt{-z}s) ds \right)^{1-2\alpha_0} \left(\int_x^0 \cosh(\operatorname{Re}\sqrt{-z}s) (s-x)^{2\alpha_0} ds \right)^{2\alpha_0} \\ &\leq \frac{(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x})^{1-2\alpha_0} (e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x})^{2\alpha_0}}{(\operatorname{Re}\sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}} \leq \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{(\operatorname{Re}\sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\int_{-\infty}^0 \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) \right| (x-s)^{2\alpha_0} ds \leq \frac{K(\theta)}{|z|^{1/2} (\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}} \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha_0}}.$$

Lemme 3.2.4 Pour $\alpha_0 \in]0, 1/2[$ et $\delta \in]0, 1]$, on a

$$\int_0^\delta \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) \right| |x-s|^{2\alpha_0} ds \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha_0}}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) \right| |x-s|^{2\alpha_0} ds \\ & \leq \frac{2(1+\mu) \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x))}{C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} |z|^{1/2}} \int_0^x \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}s) (x-s)^{2\alpha_0} ds \\ & \quad + \frac{2(1+\mu) \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}x)}{C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} |z|^{1/2}} \int_x^\delta \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)) (s-x)^{2\alpha_0} ds \\ & \leq \frac{2(1+\mu)}{C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2) |z|^{1/2}} \left(\frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} (\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}} + \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}} \right), \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned} & \int_0^x \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}s) (x-s)^{2\alpha_0} ds \\ & = \left(\int_0^x \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}s) ds \right)^{1-2\alpha_0} \left(\int_0^x \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}s) (x-s) ds \right)^{2\alpha_0} \\ & \leq \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}}, \end{aligned}$$

et

$$\int_x^\delta \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)) (s-x)^{2\alpha_0} ds \leq \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}},$$

alors

$$\int_0^\delta \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) \right| |x-s|^{2\alpha_0} ds \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha_0}}.$$

Proposition 3.2.2 Soient $g_- \in BUC([-\infty, 0]; E)$, $g_+^\delta \in C([0, \delta], E)$. Alors, pour $x \in [0, \delta]$, il existe une constante K telle que

$$\|v_+^\delta(x, A, g_-)\|_E \leq K \|g_-\|_{BUC(-\infty, 0; E)},$$

et

$$\|w_+^\delta(x, A, g_+^\delta)\|_E \leq K \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}.$$

Preuve. Soit $x \in [0, \delta]$. Du Lemme (2.2.4) et l'estimation (2.3.5), il vient que

$$\begin{aligned} \|v_+^\delta(x, A, g_-)\| &\leq \frac{2C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{3/2}} ds d|z| \|g_-\|_{BUC(-\infty, 0; E)} \\ &\leq \frac{2C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^2} d|z| \|g_-\|_{BUC(-\infty, 0; E)} \\ &\leq K(\theta_0) \|g_-\|_{BUC(-\infty, 0; E)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|w_+^\delta(x, A, g_+^\delta)\|_E &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left(\int_0^\delta |K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s)| ds \right) \frac{d|z|}{|z|} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta], E)} \\ &\leq K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^2} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \leq K(\theta_0) \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}. \end{aligned}$$

Proposition 3.2.3 Soient $g_- \in BUC([-\infty, 0]; E)$, $g_+^\delta \in C([0, \delta], E)$. Alors pour $x \leq 0$, il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que

$$\|v_-^\delta(x, A, g_+^\delta)\|_E \leq K(\theta_0) \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)},$$

et

$$\|w_-^\delta(x, A, g_-)\|_E \leq K(\theta_0) \|g_-\|_{BUC(-\infty, 0; E)}.$$

Preuve. Pour $x \leq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|v_-^\delta(x, A, g_+^\delta)\|_E &\leq \frac{\mu}{2\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \left(\int_0^\delta \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{3/2}} ds \right) d|z| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\ &\leq \frac{\mu}{2\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \left(1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} \right) \frac{d|z|}{|z|^2} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\ &\leq K(\theta_0) \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme (2.2.4) et l'estimation (2.3.9) pour $w_-^\delta(x, A, g_-)$, on trouve

$$\begin{aligned} \|w_-^\delta(x, A, g_-)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) \right| ds \frac{d|z|}{|z|} \|g_-\|_{BUC([-\infty, 0]; E)} \\ &\leq K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{|z|^2} \|g_-\|_{BUC([-\infty, 0]; E)} \leq K(\theta_0) \|g_-\|_{BUC([-\infty, 0]; E)}. \end{aligned}$$

3.3 Solution stricte

Théorème 3.3.1 *Supposons (H.1). Soient $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$, $g_- \in BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$ et $f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$. Alors le problème (P_0^δ) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si*

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}, \quad (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}.$$

Preuve. La preuve se fait en deux étapes,

1^{ère} étape : Pour $x \in [0, \delta]$, on a

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= n_+^\delta(x, A) f_+^\delta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} (A - zI)^{-1} g_-(s) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz. \end{aligned}$$

En écrivant

$$g_+^\delta(s) = g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x) + g_+^\delta(x) \text{ et } g_-(s) = g_-(s) - g_-(0) + g_-(0),$$

il vient que

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= n_+^\delta(x, A) f_+^\delta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} (A - zI)^{-1} g_-(0) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} (A - zI)^{-1} (g_-(s) - g_-(0)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(x) ds dz. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\int_0^\delta K_{\sqrt{-z},\delta}^+(x,s) ds = \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-x))}{z\Delta_z(\delta,\mu)} - \frac{(\mu-1)e^{\sqrt{-z}\delta}}{z\Delta_z(\delta,\mu)} - 1,$$

donc

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= n_+^\delta(x,A) f_+^\delta + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-x))}{z\Delta_z(\delta,\mu)} (A-zI)^{-1} (g_-(0) - g_+^\delta(0)) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-\infty}^0 \int \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-x))}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta,\mu)} e^{\sqrt{-z}s} (A-zI)^{-1} (g_-(s) - g_-(0)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{\sqrt{-z},\delta}^+(x,s) (A-zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z(\delta,\mu)} (A-zI)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)) dz \\ &\quad + \frac{\mu-1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{\sqrt{-z}\delta}}{z\Delta_z(\delta,\mu)} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(A-zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz. \end{aligned}$$

Pour la dernière intégrale, on applique le Théorème de Cauchy, il vient que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(A-zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz = A^{-1} g_+^\delta(x).$$

De l'hypothèse (H.1) et l'holdérianité de g_+^δ , on déduit que

$$\|A^{-1} g_+^\delta(x)\| \leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.$$

Grâce au Lemme 3.2.1, il vient que

$$n_+^\delta(.,A) f_+^\delta \in C([0,\delta];E) \text{ si et seulement si } (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}.$$

Posons maintenant

$$d_+^\delta(x,A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta-x))}{z\Delta_z(\delta,\mu)} (A-zI)^{-1} (g_-(0) - g_+^\delta(0)) dz,$$

$$I_1^\delta(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{\sqrt{-z},\delta}^+(x,s) (A-zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz,$$

$$I_+(x) = \frac{\mu - 1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-\sqrt{-z}\delta}}{z\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz,$$

et

$$I_2^\delta(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} (A - zI)^{-1} (g_-(s) - g_-(0)) ds dz.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= A^{-1}g_+^\delta(x) + n_+^\delta(x, A) f_+^\delta + d_+^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \\ &\quad + d_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)) + I_1^\delta(x) + I_+(x) + I_2^\delta(x), \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)) dz \\ &= d_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)). \end{aligned}$$

On écrit $d_+^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0))$ sous la forme

$$d_+^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) = D^{-1}(1 + e^{-2\sqrt{-A}(\delta-x)})A^{-1}e^{-\sqrt{-A}x} (g_-(0) - g_+^\delta(0)). \quad (3.3.1)$$

En appliquant le résultat de Sinestrari [34], on trouve que

$$d_+^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)), \quad Ad_+^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \in C([0, \delta]; E),$$

si et seulement si

$$g_-(0) - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}.$$

On utilise l'hölderianité de g_+^δ et le lemme 3.2.4, on trouve que

$$\|I_1^\delta(x)\| \leq \int_{\gamma} \frac{C}{|z|^{2+\alpha_0}} d|z| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \leq K(\theta_0) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}.$$

On examine maintenant la convergence des intégrales suivantes

$$\|I_+(x)\| \leq \frac{2C}{C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^2} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \leq K(\theta_0) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}.$$

et

$$\|I_2^\delta(x)\| \leq K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2}} \left(\int_{-\infty}^0 s^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s} ds \right) d|z| \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\int_{-\infty}^0 s^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s} ds \leq \frac{1}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}} \leq \frac{1}{|z|^{\alpha_0+1/2}},$$

par conséquent

$$\|I_2^\delta(x)\| \leq K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^{2+\alpha_0}} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)} \leq K(\theta_0) \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)}.$$

Ainsi $u_+^\delta \in D(A)$ et

$$\begin{aligned} Au_+^\delta(x) &= g_+^\delta(x) + An_+^\delta(x, A) f_+^\delta + Ad_+^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \\ &\quad + Ad_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)) + AI_1^\delta(x) + AI_+(x) + AI_2^\delta(x). \end{aligned}$$

Il reste à examiner la convergence de $AI_1^\delta(x)$, $AI_+(x)$ et $AI_2^\delta(x)$. En effet

$$\|AI_1^\delta(x)\| \leq C \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \leq K(\theta_0) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},$$

$$\|AI_2^\delta(x)\| \leq K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)} \leq K(\theta_0) \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)},$$

et

$$\|AI_+(x)\| \leq \frac{|\mu - 1|}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}}{|z|} g_+^\delta(x) d|z| \leq K(\theta_0) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.$$

En conclusion

$$u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A)).$$

Montrons maintenant que u_+^δ vérifie l'équation

$$(u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x).$$

On dérive u_+^δ , on trouve

$$\begin{aligned} (u_+^\delta)'(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh(\sqrt{-z}x) + \mu \sinh \sqrt{-z}x}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \frac{\sinh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} (A - zI)^{-1} g_-(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} K_{\sqrt{-z}, \delta}^+(x, s) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &= \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3. \end{aligned}$$

Examinons la convergence de ces intégrales, on commence par Π_1 , on décompose γ en deux courbes γ_+ et γ_- définies par

$$\gamma_+ = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{(\delta - x)^2} \right\} \text{ et } \gamma_- = \left\{ z \in \gamma : |z| \leq \frac{1}{(\delta - x)^2} \right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z(\delta, \mu) - \Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&= \Pi_{1,1} + \Pi_{1,2} + \Pi_{1,3},
\end{aligned}$$

et comme

$$\Delta_z(\delta, \mu) - \Delta_z(x, \mu) = \int_x^\delta \sqrt{-z} (\sinh(\sqrt{-z}s) + \mu \cosh \sqrt{-z}s) ds,$$

alors

$$\begin{aligned}
\|\Pi_{1,1}\| &\leq \frac{(1+\mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma_-} \int_x^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)}}{|z|^{1/2}} ds d|z| \|f_+^\delta\|_E \\
&\leq \frac{(1+\mu)(\delta-x)}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\epsilon_0}^{1/(\delta-x)^2} \frac{dr}{r^{1/2}} \|f_+^\delta\|_E \leq K \|f_+^\delta\|_E.
\end{aligned}$$

Pour $\Pi_{1,2}$, on considère l'arc

$$\Gamma = \{z \in \gamma : |\arg z| \leq \theta_0 \text{ et } |z| = 1/(\delta-x)^2\},$$

donc

$$\Pi_{1,2} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup \Gamma} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz;$$

Par l'analyticité de la résolvante on déduit que l'intégrale sur $\gamma_- \cup \Gamma$ est nulle et l'intégrale sur Γ est converge car

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \right| \leq \frac{C}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{d|z|}{|z|} \|f_+^\delta\|_E \leq \frac{C}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \|f_+^\delta\|_E \leq \frac{\theta_0}{\pi} \|f_+^\delta\|_E.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
|\Pi_{1,3}| &\leq \frac{2C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma_+} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|} d|z| \|f_+^\delta\|_E \\
&\leq \frac{2C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|f_+^\delta\|_E \leq K \|f_+^\delta\|_E.
\end{aligned}$$

On examine maintenant la convergence des intégrales Π_2 et Π_3 . En effet

$$\begin{aligned}
|\Pi_2| &\leq \frac{C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-s)}}{|z|} ds dz \|g_-\|_{BUC([-\infty, 0]; E)} \\
&\leq \frac{C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2}} dz \|g_-\|_{BUC([-\infty, 0]; E)} \\
&\leq K(\theta_0) \|g_-\|_{BUC([-\infty, 0]; E)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|\Pi_3| &\leq \frac{1+\mu}{2\pi} \int_{\gamma} \left(\int_0^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+\delta-x)}}{|z| |\Delta_z(\delta, \mu)|} + \int_x^{\delta} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+\delta-s)}}{|z| |\Delta_z(\delta, \mu)|} \right) \|g_+^{\delta}(s)\|_E ds dz \\
&\leq \frac{1+\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{2 - e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{-z}} - e^{-(\delta-x) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} \|g_+^{\delta}(s)\|_E ds dz \\
&\leq \frac{2(1+\mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^{3/2}} \|g_+^{\delta}\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq K \|g_+^{\delta}\|_{C([0, \delta]; E)}.
\end{aligned}$$

En outre, soit $\epsilon > 0$ telle que

$$0 < \epsilon \leq x \leq \delta - x < \delta.$$

On considère la fonction

$$\begin{aligned}
&\left[(u_+^{\delta})' \right]_{\epsilon}(x) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^{\delta} dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \frac{\sinh(\sqrt{-z}(\delta-x)) e^{\sqrt{-z}s}}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} g_-(s) ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{x-\epsilon} \frac{\partial \Delta_z(s, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} \sinh(\sqrt{-z}(\delta-x)) (A - zI)^{-1} g_+^{\delta}(s) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x+\epsilon}^{\delta} \frac{\Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) (A - zI)^{-1} g_+^{\delta}(s) ds dz.
\end{aligned}$$

On utilise ici la méthode développée par Tanabe [35], car il y a deux intégrales dans la seconde dérivée qui sont divergentes. D'autre part, on a $\left[(u_+^{\delta})' \right]_{\epsilon}(x) \rightarrow (u_+^{\delta})'(x)$, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. La

dérivée de $\left[(u_+^\delta)' \right]_\epsilon(x)$ est

$$\begin{aligned}
& \left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\epsilon \right)'(x) \\
= & \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\partial \Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{-z} \cosh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} (A - zI)^{-1} (g_-(s) - g_-(0)) ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\partial \Delta_z(x - \epsilon, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} \sinh(\sqrt{-z}(\delta - x)) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x - \epsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^{x-\epsilon} \frac{\partial \Delta_z(s, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh(\sqrt{-z}(\delta - x)) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \epsilon) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x + \epsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x+\epsilon}^\delta \frac{\partial \Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh(\sqrt{-z}(\delta - s)) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} (g_-(0) - g_+^\delta(0)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(2x + \epsilon - \delta, \mu) - \Delta_z(2x - \epsilon - \delta, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh(\sqrt{-z}(\delta - x))}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)) dz \\
= & \sum_{i=1}^9 J_i(x).
\end{aligned}$$

En utilisant l'identité de la résolvante, on obtient

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh(\sqrt{-z}x) + \mu \cosh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} A (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&= -An_+^\delta(x, A) f_+^\delta.
\end{aligned}$$

Pour $J_2(x)$, en effet

$$\begin{aligned} & \|J_2(x)\| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \frac{\cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x))}{|z|^{1/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} (-s)^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s} ds d|z| \|g_-\|_{BUC([-\infty, 0]; E)}. \end{aligned}$$

De plus, grâce à l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{-\infty}^0 (-s)^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s} ds \leq \frac{1}{|z|^{\alpha_0 + \frac{1}{2}}},$$

il en découle que

$$\begin{aligned} \|J_2(x)\| & \leq \frac{1}{2\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1+\alpha_0}} d|z| \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ & \leq K(\theta_0) \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}. \end{aligned}$$

On effectue le même raisonnement pour $J_4(x)$ et $J_6(x)$. Pour $J_7(x)$, on trouve

$$|J_7(x)| \leq K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|} d|z| \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_E.$$

Cette intégrale converge pour tout $x \in]0, \delta]$. D'autre part, on écrit $J_7(x)$ sous forme exponentielle

$$J_7(x) = -D^{-1} \left(I + e^{-2\sqrt{-A}(\delta-x)} \right) e^{-x\sqrt{-A}} (g_-(0) - g_+^{\delta}(0)).$$

En utilisant Sinestrari [34], on trouve

$$J_7(\cdot) \in C([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } (g_-(0) - g_+^{\delta}(0)) \in \overline{D(A)}.$$

La convergence de J_9 s'obtient en écrivant

$$J_9(x) = d_+^{\delta}(x, A) (g_+^{\delta}(x) - g_+^{\delta}(0)).$$

Pour $J_3(x)$ et $J_5(x)$, on a

$$\|J_3(x)\| \leq K(\theta_0) \epsilon^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\epsilon \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}, \quad (3.3.2)$$

et

$$|J_5(x)| \leq K(\theta_0) \epsilon^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\epsilon \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}. \quad (3.3.3)$$

Pour $J_8(x)$, on utilise le fait que

$$|\Delta_z(2x + \epsilon - \delta, \mu) - \Delta_z(2x - \epsilon - \delta, \mu)| \leq (1 + \mu) |z|^{1/2} \int_{2x - \epsilon - \delta}^{2x + \epsilon - \delta} \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z} s) ds,$$

on obtient

$$\begin{aligned} |J_8(x)| &\leq \frac{2(1 + \mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin \frac{\theta_0}{2}} \int_{2x - \epsilon - \delta}^{2x + \epsilon - \delta} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s)}}{|z|^{1/2}} d|z| ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \quad (3.3.4) \\ &\leq \frac{2(1 + \mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin \frac{\theta_0}{2}} \int_{2x - \epsilon - \delta}^{2x + \epsilon - \delta} \int_{|z| \geq \frac{1}{(\delta - s)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s)}}{|z|^{1/2}} d|z| ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\ &\quad + \frac{2(1 + \mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin \frac{\theta_0}{2}} \int_{2x - \epsilon - \delta}^{2x + \epsilon - \delta} \int_{|z| \leq \frac{1}{(\delta - s)^2}} \frac{d|z|}{|z|^{1/2}} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\ &\leq \frac{c_0 e^{-c_0} (1 + \mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin \frac{\theta_0}{2}} \int_{2x - \epsilon - \delta}^{2x + \epsilon - \delta} \left(\frac{2}{\delta - s} - \sqrt{\epsilon_0} \right) ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\ &\leq K(\theta_0) \ln \left(\frac{2\delta - 2x + \epsilon}{2\delta - 2x - \epsilon} \right) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\epsilon \right)' (x)$ tend vers $(u_+^\delta)''(x)$, En effet

$$\begin{aligned} &\left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\epsilon \right)' (x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial \Delta_z(x - \epsilon, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} \sinh(\sqrt{-z}(\delta - x)) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x - \epsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x - \epsilon}^x \frac{\partial \Delta_z(s, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh(\sqrt{-z}(\delta - x)) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \epsilon) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x + \epsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^{x + \epsilon} \frac{\partial \Delta_z(x, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} \cosh(\sqrt{-z}(\delta - s)) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(2x + \epsilon - \delta, \mu) - \Delta_z(2x - \epsilon - \delta, \mu)}{\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\ &= \sum_{i=1}^5 J_i^\epsilon(x). \end{aligned}$$

En utilisant les estimations (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.4), on trouve que les intégrales $J_1^\epsilon(x)$, $J_3^\epsilon(x)$ et $J_5^\epsilon(x)$ tendent vers 0 quand $\epsilon \rightarrow 0$. Pour $J_2^\epsilon(x)$ et $J_4^\epsilon(x)$, on a

$$\begin{aligned} |J_2^\epsilon(x)| &\leq K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|} \left(\int_{x-\epsilon}^x \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}s) (x-s)^{2\alpha_0} ds \right) d|z| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ &\leq \epsilon K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |J_4^\epsilon(x)| &\leq K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+\delta)}}{|z|} \left(\int_x^{x+\epsilon} \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}s) (x-s)^{2\alpha_0} ds \right) d|z| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ &\leq \epsilon K(\theta_0) \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder et l'inégalité des accroissements finis on trouve

$$\int_{x-\epsilon}^x \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}s) (x-s)^{2\alpha_0} ds \leq K \frac{\epsilon}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{2\alpha_0}},$$

et

$$\int_x^{x+\epsilon} \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}s) (x-s)^{2\alpha_0} ds \leq K \frac{\epsilon}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{2\alpha_0}}.$$

Ainsi, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, alors $J_2^\epsilon(x)$ et $J_4^\epsilon(x)$ tendent vers 0. Finalement

$$\left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\epsilon \right)'(x) \rightarrow g_+^\delta(x) - Au_+^\delta(x) = (u_+^\delta)''(x).$$

2ème étape : Soit $x \in]-\infty, 0]$. On a

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= n_-^\delta(x, A) f_+^\delta + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(A-zI)^{-1}}{z} g_-(x) dz \\ &\quad - \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s) e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} (A-zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(0)) ds dz \\ &\quad + \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{z \Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}x} (A-zI)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0)) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) (A-zI)^{-1} (g_-(s) - g_-(x)) ds dz \\ &\quad - \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{z \Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}x} (A-zI)^{-1} (g_-(x) - g_-(0)) dz, \end{aligned}$$

pour le n_-^δ on applique le lemme 3.2.2, et pour la deuxième intégrale, on utilise le théorème de Cauchy, on trouve

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} g_-(x) dz = A^{-1} g_-(x).$$

Posons

$$d_-^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) = \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{z\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}x} (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0)) dz,$$

$$I_{-1}^\delta(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) (A - zI)^{-1} (g_-(s) - g_-(x)) ds dz,$$

et

$$I_{-2}^\delta(x) = -\frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - s) e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{-z}\Delta_z(\delta, \mu)} (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(0)) ds dz.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= A^{-1} g_-(x) + n_-^\delta(x, A) f_+^\delta + d_-^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \\ &\quad - d_-^\delta(x, A) (g_-(x) - g_-(0)) + I_{-1}^\delta(x) + I_{-2}^\delta(x). \end{aligned}$$

On écrit le terme $d_-^\delta(x, A)$ sous forme exponentielle

$$d_-^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) = \mu D^{-1} \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) A^{-1} e^{\sqrt{-A}x} (g_-(0) - g_+^\delta(0)), \quad (3.3.5)$$

et en utilisant le resultat de Sinestrari [34]. De même pour $d_-^\delta(x, A) (g_-(x) - g_-(0))$.

Grâce à l'holdérianité de g_- et le lemme 3.2.3, il vient que

$$\begin{aligned} |I_{-1}^\delta(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{|z|} \int_{-\infty}^0 \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) \right| (x - s)^{2\alpha_0} ds \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} d|z| \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^{2+\alpha_0}} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \leq K \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$|I_{-2}^\delta(x)| \leq \frac{\mu}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} \left(\int_0^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s) s^{2\alpha_0} ds \right) d|z| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)},$$

comme

$$\int_0^\delta \cosh(\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s)) s^{2\alpha_0} ds \leq \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}},$$

alors

$$|I_{-2}^\delta(x)| \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{2+\alpha_0}} d|z| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \leq K \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.$$

Par conséquent $u_-^\delta(x) \in D(A)$ et

$$\begin{aligned} Au_-^\delta(x) &= g_-(x) + An_-^\delta(x, A) f_+^\delta + Ad_-^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \\ &\quad - Ad_-^\delta(x, A) (g_-(x) - g_-(0)) + AI_{-1}^\delta(x) + AI_{-2}^\delta(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |AI_{-1}^\delta(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \left| K_{\sqrt{-z}, \delta}^-(x, s) \right| (x-s)^{2\alpha_0} ds \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} d|z| \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{d|z|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \leq K \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AI_{-2}^\delta(x)| &\leq \frac{\mu}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1/2} |\Delta_z(\delta, \mu)|} \left(\int_0^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta-s) s^{2\alpha_0} ds \right) d|z| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ &\leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1+\alpha_0}} d|z| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \leq K \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_-^\delta \in BUC^2([-\infty, 0]; E) \cap BUC([-\infty, 0]; D(A)).$$

Ensuite, en utilisant le même raisonnement fait pour u_+^δ , on montre que

$$(u_-^\delta)''(\cdot) + Au_-^\delta(\cdot) = g_-(\cdot).$$

On suppose maintenant que la solution est stricte, alors, de la Proposition 3.2.1 il vient que

$$g_-(0) - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)},$$

de la représentation de la solution on déduit que

$$n_+^\delta(x, A) f_+^\delta \in C([0, \delta]; E),$$

il vient, grâce au lemme 3.2.1, que

$$(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}.$$

3.4 Régularité maximale

On donne ici, le théorème suivant regroupant les propriétés de régularité de la solution

Théorème 3.4.1 *Soient*

$$g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}(0, \delta; E), \quad g_- \in BUC^{2\alpha_0}(-\infty, 0; E),$$

avec $0 < 2\alpha_0 < 1$ et $f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$. Alors

$$(u_+^\delta)'' , Au_+^\delta \in C^{2\alpha_0}(0, \delta; E) \quad \text{et} \quad (u_-^\delta)'' , Au_-^\delta \in BUC^{2\alpha_0}(-\infty, 0; E),$$

si et seulement si

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty), \quad (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty).$$

Preuve. On étudie la continuité de

$$\begin{aligned} Au_+^\delta(x) &= g_+^\delta(x) + An_+^\delta(x, A) f_+^\delta + Ad_+^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \\ &\quad + Ad_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)) + AI_1^\delta(x) + AI_+(x) + AI_2^\delta(x). \end{aligned}$$

Soit $0 \leq \tau < x \leq \delta$, alors

$$\begin{aligned} &Au_+^\delta(x) - Au_+^\delta(\tau) \\ &= g_+^\delta(x) - g_+^\delta(\tau) + An_+^\delta(x, A) f_+^\delta - An_+^\delta(\tau, A) f_+^\delta \\ &\quad + Ad_+^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) - Ad_+^\delta(\tau, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \\ &\quad + Ad_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)) - Ad_+^\delta(\tau, A) (g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(0)) \\ &\quad + AI_1^\delta(x) - AI_1^\delta(\tau) + AI_+(x) - AI_+(\tau) + AI_2^\delta(x) - AI_2^\delta(\tau). \end{aligned}$$

Grâce à l'holdérianité de g_+^δ , on a

$$\|g_+^\delta(x) - g_+^\delta(\tau)\| \leq C(x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}.$$

Selon le lemme 3.2.1, on trouve que

$$An_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta], E),$$

si et seulement si $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty)$.

D'après le résultat de Sinestrari [34] et l'écriture 3.3.1, il vient que

$$d_+^\delta(\cdot, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$$

si et seulement si $g_-(0) - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$.

Posons

$$Ad_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)) = AJ_+(x).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
& AJ_+(x) - AJ_+(\tau) \\
= & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) - \cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} \right) A (A - zI)^{-1} g_+^{\delta} (0) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} A (A - zI)^{-1} g_+^{\delta} (x) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} A (A - zI)^{-1} g_+^{\delta} (\tau) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} A (A - zI)^{-1} g_+^{\delta} (\tau) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} A (A - zI)^{-1} g_+^{\delta} (\tau) dz,
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
& AJ_+(x) - AJ_+(\tau) \\
= & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) - \cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} \right) A (A - zI)^{-1} g_+^{\delta} (0) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} A (A - zI)^{-1} (g_+^{\delta} (x) - g_+^{\delta} (\tau)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau) - \cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} \right) A (A - zI)^{-1} g_+^{\delta} (\tau) dz \\
= & \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) - \cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} \right) A (A - zI)^{-1} (g_+^{\delta} (\tau) - g_+^{\delta} (0)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} A (A - zI)^{-1} (g_+^{\delta} (x) - g_+^{\delta} (\tau)) dz \\
= & J_{+,1} + J_{+,2}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hôldérianité de g_+^{δ} , on obtient

$$\|J_{+,2}\| \leq (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \frac{1}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z|.$$

On considère

$$\gamma^+ = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{x^2} \right\} \text{ et } \gamma^- = \left\{ z \in \gamma : |z| \leq \frac{1}{x^2} \right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z| &\leq \int_{\gamma_+} \frac{e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z| + \int_{\gamma_-} \frac{d|z|}{|z|} \\ &\leq 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-c\sigma}}{\sigma} d\sigma + 2 \int_{\sqrt{\epsilon_0}}^1 \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty, \end{aligned}$$

donc

$$\|J_{+,2}\| \leq K (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.$$

Pour la première, on a

$$\begin{aligned} J_{+,1} &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) - \cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} \right) A (A - zI)^{-1} (g_+^\delta (\tau) - g_+^\delta (0)) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z}}{z \Delta_z (\delta, \mu)} \left(\int_{\tau}^x \sinh \sqrt{-z} (\delta - s) ds \right) A (A - zI)^{-1} (g_+^\delta (\tau) - g_+^\delta (0)) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\tau}^x \left(\int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} (\delta - s)}{z \Delta_z (\delta, \mu)} A (A - zI)^{-1} (g_+^\delta (\tau) - g_+^\delta (0)) dz \right) ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |J_{+,1}| &\leq \frac{C}{2\pi} \int_{\tau}^x \left(\int_{\gamma} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s)}{|z|^{1/2} |\Delta_z (\delta, \mu)|} \tau^{2\alpha_0} dz \right) ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ &\leq K \int_{\tau}^x \tau^{2\alpha_0} \left(\int_{\gamma} \frac{e^{-s \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} d|z| \right) ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $|z|^{1/2} s = \sigma$, il vient que

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-s \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} d|z| = \frac{2}{s} \int_{s\sqrt{\epsilon_0}}^{+\infty} e^{-c\sigma} d\sigma \leq \frac{K}{s},$$

alors

$$\begin{aligned} |J_{+,1}| &\leq K \int_{\tau}^x \frac{\tau^{2\alpha_0}}{s} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \leq K \int_{\tau}^x s^{2\alpha_0-1} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ &\leq K (x^{2\alpha_0} - \tau^{2\alpha_0}) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \leq K (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$AJ_+(\cdot) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E).$$

Pour $AI_1^\delta(\cdot)$, en effet

$$\begin{aligned}
& AI_1^\delta(x) - AI_1^\delta(\tau) \\
= & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\tau \frac{\Delta_z(s, \mu) (\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau))}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(s)) ds dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_\tau^x \frac{\Delta_z(s, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} \cosh(\sqrt{-z}(\delta - x)) A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^\delta \frac{\Delta_z(x, \mu) - \Delta_z(\tau, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} \cosh \sqrt{-z}(\delta - s) A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_\tau^x \frac{\Delta_z(\tau, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} \cosh \sqrt{-z}(\delta - s) A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta + \tau - x) + \mu \sinh \sqrt{-z}(\delta + \tau - x)}{z \Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(\tau)) ds dz \\
& + \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(\tau)) ds dz \\
= & \sum_{i=1}^6 I_{1,i}^\delta.
\end{aligned}$$

Pour $I_{1,2}^\delta$ on a

$$\begin{aligned}
|I_{1,2}^\delta| & \leq \frac{C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \int_\tau^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{1/2}} (x-s)^{2\alpha_0} ds d|z| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq \frac{C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\tau}^x \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)} d|z|}{|z|^{1/2}} (x-s)^{2\alpha_0} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

En faisant le changement suivant $|z|^{1/2}(x-s) = \sigma$, il vient que

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)} d|z|}{|z|^{1/2}} \leq \frac{2}{(x-s)} \int_{(x-s)\sqrt{\epsilon_0}}^{+\infty} e^{-c\sigma} d\sigma,$$

donc

$$|I_{1,2}^\delta| \leq \frac{2C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\tau}^x (x-s)^{2\alpha_0-1} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \leq K (x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.$$

De même, on obtient

$$|I_{1,4}^\delta| \leq K (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.$$

Les intégrales $I_{1,1}^\delta$ et $I_{1,3}^\delta$ sont traitées de la même manière. On écrit par exemple $I_{1,1}^\delta$ sous la forme

$$I_{1,1}^\delta = J_1 + J_2,$$

avec

$$J_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\tau \frac{\Delta_z(s, \mu) (\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau))}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(\tau)) ds dz,$$

et

$$J_2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\tau \frac{\Delta_z(s, \mu) (\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau))}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(s)) ds dz.$$

Pour J_2 , on utilise le fait que

$$\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau) = -\sqrt{-z} \int_{\tau}^x \sinh \sqrt{-z}(\delta - t) dt,$$

on trouve

$$J_2 = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\tau \int_{\tau}^x \frac{\Delta_z(s, \mu) \sinh \sqrt{-z}(\delta - t)}{\Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(s)) dt ds dz.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & |J_2| \\ & \leq \frac{C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \int_0^\tau \left(\int_{\tau}^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-t)} dt \right) (\tau - s)^{2\alpha_0} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\ & \leq \frac{C}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_0^\tau \int_{\tau}^x \left(\int_{\gamma} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-t)} d|z| \right) (\tau - s)^{2\alpha_0} dt ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}. \end{aligned}$$

Posons $(s - t) = -\eta$ et $|z|^{1/2} \eta = \sigma$, alors

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq K \int_0^\tau \int_{\tau-s}^{x-s} \frac{(\tau-s)^{2\alpha_0}}{\eta^2} \int_{\eta\sqrt{\epsilon_0}}^{+\infty} 2\sigma e^{-C_0\sigma} d\sigma d\eta ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K \int_0^\tau (\tau-s)^{2\alpha_0} \left(\int_{\tau-s}^{x-s} \frac{d\eta}{\eta^2} \right) ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K \int_0^\tau (\tau-s)^{2\alpha_0} \left(\frac{1}{\tau-s} - \frac{1}{x-s} \right) ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K \int_0^\tau (\tau-s)^{2\alpha_0-1} \left(\frac{x-\tau}{x-s} \right) ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K(x-\tau) \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{2\alpha_0-1}}{x-\tau+\tau-s} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $(\tau - s) = \xi(x - \tau)$, il vient que

$$\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{2\alpha_0-1}}{x-\tau+\tau-s} ds = \int_0^{\tau/(x-\tau)} \frac{(\xi(x-\tau))^{2\alpha_0-1}}{x-\tau+\xi(x-\tau)} (x-\tau) d\xi \leq (x-\tau)^{2\alpha_0-1} \int_0^{+\infty} \frac{\xi^{2\alpha_0-1}}{1+\xi} d\xi,$$

d'où

$$|J_2| \leq K(x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.$$

Pour J_1 on utilise l'holdérianté de g_+^δ , on obtient

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \frac{(1+\mu)(x-\tau)^{2\alpha_0}}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_0^\tau \int_\tau^x \int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(t-s)} d|z| dt ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K(\theta_0)(x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

Pour $I_{1,5}^\delta$ et $I_{1,6}^\delta$, en effet

$$\begin{aligned}
|I_{1,5}^\delta| &\leq \frac{1+\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|} d|z| (x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K(\theta_0)(x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|I_{1,6}^\delta| &\leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|} d|z| (x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K(\theta_0)(x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

On étudie maintenant $AI_+(\cdot)$, on a

$$\begin{aligned} AI_+(x) - AI_+(\tau) &= \frac{\mu - 1}{2i\pi} \int_{z \in \gamma: |z| \geq 1/\delta^2} \frac{e^{-\sqrt{-z}\delta}}{z\Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(\tau)) dz \\ &\quad + \frac{\mu - 1}{2i\pi} \int_{z \in \gamma: |z| \leq 1/\delta^2} \frac{e^{-\sqrt{-z}\delta}}{z\Delta_z(\delta, \mu)} A(A - zI)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(\tau)) dz. \end{aligned}$$

Posons $|z|^{1/2} \delta = \sigma$. Alors

$$\begin{aligned} \|AI_+(x) - AI_+(\tau)\| &\leq C(\theta_0) \int_1^{+\infty} \frac{e^{-c_0\sigma}}{\sigma} d\sigma (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\ &\quad + C(\theta_0) \int_\epsilon^1 \frac{d\sigma}{\sigma} (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\ &\leq K(\theta_0) (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}. \end{aligned}$$

Pour $I_2^\delta(\cdot)$, en effet

$$\begin{aligned} &AI_2^\delta(x) - AI_2^\delta(\tau) \\ &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^0 \int_{\tau}^x \frac{\sinh(\sqrt{-z}(\delta - t))}{\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}s} A(A - zI)^{-1} (g_-(s) - g_-(0)) ds dz, \end{aligned}$$

comme

$$\int_{-\infty}^0 s^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s} ds \leq \frac{1}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}} \leq \frac{1}{|z|^{\alpha_0+1/2}},$$

alors

$$\begin{aligned} &|AI_2^\delta(x) - AI_2^\delta(\tau)| \\ &\leq K \int_{\tau}^x \int_{\gamma} \frac{e^{-t \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{\alpha_0+1/2}} d|z| \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ &\leq K \int_{\tau}^x t^{2\alpha_0-1} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-c_0\sigma}}{\sigma^{2\alpha_0}} d\sigma + \int_{t\sqrt{\epsilon_0}}^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{2\alpha_0}} \right) dt \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ &\leq K (x^{2\alpha_0} - \tau^{2\alpha_0}) \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ &\leq K (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}. \end{aligned}$$

On montre la continuité de

$$\begin{aligned} Au_-^\delta(x) &= g_-(x) + An_-^\delta(x, A) f_+^\delta + Ad_-^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \\ &\quad - Ad_-^\delta(x, A) (g_-(x) - g_-(0)) + AI_{-1}^\delta(x) + AI_{-2}^\delta(x). \end{aligned}$$

Soit

$$\tau < x \leq 0,$$

alors

$$\begin{aligned} & Au_-^\delta(x) - Au_-^\delta(\tau) \\ = & g_-(x) - g_-(\tau) + An_-^\delta(x, A) f_+^\delta - An_-^\delta(\tau, A) f_+^\delta \\ & + Ad_-^\delta(x, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) - Ad_-^\delta(\tau, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \\ & - Ad_-^\delta(x, A) (g_-(x) - g_-(0)) + Ad_-^\delta(\tau, A) (g_-(x) - g_-(0)) \\ & + AI_{-1}^\delta(x) - AI_{-1}^\delta(\tau) + AI_{-2}^\delta(x) - AI_{-2}^\delta(\tau). \end{aligned}$$

Grâce à l'holdérianité de g_- , on a

$$\|g_-(x) - g_-(\tau)\| \leq C(x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}.$$

D'après le lemme 3.2.2, on trouve

$$An_-^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0], E),$$

si et seulement si $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty)$.

Grâce au résultat de Sinestrari [34] et l'écriture (3.3.5), on obtient

$$Ad_-^\delta(\cdot, A) (g_-(0) - g_+^\delta(0)) \in BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)$$

si et seulement si $g_-(0) - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$.

Posons

$$Ad_-^\delta(x, A) (g_-(x) - g_-(0)) = AJ_-(x).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} & AJ_-(x) - AJ_-(\tau) \\ = & \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{z\Delta_z(\delta, \mu)} \left(e^{\sqrt{-z}x} - e^{\sqrt{-z}\tau} \right) A(A - zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(0)) dz \\ & + \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{z\Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}x} A(A - zI)^{-1} (g_-(x) - g_-(\tau)) dz \\ = & J_{-,1} + J_{-,2}. \end{aligned}$$

En utilisant l'holdérianité de g_- , on obtient

$$\begin{aligned} \|J_{-,2}\| & \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|} d|z| (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ & \leq (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}, \end{aligned}$$

car

$$\int_{\gamma} \frac{e^{x \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z| \leq 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-c\sigma}}{\sigma} d\sigma + 2 \int_{\sqrt{\epsilon_0}}^1 \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty.$$

Pour la première intégrale, en effet

$$\begin{aligned} J_{-,1} &= \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} \delta}{z \Delta_z(\delta, \mu)} \left(\int_{\tau}^x e^{\sqrt{-z}t} dt \right) A(A - zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(0)) dz \\ &= \frac{\mu}{2i\pi} \int_{\tau}^x \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} \delta}{z \Delta_z(\delta, \mu)} e^{\sqrt{-z}t} A(A - zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(0)) dz dt, \end{aligned}$$

d'où

$$|J_{-,1}| \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\tau}^x \tau^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{t \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} d|z| dt \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}.$$

En faisant le changement de variable $|z|^{1/2} t = -\sigma$. Il vient que

$$\int_{\gamma} \frac{e^{t \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} d|z| = \frac{2}{s} \int_{-t\sqrt{\epsilon_0}}^{+\infty} e^{-c\sigma} d\sigma \leq \frac{K}{s},$$

alors

$$\begin{aligned} |J_{-,1}| &\leq K \int_{\tau}^x \frac{\tau^{2\alpha_0}}{s} ds \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \leq K (x^{2\alpha_0} - \tau^{2\alpha_0}) \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ &\leq K (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$AJ_-(.) \in BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E).$$

D'autre part, on écrit

$$AI_{-1}^{\delta}(x) - AI_{-1}^{\delta}(\tau) = \sum_{j=1}^6 I_{-1,j}^{\delta},$$

telles que

$$I_{-1,1}^{\delta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\Delta_-(x, \delta, \mu) - \Delta_-(\tau, \delta, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} e^{s\sqrt{-z}} A(A - zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(s)) ds dz,$$

$$I_{-1,2}^{\delta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^0 \frac{\Delta_-(s, \delta, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} \left(e^{x\sqrt{-z}} - e^{\tau\sqrt{-z}} \right) A(A - zI)^{-1} (g_-(x) - g_-(s)) ds dz,$$

$$I_{-1,3}^{\delta} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta}{z \Delta_z(\delta, \mu)} e^{(\tau-x)\sqrt{-z}} A(A - zI)^{-1} (g_-(x) - g_-(\tau)) ds dz,$$

$$I_{-1,4}^\delta = \frac{-\mu}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} \delta}{z \Delta_z(\delta, \mu)} e^{(\tau-x)\sqrt{-z}} \left(1 - e^{x\sqrt{-z}}\right) A(A - zI)^{-1} (g_-(x) - g_-(\tau)) dsdz,$$

$$I_{-1,5}^\delta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\tau}^x \frac{\Delta_-(x, \delta, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} e^{s\sqrt{-z}} A(A - zI)^{-1} (g_-(x) - g_-(s)) dsdz,$$

et

$$I_{-1,6}^\delta = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\tau}^x \frac{\Delta_-(s, \delta, \mu)}{\sqrt{-z} \Delta_z(\delta, \mu)} e^{\tau\sqrt{-z}} A(A - zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(s)) dsdz.$$

Pour $I_{-1,3}^\delta$ et $I_{-1,4}^\delta$, en utilisant l'holdérianité de g_- , on trouve

$$\begin{aligned} |I_{-1,3}^\delta| &\leq \frac{(x - \tau)^{2\alpha_0}}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{(\tau-x) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z| \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ &\leq K(\theta_0) (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |I_{-1,4}^\delta| &\leq \frac{\mu (x - \tau)^{2\alpha_0}}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \frac{e^{(\tau-x) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} d|z| \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ &\leq K(\theta_0) (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}. \end{aligned}$$

Les intégrales $I_{-1,1}^\delta$ et $I_{-1,2}^\delta$ sont traitées de la même façon. On a

$$|I_{-1,1}^\delta| \leq \frac{1 + \mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\gamma} \int_{-\infty}^{\tau} \int_{\tau}^x e^{(s-t) \operatorname{Re} \sqrt{-z}} (\tau - s)^{2\alpha_0} dt ds d|z| \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}.$$

Posons $(t - s) |z|^{1/2} = \sigma$ et $t - s = \eta$. Il vient que

$$\begin{aligned} &|I_{-1,1}^\delta| \\ &\leq \frac{2(1 + \mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{-\infty}^{\tau} \int_{\tau}^x \left(\int_{(t-s)\sqrt{\epsilon_0}}^{+\infty} \sigma e^{-C_0 \sigma} d\sigma \right) \frac{(\tau - s)^{2\alpha_0}}{(t - s)^2} dt ds \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ &\leq \frac{2(1 + \mu)}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - s)^{2\alpha_0} \left(\int_{\tau-s}^{x-s} \frac{d\eta}{\eta^2} \right) ds \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)} \\ &\leq \frac{2(1 + \mu)(x - \tau)}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{(\tau - s)^{2\alpha_0 - 1}}{x - \tau + \tau - s} ds \|g_-\|_{BUC^{2\alpha_0}([-\infty, 0]; E)}. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$\tau - s = \rho(x - \tau) \text{ et } -ds = (x - \tau) d\rho.$$

On obtient

$$\begin{aligned} |I_{-1,1}^\delta| &\leq \frac{2(1+\mu)(x-\tau)^{2\alpha_0}}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{2\alpha_0-1}}{1+\rho} d\rho \right) \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)} \\ &\leq K(\theta_0)(x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)}. \end{aligned}$$

Pour $I_{-1,5}^\delta$, on a

$$|I_{-1,5}^\delta| \leq \frac{1}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\tau^x (x-s)^{2\alpha_0} \int_\gamma \frac{e^{(s-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} d|z| ds \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)}.$$

En utilisant le changement de variable $|z|^{1/2}(x-s) = \sigma$, on trouve

$$\int_\gamma \frac{e^{(s-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} d|z| = \frac{2}{(x-s)} \int_{(x-s)\sqrt{\epsilon_0}}^{+\infty} e^{-c_0\sigma} d\sigma \leq \frac{K}{(x-s)},$$

donc

$$\begin{aligned} |I_{-1,5}^\delta| &\leq \frac{K}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\tau^x (x-s)^{2\alpha_0-1} ds \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)} \\ &\leq \frac{K}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} (x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)}. \end{aligned}$$

De même pour $I_{-1,6}^\delta$. Posons $|z|^{1/2}(s-\tau) = \sigma$, il vient que

$$\int_\gamma \frac{e^{(s-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} d|z| = \frac{2}{(x-s)} \int_{(x-s)\sqrt{\epsilon_0}}^{+\infty} e^{-c_0\sigma} d\sigma \leq \frac{K}{(s-\tau)},$$

donc

$$\begin{aligned} |I_{-1,6}^\delta| &\leq \frac{1}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_\tau^x (s-\tau)^{2\alpha_0} \int_\gamma \frac{e^{-(s-\tau)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} d|z| ds \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)} \\ &\leq K(x-\tau)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-\infty,0];E)}. \end{aligned}$$

Pour $I_{-2}^\delta(\cdot)$, en effet

$$\begin{aligned} &AI_{-2}^\delta(x) - AI_{-2}^\delta(\tau) \\ &= \frac{\mu}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \int_\tau^x \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s)e^{\sqrt{-z}t}}{\Delta_z(\delta,\mu)} A(A-zI)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(s)) dt ds dz, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & |AI_{-2}^\delta(x) - AI_{-2}^\delta(\tau)| \\ & \leq \frac{\mu}{2\pi} \int_{\gamma}^x \int_{\tau}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}t}}{|\Delta_z(\delta, \mu)|} \left(\int_0^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s) s^{2\alpha_0} \right) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} dt ds d|z|. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\int_0^\delta s^{2\alpha_0} \cosh \sqrt{-z}(\delta - s) ds = \int_0^\delta (\delta - s)^{2\alpha_0} \cosh \sqrt{-z} s ds \leq \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}},$$

alors

$$\begin{aligned} & |AI_{-2}^\delta(x) - AI_{-2}^\delta(\tau)| \\ & \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\tau}^x \int_{\gamma}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}t}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} d|z| dt \\ & \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \int_{\tau}^x t^{2\alpha_0-1} \left(\int_{-t\sqrt{\epsilon_0}}^{+\infty} \frac{e^{-C_0\sigma}}{\sigma^{2\alpha_0}} d\sigma \right) dt \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\ & \leq \frac{\mu}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} (x^{2\alpha_0} - \tau^{2\alpha_0}) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\ & \leq K(\theta_0) (x - \tau)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}. \end{aligned}$$

Problème de transmission avec conditions aux limites de type Robin dans le cadre L^p

4.1 Position du problème et hypothèses

Dans ce chapitre, on étudie l'équation différentielle opérationnelle du second ordre

$$(u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) - \omega u^\delta(x) = g^\delta(x), \quad x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[,$$

pour $\omega > 0$ assez grand et

$$g^\delta \in L^p(]-1, 0[\cup]0, \delta[, E),$$

avec les conditions aux limites non homogènes à coefficients opérateurs de type Robin

$$(u^\delta)'(-1) = f_- \quad \text{et} \quad (u^\delta)'(\delta) + Hu^\delta(\delta) = f_+^\delta,$$

(f_+^δ et f_- appartiennent à un espace de Banach complexe E , A et H sont deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A)$ et $D(H)$ respectivement) et les conditions de transmission

$$u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+) \quad \text{et} \quad \mu_- (u^\delta)'(0_-) = \mu_+ (u^\delta)'(0_+),$$

μ_- et μ_+ sont deux coefficients positifs dépendent de δ .

On s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution stricte u^δ du problème opérationnel suivant

$$(P_\omega^\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) - \omega u^\delta(x) = g^\delta(x), & \omega > 0 \\ p.p. \ x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[\\ (u^\delta)'(-1) = f_-, \quad (u^\delta)'(\delta) + Hu^\delta(\delta) = f_+^\delta \\ u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+), \quad \mu_- (u^\delta)'(0_-) = \mu_+ (u^\delta)'(0_+). \end{cases}$$

Dans toute la suite, posons

$$A_\omega := A - \omega I, \quad \mu = \frac{\mu_+}{\mu_-},$$

$$u^\delta(x) = \begin{cases} u_-^\delta(x) & \text{p.p } x \in]-1, 0[\\ u_+^\delta(x) & \text{p.p } x \in]0, \delta[\end{cases}$$

et

$$g^\delta(x) = \begin{cases} g_-(x) & \text{p.p } x \in]-1, 0[\\ g_+^\delta(x) & \text{p.p } x \in]0, \delta[. \end{cases}$$

Cela nous permet de décomposer (P_ω^δ) en deux problèmes auxiliaires

$$(P_+^{\delta, \omega}) \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + A_\omega u_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \\ (u_+^\delta)'(\delta) + H u_+^\delta(\delta) = f_+^\delta \\ u_+^\delta(0) = \psi, \end{cases}$$

et

$$(P_-^{\delta, \omega}) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + A_\omega u_-^\delta(x) = g_-(x) \\ (u_-^\delta)'(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = \mu (u_+^\delta)'(0) = \phi, \end{cases}$$

où ψ, ϕ sont des éléments auxiliaires données dans E .

Les hypothèses essentielles faites ici sont

$$E \text{ est un espace } UMD, \tag{H.0}$$

$$\begin{cases} \text{il existe } \omega_0 \text{ fixé et positif tel que } \rho(A_{\omega_0}) \supset [\omega_0, \infty[\\ \exists C_A > 0 : \forall \lambda \geq \omega_0 \quad \|(A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C_A}{1 + \lambda}, \end{cases} \tag{H.1}$$

$$\exists K_A > 1, \exists \theta_A \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \|(-A_{\omega_0})^{is}\| \leq K_A e^{\theta_A |s|}, \tag{H.2}$$

$$\begin{cases} \exists C_H > 0 : \rho(-H) \supset [0, +\infty[\\ \forall \xi \geq 0 \quad \|(H + \xi I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C_H}{1 + \xi}, \end{cases} \tag{H.3}$$

$$\exists K_H > 1, \exists \theta_H \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \|H^{is}\| \leq K_H e^{\theta_H |s|}, \tag{H.4}$$

et

$$\frac{\theta_A}{2} + \theta_H < \pi. \tag{H.5}$$

On suppose, aussi, que les deux opérateurs A et H commutent au sens des résolvantes c'est à dire

$$\forall \lambda \geq \omega_0, \forall \xi \geq 0 : (A - \lambda I)^{-1} (H + \xi I)^{-1} = (H + \xi I)^{-1} (A - \lambda I)^{-1}. \tag{H.6}$$

Remarque 4.1.1 *On note maintenant quelques conséquences qui sont très utiles pour la suite*

1. Les hypothèses (H.1), (H.2) sont valables pour A_ω (pour tout $\omega \geq \omega_0$) et se traduisent sous la forme

$$\begin{cases} A_\omega \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } E \\ \exists C > 0 : [\omega, +\infty[\subset \rho(A_\omega) \\ \forall \lambda \geq \omega \quad \|(A_\omega - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1 + \lambda}. \end{cases} \quad (\text{H.7})$$

$$\exists K_A > 1, \exists \theta_A \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \|(-A_\omega)^{is}\| \leq K_A e^{\theta_A |s|}. \quad (\text{H.8})$$

Les constantes sont choisies indépendantes de ω , voir Prüs et Sohr [33] Théorème 2 page 437.

2. Pour tout $\omega \geq \omega_0$, l'hypothèse (H.7) implique que $Q_\omega := -(-A_\omega)^{1/2}$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(e^{xQ_\omega})_{x \geq 0}$.
3. L'hypothèse (H.8) implique que $(-A_\omega)^{1/2}$ est de classe $Bip(\theta_A/2, E)$.
4. L'hypothèse (H.0) entraîne la réflexivité de E , cependant les opérateurs A et H sont sectoriels et donc les domaines $D(A)$ et $D(H)$ sont denses dans E , voir Haase [21] Proposition 2.1.1 pages 18-19.
5. De l'hypothèse (H.6) on déduit que
- 1) les opérateurs A_ω et H commutent au sens de résolvantes.
 - 2) les opérateurs Q_ω et H commutent au sens de résolvantes.

Soient $\lambda \geq 0$, $\xi \in \rho(-H)$ et $x \in E$. Pour 2) en effet

$$(\lambda I - Q_\omega)^{-1} = \left(\lambda I - \sqrt{-A + \omega I} \right)^{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(zI - A)^{-1}}{\lambda - \sqrt{\omega - z}} dz$$

où γ est une courbe de Jordan entourant le spectre de A dans le sens direct. De l'hypothèse (H.6), il vient

$$\begin{aligned} (\lambda I - Q_\omega)^{-1} (H + \xi I)^{-1} x &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{(zI - A)^{-1} (H + \xi I)^{-1} x}{\lambda - \sqrt{\omega - z}} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{(H + \xi I)^{-1} (zI - A)^{-1} x}{\lambda - \sqrt{\omega - z}} dz \\ &= (H + \xi I)^{-1} (\lambda I - Q_\omega)^{-1} x. \end{aligned}$$

7. Sous les hypothèses (H.0) \sim (H.6) et par la théorie des sommes d'opérateurs linéaires de Dore et Venni [13] l'opérateur $H - Q_\omega$ est fermé et inversible et son inverse donné par

$$(H - Q_\omega)^{-1} = \int_{\Gamma} \frac{(-Q_\omega)^{-z} H^{z-1}}{\sin \pi z} dz$$

telle que Γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

et orientée de $\infty e^{-i\pi/2}$ vers $\infty e^{i\pi/2}$. De plus, pour $\xi \in E$ on a

$$(H - Q_\omega)^{-1}(\xi) \in D(H) \cap D(Q_\omega).$$

4.2 Lemmes techniques

On rappelle quelques lemmes techniques, qui sont utiles pour la suite

Lemme 4.2.1 *Sous les hypothèses (H.0) \smile (H.2) et pour*

$$g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E), 1 < p < \infty,$$

on a

1. $x \mapsto L_{\omega,+}^\delta(x, g_+^\delta(\cdot)) := Q_\omega \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \in L^p(0, \delta; E).$
2. $x \mapsto L_{\omega,+}^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\delta - \cdot)) = Q_\omega \int_x^\delta e^{(s-x)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \in L^p(0, \delta; E).$
3. $x \mapsto \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta(x, g_+^\delta(\cdot)) := Q_\omega \int_0^\delta e^{(x+s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \in L^p(0, \delta; E).$

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme 2.2.8.

Lemme 4.2.2 *Sous les hypothèses (H.0) \smile (H.2) et pour*

$$g_- \in L^p(-1, 0; E), \quad 1 < p < \infty,$$

on a les assertions suivantes

1. $x \mapsto L_{\omega,-}(x, g_-(\cdot)) = Q_\omega \int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g_-(s) ds \in L^p(-1, 0; E).$
2. $x \mapsto L_{\omega,-}(-1 - x, g_-(-1 - \cdot)) = Q_\omega \int_{-1}^x e^{(x-s)Q_\omega} g_-(s) ds \in L^p(-1, 0; E).$
3. $x \mapsto \mathcal{L}_{\omega,-}(x, g_-(\cdot)) = Q_\omega \int_{-1}^0 e^{-(x+s)Q_\omega} g_-(s) ds \in L^p(-1, 0; E).$

Preuve. La preuve est similaire à celle du Lemme 2.2.8.

Lemme 4.2.3 *Supposons (H.0) \smile (H.2). Soient*

$$g_- \in L^p(-1, 0; E), \quad g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E)$$

avec $1 < p < \infty$. Alors

1. $x \mapsto J_{\omega,1}^\delta(x, g_+^\delta) = Q_\omega \int_0^\delta e^{(s-x)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \in L^p(-1, 0; E),$
2. $x \mapsto J_{\omega,2}(x, g_-) = Q_\omega \int_{-1}^0 e^{(x-s)Q_\omega} g_-(s) ds \in L^p(0, \delta; E).$

Preuve. En effet

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \left\| J_{\omega,1}^\delta(x, g_+^\delta) \right\|_E^p dx \\ &= \int_{-1}^0 \left\| Q_\omega \int_0^\delta e^{(s-t)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dt = \int_0^1 \left\| Q_\omega \int_0^\delta e^{(s+x)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dx \\ &= \int_0^\delta \left\| Q_\omega \int_0^\delta e^{(s+x)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dx + \int_\delta^1 \left\| Q_\omega \int_0^\delta e^{(s+x)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dx, \end{aligned}$$

la première intégrale converge car

$$\int_0^\delta \left\| Q_\omega \int_0^\delta e^{(s+x)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dx = \int_0^\delta \left\| \mathcal{L}_+^\delta(x, g_+^\delta) \right\|_E^p dx < \infty$$

pour la deuxième intégrale on utilise les propriétés des semi-groupes et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \int_\delta^1 \left\| Q_\omega \int_0^\delta e^{(s+x)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \right\|_E^p dx &\leq M \int_\delta^1 \left(\int_0^\delta \frac{e^{-a(s+x)}}{s+x} \|g_+^\delta(s)\|_E ds \right)^p dx \\ &\leq \frac{1}{\delta^p} \int_\delta^1 \left(\int_0^\delta e^{-qa(s+x)} ds \right)^{\frac{p}{q}} dx \|g_+^\delta\|_{L^p(0,\delta;E)}^p \\ &\leq K \|g_+^\delta\|_{L^p(0,\delta;E)}^p. \end{aligned}$$

Lemme 4.2.4 *Sous l'hypothèse (H.1) et pour $1 < p < \infty$, on a*

i) $\varphi \in (D(A); E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$ si et seulement si $x \mapsto Q_\omega e^{xQ_\omega} \varphi \in L^p(0, \delta, E)$.

ii) $\varphi \in (D(A); E)_{\frac{1}{2p}, p}$ si et seulement si $x \mapsto A_\omega e^{xQ_\omega} \varphi \in L^p(0, \delta, E)$.

Preuve. Voir Lemme 2.2.7.

Lemme 4.2.5 *Sous l'hypothèse (H.1) et pour $1 < p < \infty$, on a*

i) $\varphi \in (D(A); E)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$ si et seulement si $x \mapsto Q_\omega e^{-xQ_\omega} \varphi \in L^p(-1, 0; E)$.

ii) $\varphi \in (D(A); E)_{\frac{1}{2p}, p}$ si et seulement si $x \mapsto A_\omega e^{-xQ_\omega} \varphi \in L^p(-1, 0; E)$.

Lemme 4.2.6 *Sous l'hypothèse (H.1) les opérateurs $(I - e^{2Q_\omega})$, $(I + e^{2(1+\delta)Q_\omega})$ sont inversibles et ont des inverses bornés.*

Preuve. D'après le lemme de Dore et Yakubov [16] page 103, il existe deux constantes positives (C, k) ne dépendant pas de ω telles que pour tout $x > 0$

$$\left\| (-A + \omega I)^\alpha e^{x(-A + \omega I)^{1/2}} \right\| \leq C e^{-kx\sqrt{\omega}} \quad (4.2.1)$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. En particulier

$$\|e^{2Q_\omega}\| \leq C e^{-2k\sqrt{\omega}}, \quad \|e^{2(1+\delta)Q_\omega}\| \leq C e^{-2(1+\delta)k\sqrt{\omega}}, \quad (4.2.2)$$

ce qui implique l'existence de $\omega_1 \geq \omega$ tel que $\|e^{2Q_\omega}\| < 1$ (respectivement $\|e^{2(1+\delta)Q_\omega}\| < 1$ pour tout $\delta \in [0, 1]$). On peut montrer ce résultat en utilisant la méthode de Lunardi [29].

Lemme 4.2.7 *Supposons (H.0) \sim (H.6). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\omega \geq \omega_0$*

$$\|(Q_\omega - H)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{\omega^{1/4}}. \quad (4.2.3)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} (H - Q_\omega)^{-1} &= \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \frac{(\sqrt{-A_\omega})^{-z} H^{z-1}}{\sin \pi z} dz \\ &= \frac{1}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2-i\infty} \frac{(\sqrt{-A_\omega})^{-z} H^{z-1}}{\sin \pi z} dz \end{aligned}$$

pour tout $\omega \geq \omega_0$. Posons

$$z = 1/2 + i\beta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

En utilisant les propriétés des puissances fractionnaires complexes

$$(-A_\omega)^{-i\beta/2} (-A_\omega)^{-1/4} \subset (-A_\omega)^{-z/2},$$

$$\left((-A_\omega)^{1/2} \right)^{-z} = (-A_\omega)^{-z/2},$$

et le fait que

$$(-A_\omega)^{-i\beta/2} \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad (-A_\omega)^{-1/4} \in \mathcal{L}(E),$$

(grâce aux hypothèses (H.1) et (H.2)) il vient

$$(-A_\omega)^{-i\beta/2} (-A_\omega)^{-1/4} = (-A_\omega)^{-z/2},$$

par conséquent

$$\|(-A_\omega)^{-z/2} x\|_E = \|(-A_\omega)^{-i\beta/2}\| \|(-A_\omega)^{-1/4} x\|_E.$$

En utilisant l'hypothèse (H.2) on trouve

$$\|(-A_\omega)^{-i\beta/2}\| \leq C e^{|\beta|\theta_A/2}.$$

Par ailleurs, grâce à la définition des puissances fractionnaires

$$\begin{aligned} \|(-A_\omega)^{-1/4}\| &\leq \frac{\sin(\pi/4)}{\pi} \int_0^{+\infty} s^{-1/4} \|(s + \omega - A)^{-1}\| ds \\ &\leq \frac{C \sin(\pi/4)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s^{-1/4}}{1 + s + \omega} ds \\ &\leq \frac{C \sin(\pi/4)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^{-1/4} \tau^{-1/4}}{1 + \omega(1 + \tau)} \omega d\tau \end{aligned}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tau^{-1/4}}{1 + \omega(1 + \tau)} \omega d\tau \leq \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{-1/4}}{1 + \tau} d\tau = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)},$$

alors

$$\|(-A_\omega)^{-z/2} x\|_E \leq C e^{|\beta|\theta_A/2} \omega^{-1/4} \|x\|_E.$$

D'autre part, on a

$$|\sin(\pi z)| = |\cos(i\pi\beta)| = \cosh(\pi\beta) = \cosh(\pi|\beta|) \geq \frac{e^{\pi|\beta|}}{2},$$

pour tout $z = 1/2 + i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \|(H - Q_\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C e^{|\beta|\theta_A/2} \omega^{-1/4} \|H^{-1/2}\| \|H^{i\beta}\|}{\frac{e^{\pi|\beta|}}{2}} d|\beta| \\ &\leq \frac{C}{\omega^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{|\beta|(\theta_A/2 + \theta_H)}}{e^{\pi|\beta|}} d|\beta| \leq \frac{C}{\omega^{1/4}}. \end{aligned}$$

Lemme 4.2.8 *Sous les hypothèses (H.0) ~ (H.6) les opérateurs $(Q_\omega - H)^{-1}$ et $(I - e^{2Q_\omega})^{-1}$ commutent.*

Preuve. Soient γ et γ' deux courbes sectorielles homotopes entourant le spectre de Q_ω alors

$$\begin{aligned}
& (Q_\omega - H)^{-1} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (zI - H)^{-1} (zI - Q_\omega)^{-1} dz \right) \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{e^{2\lambda}}{1 - e^{2\lambda}} (\lambda I - Q_\omega)^{-1} dz + I \right) \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{e^{2\lambda}}{1 - e^{2\lambda}} (zI - H)^{-1} (zI - Q_\omega)^{-1} (\lambda I - Q_\omega)^{-1} dz d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (zI - H)^{-1} (zI - Q_\omega)^{-1} dz
\end{aligned}$$

par Fubini on trouve

$$\begin{aligned}
& (Q_\omega - H)^{-1} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{e^{2\lambda}}{1 - e^{2\lambda}} (\lambda I - Q_\omega)^{-1} dz + I \right) \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (zI - H)^{-1} (zI - Q_\omega)^{-1} dz \right) \\
&= (I - e^{2Q_\omega})^{-1} (Q_\omega - H)^{-1}.
\end{aligned}$$

Lemme 4.2.9 *Sous les hypothèses (H.0) et (H.6), pour $\omega \geq \omega_0$, $\xi \in D(H)$ et $x \geq 0$ on a*

$$He^{xQ_\omega} \xi = e^{xQ_\omega} H\xi.$$

Preuve. Soient $\xi \in D(H)$ et $x > 0$ (le cas $x = 0$ est évident). On sait que

$$\forall x \geq 0 \quad e^{xQ_\omega} = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{\lambda t} (Q_\omega - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

alors

$$\begin{aligned}
He^{xQ_\omega} \xi &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{\lambda t} H (Q_\omega - \lambda I)^{-1} \xi d\lambda \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{\lambda t} (Q_\omega - \lambda I)^{-1} H\xi d\lambda \\
&= e^{xQ_\omega} H\xi.
\end{aligned}$$

Lemme 4.2.10 *Supposons (H.0) \sim (H.6). Alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ l'opérateur*

$$\begin{cases} \Lambda_\omega = (H - Q_\omega) - e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H) \\ D(\Lambda_\omega) = D(H) \cap D(Q_\omega), \end{cases}$$

est fermé et admet un inverse borné.

Preuve. L'opérateur Λ_ω s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega &= (H - Q_\omega) - e^{2\delta Q_\omega} (H - Q_\omega) - 2Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} \\ &= (I - e^{2\delta Q_\omega}) (H - Q_\omega) - 2Q_\omega e^{2\delta Q_\omega},\end{aligned}$$

puisque l'opérateur $(H - Q_\omega)$ est fermé, $(I - e^{2\delta Q_\omega})$ est inversible et l'opérateur $Q_\omega e^{2\delta Q_\omega}$ est borné, alors l'opérateur Λ_ω est fermé, de plus

$$\Lambda_\omega = (I - e^{2\delta Q_\omega}) \left(I - 2(I - e^{2\delta Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (H - Q_\omega)^{-1} \right) (H - Q_\omega).$$

Il reste à montrer que l'opérateur

$$I - 2(I - e^{2\delta Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (H - Q_\omega)^{-1}$$

est inversible, en effet

$$\left\| 2(I - e^{2\delta Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (H - Q_\omega)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 2 \frac{\|Q_\omega e^{2\delta Q_\omega}\|}{1 - \|e^{2\delta Q_\omega}\|} \|(H - Q_\omega)^{-1}\|.$$

De (4.2.3) et (4.2.2), il vient

$$\left\| 2(I - e^{2\delta Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (H - Q_\omega)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 2 \frac{C e^{-2k\delta\sqrt{\omega}}}{(1 - C e^{-2k\delta\sqrt{\omega}}) \omega^{1/4}},$$

pour tout $\omega \geq \omega_0$, alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ on a

$$\left\| 2(I - e^{2\delta Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (H - Q_\omega)^{-1} \right\| \leq 1.$$

Lemme 4.2.11 *Sous l'hypothèse (H.1) et pour $b \in [0, 1]$ il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ l'opérateur*

$$T_\omega = I + e^{2(1+\delta)Q_\omega} - b(I + e^{2(1-\delta)Q_\omega}) e^{2\delta Q_\omega},$$

est inversible.

Preuve. On écrit

$$T_\omega = (I - b e^{2\delta Q_\omega}) \left(I - (I - e^{2\delta Q_\omega})^{-1} (bI - e^{2\delta Q_\omega}) e^{2Q_\omega} \right),$$

l'opérateur $(I - b e^{2\delta Q_\omega})$ est inversible car $b \in [0, 1]$. Pour l'opérateur

$$\left(I - (I - e^{2\delta Q_\omega})^{-1} (bI - e^{2\delta Q_\omega}) e^{2Q_\omega} \right),$$

en effet

$$\begin{aligned}\left\| (I - e^{2\delta Q_\omega})^{-1} (bI - e^{2\delta Q_\omega}) e^{2Q_\omega} \right\| &\leq \frac{1 + \|e^{2\delta Q_\omega}\|}{b - \|e^{2\delta Q_\omega}\|} \|e^{2Q_\omega}\| \\ &\leq \frac{1 + C e^{-2\delta\sqrt{\omega}}}{b - C e^{-2\delta\sqrt{\omega}}} C e^{-2\sqrt{\omega}},\end{aligned}$$

donc il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$

$$\left\| (I - e^{2\delta Q_\omega})^{-1} (bI - e^{2\delta Q_\omega}) e^{2Q_\omega} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1.$$

Lemme 4.2.12 *Sous les hypothèses (H.0) \sim (H.6). Il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ l'opérateur*

$$\begin{cases} \Delta_\omega = (I - e^{2Q_\omega}) \Lambda_\omega + \mu (I + e^{2Q_\omega}) ((H - Q_\omega) + e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \\ D(\Delta_\omega) = D(Q_\omega) \cap D(H), \end{cases}$$

admet un inverse borné donné par

$$\Delta_\omega^{-1} = \frac{1}{1 + \mu} (H - Q_\omega)^{-1} (I + 2T_\omega^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (bI + e^{2Q_\omega}) (H - Q_\omega)^{-1})^{-1} T_\omega^{-1}.$$

Preuve. Posons

$$\Delta_\omega = (1 + \mu) \Pi_\omega,$$

avec

$$\Pi_\omega = ((H - Q_\omega) + e^{2(1+\delta)Q_\omega} (Q_\omega + H)) - b e^{2\delta Q_\omega} ((H + Q_\omega) + e^{2(1-\delta)Q_\omega} (H - Q_\omega))$$

et

$$b = \frac{1 - \mu}{1 + \mu}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} \Pi_\omega &= ((H - Q_\omega) + e^{2(1+\delta)Q_\omega} (H - Q_\omega)) + 2Q_\omega e^{2(1+\delta)Q_\omega} \\ &\quad + 2bQ_\omega e^{2\delta Q_\omega} + b e^{2\delta Q_\omega} ((H - Q_\omega) + e^{2(1-\delta)Q_\omega} (H - Q_\omega)) \\ &= T_\omega (I + 2T_\omega^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (bI + e^{2Q_\omega}) (H - Q_\omega)^{-1}) (H - Q_\omega). \end{aligned}$$

Les opérateurs T_ω et $(H - Q_\omega)$ sont inversibles, donc il reste à montrer que l'opérateur

$$I + 2T_\omega^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (bI + e^{2Q_\omega}) (H - Q_\omega)^{-1}$$

est inversible, en effet

$$\begin{aligned} &\|2T_\omega^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (bI + e^{2Q_\omega}) (H - Q_\omega)^{-1}\| \\ &\leq 2K \frac{e^{-2k\sqrt{\omega}} (|b| + C e^{-2k\sqrt{\omega}})}{\sqrt{\omega}} \\ &\leq 2K \frac{e^{-2k\sqrt{\omega}} (1/2 + C e^{-2k\sqrt{\omega}})}{\sqrt{\omega}}, \end{aligned}$$

alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$

$$\|2T_\omega^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (1 + e^{2Q_\omega}) (H - Q_\omega)^{-1}\| \leq 1.$$

Lemme 4.2.13 *Sous les hypothèses (H.0) \sim (H.6), les opérateurs $(Q_\omega - H)^{-1}$ et T_ω^{-1} commutent.*

Preuve. Grâce au lemme 4.2.9, il vient

$$\begin{aligned}
& (Q_\omega - H) T_\omega \\
&= (Q_\omega - H) (I + e^{2(1+\delta)Q_\omega}) - b (Q_\omega - H) (I + e^{2(1-\delta)Q_\omega}) e^{2\delta Q_\omega} \\
&= (I + e^{2(1+\delta)Q_\omega}) (Q_\omega - H) - b (I + e^{2(1-\delta)Q_\omega}) e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega - H) \\
&= T_\omega (Q_\omega - H),
\end{aligned}$$

en appliquant $(Q_\omega - H)^{-1}$ à droite et à gauche il vient

$$T_\omega (Q_\omega - H)^{-1} = (Q_\omega - H)^{-1} T_\omega,$$

de même pour T_ω^{-1} , par conséquent

$$(Q_\omega - H)^{-1} T_\omega^{-1} = T_\omega^{-1} (Q_\omega - H)^{-1}.$$

Lemme 4.2.14 *Sous les hypothèses (H.0) \sim (H.6), les opérateurs $(Q_\omega - H)$ et Δ_ω^{-1} commutent.*

Preuve. on a

$$\begin{aligned}
& (Q_\omega - H) \Delta_\omega \\
&= (1 + \mu) (Q_\omega - H) T_\omega (I + 2T_\omega^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (bI + e^{2Q_\omega}) (H - Q_\omega)^{-1}) (H - Q_\omega) \\
&= (1 + \mu) T_\omega (I + 2T_\omega^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (bI + e^{2Q_\omega}) (H - Q_\omega)^{-1}) (Q_\omega - H) (H - Q_\omega) \\
&= \Delta_\omega (Q_\omega - H),
\end{aligned}$$

en appliquant Δ_ω^{-1} à droite et à gauche, il vient

$$\Delta_\omega^{-1} (Q_\omega - H) = (Q_\omega - H) \Delta_\omega^{-1}.$$

Lemme 4.2.15 *Sous les hypothèses (H.0) \sim (H.6), les opérateurs Λ_ω^{-1} et Δ_ω^{-1} commutent.*

Preuve. Montrons tout d'abord que les opérateurs Λ_ω et T_ω commutent au sens de résolvantes, on a

$$\begin{aligned}
& \Lambda_\omega T_\omega \\
&= (I - e^{2\delta Q_\omega}) (H - Q_\omega) ((I + e^{2(1+\delta)Q_\omega}) - b (I + e^{2(1-\delta)Q_\omega}) e^{2\delta Q_\omega}) \\
&\quad - 2Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} ((I + e^{2(1+\delta)Q_\omega}) - b (I + e^{2(1-\delta)Q_\omega}) e^{2\delta Q_\omega}) \\
&= ((I + e^{2(1+\delta)Q_\omega}) - b (I + e^{2(1-\delta)Q_\omega}) e^{2\delta Q_\omega}) (I - e^{2\delta Q_\omega}) (H - Q_\omega) \\
&\quad - ((I + e^{2(1+\delta)Q_\omega}) - b (I + e^{2(1-\delta)Q_\omega}) e^{2\delta Q_\omega}) 2Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} \\
&= T_\omega \Lambda_\omega,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\Lambda_\omega^{-1} T_\omega^{-1} = T_\omega^{-1} \Lambda_\omega^{-1}.$$

D'autre part, en effet

$$\begin{aligned}
& \Lambda_\omega \Delta_\omega \\
&= (1 + \mu) \Lambda_\omega T_\omega (I + 2T_\omega^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (bI + e^{2Q_\omega}) (H - Q_\omega)^{-1}) (H - Q_\omega) \\
&= (1 + \mu) T_\omega (I + 2T_\omega^{-1} Q_\omega e^{2\delta Q_\omega} (bI + e^{2Q_\omega}) (H - Q_\omega)^{-1}) (Q_\omega - H) (H - Q_\omega) \\
&= \Delta_\omega \Lambda_\omega.
\end{aligned}$$

4.3 Résolution du problème P_ω^δ

On utilise la méthode de la réduction de l'ordre de Krein, qui se base sur la transformé suivante

$$\begin{cases} v^\delta(x) = -Q_\omega^{-1} (u^\delta)'(x) \\ y^\delta(x) = \frac{1}{2} (u^\delta(x) - v^\delta(x)) \\ z^\delta(x) = \frac{1}{2} (u_+^\delta(x) + v^\delta(x)), \end{cases}$$

avec $Q_\omega := -\sqrt{-A_\omega}$, afin de trouver une représentation explicite de la solution.

4.3.1 Résolution du problème $P_+^{\delta,\omega}$

Posons, ici, pour presque tout $x \in (0, \delta)$

$$\begin{cases} v_+^\delta(x) = -Q_\omega^{-1} (u_+^\delta)'(x) \\ y_+^\delta(x) = \frac{1}{2} (u_+^\delta(x) - v_+^\delta(x)) \\ z_+^\delta(x) = \frac{1}{2} (u_+^\delta(x) + v_+^\delta(x)), \end{cases}$$

la dérive de $y_+^\delta(x)$ est

$$\begin{aligned} (y_+^\delta)'(x) &= \frac{1}{2} \left((u_+^\delta)'(x) - (v_+^\delta)'(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-Q_\omega (v_+^\delta)'(x) + Q_\omega^{-1} (u_+^\delta)''(x) \right), \end{aligned}$$

de l'équation

$$(u_+^\delta)''(x) = g_+^\delta(x) + Q_\omega^2 u_+^\delta(x),$$

il vient

$$(y_+^\delta)'(x) = \frac{1}{2} Q_\omega y_+^\delta(x) + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} g_+^\delta(x),$$

de plus y_+^δ vérifie

$$y_+^\delta(0) = \frac{1}{2} \left(u_+^\delta(0) + Q_\omega^{-1} (u_+^\delta)'(0) \right) = \xi_0.$$

Similairement, on obtient

$$(z_+^\delta)'(x) = -\frac{1}{2} Q_\omega z_+^\delta(x) - \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} g_+^\delta(x),$$

et

$$z_+^\delta(\delta) = \frac{1}{2} \left(u_+^\delta(\delta) - Q_\omega^{-1} (u_+^\delta)'(\delta) \right) = \xi_\delta.$$

On a trouvé, ainsi deux problèmes de Cauchy

$$(PC1) \begin{cases} (y_+^\delta)'(x) = \frac{1}{2} Q_\omega y_+^\delta(x) + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} g_+^\delta(x) \\ y_+^\delta(0) = \xi_0, \end{cases}$$

et

$$(PC2) \begin{cases} (z_+^\delta)'(x) = -\frac{1}{2}Q_\omega z_+^\delta(x) - \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}g_+^\delta(x) \\ z_+^\delta(\delta) = \xi_\delta, \end{cases}$$

il est connu que les solutions des (PC1) et (PC2) sont données par

$$y_+^\delta(x) = e^{xQ_\omega}\xi_0 + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega}g_+^\delta(s)ds,$$

et

$$z_+^\delta(x) = e^{(\delta-x)Q_\omega}\xi_\delta + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_x^\delta e^{(s-x)Q_\omega}g_+^\delta(s)ds,$$

et comme

$$u_+^\delta(x) = y_+^\delta(x) + z_+^\delta(x),$$

alors

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= e^{xQ_\omega}\xi_0 + e^{(\delta-x)Q_\omega}\xi_\delta + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q_\omega}g_+^\delta(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_x^\delta e^{(s-x)Q_\omega}g_+^\delta(s)ds. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites

$$u_+^\delta(0) = \psi, \quad (u_+^\delta)'(\delta) + Hu_+^\delta(\delta) = f_+^\delta,$$

pour déterminer les constantes ξ_0, ξ_δ . En dérivant u_+^δ et en posant $x = \delta$, il vient

$$(u_+^\delta)'(\delta) = Q_\omega e^{\delta Q_\omega}\xi_0 - Q_\omega\xi_\delta + \frac{1}{2}\int_0^\delta e^{(\delta-s)Q_\omega}g_+^\delta(s)ds,$$

de plus

$$u_+^\delta(0) = \xi_0 + e^{\delta Q_\omega}\xi_\delta + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{sQ_\omega}g_+^\delta(s)ds,$$

et

$$u_+^\delta(\delta) = e^{\delta Q_\omega}\xi_0 + \xi_\delta + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)Q_\omega}g_+^\delta(s)ds,$$

alors, pour $\xi_0 \in D(Q_\omega)$ et $\xi_\delta \in D(H) \cap (Q_\omega)$ on trouve

$$f_+^\delta = (Q_\omega + H)e^{\delta Q_\omega}\xi_0 + (H - Q_\omega)\xi_\delta + \frac{1}{2}(Q_\omega + H)Q_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)Q_\omega}g_+^\delta(s)ds.$$

D'après le lemme 4.2.10 on a

$$\Lambda_\omega^{-1}(E) \subset D(H),$$

alors

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega^{-1} f_+^\delta &= (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} \xi_0 + (H - Q_\omega) \Lambda_\omega^{-1} \xi_\delta \\ &\quad + \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{(\delta-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds. \end{aligned}$$

La deuxième condition aux limites, nous donne

$$\xi_0 = \psi - e^{\delta Q_\omega} \xi_\delta - \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{sQ_\omega} g_+^\delta(s) ds,$$

et donc

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega^{-1} f_+^\delta &= (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} \psi + [(H - Q_\omega) - (Q_\omega + H) e^{2\delta Q_\omega}] \Lambda_\omega^{-1} \xi_\delta \\ &\quad + \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} \int_0^\delta (e^{(\delta-s)Q_\omega} - e^{(\delta+s)Q_\omega}) g_+^\delta(s) ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \xi_\delta &= \Lambda_\omega^{-1} f_+^\delta - (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} \psi \\ &\quad - \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} \int_0^\delta (e^{(\delta-s)Q_\omega} - e^{(\delta+s)Q_\omega}) g_+^\delta(s) ds, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (H - Q_\omega) \Lambda_\omega^{-1} \psi - \Lambda_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} f_+^\delta \\ &\quad + \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} (H - Q_\omega) \Lambda_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{sQ_\omega} g_+^\delta(s) ds. \end{aligned}$$

4.3.2 Résolution du problème $P_-^{\delta, \omega}$

Par un calcul similaire, en utilisant aussi la transformée de Krein

$$\begin{cases} v_-^\delta(x) = -Q_\omega^{-1} (u_-^\delta)'(x) \\ y_-^\delta(x) = \frac{1}{2} (u_-^\delta(x) - v_-^\delta(x)) \\ z_-^\delta(x) = \frac{1}{2} (u_-^\delta(x) + v_-^\delta(x)), \end{cases}$$

on trouve deux problèmes de Cauchy

$$(PC3) \begin{cases} (y_-^\delta)'(x) = Q_\omega y_-^\delta(x) + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} g_-(x) \\ y_-^\delta(-1) = \xi_{-1}, \end{cases}$$

et

$$(PC4) \begin{cases} (z_-^\delta)'(x) = -Q_\omega z_-^\delta(x) - \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} g_-(x) \\ z_-^\delta(0) = \xi_{-0}. \end{cases}$$

Les solutions sont données par

$$y_-^\delta(x) = e^{(1+x)Q_\omega} \zeta_{-1} + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^x e^{(x-s)Q_\omega} g_-(s) ds,$$

et

$$z_-^\delta(x) = e^{-xQ_\omega} \zeta_{-0} + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g_-(s) ds,$$

donc

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= e^{(1+x)Q_\omega} \zeta_{-1} + e^{-xQ_\omega} \zeta_{-0} + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^x e^{(x-s)Q_\omega} g_-(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g_-(s) ds. \end{aligned}$$

On utilise les conditions aux limites

$$(u_-^\delta)'(-1) = f_- \quad \text{et} \quad (u_-^\delta)'(0) = \phi,$$

pour déterminer ξ_{-1} , ξ_{-0} . On a

$$u_-^\delta(-1) = \xi_{-1} + e^{Q_\omega} \xi_{-0} + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^0 e^{(s+1)Q_\omega} g_-(s) ds,$$

et

$$\begin{aligned} (u_-^\delta)'(x) &= Q_\omega e^{(1+x)Q_\omega} \xi_{-1} - Q_\omega e^{-xQ_\omega} \xi_{-0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-1}^x e^{(x-s)Q_\omega} g_-(s) ds - \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g_-(s) ds, \end{aligned}$$

donc

$$(u_-^\delta)'(-1) = Q_\omega \xi_{-1} - Q_\omega e^{Q_\omega} \xi_{-0} - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{(s+1)Q_\omega} g_-(s) ds,$$

et

$$(u_-^\delta)'(0) = Q_\omega e^{Q_\omega} \xi_{-1} - Q_\omega \xi_{-0} + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{-sQ_\omega} g_-(s) ds.$$

Par conséquent

$$\begin{cases} f_- = Q_\omega \xi_{-1} - Q_\omega e^{Q_\omega} \xi_{-0} - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{(s+1)Q_\omega} g_-(s) ds \\ \phi = Q_\omega e^{Q_\omega} \xi_{-1} - Q_\omega \xi_{-0} + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{-sQ_\omega} g_-(s) ds, \end{cases}$$

le déterminant de ce système est donné par

$$Q_\omega^2 (I - e^{2Q_\omega}).$$

C'est un opérateur inversible, donc la solution (ξ_{-1}, ξ_{-0}) est unique et donnée par

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &= (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} f_- - (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} \phi \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^0 (e^{(1-s)Q_\omega} + e^{(s+1)Q_\omega}) g_-(s) ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \xi_{-0} &= (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} f_- - (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} \phi \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} \int_{-1}^0 e^{(1+s)Q_\omega} g_-(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^0 e^{-sQ_\omega} g_-(s) ds. \end{aligned}$$

4.3.3 Solution complète

En utilisant les conditions de transmission on trouve le système suivant

$$\begin{cases} \psi + (I - e^{2Q_\omega})^{-1} (e^{2Q_\omega} + I) Q_\omega^{-1} \phi = b_1 \\ -\mu Q_\omega ((H - Q_\omega) + e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Lambda_\omega^{-1} \psi + \phi = b_2 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} b_1 &= 2 (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} f_- + (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^0 e^{-sQ_\omega} g_-(s) ds \\ &\quad + (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} e^{2Q_\omega} \int_{-1}^0 e^{sQ_\omega} g_-(s) ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_2 &= -2\mu Q_\omega \Lambda_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} f_+^\delta + \mu (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \\
&\quad - \mu (H - Q_\omega) \Lambda_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{sQ_\omega} g_+^\delta(s) ds.
\end{aligned}$$

Le déterminant de ce dernier système donné par

$$\begin{aligned}
&I + \mu ((H - Q_\omega) + e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Lambda_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} (e^{2Q_\omega} + I) \\
&: = \Lambda_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} \Delta_\omega,
\end{aligned}$$

est inversible grâce aux Lemmes 4.2.6, 4.2.10 et 4.2.12. Alors

$$\begin{aligned}
\psi &= 2\Lambda_\omega \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} f_- + 2\mu \Delta_\omega^{-1} (I + e^{2Q_\omega}) e^{\delta Q_\omega} f_+^\delta \\
&\quad + \Lambda_\omega \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^0 (e^{-sQ_\omega} + e^{(2+s)Q_\omega}) g_-(s) ds \\
&\quad - \mu (I + e^{2Q_\omega}) Q_\omega^{-1} (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \\
&\quad + \mu (I + e^{2Q_\omega}) Q_\omega^{-1} (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{sQ_\omega} g_+^\delta(s) ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi &= 2\mu \Lambda_\omega \Delta_\omega^{-1} e^{Q_\omega} f_- - 2\mu \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega}) Q_\omega e^{\delta Q_\omega} f_+^\delta \\
&\quad + \mu \Lambda_\omega \Delta_\omega^{-1} \int_{-1}^0 (e^{-sQ_\omega} + e^{(2+s)Q_\omega}) g_-(s) ds \\
&\quad - \mu (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega}) \int_0^\delta e^{sQ_\omega} g_+^\delta(s) ds \\
&\quad + \mu (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega}) \int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds.
\end{aligned}$$

En remplaçant ψ et ϕ par leur valeurs dans $\xi_\delta, \xi_0, \xi_{-1}, \xi_{-0}$ et après des simplifications, on trouve que

$$u_-^\delta(x) = e^{(1+x)Q_\omega} \xi_{-1} + e^{-xQ_\omega} \xi_{-0} + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^x e^{(x-s)Q_\omega} g_-(s) ds + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g_-(s) ds,$$

pour presque tout $x \in (-1, 0)$ et

$$u_+^\delta(x) = e^{xQ_\omega} \xi_0 + e^{(\delta-x)Q_\omega} \xi_\delta + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds + \frac{1}{2} Q_\omega^{-1} \int_x^\delta e^{(s-x)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds,$$

pour presque tout $x \in (0, \delta)$, telles que

$$\begin{aligned} \xi_\delta &= \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} + \mu (I + e^{2Q_\omega})) f_+^\delta - 2(Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} f_- \\ &\quad - \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} + \mu (I + e^{2Q_\omega})) Q_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{(\delta-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} - \mu (I + e^{2Q_\omega})) e^{\delta Q_\omega} Q_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{sQ_\omega} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^0 (e^{(2+s)Q_\omega} + e^{-sQ_\omega}) g_-(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \Delta_\omega^{-1} (e^{2Q_\omega} - I + \mu (I + e^{2Q_\omega})) e^{\delta Q_\omega} f_+^\delta + 2\Delta_\omega^{-1} (H - Q_\omega) Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} f_- \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} - \mu (I + e^{2Q_\omega})) (Q_\omega + H) Q_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} (e^{2Q_\omega} - I + \mu (I + e^{2Q_\omega})) (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{sQ_\omega} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^0 (e^{(2+s)Q_\omega} + e^{-sQ_\omega}) g_-(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xi_{-1} \\ = & 2\mu \Delta_\omega^{-1} e^{(1+\delta)Q_\omega} f_+^\delta + (1 + \mu) ((H - Q_\omega) - b e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} f_- \\ & + \mu (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} \int_0^\delta e^{sQ_\omega} g_+^\delta(s) ds - \mu (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} \int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds \\ & + \frac{1 + \mu}{2} ((H - Q_\omega) - b e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} \int_{-1}^0 (e^{(s+1)Q_\omega} + e^{(1-s)Q_\omega}) g_-(s) ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\xi_{-0} &= 2\mu\Delta_\omega^{-1}e^{\delta Q_\omega}f_+^\delta + (1-\mu)\left((H-Q_\omega) + e^{2\delta Q_\omega}(Q_\omega + H)\right)\Delta_\omega^{-1}Q_\omega^{-1}e^{Q_\omega}f_- \\
&\quad + \mu(H-Q_\omega)\Delta_\omega^{-1}Q_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{sQ_\omega}g_+^\delta(s)ds - \mu(Q_\omega + H)\Delta_\omega^{-1}Q_\omega^{-1}\int_0^\delta e^{(2\delta-s)Q_\omega}g_+^\delta(s)ds \\
&\quad + \frac{1-\mu}{2}\left((H-Q_\omega) + e^{2\delta Q_\omega}(Q_\omega + H)\right)\Delta_\omega^{-1}Q_\omega^{-1}\int_{-1}^0 (e^{(2+s)Q_\omega} + e^{-sQ_\omega})g_-(s)ds.
\end{aligned}$$

4.4 Solutions strictes

On donne dans cette section, les conditions nécessaires et suffisantes sur les données assurant l'existence de la solution stricte du problème (P_ω^δ) c'est à dire

$$u^\delta = \begin{cases} u_+^\delta \in W^{2,p}(0, \delta; E) \cap L^p(0, \delta; D(A)) \\ u_-^\delta \in W^{2,p}(-1, 0; E) \cap L^p(-1, 0; D(A)) \end{cases}$$

avec $u_+^\delta(\delta) \in D(H)$ et u^δ vérifie (P_ω^δ) .

Proposition 4.4.1 *Sous les hypothèses $(H.0) \sim (H.6)$ et pour $g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E)$ avec $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\psi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p}}$ et $f_+^\delta \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}$.

2. Le problème $(P_+^{\delta, \omega})$ admet une solution stricte u_+^δ .

Preuve. Soient

$$\psi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p}}, \quad f_+^\delta \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}.$$

On écrit la solution u_+^δ (en fonction de $L_{\omega,+}^\delta$ et $\mathcal{L}_{\omega,+}^\delta$ qui sont définie dans le Lemme 4.2.1) sous la forme

$$u_+^\delta(x) = e^{xQ_\omega}\xi_0 + e^{(\delta-x)Q_\omega}\xi_\delta + \frac{1}{2}Q_\omega^{-2}L_{\omega,+}^\delta(x, g_+^\delta(\cdot)) + \frac{1}{2}Q_\omega^{-2}L_{\omega,+}^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\delta - \cdot)),$$

avec

$$\begin{aligned}
e^{(\delta-x)Q_\omega}\xi_\delta &= \Lambda_\omega^{-1}e^{(\delta-x)Q_\omega}f_+^\delta - (Q_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}e^{(2\delta-x)Q_\omega}\psi \\
&\quad - \frac{1}{2}(Q_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}Q_\omega^{-2}\mathcal{L}_{\omega,+}^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\delta - \cdot)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(Q_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}Q_\omega^{-2}e^{\delta Q_\omega}\mathcal{L}_{\omega,+}^\delta(\delta - x, g_+^\delta(\cdot)),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
e^{xQ_\omega}\xi_0 &= (H - Q_\omega)\Lambda_\omega^{-1}e^{xQ_\omega}\psi - \Lambda_\omega^{-1}e^{(\delta+x)Q_\omega}f_+^\delta \\
&\quad + \frac{1}{2}(Q_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}Q_\omega^{-2}e^{\delta Q_\omega}\mathcal{L}_{\omega,+}^\delta(x, g_+^\delta(\delta - \cdot)) \\
&\quad - \frac{1}{2}(H - Q_\omega)\Lambda_\omega^{-1}Q_\omega^{-2}\mathcal{L}_{\omega,+}^\delta(x, g_+^\delta(\cdot)).
\end{aligned}$$

En appliquant $A_\omega := -Q_\omega^2$ à u_+^δ il vient

$$A_\omega u_+^\delta(x) = -Q_\omega^2 e^{xQ_\omega} \xi_0 - Q_\omega^2 e^{(\delta-x)Q_\omega} \xi_\delta - \frac{1}{2} L_{\omega,+}^\delta(x, g_+^\delta(\cdot)) - \frac{1}{2} L_{\omega,+}^\delta(\delta-x, g_+^\delta(\delta-\cdot)),$$

avec

$$\begin{aligned} -Q_\omega^2 e^{(\delta-x)Q_\omega} \xi_\delta &= -Q_\omega^2 \Lambda_\omega^{-1} e^{(\delta-x)Q_\omega} f_+^\delta + Q_\omega^2 (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{(2\delta-x)Q_\omega} \psi \\ &\quad + \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta(\delta-x, g_+^\delta(\delta-\cdot)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta(\delta-x, g_+^\delta(\cdot)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -Q_\omega^2 e^{xQ_\omega} \xi_0 &= -Q_\omega^2 (H - Q_\omega) \Lambda_\omega^{-1} e^{xQ_\omega} \psi + Q_\omega^2 \Lambda_\omega^{-1} e^{(\delta+x)Q_\omega} f_+^\delta \\ &\quad - \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta(x, g_+^\delta(\delta-\cdot)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (H - Q_\omega) \Lambda_\omega^{-1} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta(x, g_+^\delta(\cdot)). \end{aligned}$$

Comme

$$Q_\omega \Lambda_\omega^{-1}, \quad Q_\omega e^{\delta Q_\omega}, \quad (Q_\omega \pm H) \Lambda_\omega^{-1} \in \mathcal{L}(E),$$

et

$$\psi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p}}, \quad f_+^\delta \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}},$$

alors grâce au lemme (4.2.4), les applications suivantes

$$\begin{aligned} x \mapsto Q_\omega^2 \Lambda_\omega^{-1} e^{(\delta+x)Q_\omega} f_+^\delta, \quad x \mapsto Q_\omega^2 \Lambda_\omega^{-1} e^{(\delta-x)Q_\omega} f_+^\delta, \\ x \mapsto Q_\omega^2 (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{(2\delta-x)Q_\omega} \psi, \end{aligned}$$

et

$$x \mapsto Q_\omega^2 (H - Q_\omega) \Lambda_\omega^{-1} e^{xQ_\omega} \psi,$$

sont $L^p(0, \delta; E)$. On en déduit que

$$u_+^\delta, \quad A_\omega u_+^\delta \in L^p(0, \delta; E).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} u_+^\delta(\delta) &= -2\Lambda_\omega^{-1} Q_\omega e^{\delta Q_\omega} \psi - \Lambda_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} f_+^\delta + \Lambda_\omega^{-1} f_+^\delta \\ &\quad - \Lambda_\omega^{-1} \int_0^\delta e^{(\delta-s)Q_\omega} g_+^\delta(s) ds + \Lambda_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} \int_0^\delta e^{sQ_\omega} g_+^\delta(s) ds, \end{aligned}$$

ainsi

$$u_+^\delta(\delta) \in D(\Lambda_\omega) = D(Q_\omega) \cap D(H),$$

et par conséquent

$$u_+^\delta(\delta) \in D(H).$$

Supposons maintenant que le problème (P_+^δ) admet une unique solution stricte, alors

$$\psi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad (u_+^\delta)'(\delta) \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}},$$

de plus, toutes les intégrales et les applications suivantes

$$x \mapsto Q_\omega^2 \Lambda_\omega^{-1} e^{(\delta+x)Q_\omega} f_+^\delta, \quad x \mapsto Q_\omega^2 (Q_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{(2\delta-x)Q_\omega} \psi,$$

sont $L^p(0, \delta; E)$, par conséquent

$$Q_\omega e^{(\delta-\cdot)Q_\omega} f_+^\delta \in L^p(0, \delta; E),$$

ensuite, grâce au lemme (4.2.4)

$$f_+^\delta \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}.$$

Proposition 4.4.2 *Supposons les hypothèses $(H.0) \sim (H.2)$. Soit $g_- \in L^p(-1, 0; E)$ avec $1 < p < \infty$, alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\phi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}$ et $f_- \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}$.
2. Le problème (P_-^δ) admet une solution stricte u_-^δ .

Preuve. Soient

$$\phi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}, \quad f_- \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}.$$

La solution u_-^δ s'écrit en fonction de $L_{\omega,-}$ et $\mathcal{L}_{\omega,-}$ par

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= e^{(1+x)Q_\omega} \xi_{-1} + e^{-xQ_\omega} \xi_{-0} + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_{\omega,-}(x, g_-(\cdot)) \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_{\omega,-}(-1-x, g_-(-1-\cdot)), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} e^{(1+x)Q_\omega} \xi_{-1} &= (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} e^{(1+x)Q_\omega} f_- - (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} e^{(2+x)Q_\omega} \phi \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} e^{Q_\omega} Q_\omega^{-2} \mathcal{L}_{\omega,-}(-1-x, g_-(\cdot)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-2} \mathcal{L}_{\omega,-}(-1-x, g_-(-1-\cdot)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{-xQ_\omega} \xi_{-0} &= (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} e^{-xQ_\omega} f_- - (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-1} e^{-xQ_\omega} \phi \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-2} e^{Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,-}(x, g_-(-1-\cdot)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega^{-2} \mathcal{L}_{\omega,-}(x, g_-(\cdot)). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$A_\omega u_-^\delta(x) = A_\omega e^{(1+x)Q_\omega} \xi_{-1} + A_\omega e^{-xQ_\omega} \xi_{-0} \\ - \frac{1}{2} L_{\omega,-}(x, g_-(\cdot)) - \frac{1}{2} L_{\omega,-}(-1-x, g_-(-1-\cdot)),$$

avec

$$A_\omega e^{(1+x)Q_\omega} \xi_{-1} = -(I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{(1+x)Q_\omega} f_- + (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{(2+x)Q_\omega} \phi \\ - \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} e^{Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,-}(-1-x, g_-(\cdot)) \\ - \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} \mathcal{L}_{\omega,-}(-1-x, g_-(-1-\cdot)),$$

et

$$A_\omega e^{-xQ_\omega} \xi_{-0} = -(I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{Q_\omega} e^{-xQ_\omega} f_- + (I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{-xQ_\omega} \phi \\ - \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} e^{Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,-}(x, g_-(-1-\cdot)) \\ - \frac{1}{2} (I - e^{2Q_\omega})^{-1} \mathcal{L}_{\omega,-}(x, g_-(\cdot)).$$

En appliquant les lemmes 4.2.5 et 4.2.2 on trouve le résultat.

Le résultat essentiel de cette partie est

Théorème 4.4.1 *Supposons les hypothèses (H.0) \sim (H.6). Soient*

$$g_- \in L^p(-1, 0; E) \quad \text{et} \quad g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E)$$

avec $1 < p < \infty$, alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ les assertions suivantes sont équivalentes

1. $f_+^\delta, f_- \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}$.
2. Le problème (P^δ) admet une solution stricte u^δ .

Preuve : Soit

$$f_+^\delta, f_- \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}.$$

On a

$$u_+^\delta(x) = e^{xQ_\omega} \xi_0 + e^{(\delta-x)Q_\omega} \xi_\delta + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_{\omega,+}^\delta(x, g_+^\delta(\cdot)) + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_{\omega,+}^\delta(\delta-x, g_+^\delta(\delta-\cdot)),$$

pour presque $x \in (0, \delta)$ et

$$u_-^\delta(x) = e^{(1+x)Q_\omega} \xi_{-1} + e^{-xQ_\omega} \xi_{-0} + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_{\omega,-}(x, g_-(\cdot)) + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_{\omega,-}(-1-x, g_-(-1-\cdot))$$

pour presque $x \in (-1, 0)$ tels que

$$\begin{aligned}
& e^{xQ_\omega} \xi_0 \\
= & \Delta_\omega^{-1} (e^{2Q_\omega} - I + \mu (I + e^{2Q_\omega})) e^{\delta Q_\omega} e^{xQ_\omega} f_+^\delta + 2\Delta_\omega^{-1} (H - Q_\omega) Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} e^{xQ_\omega} f_- \\
& + \frac{1}{2} \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} - \mu (I + e^{2Q_\omega})) (Q_\omega + H) Q_\omega^{-2} e^{\delta Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta (x, g_+^\delta (\delta - .)) \\
& + \frac{1}{2} \Delta_\omega^{-1} (e^{2Q_\omega} - I + \mu (I + e^{2Q_\omega})) (H - Q_\omega) Q_\omega^{-2} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta (x, g_+^\delta (.)) \\
& + (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-2} e^{Q_\omega} J_{2,\omega} (x, g_- (-1 - .)) + (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-2} J_{2,\omega} (x, g_-), \\
& e^{(\delta-x)Q_\omega} \xi_\delta \\
= & \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} + \mu (I + e^{2Q_\omega})) e^{(\delta-x)Q_\omega} f_+^\delta - 2(Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{(1+\delta)Q_\omega} Q_\omega^{-1} e^{(\delta-x)Q_\omega} f_- \\
& - \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} + \mu (I + e^{2Q_\omega})) Q_\omega^{-2} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta (\delta - x, g_+^\delta (\delta - .)) \\
& + \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} - \mu (I + e^{2Q_\omega})) Q_\omega^{-2} e^{\delta Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta (\delta - x, g_+^\delta (.)) \\
& - (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{(1+\delta)Q_\omega} Q_\omega^{-2} J_{2,\omega} (\delta - x, g_- (-1 - .)) \\
& - (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} Q_\omega^{-2} J_{2,\omega} (\delta - x, g_-), \\
& e^{(1+x)Q_\omega} \xi_{-1} \\
= & (1 + \mu) ((H - Q_\omega) - b e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} e^{(1+x)Q_\omega} f_- \\
& + 2\mu \Delta_\omega^{-1} e^{(1+\delta)Q_\omega} e^{(1+x)Q_\omega} f_+^\delta + \mu (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} e^{Q_\omega} Q_\omega^{-2} J_{\omega,1}^\delta (-1 - x, g_+^\delta (.)) \\
& + \frac{1 + \mu}{2} ((H - Q_\omega) - b e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-2} \mathcal{L}_{\omega,-} (-1 - x, g_- (-1 - .)) \\
& + \frac{1 + \mu}{2} ((H - Q_\omega) - b e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-2} e^{Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,-} (-1 - x, g_- (.)) \\
& - \mu (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{(1+\delta)Q_\omega} Q_\omega^{-2} J_{\omega,1}^\delta (-1 - x, g_+^\delta (\delta - .)),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& e^{-xQ_\omega} \xi_{-0} \\
= & 2\mu \Delta_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} e^{-xQ_\omega} f_+^\delta + (1 - \mu) ((H - Q_\omega) + (Q_\omega + H) e^{2\delta Q_\omega}) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} e^{-xQ_\omega} f_- \\
& + \mu (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-2} J_{\omega,1}^\delta (x, g_+^\delta (.)) - \mu (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-2} e^{\delta Q_\omega} J_{\omega,1}^\delta (x, g_+^\delta (\delta - .)) \\
& + \frac{1}{2} (1 - \mu) ((H - Q_\omega) + (Q_\omega + H) e^{2\delta Q_\omega}) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-2} e^{Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,-} (x, g_- (-1 - .)) \\
& + \frac{1}{2} (1 - \mu) ((H - Q_\omega) + (Q_\omega + H) e^{2\delta Q_\omega}) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-2} \mathcal{L}_{\omega,-} (x, g_- (.)).
\end{aligned}$$

En appliquant A_ω , on trouve

$$A_\omega u_+^\delta (x) = -Q_\omega^2 e^{xQ_\omega} \xi_0 - Q_\omega^2 e^{(\delta-x)Q_\omega} \xi_\delta - \frac{1}{2} L_{\omega,+}^\delta (x, g_+^\delta (.)) - \frac{1}{2} L_{\omega,+}^\delta (\delta - x, g_+^\delta (\delta - .)),$$

et

$$A_\omega u_-^\delta (x) = -Q_\omega^2 e^{(1+x)Q_\omega} \zeta_{-1} - Q_\omega^2 e^{-xQ_\omega} \zeta_{-0} - \frac{1}{2} L_{\omega,-} (x, g_- (.)) - \frac{1}{2} L_{\omega,-} (-1 - x, g_- (-1 - .)),$$

tels que

$$\begin{aligned}
& -Q_\omega^2 e^{xQ_\omega} \xi_0 \\
= & -\Delta_\omega^{-1} (e^{2Q_\omega} - I + \mu (I + e^{2Q_\omega})) e^{\delta Q_\omega} Q_\omega^2 e^{xQ_\omega} f_+^\delta - 2\Delta_\omega^{-1} (H - Q_\omega) Q_\omega^{-1} e^{Q_\omega} Q_\omega^2 e^{xQ_\omega} f_- \\
& -\frac{1}{2} \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} - \mu (I + e^{2Q_\omega})) (Q_\omega + H) e^{\delta Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta (x, g_+^\delta (\delta - .)) \\
& -\frac{1}{2} \Delta_\omega^{-1} (e^{2Q_\omega} - I + \mu (I + e^{2Q_\omega})) (H - Q_\omega) \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta (x, g_+^\delta (.)) \\
& - (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} e^{Q_\omega} J_{2,\omega} (x, g_- (-1 - .)) - (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} J_{2,\omega} (x, g_-), \\
& -Q_\omega^2 e^{(\delta-x)Q_\omega} \xi_\delta \\
= & -\Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} + \mu (I + e^{2Q_\omega})) Q_\omega^2 e^{(\delta-x)Q_\omega} f_+^\delta + 2(Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} e^{(1+\delta)Q_\omega} Q_\omega^2 e^{(\delta-x)Q_\omega} f_- \\
& + \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} + \mu (I + e^{2Q_\omega})) \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta (\delta - x, g_+^\delta (\delta - .)) \\
& - \frac{1}{2} (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} (I - e^{2Q_\omega} - \mu (I + e^{2Q_\omega})) e^{\delta Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,+}^\delta (\delta - x, g_+^\delta (.)) \\
& + (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{(1+\delta)Q_\omega} J_{2,\omega} (\delta - x, g_- (-1 - .)) + (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} J_{2,\omega} (\delta - x, g_-), \\
& -Q_\omega^2 e^{(1+x)Q_\omega} \xi_{-1} \\
= & -2\mu \Delta_\omega^{-1} e^{(1+\delta)Q_\omega} Q_\omega^2 e^{(1+x)Q_\omega} f_+^\delta - (1 + \mu) ((H - Q_\omega) - b e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} Q_\omega^2 e^{(1+x)Q_\omega} f_- \\
& - \mu (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} e^{Q_\omega} J_{\omega,1}^\delta (-1 - x, g_+^\delta (.)) + \mu (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{(1+\delta)Q_\omega} J_{\omega,1}^\delta (-1 - x, g_+^\delta (\delta - .)) \\
& - \frac{(1 + \mu)}{2} ((H - Q_\omega) - b e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Delta_\omega^{-1} \mathcal{L}_{\omega,-} (-1 - x, g_- (-1 - .)) \\
& - \frac{(1 + \mu)}{2} ((H - Q_\omega) - b e^{2\delta Q_\omega} (Q_\omega + H)) \Delta_\omega^{-1} e^{Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,-} (-1 - x, g_- (.)).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& -Q_\omega^2 e^{-xQ_\omega} \xi_{-0} \\
= & -2\mu \Delta_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} Q_\omega^2 e^{-xQ_\omega} f_+^\delta - (1 - \mu) ((H - Q_\omega) + (Q_\omega + H) e^{2\delta Q_\omega}) \Delta_\omega^{-1} Q_\omega^{-1} Q_\omega^2 e^{Q_\omega} e^{-xQ_\omega} f_- \\
& - \mu (H - Q_\omega) \Delta_\omega^{-1} J_{\omega,1}^\delta (x, g_+^\delta (.)) + \mu (Q_\omega + H) \Delta_\omega^{-1} e^{\delta Q_\omega} J_{\omega,1}^\delta (x, g_+^\delta (\delta - .)) \\
& - \frac{1}{2} (1 - \mu) ((H - Q_\omega) + (Q_\omega + H) e^{2\delta Q_\omega}) \Delta_\omega^{-1} e^{Q_\omega} \mathcal{L}_{\omega,-} (x, g_- (-1 - .)) \\
& - \frac{1}{2} (1 - \mu) ((H - Q_\omega) + (Q_\omega + H) e^{2\delta Q_\omega}) \Delta_\omega^{-1} \mathcal{L}_{\omega,-} (x, g_- (.)).
\end{aligned}$$

Finalement, grâce aux lemmes (4.2.2), (4.2.1), (4.2.12), (4.2.5) (4.2.4) on trouve que

$$\begin{cases} u_+^\delta \in W^{2,p} (0, \delta; E) \cap L^p (0, \delta; D(A)) \\ u_-^\delta \in W^{2,p} (-1, 0; E) \cap L^p (-1, 0; D(A)). \end{cases}$$

4.5 Cas Particuliers

On étudie ici, quelques cas particuliers, en remplaçant l'opérateur H par l'opérateur nul ou l'opérateur $(-A_\omega)^\alpha$ avec $0 \leq \alpha \leq 1/2$. On commence par les cas les plus simples $H = 0$, $H = \alpha I$, $\alpha > 0$ et $H = \sqrt{-A_\omega}$.

4.5.1 Le cas $H = 0$

On considère le problème abstrait suivant

$$(Pb_0^\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x), \text{ p.p. } x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[, \\ (u^\delta)'(-1) = f_-, \quad (u^\delta)'(\delta) = f_+, \\ u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+), \quad \mu_- (u^\delta)'(0_-) = \mu_+ (u^\delta)'(0_+). \end{cases}$$

Dans ce cas les hypothèses $(H.0) \sim (H.6)$ sont réduites aux

$$E \text{ est un espace UMD} \tag{H.0}$$

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé tel que } \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \\ \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0 \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1 + \lambda}. \end{cases} \tag{H'.1}$$

et

$$\exists C > 1, \exists \theta_A \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \|(-A)^{is}\| \leq C e^{\theta_A |s|}. \tag{H'.2}$$

Posons $B := -(-A)^{1/2}$. La solution du problème (Pb_0^δ) s'écrit

$$u_-^\delta(x) = e^{(1+x)B} \zeta_0 + e^{-xB} \zeta_1 + \frac{1}{2} B^{-1} \int_{-1}^x e^{(x-s)B} g_-(s) ds + \frac{1}{2} B^{-1} \int_x^0 e^{(s-x)B} g_-(s) ds,$$

pour presque $x \in (-1, 0)$,

$$u_+^\delta(x) = e^{xB} \zeta_2 + e^{(\delta-x)B} \zeta_3 + \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^x e^{(x-s)B} g_+^\delta(s) ds + \frac{1}{2} B^{-1} \int_x^\delta e^{(s-x)B} g_+^\delta(s) ds$$

pour presque $x \in (0, \delta)$, tels que

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= -2\mu \Pi^{-1} B^{-1} e^{(1+\delta)B} f_+^\delta + (1 + \mu) \Pi^{-1} B^{-1} (I + b e^{2\delta B}) f_- \\ &\quad + \frac{(1 + \mu)}{2} \Pi^{-1} B^{-1} (I + b e^{2\delta B}) \int_{-1}^0 (e^{(s+1)B} + e^{(1-s)B}) g_-(s) ds \\ &\quad + \mu \Pi^{-1} B^{-1} e^B \int_0^\delta (e^{(2\delta-s)B} + e^{sB}) g_+^\delta(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -2\mu \Pi^{-1} B^{-1} e^{\delta B} f_+^\delta + (1 - \mu) (I - e^{2\delta B}) \Pi^{-1} B^{-1} e^B f_- \\ &\quad + \frac{1 - \mu}{2} \Pi^{-1} B^{-1} (I - e^{2\delta B}) \int_{-1}^0 (e^{(2+s)B} + e^{-sB}) g_-(s) ds \\ &\quad + \mu \Pi^{-1} B^{-1} \int_0^\delta (e^{sB} + e^{(2\delta-s)B}) g_+^\delta(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= \Pi^{-1}B^{-1} (I - e^{2B} - \mu (I + e^{2B})) e^{\delta B} f_+^\delta + 2\Pi^{-1}B^{-1} e^B f_- \\
&\quad - \frac{1}{2}\Pi^{-1}B^{-1} (I - e^{2B} - \mu (I + e^{2B})) \int_0^\delta (e^{(2\delta-s)B} + e^{sB}) g_+^\delta(s) ds \\
&\quad + \Pi^{-1}B^{-1} \int_{-1}^0 (e^{(2+s)B} + e^{-sB}) g_-(s) ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\zeta_3 &= -\Pi^{-1}B^{-1} (I - e^{2B} + \mu (I + e^{2B})) f_+^\delta + 2\Pi^{-1}B^{-1} e^{\delta B} e^B f_- \\
&\quad + \frac{1}{2}\Pi^{-1}B^{-1} (I - e^{2B} + \mu (I + e^{2B})) \int_0^\delta e^{(\delta-s)B} g_+^\delta(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{2}\Pi^{-1}B^{-1} (I - e^{2B} - \mu (I + e^{2B})) e^{\delta B} \int_0^\delta e^{sB} g_+^\delta(s) ds \\
&\quad + \Pi^{-1}B^{-1} e^{\delta B} \int_{-1}^0 (e^{(2+s)B} + e^{-sB}) g_-(s) ds,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} \Pi = ((I - e^{2B})(I + e^{2\delta B}) + \mu(I + e^{2B})(I - e^{2\delta B})) \\ D(\Pi) = D(B). \end{cases}$$

Cet opérateur est inversible, il suffit d'adapter la technique utilisée par Lunardi [29] page 59. Le résultat dans ce cas est

Théorème 4.5.1 *Supposons (H.1), (H'.2), (H'.3). Soient*

$$g^\delta \in L^p(-1, \delta; E) \text{ avec } 1 < p < \infty,$$

alors le problème (Pb_0^δ) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si

$$f_+^\delta \text{ et } f_- \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}.$$

4.5.2 Le cas $H = \alpha I$ avec $\alpha > 0$

Dans ce cas, le problème (P_ω^δ) devient le problème opérationnel suivant

$$(Pb_\alpha^\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x), & p. p. \ x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[, \\ (u^\delta)'(-1) = f_-, \quad (u^\delta)'(\delta) + \alpha u^\delta(\delta) = f_+, \\ u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+), \quad \mu_- (u^\delta)'(0_-) = \mu_+ (u^\delta)'(0_+). \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$, les hypothèses $(H.0) \sim (H.6)$ sont réduites aux

$$E \text{ est un espace } UMD, \quad (H.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ est un opérateur linéaire fermé tel que } \rho(A) \supset \mathbb{R}_+ \\ \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0 \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1 + \lambda}, \end{array} \right. \quad (H'.2)$$

$$\exists C > 1, \exists \theta_A \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \|(-A)^{is}\| \leq C e^{\theta_A |s|}. \quad (H'.3)$$

Ici, l'opérateur

$$H - Q_\omega = \alpha I - B = -(B - \alpha I),$$

est inversible car $\alpha \in \rho(B)$. Le résultat est

Théorème 4.5.2 *Supposons $(H.1)$, $(H'.2)$, $(H'.3)$. Soient $g^\delta \in L^p(-1, \delta; E)$ avec $1 < p < \infty$, alors le problème (Pb_α^δ) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si*

$$f_+^\delta, f_- \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}.$$

4.5.3 Le cas $H = \sqrt{-A_\omega}$

On se propose, ici, d'étudier le problème suivant

$$(Pb_\omega^\delta) \left\{ \begin{array}{l} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) - \omega u^\delta(x) = g^\delta(x), \quad \omega > 0 \\ p.p. x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[, \\ (u^\delta)'(-1) = f_-, \quad (u^\delta)'(\delta) + \sqrt{-A_\omega} u^\delta(\delta) = f_+^\delta, \\ u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+), \quad \mu_- (u^\delta)'(0_-) = \mu_+ (u^\delta)'(0_+). \end{array} \right.$$

On remarquera que l'opérateur $H := \sqrt{-A_\omega}$ vérifie bien les hypothèses $(H.3)$, $(H.4)$, $(H.5)$ et $(H.6)$. De plus l'opérateur Δ_ω est égal, ici, à

$$\Pi_\omega = 2\mu Q_\omega (e^{2Q_\omega} + I) e^{2\delta Q_\omega} - 2Q_\omega (I - e^{2Q_\omega}).$$

Lemme 4.5.1 *Sous l'hypothèse $(H.1)$, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ l'opérateur Π_ω est inversible.*

Preuve. La preuve de ce Lemme est similaire à celle du Lemme 4.2.11.

Le résultat essentiel pour ce cas est

Théorème 4.5.3 *Sous les hypothèses $(H.1)$, $(H.2)$, $(H.3)$ et pour $g^\delta \in L^p(-1, \delta; E)$ avec $1 < p < \infty$, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ les assertions suivantes sont équivalentes*

1. f_+^δ et $f_- \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}$.

2. Le problème (Pb_ω^δ) admet une unique solution stricte u^δ .

4.5.4 Le cas $H=(-A_\omega)^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1/2$

On étudie ici le problème suivant

$$(Pb_{\alpha,\omega}^\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) - \omega u^\delta(x) = g^\delta(x), & \omega > 0 \\ p.p. \ x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[, \\ (u^\delta)'(-1) = f_-, \quad (u^\delta)'(\delta) + (-A)^\alpha u^\delta(\delta) = f_+, \\ u^\delta(0_-) = u^\delta(0_+), \quad \mu_- (u^\delta)'(0_-) = \mu_+ (u^\delta)'(0_+), \end{cases}$$

sous les hypothèses (H.0), (H.1) et (H.2). On sait que

1. Le domaine de l'opérateur $(-A_\omega)^\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$, est un espace intermédiaire entre E et $D(A)$, de plus

$$D_{A_\omega}(\alpha, 1) \subset D((-A_\omega)^\alpha) \subset D_{A_\omega}(\alpha, \infty),$$

avec la norme suivante

$$\|x\|_{D((-A_\omega)^\alpha)} = \|A^\alpha x\|_E.$$

2. Pour tout $0 < \alpha < \pi/(\pi - \theta_0)$ (avec $\theta_0 \in [0, \pi/2]$), l'opérateur $(-A)^\alpha$ est sectoriel avec $\theta_{(-A)^\alpha} = \alpha(\pi - \theta_0)$.
3. L'opérateur $(-A)^\alpha$ est de classe Bip $(\alpha\theta_A, E)$, pour tout $0 < \alpha \leq 1/2$, pour plus de détails voir Haase [21].
4. Puisque E est un espace UMD et A est sectoriel alors pour $0 < \alpha \leq 1/2$, l'opérateur $-(-A)^\alpha$ génère un semi groupe $S_\alpha(t)$ fortement continu pour $t \geq 0$ et uniformément continu pour $t > 0$ défini par

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin(t\lambda^\alpha \sin \pi\alpha) e^{-t\lambda^\alpha \cos \pi\alpha} (\lambda I - A_\omega)^{-1} d\lambda,$$

voir Balakrishnan [1] Théorème 5.1 page 11.

5. Il est clair maintenant que, sous les hypothèses (H.0), (H.1) et (H.3) les opérateurs $(-A_\omega)^\alpha$, $\sqrt{-A_\omega}$ vérifient les hypothèses (DV.1), (DV.2) et (DV.3) si $\alpha\theta_A + \theta_A/2 < \pi$ et $0 < \alpha \leq 1/2$. Par conséquent, l'opérateur $(-A_\omega)^\alpha + \sqrt{-A_\omega}$ est fermé et inversible pour tout

$$0 < \alpha \leq 1/2.$$

Le résultat principal pour ce cas est

Théorème 4.5.4 *Supposons les hypothèses (H.0) \sim (H.2). Soient $g^\delta \in L^p(-1, \delta; E)$ avec $1 < p < \infty$. Alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $f_+, f_- \in (D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}$.
2. Le problème (PbT_α^δ) admet une unique solution stricte u^δ .

Exemples

Dans ce chapitre, on donne quelques exemples concrets à laquelle notre théorie abstraite sera appliquée,

5.1 Exemples sur le premier modèle

Exemple 5.1.1

On considère le problème du flux de la chaleur en régime stationnaire dans un secteur hétérogène borné composé par un corps fixe

$$\Omega_\omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r < 1 \text{ et } \theta \in]0, \omega[\},$$

(pour $\omega \in]0, \pi/2[$) de frontières

$$\Gamma_\omega = \{(\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in]0, \omega[\},$$

$$\Gamma_\omega^* = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r < 1 \text{ et } \theta \in \{0, \omega\} \},$$

et une couche mince d'épaisseur $\varepsilon > 0$,

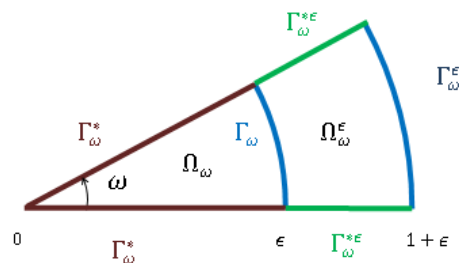
$$\Omega_\omega^\varepsilon = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : 1 < r < 1 + \varepsilon \text{ et } \theta \in]0, \omega[\},$$

de frontières

$$\Gamma_\omega^\varepsilon = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r = 1 + \varepsilon \text{ et } \theta \in]0, \omega[\},$$

et

$$\Gamma_\omega^{*\varepsilon} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : 1 < r < 1 + \varepsilon \text{ et } \theta \in \{0, \omega\} \}.$$



Ce modèle est décrit par le problème de transmission suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w_-^\varepsilon = h_- \quad \text{dans } \Omega_\omega \\ \Delta w_+^\varepsilon = h_+^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_\omega^\varepsilon \\ w_-^\varepsilon = w_+^\varepsilon, \quad \mu_- \frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial \nu} = \mu_+ \frac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Gamma_\omega \\ \frac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial \nu} = l_+^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_\omega^\varepsilon \\ w_-^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\omega^* \\ w_+^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\omega^{*\varepsilon}. \end{array} \right. \quad (5.1.1)$$

où μ_- , μ_+ sont les coefficients de conductivité des deux corps Ω_ω , $\Omega_\omega^\varepsilon$, $\partial/\partial\nu$ désigne la dérivée normale extérieure et l_+^ε est une fonction donnée. Posons $\Sigma_\omega^\varepsilon = \Omega_\omega \cup \Gamma_\omega \cup \Omega_\omega^\varepsilon$. La fonction

$$h^\varepsilon = \begin{cases} h_- & \text{dans } \Omega_\omega \\ h_+^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\omega^\varepsilon, \end{cases}$$

est dans l'espace $L^1(\Sigma_\omega^\varepsilon)$. On utilise les coordonnées polaires et les notations suivantes

$$\begin{aligned} v_-^\varepsilon(r, \theta) &= w_-^\varepsilon(r \cos \theta, r \sin \theta), & v_+^\varepsilon(r, \theta) &= w_+^\varepsilon(r \cos \theta, r \sin \theta), \\ k_-(r, \theta) &= h_-(r \cos \theta, r \sin \theta), & k_+^\varepsilon(r, \theta) &= h_+^\varepsilon(r \cos \theta, r \sin \theta), \end{aligned}$$

et

$$L_+^\varepsilon(\theta) = l_+^\varepsilon(\cos \theta, \sin \theta).$$

Le problème (5.1.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v_-^\varepsilon}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_-^\varepsilon}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_-^\varepsilon}{\partial r}(r, \theta) = k_-(r, \theta) \\ \text{dans }]0, 1[\times]0, \omega[\\ \frac{\partial^2 v_+^\varepsilon}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_+^\varepsilon}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_+^\varepsilon}{\partial r}(r, \theta) = k_+^\varepsilon(r, \theta) \\ \text{dans }]1, 1 + \varepsilon[\times]0, \omega[\\ v_-(1, \theta) = v_+^\varepsilon(1, \theta), \quad \mu_- \frac{\partial v_-^\varepsilon}{\partial r}(1, \theta) = \mu_+ \frac{\partial v_+^\varepsilon}{\partial r}(1, \theta), \quad \theta \in]0, \omega[\\ \frac{\partial v_+^\varepsilon}{\partial r}(1 + \varepsilon, \theta) = L_+^\varepsilon(\theta), \quad \theta \in]0, \omega[\\ v_-^\varepsilon(r, 0) = v_-^\varepsilon(r, \omega) = 0 \quad r \in [0, 1[\\ v_+^\varepsilon(r, 0) = v_+^\varepsilon(r, \omega) = 0 \quad r \in [1, 1 + \varepsilon[. \end{array} \right. \quad (5.1.2)$$

On utilise le changement de variable

$$\begin{aligned} \Phi :]-\infty, \delta[\times]0, \omega[&\rightarrow]0, 1 + \varepsilon[\times]0, \omega[\\ (x, \theta) &\mapsto \Phi(x, \theta) = (e^x, \theta) = (r, \theta), \end{aligned}$$

où $\delta = \ln(1 + \varepsilon)$, le problème (5.1.2) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_-^\delta(x, \theta) = g_-(x, \theta) \quad \text{dans } (-\infty, 0) \times (0, \omega) \\ \Delta u_+^\delta(x, \theta) = g_+^\delta(x, \theta) \quad \text{dans } (0, \delta) \times (0, \omega) \\ u_-^\delta(0, \theta) = u_+^\delta(0, \theta) \quad \theta \in (0, \omega) \\ \mu_- \frac{\partial u_-^\delta}{\partial x}(0, \theta) = \mu_+ \frac{\partial u_+^\delta}{\partial x}(0, \theta) \quad \theta \in (0, \omega) \\ \frac{\partial u_+^\delta}{\partial x}(\delta, \theta) = f_+^\delta(\theta) \quad \theta \in (0, \omega) \\ u_-^\delta(x, 0) = u_-^\delta(x, \omega) = 0 \quad x \in (-\infty, 0) \\ u_+^\delta(x, 0) = u_+^\delta(x, \omega) = 0 \quad x \in (0, \delta). \end{array} \right. \quad (5.1.3)$$

telles que

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x, \theta) &= v_-^\varepsilon(r, \theta), \quad u_+^\delta(x, \theta) = v_+^\varepsilon(r, \theta), \\ g_-(x, \theta) &= r^2 k_-(r, \theta), \quad g_+^\delta(x, \theta) = r^2 k_+^\varepsilon(r, \theta) \end{aligned}$$

et

$$f_+^\delta(\theta) = (1 + \varepsilon) L_+^\varepsilon(\theta).$$

Par un calcul simple, on montre que

$$\int_{\Omega_\omega} |h_-(t, s)| dt ds = \int_0^\omega \int_0^1 |k_-(r, \theta)| r dr d\theta = \int_0^\omega \int_{-\infty}^0 |k_-(e^x, \theta)| e^{2x} dx d\theta = \int_0^\omega \int_{-\infty}^0 |g_-(t, \theta)| dx d\theta;$$

idem pour h_+^ε . Autrement dit

$$(h_-, h_+^\varepsilon) \in L^1(\Omega_\omega) \times L^1(\Omega_\omega^\varepsilon),$$

si et seulement si

$$(g_-, g_+^\varepsilon) \in L^1((-\infty, 0) \times (0, \omega)) \times L^1((0, \delta) \times (0, \omega)).$$

On peut considérer, par exemple, le cas (plus général) suivant

$$E = L^1(0, \omega) \quad \text{et} \quad (g_-, g_+^\varepsilon) \in L^p(-\infty, 0; E) \times L^p(0, \delta; E).$$

On utilise les notations vectorielles usuelles, le problème (5.1.3) s'écrit de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-(x) \quad \text{p. p. } x \in (-\infty, 0) \\ (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \quad \text{p. p. } x \in (0, \delta) \\ u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0), \quad \mu_- (u_-^\delta)'(0) = \mu_+ (u_+^\delta)'(0), \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{array} \right. \quad (5.1.4)$$

avec

$$\begin{cases} D(A) = \{\psi \in W^{2,1}(0, \omega) : \psi(0) = \psi(\omega) = 0\} \\ A\psi = \psi'' \end{cases}$$

La résolvante de cet opérateur est

$$(A - \lambda)^{-1} g = \int_0^\omega K_{\sqrt{\lambda}}(x, s) g(s) ds,$$

où

$$K_\lambda(x, s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{\lambda}(\omega - x) \sinh s\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} \sinh \omega\sqrt{\lambda}} & \text{si } 0 \leq s \leq x \\ \frac{\sinh \sqrt{\lambda}(\omega - s) \sinh x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} \sinh \omega\sqrt{\lambda}} & \text{si } x \leq s \leq \omega, \end{cases}$$

avec $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} > 0$, et

$$\|(A - \lambda I)^{-1} g\| \leq \left(\sup_{x \in [0, \omega]} \int_0^\omega |K_{\sqrt{\lambda}}(x, s)| ds \right) \|g\|.$$

De plus, l'opérateur A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} g = \int_0^x (x - s) g(s) ds - \frac{x}{\omega} \int_0^\omega (\omega - s) g(s) ds.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega |K_{\sqrt{\lambda}}(x, s)| ds \\ & \leq \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{\lambda}(\omega - x)}{|\lambda|^{1/2} |\sinh \omega\sqrt{\lambda}|} \int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} s ds \\ & + \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} x}{|\lambda|^{1/2} |\sinh \omega\sqrt{\lambda}|} \int_x^\omega \cosh \operatorname{Re} \sqrt{\lambda}(\omega - s) ds \\ & \leq \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{\lambda}(\omega - x) \sinh \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} x + \cosh \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} x \sinh \operatorname{Re} \sqrt{\lambda}(\omega - x)}{|\lambda|^{1/2} \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} |\sinh \sqrt{\lambda} \omega|} \\ & \leq \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} \omega}{|\lambda|^{1/2} \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} |\sinh \sqrt{\lambda} \omega|} \leq \frac{1}{|\lambda| |1 - e^{-2\sqrt{\lambda} \omega}|} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Grâce au lemme de Schur et la symétrie du noyau on trouve que $\rho(A) \supset [0, +\infty[$ et $\exists C > 0$

$$\forall \lambda \in [0, +\infty[: \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + \lambda}.$$

En revanche, d'après Grisvard [20] Proposition 3 page 683 et lemme 2 page 710, on a pour $1 \leq p \leq \infty$

$$(W^{2,1}(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))_{1-\theta, p} = B_{1, p}^{2\theta}(\mathbb{R}),$$

et pour $1 < p < \infty$

$$D_A(\theta, p) = (W_0^{2,1}(0, \omega), L^1(0, \omega))_{1-\theta, p} = \begin{cases} B_{1,p}^{2\theta}(0, \omega) & \text{si } 2\theta < 1/p \\ B_{1,p,0}^{2\theta}(0, \omega) & \text{si } 2\theta > 1/p, \end{cases}$$

avec

$$B_{1,p,0}^{2\theta}(0, \omega) = \{\psi \in B_{1,p}^{2\theta}(0, \omega) : \psi(0) = \psi(\omega) = 0\}.$$

Alors

$$D_A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p\right) = \begin{cases} B_{1,p}^{1-1/p}(0, \omega) & \text{si } p < 2 \\ B_{1,p,0}^{1-1/p}(0, \omega) & \text{si } p > 2, \end{cases}$$

et

$$D_A\left(\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p\right) = \begin{cases} B_{1,p}^{\theta+1-1/p}(0, \omega) & \text{si } \theta < 1/p - 1/2 \\ B_{1,p,0}^{\theta+1-1/p}(0, \omega) & \text{si } \theta > 1/p - 1/2. \end{cases}$$

En appliquant les Théorèmes 0.4.1 et 0.4.2, il vient

Proposition 5.1.1 *Soit $g^\delta \in L^p(-\infty, \delta; B_{1,p,0}^{2\theta}(0, \omega))$ où $1/2p < \theta < 1/2$ et $1 < p < 2$, alors i) le problème (5.1.4) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si*

$$f_+^\delta \in B_{1,p}^{1-1/p}(0, \omega).$$

ii) la solution stricte du problème (5.1.4) vérifie la propriété de la régularité maximale

$$(u^\delta)'' , Au^\delta \in L^p(-\infty, \delta; B_{1,p,0}^{2\theta}(0, \omega)),$$

si et seulement si $f_+^\delta \in B_{1,p,0}^{1+2\theta-1/p}(0, \omega)$.

Proposition 5.1.2 *Soit $g^\delta \in L^p(-\infty, \delta; B_{1,p,0}^{2\theta}(0, \omega))$ où $1/2p < \theta < 1/2$ et $2 < p$, alors i) le problème (5.1.4) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si*

$$f_+^\delta \in B_{1,p,0}^{1-1/p}(0, \omega).$$

ii) la solution stricte du problème (5.1.4) vérifie la propriété de la régularité maximale

$$(u^\delta)'' , Au^\delta \in L^p(-\infty, \delta; B_{1,p,0}^{2\theta}(0, \omega)),$$

si et seulement si $f_+^\delta \in B_{1,p,0}^{1+2\theta-1/p}(0, \omega)$.

Remarque 5.1.1 *Ici, l'espace $E = L^1(0, \omega)$ n'est pas UMD (car E n'est pas réflexif), donc on ne peut pas appliquer le Théorème 0.4.3.*

Le résultat dans le cas $p = 1$ et $f_+^\delta = 0$ est

Corollaire 5.1.1 *Soit $g^\delta \in L^1(-\infty, \delta; W_{cl}^{2\theta,1}(0, \omega))$ avec $0 < 2\theta < 1$, alors*

i) le problème (5.1.4) admet une unique solution stricte u^δ

ii) la solution stricte du problème (5.1.4) vérifie

$$(u^\delta)'' , Au^\delta \in L^1(-\infty, \delta; W_{cl}^{2\theta,1}(0, \omega)).$$

Exemple 5.1.2

Prenons maintenant $E := L^p(0, \omega)$ avec $1 < p < \infty$, alors A est défini par

$$\begin{cases} D(A) = \{\psi \in W^{2,p}(0, \omega) : \psi(0) = \psi(\omega) = 0\} \\ A\psi = \psi'' \end{cases}$$

Dans ce cas E est un espace UMD et $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est un opérateur linéaire fermé vérifiant les propriétés suivantes

i) $\overline{D(A)} = E$,

ii) $\rho(A) \supset [0, +\infty[$ et $\exists C > 0$

$$\forall \lambda \in [0, +\infty[: \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |\lambda|},$$

iii) $\exists K > 0, \epsilon_1 \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \ \|(-A)^{is}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K e^{\epsilon_1 |s|}$.

On adapte la preuve faite par Labbas et Moussaoui [24], Proposition 3.1 p. 191. On écrit

$$\frac{\sinh \sqrt{\lambda}(\omega - x) \sinh s\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} \sinh \omega \sqrt{\lambda}} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(x-s)}}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{e^{-2\omega\sqrt{\lambda}} - e^{-2\sqrt{\lambda}(\omega-x)} - e^{-2\sqrt{\lambda}s} + e^{-2\sqrt{\lambda}(\omega-x+s)}}{1 - e^{-2\omega\sqrt{\lambda}}} \right)$$

et on utilise la représentation intégrale des puissances complexes d'un opérateur linéaire fermé pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$, il vient que

$$[(-A)^{-z} g](x) = \frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^\infty \lambda^{-z} [(\lambda I - A)^{-1} g](x) d\lambda = \sum_{j=1}^4 I_j(x).$$

Pour I_1 on a

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^\infty \lambda^{-z} \int_0^x \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(x-s)}}{2\sqrt{\lambda}} g(s) ds d\lambda \\ &= \frac{-1}{2\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^x \int_0^\infty \lambda^{-z} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(x-s)}}{\sqrt{\lambda}} g(s) d\lambda ds. \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^x \left(\int_0^\infty \sigma^{-2z} e^{-\sigma} d\sigma \right) (x-s)^{2z-1} g(s) ds. \\ &= \frac{-\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^x (x-s)^{2z-1} g(s) ds. \\ &= \frac{-\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} (\phi_z * G)(x), \end{aligned}$$

où

$$\phi_z(y) = \chi_{[0,+\infty[} y^{2z-1} \quad \text{et} \quad G(s) = \begin{cases} g(s) & \text{si } s \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On sait que

$$\mathcal{F}(\phi_z)(\xi) = \Gamma(2z) (2i\pi\xi)^{-2z} = \Gamma(2z) |2\pi\xi|^{-2z} (h(\xi) e^{i\pi z} + h(-\xi) e^{-i\pi z}),$$

où \mathcal{F} est la transformée de Fourier définie par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi t} f(t) dt,$$

et

$$h(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$I_1 = \mathcal{F}^{-1}(m_z \cdot \mathcal{F}(G))(x),$$

où

$$\begin{aligned} m_z(\xi) &= \frac{-\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \mathcal{F}(\phi_z)(\xi) \\ &= \frac{-\Gamma(1-2z)\Gamma(2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} |2\pi\xi|^{-2z} (h(\xi) e^{i\pi z} + h(-\xi) e^{-i\pi z}), \end{aligned}$$

et comme

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

il vient

$$\begin{cases} \sup |m_z(\xi)| \leq \left| \frac{1}{2 \cos(\pi z)} \frac{1}{(2\pi\xi)^{2z}} \right| e^{\pi|\operatorname{Im} z|} \\ \sup |\xi m'_z(\xi)| \leq |2z| \left| \frac{1}{2 \cos(\pi z)} \frac{1}{(2\pi\xi)^{2z}} \right| e^{\pi|\operatorname{Im} z|}. \end{cases}$$

Idem pour les autres termes $I_j(x)$.

D'après le Théorème de Mikhlin, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|(-A)^{-z}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq K(1+|z|) \frac{1}{|\cos(\pi z)|} e^{\pi|\operatorname{Im} z|}.$$

Posons $z = \eta - is$ et en passant à la limite quand $\eta \rightarrow 0$ on obtient

$$\|(-A)^{is}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq K(1+|s|) \frac{1}{\cosh \pi |s|} e^{\pi|s|} \leq K e^{\epsilon_1 |s|}.$$

D'autre part, l'espace d'interpolation $(W^{2,p}(0, \omega), L^p(0, \omega))_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$ est l'espace

$$B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(0, \omega) = W^{1-\frac{1}{p}, p}(0, \omega).$$

Ensuite, notre résultat abstrait (Théorème 0.4.3) s'applique pour le problème (5.1.4) et le résultat est donné par

Proposition 5.1.3 Soient $g_+^\delta \in L^p(0, \delta; E)$, $g_- \in L^p(-\infty, 0; E)$ avec $1 < p < \infty$. Alors

i) pour $p > 2$, le problème (5.1.4) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si

$$f_+^\delta \in W_0^{1-\frac{1}{p}, p}(0, \omega) := \left\{ \psi \in W^{1-\frac{1}{p}, p}(0, \omega) : \psi(0) = \psi(\omega) = 0 \right\}.$$

ii) pour $1 < p < 2$, le problème (5.1.4) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si

$$f_+^\delta \in W^{1-\frac{1}{p}, p}(0, \omega).$$

Exemple 5.1.3

Prenons $E = C([0, \omega])$. On considère, le problème (5.1.4) avec $f_+^\delta = 0$ et

$$\begin{cases} D(A) = \{\psi \in C^2([0, \omega]) : \psi(0) = \psi(\omega) = 0\} \\ A\psi = \psi'', \end{cases}$$

lorsque

$$g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}(0, \delta; E), \quad g_- \in BUC^{2\alpha_0}(-\infty, 0; E),$$

avec $0 < 2\alpha_0 < 1$. C'est à dire, on étudie le problème suivant

$$\begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-(x) & \text{pour } x \in (-\infty, 0) \\ (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{pour } x \in (0, \delta) \\ u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0), \quad \mu_- (u_-^\delta)'(0) = \mu_+ (u_+^\delta)'(0), \\ (u_+^\delta)'(\delta) = 0. \end{cases} \quad (5.1.5)$$

Ici, le domaine $D(A)$ n'est pas dense dans E , car

$$\overline{D(A)} = \{\psi \in C([0, \omega]) : \psi(0) = \psi(\omega) = 0\} := C_0([0, \omega]).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} D_A(\alpha_0, +\infty) &= \{\psi \in C^{2\alpha_0}([0, \omega]) : \psi(0) = \psi(\omega) = 0\} \\ &: = C_0^{2\alpha_0}([0, \omega]). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que A satisfait l'hypothèse (H.1). On peut donc appliquer les résultats de chapitre 3.

Proposition 5.1.4 Soient $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$, $g_- \in BUC^{\alpha_0}(-\infty, 0; E)$, avec $0 < 2\alpha_0 < 1$. Alors

1. Le problème (5.1.5) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in C_0([0, \omega]).$$

2. La solution stricte à la propriété suivante

$$(u_+^\delta)'' \in C^{2\alpha_0}(0, \delta; E), \quad Au_+^\delta \in C^{2\alpha_0}(0, \delta; E), \quad (u_-^\delta)'' \in BUC^{2\alpha_0}(-\infty, 0; E),$$

si et seulement si

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in C_0^{2\alpha_0}([0, \omega]).$$

5.2 Exemples sur le second modèle

Les exemples de cette partie sont inspirés du travail de Cheggag et al [11].

Exemple 5.2.1

Soit $E = L^p(0, 1)$. On définit, pour $a, b, c > 0$ les opérateurs A et H comme suit

$$\begin{cases} D(A) = \{\psi \in W^{2,p}(0, 1) : \psi(0) = \psi(1) = 0\} \\ A\psi = a\psi'', \quad \psi \in D(A), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(H) = \{\psi \in W^{1,p}(0, 1) : \psi(0) = \psi(1)\} \\ H\psi = b\psi' + c\psi, \quad \psi \in D(H) \end{cases}$$

alors le problème (P_ω^δ) est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^\delta(x, y) + \frac{a\partial^2}{\partial y^2} u^\delta(x, y) - \omega u^\delta(x, y) = g^\delta(x, y), \\ p.p (x, y) \in (]-1, 0[\cup]0, \delta[) \times \mathbb{R} \text{ et } \omega > 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} u^\delta(-1, y) = f_-(y), \quad y \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial x} u^\delta(\delta, y) + b \frac{\partial}{\partial y} u^\delta(\delta, y) + c u^\delta(\delta, y) = f_+(y), \quad y \in \mathbb{R} \\ u^\delta(0_-, y) = u^\delta(0_+, y), \quad y \in \mathbb{R} \\ \mu_- \frac{\partial}{\partial x} u^\delta(0_-, y) = \mu_+ \frac{\partial}{\partial x} u^\delta(0_+, y), \quad y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Lemme 5.2.1 *L'opérateur A est linéaire fermé vérifiant*

i) $\rho(A) \supset]0, \infty[$ et $\exists K > 0$:

$$\forall \lambda \geq 0 : \|(A - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq \frac{K}{1 + \lambda},$$

ii) $\exists K > 0, \forall \epsilon_1 > 0, \forall s \in \mathbb{R} : \|(-A)^{is}\| \leq K e^{\epsilon_1 |s|}$.

Preuve : En effet comme l'exemple 1. Ici, la résolvante de l'opérateur A est donnée par

$$((A - \lambda)^{-1} g)(x) = \int_0^1 K_{\sqrt{\lambda}}(x, s) g(s) ds,$$

avec

$$K_{\sqrt{\lambda}}(x, s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{\lambda/a}(1-x) \sinh \sqrt{\lambda/a}s}{\sqrt{\lambda a} \sinh \sqrt{\lambda/a}} & 0 \leq s \leq x \\ \frac{\sinh \sqrt{\lambda/a}x \sinh \sqrt{\lambda/a}(1-s)}{\sqrt{\lambda a} \sinh \sqrt{\lambda/a}} & x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

De plus, on a

$$(A^{-1}g)(x) = \frac{1}{a} \int_0^x (x-s)g(s)ds - \frac{x}{a} \int_0^1 (1-s)g(s)ds.$$

Grâce au lemme de Schur et la symétrie du noyau on déduit le premier point. On adapte, ici, la deuxième méthode utilisée par Labbas et Moussaoui [24]. En effet, pour $0 < \epsilon < 1$

$$\begin{aligned} & \left[(-A + I)^{-\epsilon+ir} g \right] (x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon+ir)\Gamma(\epsilon-ir)} \int_0^\infty \lambda^{-\epsilon+ir} [(-A+1+\lambda)^{-1}g](x) d\lambda = \sum_{j=1}^4 I_j(x). \end{aligned}$$

Pour I_1 on a

$$I_1(x) = \frac{-1}{2a\Gamma(1-\epsilon+ir)\Gamma(\epsilon-ir)} \int_0^\infty \lambda^{-\epsilon+ir} \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda/a}|\cdot|}}{\sqrt{\lambda/a}} \right) (\xi) \mathcal{F}(G)(\xi) \right) d\lambda,$$

où

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} \left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda/a}|\cdot|}}{\sqrt{\lambda/a}} \right) (\xi) = \frac{2a}{\lambda+1+4a\pi^2\xi^2}.$$

Alors

$$I_1(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\epsilon+ir)\Gamma(\epsilon-ir)} \mathcal{F}^{-1} \left(\int_0^\infty \frac{\lambda^{-\epsilon+ir}}{\lambda+1+4a\pi^2\xi^2} \mathcal{F}(G) d\lambda \right) (x).$$

En faisant le changement de variable $\lambda = \sigma(1+4a\pi^2\xi^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\epsilon+ir)\Gamma(\epsilon-ir)} \mathcal{F}^{-1} \left(\int_0^\infty (1+4a\pi^2\xi^2)^{-\epsilon+ir} \frac{\sigma^{-\epsilon+ir}}{1+\sigma} \mathcal{F}(G) d\sigma \right) (x) \\ &= -\mathcal{F}^{-1} \left((1+4a\pi^2\xi^2)^{-\epsilon+ir} \mathcal{F}(G) \right) (x), \end{aligned}$$

car

$$\int_0^\infty \frac{\sigma^{-\epsilon+ir}}{1+\sigma} d\sigma = \Gamma(1-\epsilon+ir)\Gamma(\epsilon-ir),$$

donc

$$I_1(x) = \mathcal{F}^{-1} (m_\epsilon(\xi) \mathcal{F}(G)) (x),$$

telle que

$$m_\epsilon(\xi) = -(1+4a\pi^2\xi^2)^{-\epsilon+ir}.$$

On obtient ainsi

$$\sup |m_\epsilon(\xi)| + \sup \left| \xi \frac{dm_\epsilon}{d\xi}(\xi) \right| \leq K(1+|r|).$$

Idem pour les autres termes $I_i(x)$. Par conséquent, pour tout $\epsilon_1 > 0$, il existe une constante positive $K(\epsilon_1, p, a)$ telle que

$$\left\| (-A + I)^{ir} \right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq K(\epsilon_1, p, a) e^{\epsilon_1|r|}.$$

On peut, ainsi prouver que pour tout réel $\delta \neq 0$

$$\left\| (-A + \delta^{-2}I)^{ir} \right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq K e^{\epsilon_1|r|}.$$

Finalement, grâce au Théorème de la convergence de Lebesgue quand $\delta \rightarrow +\infty$, on déduit que

$$\left\| (-A)^{ir} \right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq K e^{\epsilon_1|r|}.$$

Lemme 5.2.2 *L'opérateur H est linéaire fermé vérifiant*

i) $\rho(-H) \supset [0, \infty[$ et $\exists C_H > 0$

$$\forall \lambda \geq 0 : \left\| (H + \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq \frac{C_H}{1 + \lambda},$$

ii) $\exists K_H > 0, \forall \epsilon_2 > 0, \forall s \in \mathbb{R} : \|A^{is}\| \leq K_H e^{\epsilon_2|s|}$.

Preuve. La preuve est similaire à celle de la proposition 5.2.1. Ici la résolvante est

$$\left((H + \lambda I)^{-1} g \right) (x) = \frac{1}{b} \int_0^x e^{\frac{c+\lambda}{b}(s-x)} g(s) ds + \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{e^{\frac{c+\lambda}{b}(s-x-1)}}{1 - e^{-\frac{c+\lambda}{b}}} g(s) ds.$$

Les opérateurs H et A commutent aussi au sens de résolvantes, donc toutes les hypothèses sont vérifiées, on peut alors établir la

Proposition 5.2.1 *Soit $g^\delta \in L^p(-1, \delta; L^p(0, 1))$ avec $2 < p < \infty$. Alors pour tout $\omega \geq \omega^*$ le problème (5.2.1) admet une unique solution stricte si et seulement si*

$$f_+^\delta, f_- \in W_0^{1-\frac{1}{p}, 1}(0, 1).$$

Exemple 5.2.2

Prenons $E := L^2(\mathbb{R})$. On définit les opérateurs A et H comme suit,

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\mathbb{R}) \\ A\psi = \psi'' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D(H) = H^1(\mathbb{R}) \\ H\psi = -\psi' + a\psi \end{cases}.$$

Alors le problème (P_ω^δ) est équivalent à

$$\begin{cases} \Delta u^\delta(x, y) - \omega u^\delta(x, y) = g^\delta(x, y), & (x, y) \in (]-1, 0[\cup]0, \delta]) \times \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial x} u^\delta(-1, y) = f_-(y), & y \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial x} u^\delta(\delta, y) - \frac{\partial}{\partial y} u^\delta(\delta, y) + a u^\delta(\delta, y) = f_+^\delta(y), & y \in \mathbb{R} \\ u^\delta(0_-, y) = u^\delta(0_+, y), & y \in \mathbb{R} \\ \mu_- \frac{\partial}{\partial x} u^\delta(0_-, y) = \mu_+ \frac{\partial}{\partial x} u^\delta(0_+, y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Proposition 5.2.2 *Les opérateurs A et H sont linéaires fermés des domaines denses dans E . De plus*

i) $\rho(A) \supset [0, \infty[$ et $\exists C_A > 0$:

$$\forall \lambda \geq 0 : \|(A_{\omega_0} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq \frac{C_A}{1 + \omega_0 + \lambda},$$

ii) $\rho(-H) \supset [0, \infty[$ et $\exists C_H > 0$:

$$\forall \lambda \geq 0 : \|(H + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \leq \frac{C_H}{1 + \lambda},$$

iii) *les opérateurs A et H commuent au sens des résolvantes.*

Preuve. En effet comme [10] page 118.

i) On cherche la solution de l'équation spectrale suivante

$$(A_{\omega_0} - \lambda)u(t) = u''(t) - (\omega_0 + \lambda)u(t) = g(t),$$

en appliquant la transformé de Fourier. Il vient que

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\mathcal{F}(g)(\xi)}{\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2}.$$

Puisque \mathcal{F} est un isomorphisme et $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(E)$, alors on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq K \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \leq K \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}(g)(\xi)|^2}{|\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2|^2} d\xi \\ &\leq \frac{K}{(\omega_0 + \lambda)^2} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{K}{(\omega_0 + \lambda)^2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

En revanche, on a

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u')(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{2i\pi\xi\mathcal{F}(g)(\xi)}{\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2} \\ \mathcal{F}(u'')(\xi) = (2i\pi\xi)^2\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{-4\pi^2\xi^2\mathcal{F}(g)(\xi)}{\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq K \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{2\pi\xi}{\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2} \right|^2 |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{K}{4(\omega_0 + \lambda)} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{K}{\omega_0 + \lambda} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|u''\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq K \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{4\pi^2\xi^2}{\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2} \right|^2 |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi \leq K \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.\end{aligned}$$

Par conséquent u, u', u'' sont $L^2(\mathbb{R})$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}u(t) &= ((A_{\omega_0} - \lambda)^{-1} g)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi t} \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi\xi t}}{\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2} \mathcal{F}(g)(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi\xi(t-s)}}{\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2} g(s) ds d\xi.\end{aligned}$$

De (5.2.3) et pour tout $\lambda \geq 0$, on trouve

$$\|(A_{\omega_0} - \lambda)^{-1} g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{K}{\omega_0 + \lambda} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

ii) Cherchons maintenant la résolvante de $(-H)$ c'est à dire la solution de l'équation suivante

$$(H + \lambda)u(t) = (\lambda + a)u(t) - u'(t) = g(t).$$

On applique la transformée de Fourier, on obtient

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\mathcal{F}(g)(\xi)}{\lambda + a - 2i\pi\xi} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(u')(\xi) = \frac{2i\pi\xi \mathcal{F}(g)(\xi)}{\lambda + a - 2i\pi\xi}.$$

Par conséquent

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq K \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \leq K \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}(g)(\xi)|^2}{|\lambda + a - 2i\pi\xi|^2} d\xi \leq \frac{K}{|\lambda + a|^2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad (5.2.4)$$

et

$$\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq K \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u')(\xi)|^2 d\xi \leq K \int_{\mathbb{R}} \frac{|2i\pi\xi \mathcal{F}(g)(\xi)|^2}{|\lambda + a - 2i\pi\xi|^2} d\xi \leq K \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

il vient alors u, u' sont $L^2(\mathbb{R})$. De plus, on a pour $\lambda \geq 0$

$$((H + \lambda I)^{-1} g)(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi\xi(t-s)}}{\lambda + a - 2i\pi\xi} g(s) ds d\xi.$$

Grâce au (5.2.4), il vient que

$$\|(H + \lambda I)^{-1} g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{K}{\lambda + a} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

iii) Pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et $z \in \rho(-H)$, on a

$$\begin{aligned} & ((H + zI)^{-1} (A - \lambda I)^{-1} g)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi\xi(t-s)}}{z - 2i\pi\xi} ((A - \lambda I)^{-1} g)(s) ds d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi\xi(t-s)}}{z - 2i\pi\xi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi\eta(s-\tau)}}{\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2} g(\tau) d\tau d\xi d\eta ds, \end{aligned}$$

car

$$((A - \lambda I)^{-1} g)(s) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi\eta(s-\tau)}}{\omega_0 + \lambda + 4\pi^2\xi^2} g(\tau) d\tau d\eta.$$

Par Fubini, il vient que

$$(H + zI)^{-1} (A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1} (H + zI)^{-1}.$$

Proposition 5.2.3 *Les opérateurs A et H vérifient*

$$i) \exists K_A > 1, \epsilon_A \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \|(-A)^{is}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K_A e^{\epsilon_A |s|},$$

$$ii) \exists K_H > 1, \epsilon_H \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \|(H)^{is}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K_H e^{\epsilon_H |s|}.$$

Preuve. Ce résultat découle du Fuhrman [19], lemme 3 page 218.

En revanche

$$(D(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} = (H^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} = H^{2(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2p})}(\mathbb{R}) = H^{1 - \frac{1}{p}}(\mathbb{R}).$$

En appliquant alors le Théorème 0.4.7 il vient

Proposition 5.2.4 *Soit $g^\delta \in L^p(-1, \delta; L^2(\mathbb{R}))$ avec $1 < p < \infty$. Alors pour tout $\omega \geq \omega^*$ Le problème (5.2.2) admet une unique solution stricte u^δ si et seulement si*

$$f_+^\delta, f_- \in H^{1 - \frac{1}{p}}(\mathbb{R}).$$

Bibliographie

- [1] Balakrishnan A.V. : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them.* Pacific. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.
- [2] Belhamiti O. : *Etude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince.* Thèse de Doctorat, Université de Mostaganem, (2008).
- [3] Belhamiti O., Labbas R., Lemrabet K. and Medeghri A. : *Study of boundary value and transmission problems in the Hölder spaces.* Appl. Math. Comput 202 (2008), pp. 608-617.
- [4] Berroug T. : *Sur des problèmes elliptiques et paraboliques dans les espaces de Hölder et les petits Hölder.* Thèse de Doctorat, Université du Havre, (2003).
- [5] Bourgain J. : *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ark. Mat. 21 (1983), pp.163-168.
- [6] Bouziani F., Favini A., Labbas R. and Medeghri A. : *Study of boundary value and transmission problems governed by a class of variable operators verifying the Labbas-Terreni non commutativity assumption.* Rev. Mat. Complut. 24(2011), pp. 131-168.
- [7] Burkholder D.L. : *A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ann. Probab. 9 (1981), pp. 997-1011.
- [8] Brezis H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo (1983).
- [9] Caloz G., Costabel M., Dauge M. and Vial G. : *Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer.* Asymptot. Anal. 50 (2006), pp. 121-173.
- [10] Cheggag M. : *Problème de Sturm-Liouville abstrait pour une équation différentielle abstraite complète elliptique du second ordre dans divers espaces.* Thèse d'état, Université d'Oran, Es-Sénia, (2008).
- [11] Cheggag M., Favini A., Labbas R. and Medeghri A. : *Sturm-Liouville problem for an abstract differential equation of elliptic type in UMD spaces.* Differential and Integral Equations, 21 (2008), pp. 981-1000.

- [12] Da Prato G. and Grisvard P. : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*. J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54 (1975), pp. 305-387.
- [13] Dore G. and Venni. A. : *On the closedness of the sum of two closed operators*. Math. Z. 196 (1987), pp. 189–201.
- [14] Dore G. : *Lp regularity for abstract differential equations*. Functional analysis and related topics, 1991 (Kyoto), Lecture Notes in Math. 1540 (1993), Springer, Berlin, pp. 25-38.
- [15] Dore G., Favini A., Labbas R. and Lemrabet K. : *An abstract transmission problem in a thin layer, I : Sharp estimates*, Journal of Functional Analysis 261 (2011), pp. 1865-1922.
- [16] Dore G. and Yakubov. S. : *Semigroup estimates and non coercive boundary value problems*. Semigroup Forum, 60 (2000), pp. 93-121.
- [17] Favini A., Labbas R., Lemrabet K. and Maingot S. : *Study of the limit of transmission problems in a thin layer by the sum theory of linear operators*. Rev. Mater. Comput. 18 (1) (2005), pp. 143-176.
- [18] Favini A., Labbas R., Maingot S., Tanabe H. and Yagi A. : *Complete abstract differential equations of elliptic type in UMD spaces*. Funkcialaj Ekvacioj, 49 (2006), pp. 193-214.
- [19] Fuhrman M. : *Bounded imaginary powers of abstract differential operators, evolution equations, Control theory and Biomathematics, Proceedings on the Hman-Sur-Lesse conference, edited by Ph. Clément and G. Lumer, M. Dekker, New York-Basel- Hong Kong, (1994), pp. 215-223.*
- [20] Grisvard P. : *Spazi di tracce e applicazioni*. Rendiconti di Matematica (4). 5 (1972), série VI, pp. 657-729.
- [21] Haase M. : *The functional calculus for sectorial operators and similarity methods*. Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).
- [22] Krein S. G. : *Linear differential equations in Banach spaces*. Moscou, (1967).
- [23] Labbas R. : *Problèmes aux limites pour une équation différentielle opérationnelle du second ordre*, Thèse d'état, Université de Nice, (1987).
- [24] Labbas R. and Moussaoui M. : *On the resolution of the heat equation with discontinuous coefficients*. Semigroup Forum, 60 (2000), pp. 187-201.
- [25] Labbas R. and Terreni B. : *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, 1^{ere} Partie*. Boll. Un. Math. Ital. 1-B (7) (1987), pp. 545-569.
- [26] Labbas R. and Terreni B. : *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, 2^{eme} Partie*. Boll. Un. Math. Ital. 2-B (7) (1988), pp. 141-162.
- [27] Limam K. : *Resolution, in Lp-spaces, of transmission problems set in an unbounded domains*. Appl. Math. Comput. 218 (9) (2012), pp. 5605-5619.
- [28] Lions J. L. and Peetre J. : *Sur une classe d'espace d'interpolation*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), pp. 5-86.

- [29] Lunardi A. : *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Birkhäuser, (1995).
- [30] Monniaux S. : *A perturbation result for bounded imaginary powers*. Arch. Math. 68 (1997), pp. 407-417.
- [31] Nicaise S. : *Polygonal interface problems, Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik*. Verlag Peter D. Lang, Frankfurt am Main, 39 (1993).
- [32] Pazy A. : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119 (1983).
- [33] Prüss J. and Sohr H. : *Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p -spaces*. Hiroshima Math. J., 23 (1993), pp. 161-192.
- [34] Sinestrari E. : *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions*. J. Math. Anal. App., 66 (1985), pp. 16-66.
- [35] Tanabe H. : *Equations of evolution*, Monographs and Studies in Mathematics 6. London-San Francisco-Melbourne, Pitman, (1979).
- [36] Triebel H. : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. North Holland, Amsterdam, (1978).

Résumé

Cette thèse est consacrée pour l'essentiel à l'étude, dans deux cadres fonctionnels, de l'existence, l'unicité et la régularité maximale des solutions d'une famille de problèmes de transmission régis par des équations différentielles abstraites du second ordre avec des conditions aux limites à coefficients opérateurs de type Robin.

Dans le premier cadre fonctionnel L_p , on a traité deux problèmes de transmission, sous certaines hypothèses sur les opérateurs (ellipticité, Bip, commutativité) et sur l'espace (UMD ou non).

Dans le deuxième cadre fonctionnel BUC, on a étudié un problème de transmission, posé dans un domaine non borné composé par le demi-axe réel négatif et une couche mince, sous l'unique hypothèse d'ellipticité et pour un second membre assez régulier.

Mots clés : Equations différentielles abstraites, Problèmes de transmissions, Calcul fonctionnel de Dunford, Semi-groupes, Les espace UMD, Les espaces de Hölder, Les espaces d'interpolation, Puissances imaginaires bornées (classe Bip), La théorie des sommes d'opérateurs, Couche mince, Solution stricte, Régularité maximale.

Abstract

This thesis is devoted essentially to study, in two frameworks, the existence, uniqueness and maximal regularity of the solutions of a family of transmission problems governed by an abstract second order differential equations with Robin boundary conditions.

In the first framework (L_p spaces), we treated two transmission problems, under certain assumptions on the operators (ellipticity, Bip, commutativity) and on the space (UMD or not).

In the second framework, we studied a transmission problem, set in unbounded domain composed of a half line and a thin layer, under the ellipticity assumption. The right-hand term of the equation is a Hölder continuous function.

keywords : Abstract differential equations, Transmission problems, Dunford functional calculus, Semigroups, UMD spaces, Hölder spaces, Interpolation spaces, Bounded imaginary powers (Bip), Theory of the sum of operators, Thin layer, Strict solution, Maximal regularity.